Prof. Dr. Gerhard Zumbusch
Wissenschaftliches Rechnen II – Sommer 2023

6. Übungsblatt

Thema Schwarz Iteration

Aufgabe 6

Ziel der Aufgabe ist es, das alternierende Schwarz-Verfahren für das zweidimensionale Poissonproblem

$$-\Delta u(x, y) = 1\,,$$

auf dem Einheitsquadrat $]0,1[^2$ umzusetzem. Dabei soll auf dem Rand $u = 0$ gelten.

Wir betrachten $p \times p$ überlappende Teilgebiete mit Kantenlängen $N/p + 2\delta$ inneren Punkten im Inneren des Gebiets und entsprechend nur $N/p + \delta$ in randnähe. Das Gesamtgebiet hat dabei N^2 innere Punkte, also $h = \frac{1}{N+1}$. Auf einem Teilgebiet wird mit der matrix-freien Implementierung eines iterativen Lösers gearbeitet. Die Randbedingungen stammen von den Werten auf dem Gitter, also entweder vom äußeren Rand oder aus benachbarten Teilgebieten. In den Teilgebieten wird jeweils sehr genau gelöst.

Implementieren Sie das alternierende Schwarz Verfahren. Lösen Sie dazu ein Teilgebiet nach dem anderen in lexikographischer Reihenfolge von $(0, 0)$ bis $(p - 1, p - 1)$. Schätzen Sie die Konvergenz des Verfahrens ab, in dem Sie die durchschnittliche Reduktion des Fehlers eines Durchlaufs durch die Teilgebiete (einer Schwarz Iteration) bestimmen.

a) Größe des Überlapps: Wählen Sie für den Fall $p = 2$ verschiedene Überlapp-Größen δ. Wie hängt die Konvergenz ab von δ?

b) Wählen Sie nun δ fest und variieren Sie die Zahl der Teilgebiete p. Wie hängt die Konvergenz ab von p?

c) Wählen Sie nun δ und p fest und variieren Sie die Zahl der Gitterpunkte N. Wie hängt die Konvergenz ab von N?

d) Wie wirken sich nicht exakte Teilgebietslöser auf die Schwarz Iteration aus?