

Trapez regel:

$$\Phi = \frac{1}{2} \underbrace{f(t_i, y_i)}_{\text{expliziter Euler}} + \frac{1}{2} \underbrace{f(t_{i+1}, y_{i+1})}_{\text{impliziter Euler}}$$

\Rightarrow Selbst ein implizites Problem

Implizite Mittelpunktsregel:

$$\Phi = f\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)$$

Runge-Kutta-Verfahren:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

$$\text{Approximieren } \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \approx h \cdot \sum_{r=1}^n \gamma_r f(s_r, y(s_r))$$

mit Gewichten γ_r .

allgemeine
Form
für Einschritt-
verfahren

m-stufiges Runge-Kutta-Verfahren:

$$k_j := f\left(t_i + \alpha_j \cdot h, y_i + h \cdot \sum_{k=1}^m \beta_{jk} k_k\right)$$

mit $\alpha_j \in [0, 1]$

$$y_{i+1} := y_i + h \cdot \sum_{k=1}^m \gamma_k k_k$$

mit $\sum_k \gamma_k = 1, \gamma_k \geq 0$,
Meist

$$\sum_k \beta_{jk} = \alpha_j$$

Butcher-Tableau:

Schreibweise für Koeffizienten in R-K-Verf.

$$\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline & \gamma \end{array}$$

Beispiel: Expliziter Euler

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Beispiel: Impliziter Euler

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Wie entstehen α, β, γ :

α und γ entstehen aus vielen Quellen, z.B. Quadraturregeln

Die β kommen aus Taylorentwicklungen, die möglichst viele Terme eliminieren.

Über Konvergenz:

Mit Lipschitzkonstante der Lösung und des Verfahrens und einem konsistenten Verfahren für DGL der Ordnung p
 \Rightarrow Verfahren konvergiert mit Ordnung p .

* Konsistenz-
Fehler / Trun-
cation
error

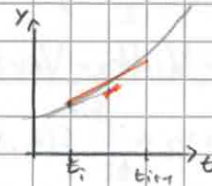
Maximale Ordnung Expliziter R-K-V:

Stufen:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
Ordnung:	1	2	3	4	4	5	6	6	7	7	8	
	↑ expl. Euler			↑ R-K-Simpson								

Beispiel für ein Verfahren mit 2 Stufen:

„Verbesserter Euler“

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$



Nicht-Explizite R-K-V:

Ein R-K-V ist explizit. \Leftrightarrow β ist untere Dreiecksmatrix.

Beispiel: Gauß-Legendre

Hat 2 Stufen, aber Ordnung 4!

(Aber das Lösen ist natürlich viel anstrengender.)

$$\begin{array}{c|cc} \frac{5-\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{3-2\sqrt{3}}{12} \\ \hline \frac{5+\sqrt{3}}{6} & \frac{3-2\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

Steife Differenzialgleichungen:

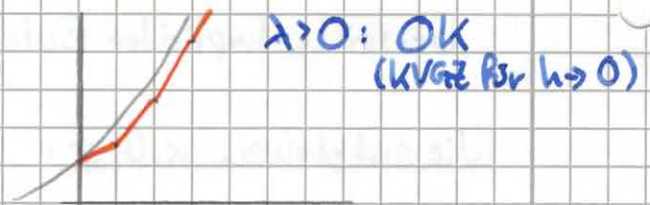
Modellproblem:

$$\left. \begin{array}{l} y'(t) = \lambda \cdot y(t) \\ y(0) = 1 \end{array} \right\} \text{Lösung: } y(t) = e^{\lambda t}$$

Expliziter Euler darauf:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (\lambda \cdot y_i), \quad y_0 = 0$$
$$= y_i (1 + h\lambda)$$

$$\Rightarrow y_i = (1 + h\lambda)^i$$



Für $\lambda < 0$:

Fall 1: $0 < 1 + h\lambda < 1$

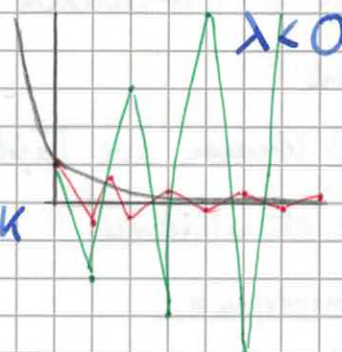
\hookrightarrow Monoton fallendes $y \Rightarrow$ OK

Fall 2: $-1 < 1 + h\lambda < 0$

\hookrightarrow Oszilliert, fällt betragsmäßig aber monoton \Rightarrow Naja

Fall 3: $1 + h\lambda < -1$

\hookrightarrow Divergiert gegen $+\infty \Rightarrow$ Müll



\Rightarrow Gute Wahl von h hängt von λ ab. (Großes $\lambda \Rightarrow$ kleines h)

In unserem Beispiel:

Um Fall 3 zu umgehen: $h < \frac{2}{|\lambda|}$

Um Fall 2 zu umgehen: $h < \frac{1}{|\lambda|}$

Impliziter Euler:

$$y_{i+1} = y_i + h(\lambda y_{i+1})$$

$$\Leftrightarrow y_{i+1} = y_i \cdot \frac{1}{1 - h\lambda}$$

$$\Rightarrow y_i = \left(\frac{1}{1 - h\lambda} \right)^i$$

$$\text{Für } \lambda < 0: \quad 0 < \frac{1}{1 - h\lambda} < 1$$

Qualitativ richtig, keine Schrittweitenbeschränkung.

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt es beim expliziten Euler einen

Kreis ($|1 + z| < 1$), der als Stabilitätsgebiet bezeichnet wird, indem λh liegen muss, um ein sinnvolles Ergebnis zu erhalten. $\Rightarrow h$ muss klein genug gewählt werden.

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt es beim impliziten Euler ein Stabilitätsgebiet, das das Komplement des Kreises ist \Rightarrow Das Stabilitätsgebiet ist zu groß.

Implizite Trapezregel:

$$y_{j+1} = y_j + h \left(\frac{1}{2} f(t_j, y_j) + \frac{1}{2} f(t_{j+1}, y_{j+1}) \right)$$

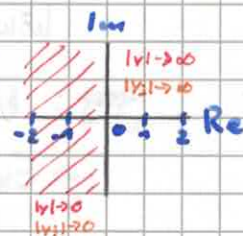
$$= y_j + h \left(\frac{1}{2} \lambda y_j + \frac{1}{2} \lambda y_{j+1} \right)$$

$$\Rightarrow y_{j+1} = y_j \left(\frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} \right), \quad \Rightarrow y_j = \left(\frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} \right)^j$$

$$\text{Stabilitätsgebiet: } \{z \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}} \right| < 1\} \quad (z = h\lambda)$$

$$\Leftrightarrow |1 + z/2| < |1 - z/2|$$

$$\Leftrightarrow |2 + z| < |2 - z|$$



Wärmeleitungsgleichung

Ist eine bestimmte Art partieller DGL

gesucht $u(t, x)$ für $t \in [t_0, T]$ [diskret] ^{nope}

Temp.

Zeit

Ort

$x \in [x_0, x_1]$ Allgemein $x \in \mathbb{R}^n$ oder $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$

Temperaturinflüsse

• Konvektion

$$v \cdot u_x(t, x)$$

• Strahlung

$$q(t, x)$$

• Diffusion

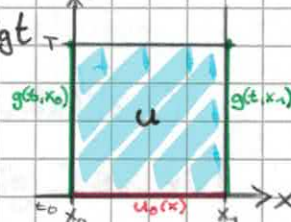
$$u_{xx}(t, x) \leftarrow \text{Höchste Ableitung} \Rightarrow \text{größter Einfluss}$$

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) \underbrace{(+ v \cdot u_x(t, x) + q(t, x))}_t$$

erstmal vernachlässigt

Anfangsbedingungen:

$$u(t_0, x) = u_0(x) \quad \forall x \in [x_0, x_1]$$



Randbedingungen:

(was für Diffusion erfahren Teilchen am Rand)

$$u(t, x) = g(t, x) \quad x \in \{x_0, x_1\}, t \in (t_0, T]$$

Bereits in Anfangsbedingung gegeben

Eigenschaften:

- Lösungen sehr glatt, oft beliebig oft diff'bar
- Hohe Frequenzen werden stark gedämpft

Lösungen:

$$u_t = u_{xx} \Rightarrow u_k(t, x) = \sin(k\pi x) e^{-k^2\pi^2 t}$$

$$\text{Allgemein } u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \cdot u_k(t, x) \quad \text{mit } \alpha_k \in \mathbb{R} \quad \textcircled{2}$$

Anfangsdaten der Form:

$$u_0(x) = \sum_k \alpha_k \sin(k\pi x) \Rightarrow \text{Lösung}$$

Wir kriegen wir ein $u_0(x)$, dass wir so (denke an Fourier) darstellen können,

können wir es analytisch lösen $\textcircled{2}$

geg.: $u_0(x)$ mit $u_0(0) = u_0(1) = 0$ und $u_0: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

\rightarrow Entwickle in Fourierreihe: $u = \sum_k \alpha_k u_k$

Numerische Lösungen:

- funktionieren für allg. Randbedingungen und Gebiete

Finite Differenzen:

- nähern Ableitungsterme

z.B. $u_t(t, x) \approx \frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t}$ (Fehler ist $O(\Delta t)$)
↑ wie der explizite Euler

$$\begin{aligned} u_{xx}(t, x) &\approx \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x)}{\Delta x} \\ &\approx \frac{u(t, x + 2\Delta x) - u(t, x + \Delta x)}{\Delta x} - \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x)}{\Delta x} \\ &= \frac{u(t, x + 2\Delta x) - 2u(t, x + \Delta x) + u(t, x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

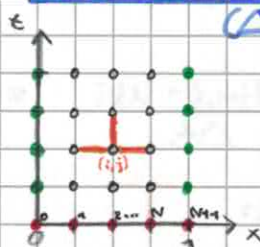
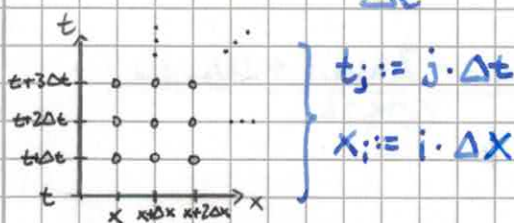
Verschiebe um Δx :

$$u_{xx}(t, x) \approx \frac{u(t, x + \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (\text{Fehler: } O((\Delta x)^2))$$

- Haben DGL $u_t = u_{xx}$

- Finite Differenzen: (Bauen DGL mit Approximationen nach)

$$\frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} = \frac{u(t, x + \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$



$$\begin{aligned} u_{j,0} &= g(t_j, 0) \quad j \geq 0 \\ u_{j,N+1} &= g(t_j, 1) \quad j \geq 0 \end{aligned}$$

Anfangsdaten $u_{0,i} = u_0(x_i)$

- Auf Gitterpunkten:

$$\frac{u_{j+1,i} - u_{j,i}}{\Delta t} = \frac{u_{j,i+1} - 2u_{j,i} + u_{j,i-1}}{(\Delta x)^2}$$

i und j jeweils rausen

Relation zw. (i, j) , $(i+1, j)$, $(i-1, j)$, $(i, j+1)$

=> Arbeiten von unten nach oben, neuer Wert ist immer $u_{j+1,i}$

$$\Rightarrow u_{j+1,i} = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j,i+1} + (1 - 2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}) u_{j,i} + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{j,i-1}$$

Wir nennen $r := \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$

$$\Rightarrow u_{j+1,i} = r \cdot u_{j,i+1} + (1-2r)u_{j,i} + r u_{j,i-1}$$

Algo:

```

for i = 0...N+1:
    u0,i = u0(xi)
for j = 0, 1, ...:
    for i = 1...N:
        uj+1,i = r · uj,i+1 + (1-2r)uj,i + r · uj,i-1
    uj+1,0 = g(tj+1, 0)
    uj+1,N+1 = g(tj+1, 1)
    
```

Fehler(lokale):

$$O(\Delta t + (\Delta x)^2)$$

Verbesserungsmöglichkeit:

Genauere Approximation (Trapez, Runge-Kutta, etc.)

Problem:

Falls $r > \frac{1}{2}$, also $\Delta t > \frac{1}{2}(\Delta x)^2$: Divergenz.

Konvergenz nur für $r \leq \frac{1}{2}$, $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$. (Schrittweitenbeschränkung)

Umgehen der Schrittweitenbeschränkung durch implizites Verfahren.

Impliziter Euler

$$u_t(t, x) \approx u(t_{j+1}, x_i)$$

$$\Rightarrow \frac{u_{j+1,i} - u_{j,i}}{\Delta t} = \frac{u_{j+1,i+1} - 2u_{j+1,i} + u_{j+1,i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Neuer Stern: 

\Rightarrow Problem: immer zwei Unbekannte dabei.

Lösung: Gleichungssystem für jede Zeile (jedes j)

aufstellen und lösen. (wird ein lineares System)

Das lineare Gleichungssystem hat dann eine Tridiagonalmatrix:

$$\begin{pmatrix} u_{j,1} \\ \vdots \\ u_{j,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \diagup & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \diagdown \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{j,1,1} \\ \vdots \\ u_{j,1,N} \end{pmatrix}$$

Die Matrix A ist diagonaldominant ($|a_{ii}| \geq \sum_{k \neq i} |a_{ik}|$).

\Rightarrow Gauß-Seidel und Jacobi-Verfahren konvergieren.

Gauß-Seidel:

for $k=1 \dots$:
for $i=1 \dots N$:
 $x_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j) / a_{ii}$

Allgemeines LGS lösen:

$\frac{2}{3} N^3$ Ops

Unser LGS lösen:

$3(N-1)$ Ops

Weitere Verbesserung: Pivottisierung