

2. Übungsblatt

Thema: Jacobi-Iteration

Aufgabe 2

Betrachten Sie folgende Differentialgleichung:

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad x, y \in]0, 1[, \quad u|_{\text{Rand}} = g,$$

auf dem Einheitsquadrat $]0, 1[^2$. Auf dem Rand soll $u = g$ gelten. Diskretisieren Sie das Problem mit Finiten Differenzen auf einem äquidistanten Gitter. Diskretisieren Sie den Laplace-Operator durch den Fünf-Punkt-Stern. Dies ergibt ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$, das wir iterativ lösen wollen.

Entwickeln Sie ein Programm zur Lösung des entstandenen Gleichungssystems mit der Jacobi-Iteration. Implementieren Sie die Jacobi-Iteration matrix-frei, also nur mit den Werten des Differenzensterns und den Positionen der Koeffizienten. Um die Randbedingungen einfacher zu implementieren, erweitern Sie das Gebiet $]0, 1[^2$ um eine Lage Randpunkte. Die Randbedingungen sind so umzusetzen, dass in der innersten Schleife keine Fallunterscheidungen im Programm sind. Es liegen nur Vektoren wie u_{neu} und u_{alt} und die rechte Seite b im Speicher, keine Einträge der Matrix A . Verwenden Sie ein Abbruchkriterium, das nicht teurer als der Löser ist. Testen Sie das Programm mit einer exakten Lösung u . Wie groß ist der Diskretisierungsfehler, in Abhängigkeit von h ?