Übungsserie 6

Ausgabe: 12.01.2023 **Abgabe:** 25.01.2023

Reichen Sie Ihre Lösung spätestens am Abgabetag im Moodle ein. Es genügt, falls eine Person aus jeder Gruppe die Lösung einreicht und die anderen Gruppenmitglieder namentlich erwähnt.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ genau dann konvex ist, wenn ihr Epigraph $\operatorname{epi} f := \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid r \geq f(x)\}$ konvex ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die quadratische Funktion $f(x) = x^\mathsf{T} Qx + c^\mathsf{T} x + \gamma$ konvex ist, genau dann wenn Q positiv semidefinit ist. Hierbei seien $Q \in S^n, c \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Gegeben sei das konvexe Optimierungsproblem vom Typ (CP)

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{bzgl} & x \in S, \end{array} \tag{CP}$$

wobei $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, i = 1 \ldots, m\}$ und $f, g_1, \ldots, g_m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konvexe Funktionen sind. Zeigen Sie, dass jede lokale Optimallösung von (CP) eine globale Optimallösung von (CP) ist.

Aufgabe 4. Formulieren Sie die folgenden Optimierungsprobleme als LPs, QPs, QCQPs oder SOCPs. Die Problemdaten sind $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m_{++}$. Die Zeilen von A seien mit a_i^T bezeichnet.

(a) minimiere $\sum_{i=1}^m \phi_\delta(a_i^\mathsf{T} x - b_i)$, wobei

$$\phi_\delta(u) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |u| \leq \delta \\ |u| - \delta & \text{falls } |u| > \delta \end{cases}$$

für ein $\delta > 0$.

(b) minimiere $\left(\sum_{i=1}^m (a_i^\mathsf{T} x - b_i)^4\right)^{1/4}$

(c) minimiere $\max_{i=1,\ldots,m} |\log(a_i^\mathsf{T} x) - \log(b_i)|$.

Hinweis: Für (c) können Sie folgenden Fakt nutzen:
Für $x \in \mathbb{R}^n$, $y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^\mathsf{T} x \leq yz, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

genau dann wenn

$$\left\| \begin{pmatrix} 2x \\ y - z \end{pmatrix} \right\|_2 \leq y + z, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$