

## Skalar- und Vektorfelder

Abgabe über die NextCloud bis 23:59 Uhr des o.g. Datums.

### Aufgabe 1 Programmieren: Gradient

(6 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die Berechnung und Darstellung des Gradienten zwischen einer kontinuierlichen 2D-Funktion und einem diskreten 2D-Datensatz (also einem Bild) verglichen werden. In `task4_1.py` finden Sie bereits eine Darstellung der Funktion  $f(x, y) = 3x^2 - 4y^2$  in einem quadratischen Bereich um  $[-3, 3]$ . Außerdem wurde das Bild `circle.png` geladen und wird als Bild-Plot angezeigt.

a) (2 Punkte)

Berechnen Sie den Gradienten von  $f(x, y)$ . Dafür müssen Sie die partiellen Ableitungen manuell bestimmen. Zeigen Sie das Ergebnis an, indem Sie den Plot der Funktion in Schritten von 0.5 in  $x$ - und  $y$ -Richtung abtasten. Zeichnen Sie an den Abtastungsstellen den Gradienten als Pfeil mittels `axis.quiver` ein (siehe Cheatsheet *Quiverplots*).

b) (1 Punkt)

Findet sich im dargestellten Funktionsbereich von  $f(x, y)$  ein kritischer Punkt? Zeichnen Sie diesen grün ein.

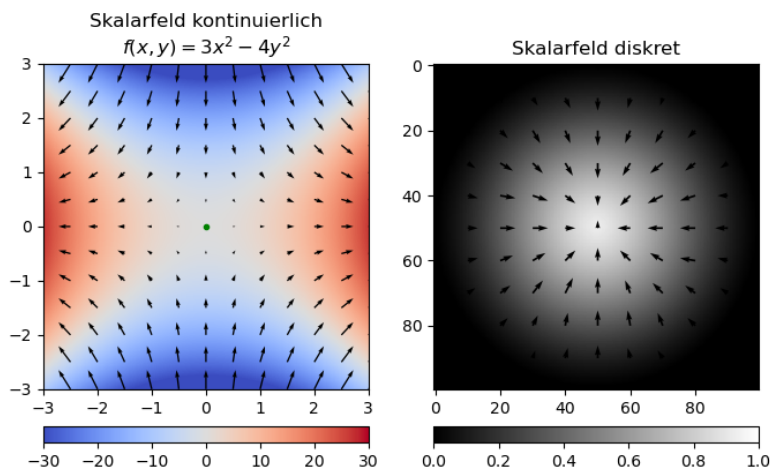
c) (3 Punkte)

Zeigen Sie nun eine Darstellung des Gradienten auf `circle.png`. Da es sich hier um eine diskrete Domäne handelt, müssen Sie die Vorwärtsableitung (forward derivative) in  $x$ - und  $y$ -Richtung verwenden. Zeichnen Sie wie zuvor Pfeile ein, welche die Gradientenrichtung zeigen. Verwenden Sie hier Abtastungsschritte von 10 in  $x$ - und  $y$ -Richtung für die Pfeilpositionen. Wählen Sie einen passenden Skalierungsfaktor für die Größe der Pfeile, sodass diese auf dem Ergebnisplot gut zu differenzieren sind.

Hinweise:

- Der Zugriff auf einen Pixel  $p = (x, y)$  erfolgt mittels `circle_bw[y, x]`. Das ist aus "Koordinatensicht" nicht intuitiv und liegt daran, dass Numpy die klassische Matrixindizierung verwendet, d.h. zuerst die Reihe, dann die Spalte angegeben wird.
- Denken Sie beim Anwenden der Vorwärtsableitung daran, dass die  $y$ -Achse von Bildern/Matrizen invertiert ist, also von oben nach unten verläuft.

Das Ergebnis sieht so aus:



## Aufgabe 2 Skalarfelder

(4 Punkte)

Geben Sie die Antworten auf die Theorieaufgaben in der Multiple-Choice-Datei MC04.txt an. Es ist immer genau eine Auswahlmöglichkeit richtig. Bitte keine anderen Anmerkungen in diese Datei schreiben und den Dateinamen nicht verändern.

a) (1 Punkt)

Der Gradient zeigt immer...

- (a) in Richtung des steilsten Abstiegs (steepest descent).
- (b) in Richtung der höchsten Steigung (highest slope).
- (c) in Richtung der Isolinie (Höhenlinie).
- (d) in Richtung der Oberflächennormale.

b) (1 Punkt)

Wie lautet die Hesse-Matrix zu  $f(x, y)$  aus Aufgabe 1? Mögliche Antworten:

(a)  $\mathbf{H}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$     (b)  $\mathbf{H}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$     (c)  $\mathbf{H}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$     (d)  $\mathbf{H}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

c) (1 Punkt)

Um welche Art von Extremum handelt es sich bei Aufgabe 1 b)?

- (a) Sattelpunkt.
- (b) Lokales Minimum.
- (c) Lokales Maximum.
- (d) Es ist kein isolierter kritischer Punkt und damit lässt sich der Punkt nicht klassifizieren.

d) (1 Punkt)

Nach dem *quadrangle lemma* ist nur eine bestimmte Abfolge von kritischen Punkten um eine Morse-Smale Zelle möglich. Angenommen die folgenden kritischen Punkte umschließen eine solche Zelle im Uhrzeigersinn, welche Reihenfolge ist *ungültig*?

- (a) Sattelpunkt, Minimum, Sattelpunkt, Maximum.
- (b) Minimum, Sattelpunkt, Maximum, Sattelpunkt.
- (c) Maximum, Sattelpunkt, Minimum, Sattelpunkt.
- (d) Minimum, Maximum, Sattelpunkt, Minimum.

## Aufgabe 3 Vektorfelder

(5 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld  $\mathbf{v}(x, y) = \begin{pmatrix} xy - 3x \\ 4y - xy + x \end{pmatrix}$ .

a) (1 Punkt)

Berechnen Sie die Ableitungen  $\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y$  und die daraus resultierende Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}$ .

Mögliche Antworten:

(a)  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} x & 4-x \\ y-3 & 1-y \end{pmatrix}$     (b)  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1-y & y-3 \\ x & 4-x \end{pmatrix}$     (c)  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} x-3 & 1-x \\ y & 4-y \end{pmatrix}$     (d)  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} y-3 & x \\ 1-y & 4-x \end{pmatrix}$

b) (1 Punkt)

Bestimmen Sie die zwei kritischen Punkte von  $\mathbf{v}(x, y)$ . Mögliche Antworten:

(a)  $\begin{matrix} x=0 & x=4 \\ y=0 & y=3 \end{matrix}$     (b)  $\begin{matrix} x=3 & x=4 \\ y=1 & y=1 \end{matrix}$     (c)  $\begin{matrix} x=0 & x=6 \\ y=0 & y=3 \end{matrix}$     (d)  $\begin{matrix} x=0 & x=6 \\ y=0 & y=1 \end{matrix}$

c) (3 Punkte)

Bestimmen Sie mithilfe von  $\mathbf{J}$  den Typ der kritischen Punkte. Mögliche Antworten:

- (a) Center, attracting focus.
- (b) Saddle node, attracting focus.
- (c) Repelling focus, saddle node.
- (d) Saddle node, attracting node.