MMO Übung 6

Farin Lippmann 190538

1.

(<=):

Sei epi f konvex. Seien nun $x, y \in \mathbb{R}^n$, mit $(x, f(x)), (y, f(y))$ (gilt für alle x, y).

Dann gilt: $\forall \lambda \in [0,1]: \lambda(x, f(x)) + (1-\lambda)(y, f(y)) \in \text{epi } f$.

$$\iff (\lambda x, \lambda f(x)) + ((1-\lambda)y, (1-\lambda)f(y)) \in \text{epi } f$$

Laut Definition von epi gilt dann:

$$\forall \lambda \in [0,1]: \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x, (1-\lambda) y)$$

$\iff f$ konvex

(=>):

Sei f konvex. Seien nun $(x, x'), (y, y') \in \text{epi } f$.

Betrachten wir nun für $\lambda \in [0,1]$:

$$\lambda(x, x') + (1-\lambda)(y, y') = (\lambda x, \lambda x') + ((1-\lambda)y, (1-\lambda)y')$$

$$= (\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda x' + (1-\lambda)y')$$

Da f konvex, gilt: $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$

Da $(x, x'), (y, y') \in \text{epi } f$, gilt: $x' \geq f(x)$ und $y' \geq f(y)$.

Also: $\lambda x' + (1-\lambda) y' \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$

Und damit: $(\lambda x + (1-\lambda) y, \lambda x' + (1-\lambda) y') \in \text{epi } f$

$\Rightarrow$ epi f konvex. $\square$

2.

(<=):

Sei Q pos. semidef. Betrachten wir f für $\lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = (\lambda x + (1-\lambda)y)^T Q (\lambda x + (1-\lambda)y) + c^T(\lambda x + (1-\lambda)y) + \gamma$$

$$= (\lambda x + (1-\lambda)y)^T (Q\lambda x + Q(1-\lambda)y) + c^T \lambda x + c^T (1-\lambda) y + \gamma$$

$$= \lambda^2 x^T Q x + \lambda(1-\lambda) y^T Q x + \lambda(1-\lambda) x^T Q y + (1-\lambda)^2 y^T Q y$$
$$+ \lambda c^T x + (1-\lambda) c^T y + \gamma =: L$$

z.z.: $L \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

$$\iff \lambda^2 x^T Q x + 2\lambda(1-\lambda) x^T Q y + (1-\lambda)^2 y^T Q y + \lambda c^T x + (1-\lambda) c^T y + \gamma$$

$$\leq \lambda x^T Q x + (1-\lambda) y^T Q y + \lambda c^T x + (1-\lambda) c^T y + \overbrace{\lambda \gamma + (1-\lambda) \gamma}^{=\gamma}$$

$\Leftrightarrow \lambda^2 x^T Q x + 2\lambda(1-\lambda) x^T Q y + (1-\lambda)^2 y^T Q y \leq \lambda x^T Q x + (1-\lambda) y^T Q y$

... weiter komme ich nicht. !!

3.

$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0,\ i = 1 \dots m\}$

Da g_i konvex, gilt auch: epi g_i konvex $\forall i \in \{1, \dots, m\}$.

Die Teilmenge $\{(x,0) \mid g(x) \leq 0\}$ eines Epigraphen epi g kann als Schnitt des Epigraphen mit der konvexen Menge $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ gesehen werden.

$\Rightarrow G_i := \{(x,0) \mid g_i(x) \leq 0\}$ sind konvex.

Ebenso sind die dazu isomorphen Mengen $\{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0\}$ konvex, und S als Schnitt dieser Mengen auch.

Daher suchen wir das Optimum einer konvexen Funktion f auf einer konvexen Menge S.

Seien x', x^* nun lokale Minima von f.

Sei o.b.d.A. $x' \geq x^*$.

Betrachten wir die Punkte zwischen x' und x^*:

$\lambda \in [0,1]$: $\lambda x' + (1-\lambda) x^* \in S$ (denn S konvex)

Wir können λ nun beliebig klein wählen, sodass, weil x' lokales Minimum ist, gilt:

$$f(\lambda x' + (1-\lambda)x^*) > f(x') \qquad (*)$$

Weil f konvex ist, gilt:

$$f(\lambda x' + (1-\lambda)x^*) \leq \lambda f(x') + (1-\lambda) f(x^*)$$

Zusammen mit $(*)$ ergibt sich:

$$f(x') < \lambda f(x') + (1-\lambda) f(x^*)$$

Das kann jedoch nur gelten, wenn $x^* > x'$ ↯

Also können x' und x^* nicht beide lokale Minima sein.

$\Rightarrow$ Jedes lokales Minimum ist gleich und damit globales Minimum. □

4.

(a)

$$\min_x \sum_{i=1}^m \phi_\delta(a_i^T x - b_i) \qquad \phi_\delta(u) = \max(|u| - \delta, 0)$$

$$= \min_x \sum_{i=1}^m \max(|a_i^T x - b_i| - \delta, 0)$$

$$= \min_x \sum_{i=1}^m v_i \quad \text{s.t.} \quad v_i = \max(|a_i^T x - b_i| - \delta, 0)$$

Wir minimieren v_i, also wird trotzdem das max ausgewählt

$$= \text{-} \quad \text{"} \quad \text{-} \quad v_i \geq \max(|a_i^T x - b_i| - \delta, 0)$$

max $\leq v_i$, also beide $\leq v_i$

$$= \text{-} \quad \text{"} \quad \text{-} \quad v_i \geq |a_i^T x - b_i| - \delta, \quad v_i \geq 0$$

$$= \text{-} \quad \text{"} \quad \text{-} \quad v_i \geq \max(a_i^T x - b_i, -a_i^T x + b_i) - \delta, \quad v_i \geq 0$$

$$= \text{-} \quad \text{"} \quad \text{-} \quad v_i + \delta \geq a_i^T x - b_i, \quad v_i + \delta \geq -a_i^T x + b_i, \quad v_i \geq 0$$

$$= \min_x \mathbb{1}^T v \quad \text{s.t.} \quad v + \bar{\delta} \geq Ax - b, \quad v + \bar{\delta} \geq -Ax + b, \quad v \geq 0$$

$$= \min_x \mathbb{1}^T v \quad \text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} v + \bar{\delta} \\ v + \bar{\delta} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix}, \quad v \geq 0$$

Ein LP!

(b) und (c) krieg' ich nicht hin. Vielleicht könnten sie am Donnerstag nochmal zusammenfassen, wie sich QPs, QCQPs und SOCPs intuitiv charakterisieren lassen? Das würde mich freuen!