Prof. Dr. Gerhard Zumbusch

Implizite Einschrittverfahren

Aufgabe 1

Ziel dieser Aufgabe ist es, das implizite Euler-Verfahren zu programmieren.

a) Schreiben Sie zunächst ein Programm zur Berechnung der Lösung des AWPs für $t = 2$

$$y' = -50\,y + \cos t\,, \quad y(0) = 0\,.$$

mit dem expliziten Euler-Verfahren und Schrittweite $h = 1/10$. Diskutieren Sie die berechnete Lösung.

b) Das implizite Euler-Verfahren (Euler rückwärts) für das AWP lautet

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}) \\ t_{n+1} &= t_n + h \end{aligned}$$

mit $u_0 = y(t_0)$ und der Schrittweite $h > 0$. Dazu soll in jedem Zeitschritt n ein nichtlineares Gleichungssystem für u_{n+1} gelöst werden. Wir berechnen nun u_{n+1} mit Picard-Iteration über k:

$$u_{n+1}^{k+1} = u_n + hf(t_{n+1},\, u_{n+1}^k)$$

Als Startwert u_{n+1}^0 der Picard-Iteration dient das Ergebnis eines Schrittes des expliziten Euler-Verfahrens von t_n nach t_{n+1}. Vergleichen Sie die Lösung mit a).

c) Stellen sie nun das nichtlineare Gleichungssystem für u_{n+1} auf, das in jedem Zeitschritt gelöst werden muss. Wie lautet die Newton-Iteration auf dieses Gleichungssystem angewandt? Hinweis: Für die Gleichung $F(x) = 0$ lautet die Newton-Iteration $x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$. Programmieren Sie nun das implizite Euler-Verfahren mit der Newton-Iteration. Vergleichen Sie die Lösung mit a).

Aufgabe 2

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 + y_1^2 y_2 - 4y_1 \\ 3y_1 - y_1^2 y_2 \end{pmatrix}, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Lösen Sie das Problem im Intervall $t \in [0, 20]$ mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

und der Schrittweite $h = 5 \cdot 10^{-5}$. Verwenden Sie dafür eine Formulierung erster Ordnung.

b) Implementieren Sie eine Schrittweitensteuerung, die auf dem Vergleich eines Schrittes mit h und zwei Schritten mit $h/2$ beruht. Nehmen Sie dazu die $\|\cdot\|_2$-Norm und einen Abbruchfehler von 10^{-12}. Achtung: Verwenden Sie einen doppelt-genauen Datentyp (double).

Starten Sie mit $h = 10^{-2}$ und verwenden Sie die Schranken $h_{\min} = 10^{-7}$ und $h_{\max} = 0.2$.

Wie groß waren die kleinsten und größten Schrittweiten? Wieviele Funktionsauswertungen haben Sie verwendet (vgl. mit a))?

c) Verwenden Sie ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren zur Fehlkerschätzung. Das genauere Verfahren wird für die Lösung der DGL verwendet. Die Differenz der beiden Verfahren dient zur Fehlerschätzung.