Prof. Dr. Gerhard Zumbusch
Wissenschaftliches Rechnen I – WS 2022/23

Thema: Iterative Lösung linearer Gleichungssyteme

Aufgabe 4

Die Poisson-Gleichung mit Nullrandwerten soll im Einheitsquadrat mit dem Fünf-Punkte-Stern Differenzenverfahren gelöst werden. Die Seiten werden äquidistant unterteilt, so dass ein Gleichungssystem mit $N \times N$ Unbekannten zu lösen ist. Schreiben Sie ein Programm zur iterativen Lösung des entstandenen Gleichungssystems. Stellen Sie nicht die Matrix des linearen Gleichungssystems auf, sondern bauen sie die Koeffizienten des Finite-Differenzen-Sterns direkt in das Iterationsverfahren ein. Erweitern sie den Lösungsvektor um die Randwerte und vermeiden sie dadurch Fallunterscheidungen in den inneren Schleifen des Iterationsverfahrens.

$$-\Delta u(x,y) = x(1-x) + y(1-y)\,, \quad x,y \in]0,1[\,, \quad u|_{\mathrm{Rand}} = 0\,,$$

Bestimmen Sie die exakte Lösung.
Das System soll gelöst werden

a) mit dem Jacobi-Verfahren,

b) mit dem Gauß-Seidel-Verfahren (GS) und

c) mit einem parallelen Jacobi-Verfahren. Verwenden Sie dazu `OpenMP`: Vor einer Schleife, deren Iterationen auf die Prozessoren verteilt werden sollen, fügen Sie dazu `#pragma omp parallel for` ein. Zum Übersetzen mit `gcc` fügen Sie dann noch `-fopenmp` ein. Überlegen Sie dazu, welche Operationen parallel, also unabhängig voneinander ausgeführt werden können, und wo sich parallele Ausführung am meisten lohnen wird. Messen Sie die Rechenzeiten von a) und c) und vergleichen Sie diese mit der Zahl der verfügbaren Prozessoren (Prozessorenkerne).

d) Welche Probleme ergeben sich, wenn wir das Gauß-Seidel-Verfahren parallel ausführen wollen?