

Illustrative Visualisierung

Abgabe über die NextCloud bis 23:59 Uhr des o.g. Datums.

Aufgabe 1 Krümmung

(12 Punkte)

In `task8_1.py` ist ein Höhenfeld durch die Funktion $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ gegeben. Die diskreten Punkte sind durch die Matrizen X, Y und Z abgebildet. Es soll nun die Krümmung des Höhenfeldes bestimmt und per Colormap dargestellt werden (in der Vorlesung Kapitel *Curvature Measurement*).

a) (2 Punkte)

Berechnen Sie für jeden diskreten Punkt des Höhenfeldes die Hesse Matrix H . Die notwendigen Ableitungen können Sie manuell lösen und im Code explizit ausschreiben.

b) (2 Punkte)

Berechnen Sie für jeden diskreten Punkt des Höhenfeldes den Operator P . Auch hier können Sie die Ableitungen explizit schreiben.

c) (2 Punkte)

Berechnen Sie für jeden diskreten Punkt des Höhenfeldes die Matrix G in allgemeiner Form:

$$G = -\frac{PHP}{|\nabla f|}$$

d) (2 Punkte)

Berechnen Sie für jeden diskreten Punkt des Höhenfeldes die Spur T der Matrix G .

e) (2 Punkte)

Berechnen Sie für jeden diskreten Punkt des Höhenfeldes die Frobenius Norm F der Matrix G :

$$|G|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |g_{i,j}|^2}$$

f) (2 Punkte)

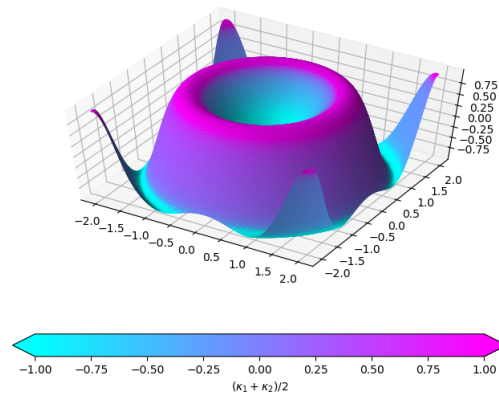
Berechnen Sie für jeden diskreten Punkt des Höhenfeldes die mittlere Krümmung $\frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$.

Das Ergebnis wird bereits korrekt skaliert und mit einer Colormap geplottet.

Hinweise:

- Die Funktion lässt sich auch durch die Gleichung $\sin(x^2 + y^2) - z = 0$ ausdrücken. Das erlaubt es, die Normale und Hesse-Matrix zu bestimmen.
- Numpy unterstützt viele Funktionen der Vektor- und Matrixarithmetik (siehe Cheatsheet *Vectors and Matrices*).
- Für das äußere Produkt zweier Vektoren sollte `np.outer` verwendet werden. Transponieren und Matrixmultiplikation ist mathematisch korrekt, funktioniert aber mit Numpys Syntax nicht in jedem Fall.

Das Ergebnis sollte so aussehen:



Aufgabe 2 Theorie

(3 Punkte)

Geben Sie die Antworten auf die Theorieaufgaben in der Multiple-Choice-Datei `MC08.txt` an. Es ist immer genau eine Auswahlmöglichkeit richtig. Bitte keine anderen Anmerkungen in diese Datei schreiben und den Dateinamen nicht verändern.

a) (2 Punkte)

Gegeben sei das differenzierbare Skalarfeld $f(x, y) = x^2 - 3y$. Berechnen Sie die kovariante Ableitung $D_{v(x,y)}f(x, y)$ entlang des Vektors $v(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix}$.

Antwortmöglichkeiten:

(a) $4x^2$

(b) $2x^2 + 3y$

(c) $4x^2 + 3y$

(d) $2x^2 - 3y$

b) (1 Punkt)

Feature Lines sind immer abhängig von der Blickrichtung des Betrachters.

(a) Wahr.

(b) Falsch.