

บทที่ 1

คำจำกัดความ

1.1 บทนำ

การออกแบบเครื่องจักรกลที่ทำงานได้ตามความต้องการ ขั้นแรกผู้ออกแบบต้องกำหนดรูปแบบทั่วไปของเครื่องจักรกลนั้นขึ้นมา ต่อไปจึงศึกษาการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นในเครื่องจักรกลนั้น ได้แก่ การหาการขจัด (displacement) ความเร็ว (velocity) และความเร่ง (acceleration) แล้วพิจารณาว่าเหมาะสมกับการทำงานที่ต้องการหรือไม่ การศึกษาการเคลื่อนที่แบบนี้เรียกว่า “การวิเคราะห์ทางคิเนแมติก (kinematic analysis)” การศึกษาอีกแบบหนึ่งที่เกี่ยวข้องกันคือ “การสังเคราะห์ทางคิเนแมติก (kinematic synthesis)” ซึ่งหมายถึงการสร้างกลไกที่สามารถเคลื่อนที่ได้ตามลักษณะที่กำหนดไว้

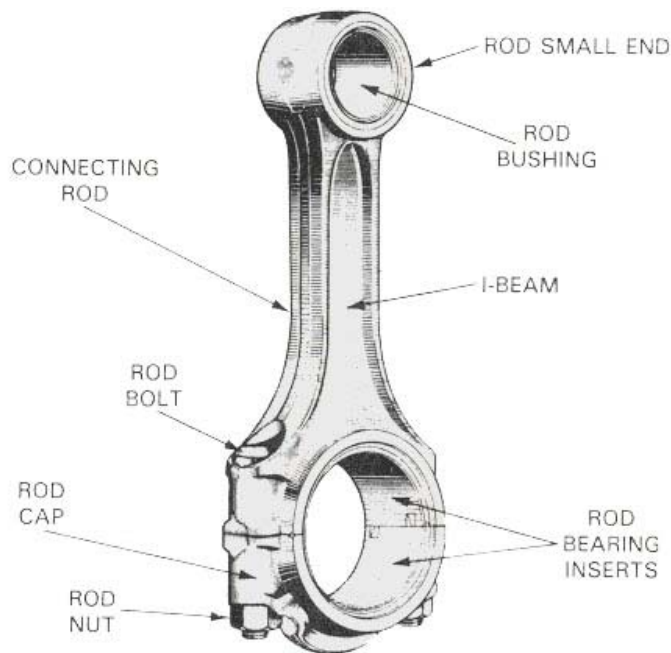
สำหรับเครื่องจักรกลที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วรอบต่ำ หลังจากวิเคราะห์ทางคิเนแมติกแล้ว จะต้องวิเคราะห์แรงสถิตยศาสตร์ (static force) ซึ่งเป็นการศึกษาถึงแรงที่กระทำกับชิ้นส่วนทุกชิ้น รวมทั้งแรงที่กระทำกับแบริ่งต่าง ๆ ด้วย เมื่อทราบแรงกระทำแล้วก็จะสามารถกำหนดสัดส่วนของชิ้นส่วนทุกชิ้นได้

สำหรับเครื่องจักรกลที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วรอบสูง การวิเคราะห์เพื่อหาแรงที่กระทำกับชิ้นส่วนทุกชิ้นต้องใช้การวิเคราะห์ทางพลศาสตร์ (dynamic analysis) เพราะว่าแรงเฉื่อย (inertia force) ที่เกิดขึ้นมีค่ามาก

เราจะเริ่มต้นศึกษาคิเนแมติกของเครื่องจักรกลด้วยการเรียนรู้ถึงคำจำกัดความ และแนวคิด (concept) ต่าง ๆ

1.2 ใช้คิเนแมติก

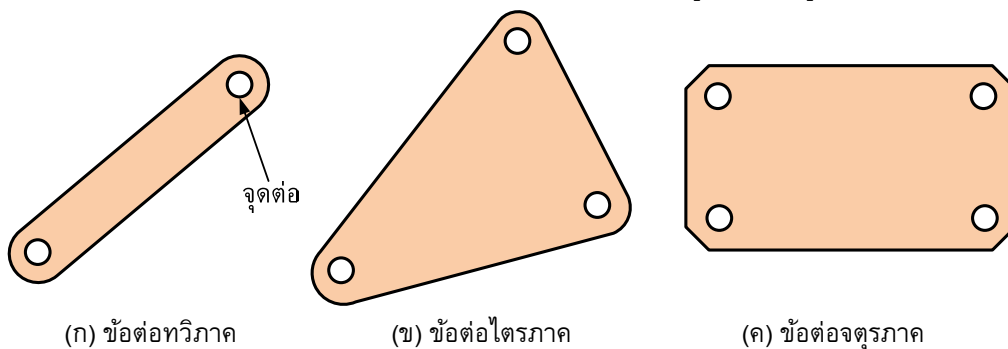
ข้อต่อ (link) ในคิเนแมติก คือ ส่วนประกอบของเครื่องจักรกลที่สามารถต้านและส่งทอดแรงกระทำได้โดยมีการเสียรูปน้อยมาก หรือสมมติเป็นวัตถุเกร็ง (rigid body) ได้ นอกจากข้อต่อที่เป็นวัตถุเกร็งแล้ววัตถุที่งอได้ก็สามารถเป็นข้อต่อได้ถ้าหากวัตถุเหล่านี้ทำหน้าที่รับและต้านแรงแบบเดียวกันกับที่วัตถุเกร็งทำ ตัวอย่างของวัตถุเหล่านี้ ได้แก่ สายพาน (belt) โซ่ (chain) และของเหลวในระบบไฮดรอลิก เป็นต้น ข้อต่อบางชนิดอาจประกอบด้วยชิ้นส่วนหลายชิ้น เช่น ก้านสูบ (connecting rod) ในเครื่องยนต์ (รูปที่ 1.1) ประกอบด้วย ฝาครอบ (rod cap) และสลักเกลียว (rod nut and bolt) สำหรับยึดก้านสูบกับเพลาช่อเหวี่ยง ชิ้นส่วนทั้งหมดของก้านสูบถือว่าเป็นข้อต่อเดียวเท่านั้น เพราะว่าชิ้นส่วนทั้งหมดประกอบเป็นหน่วยเดียวกันและไม่มีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างชิ้นส่วน



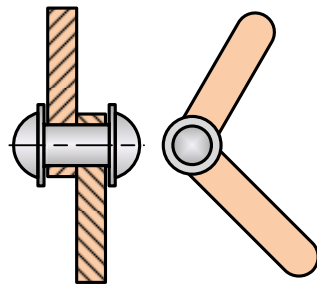
รูปที่ 1.1 ก้านสูบ^[1]

ข้อต่อซึ่งมีจุดต่อ (joint หรือ node) สำหรับต่อเชื่อมกับข้อต่ออื่นเพียงสองแห่ง เรียกว่า ข้อต่อเชิงเดียว (simple link) หรือข้อต่อทวิภาค (binary link) (รูปที่ 1.2(ก)) ข้อต่อที่มีจุดต่อมากกว่าสองแห่งขึ้นไป โดยทั่วไปเรียกว่า ข้อต่อเชิงประกอบ (compound link) สำหรับข้อต่อที่มีจุดต่อ 3 จุด มีชื่อเรียกเฉพาะว่า ข้อต่อไตรภาค (ternary link) (รูปที่ 1.2(ข)) สำหรับข้อต่อมีจุดต่อ 4 จุด มีชื่อเรียกเฉพาะว่า ข้อต่อจตุรภาค (quaternary link) (รูปที่ 1.2(ค))

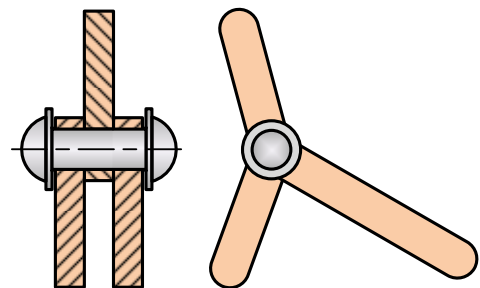
ข้อต่อแต่ละชั้นจะต่อกันที่จุดต่อ ถ้าข้อต่อสองชั้นต่อกันและมีการเคลื่อนที่สัมพันธ์กันในเชิงบังคับแล้วจะเรียกพื้นผิวที่สัมผัสกันของข้อต่อว่า คู่สัมผัสคิเนแมติก (kinematic pairs) จุดต่อที่ประกอบด้วยข้อต่อสองชั้นต่อกัน เรียกว่า คู่สัมผัสเชิงเดียว (simple pairs) ส่วนจุดต่อที่ประกอบด้วยข้อต่อสามชั้น และสี่ชั้น มาต่อเข้าด้วยกัน จะเรียกว่า คู่สัมผัสทวิคูณ



รูปที่ 1.2 ข้อต่ออันดับต่าง ๆ



(ก) คู่สัมผัสเชิงเดียว



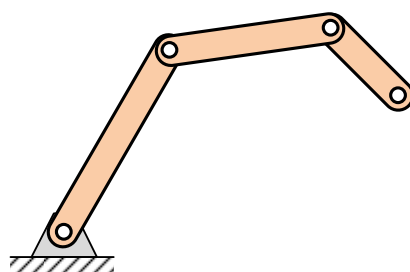
(ข) คู่สัมผัสทวีคูณ

รูปที่ 1.3 คู่สัมผัส

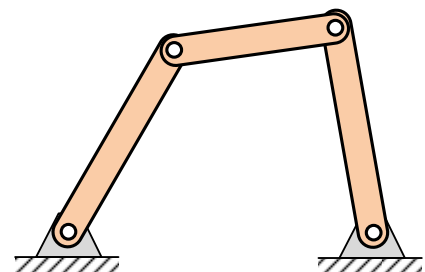
(double pairs) และ คู่สัมผัสตรีคูณ (triple pairs) ตามลำดับ จุดต่อที่ประกอบด้วยข้อต่อมากกว่าสองชิ้นขึ้นไปสามารถเรียกรวม ๆ ว่า คู่สัมผัสพหุคูณ (multiple pairs) ดังนั้นจุดต่อที่มีข้อต่อ $N+1$ ชิ้น ต่อกันจะเรียกว่า คู่สัมผัสพหุคูณ N เป็นต้น

โซ่คิเนแมติก (kinematic chains) คือ ข้อต่อหลาย ๆ ชิ้นที่ต่อกัน โดยอาจมีลักษณะเป็นโซ่คิเนแมติกเปิด (open kinematic chains) หรือโซ่คิเนแมติกปิด (closed kinematic chains) ก็ได้ ตัวอย่างโซ่คิเนแมติกทั้งสองแบบนี้แสดงอยู่ในรูปที่ 1.4(ก) และ 1.4(ข) ตามลำดับ จากรูป 1.4(ข) จะเห็นว่าข้อต่อในโซ่คิเนแมติกปิดจะต่อกันเป็นวงปิด (loop)

สำหรับโซ่คิเนแมติกปิดซึ่งมีรูปแบบการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างข้อต่อที่แน่นอน กล่าวคือ ถ้าจับข้อต่อชิ้นหนึ่งของโซ่คิเนแมติกให้อยู่กับที่และให้ข้อต่อที่เหลือเคลื่อนที่ได้แล้ว ถ้าจุดใด ๆ บนข้อต่อใด ๆ ที่เคลื่อนที่ได้มีการเคลื่อนที่บนเส้นทางเดิมและทำนายล่วงหน้าได้เสมอไม่ว่าข้อต่อเหล่านี้จะเคลื่อนที่ไปกี่รอบแล้วก็ตาม การเคลื่อนที่ที่มีรูปแบบแน่นอนนี้เรียกว่า การเคลื่อนที่เชิงบังคับ (constrained motion) และเรียกโซ่คิเนแมติกที่มีรูปแบบการเคลื่อนที่ที่แน่นอนว่า โซ่คิเนแมติกเชิงบังคับ (constrained kinematic chains) ในทางตรงกันข้ามถ้ารูปแบบการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างข้อต่อต่าง ๆ ของโซ่คิเนแมติกมีลักษณะไม่แน่นอนและกำหนดล่วงหน้าไม่ได้แล้ว จะเรียกว่า โซ่คิเนแมติกบังคับไม่ได้ (unconstrained kinematic chains) โซ่คิเนแมติกเชิงบังคับเป็นรากฐานของเครื่องจักรกลส่วนใหญ่



(ก) โซ่คิเนแมติกเปิด

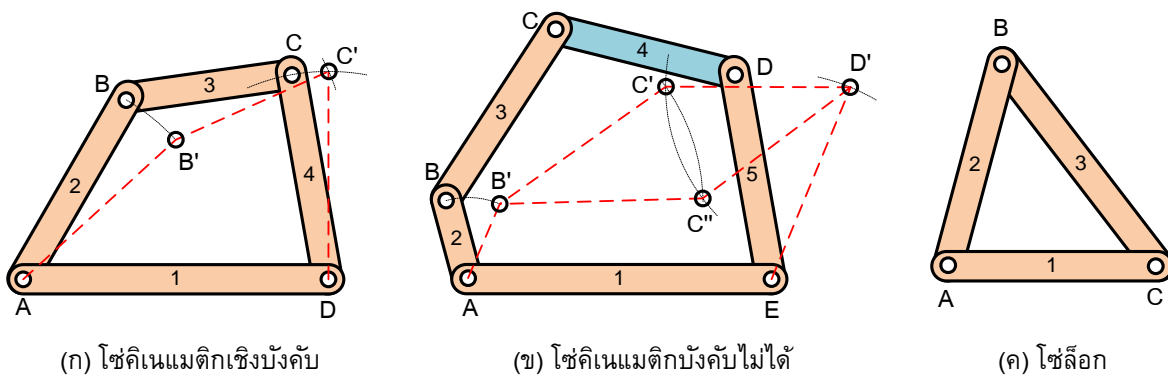


(ข) โซ่คิเนแมติกปิด

รูปที่ 1.4 โซ่คิเนแมติก

ในกรณีที่ข้อต่อหลายชิ้นมาต่อกันเป็นโซ่คิเนแมติกที่ไม่มีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างข้อต่อแล้วจะเรียกว่า โซ่ล็อก (locked chain) หรือ โครงสร้าง (structure) ดังนั้นโครงสร้างต่าง ๆ ในทางวิศวกรรม เช่น โครงสร้างสะพาน โครงสร้างอาคารบ้านเรือน เป็นต้น ถือว่าเป็นโซ่ล็อกทั้งสิ้น

รูปที่ 1.5(ก) แสดงโซ่คิเนแมติกเชิงบังคับ จากรูปถ้ากำหนดให้ข้อต่อหมายเลข 1 เป็นข้อต่อที่อยู่กับที่แล้ว ขณะที่ข้อต่อหมายเลข 2 เคลื่อนที่จากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง AB' ข้อต่อหมายเลข 3 และ 4 จะเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่ง B'C' กับ C'D เสมอ รูปที่ 1.5(ข) แสดงโซ่คิเนแมติกบังคับไม่ได้ เพราะว่า ขณะที่ข้อต่อหมายเลข 2 เคลื่อนที่จากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง AB' แล้วเราไม่สามารถรู้อย่างแน่ชัดหรือทำนายได้ว่าข้อต่อหมายเลข 3, 4 และ 5 จะเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่งใด กล่าวคือ ข้อต่อเหล่านี้อาจจะเคลื่อนที่ไปอยู่ในตำแหน่ง AB'C'D'E หรือตำแหน่ง AB'C''D'E ก็ได้ รูปที่ 1.5(ค) แสดงโซ่ล็อก เพราะเมื่อยึดข้อต่อหมายเลข 1 ให้อยู่กับที่แล้วจะไม่มีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างข้อต่อหมายเลข 2 และ 3



รูปที่ 1.5 ตัวอย่างโซ่คิเนแมติกปิด

1.3 กลไก และเครื่องจักรกล

เมื่อกำหนดให้ข้อต่อชิ้นใดชิ้นหนึ่งของโซ่คิเนแมติกเชิงบังคับอยู่กับที่และยอมให้ข้อต่อที่เหลือเคลื่อนที่ได้จะเรียกโซ่คิเนแมติกเชิงบังคับนี้ว่า กลไก (mechanism) ข้อต่อที่อยู่หนึ่งจะแทนแท่นเครื่อง (ground link หรือ frame) กลไกส่วนมากจะประกอบกันเป็นโซ่ปิด (closed chain) กล่าวคือ ข้อต่อแต่ละชิ้นจะต่อกับข้อต่ออื่น ๆ ในกลไกนั้นอย่างน้อย 2 ชิ้น เสมอ

เครื่องจักรกล (machine) คือ การผสมผสานของกลไกหลาย ๆ อย่าง เพื่อทำหน้าที่ส่งทอดแรงและเปลี่ยนแปลงพลังงาน ตัวอย่างเช่น เครื่องยนต์ (engine) เครื่องกลึง (lathe machine) เป็นต้น นาฬิกาและเครื่องพิมพ์ดีดนั้นจัดเป็นกลไก เพราะว่าหน้าที่หลักของอุปกรณ์เหล่านี้คือ ส่งทอดหรือขยายการเคลื่อนที่เท่านั้น และขนาดของแรงที่ส่งทอดก็เพียงพอสำหรับการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นได้เท่านั้น

1.4 คู่สัมผัสคิเนแมติก

เกณฑ์ที่ใช้แบ่งประเภทคู่สัมผัสคิเนแมติกหรือจุดต่อมีอยู่หลายเกณฑ์ ดังนี้

1.4.1 เกณฑ์ลักษณะการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างชิ้นส่วนทั้งสอง

ก) คู่สัมผัสแบบเลื่อนไถล (*sliding pair* หรือ *prismatic pair*)

คู่สัมผัสแบบนี้จะมีชิ้นส่วนที่เคลื่อนที่สัมพัทธ์กับชิ้นส่วนที่เป็นคู่สัมผัสของมันในลักษณะของการเลื่อนไถลเท่านั้น ตัวอย่างเช่น ในรูปที่ 1.6(ก) ชิ้นส่วน A ซึ่งเป็นแท่งสี่เหลี่ยมสามารถเลื่อนไถลไปมาในช่องรูปสี่เหลี่ยมของชิ้นส่วน B หรือในรูปที่ 1.7 ซึ่งแสดงแผนภาพจำลองการเคลื่อนไถลของลูกสูบ (piston) ภายในกระบอกสูบ (cylinder) ของเครื่องยนต์ เป็นต้น

ข) คู่สัมผัสแบบหมุน (*turning pair* หรือ *revolute pair* หรือ *revolving pair*)

คู่สัมผัสแบบนี้จะมีชิ้นส่วนที่เคลื่อนที่สัมพัทธ์กับชิ้นส่วนที่เป็นคู่สัมผัสของมันในลักษณะของการหมุนเท่านั้น ตัวอย่างเช่น เฟลากลม A ที่สวมแบร็ง B ในรูปที่ 1.6(ข) จากรูปเฟลา A สามารถหมุนสัมพัทธ์กับแบร็ง B ได้ แต่ไม่สามารถเคลื่อนที่ตามแนวแกน (แบบเลื่อนไถล) เนื่องจากติดกับเฟลา

ค) คู่สัมผัสแบบกลิ้ง (*rolling pair*)

ตัวอย่างของคู่สัมผัสแบบกลิ้ง ได้แก่ จุดสัมผัสของวงล้อที่กลิ้งไปบนพื้นราบโดยไม่ไถล (roll without slip) ดังตัวอย่างในรูปที่ 1.6(ค)

ง) คู่สัมผัสแบบเกลียว (*helical pair*)

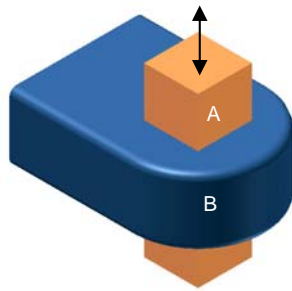
คู่สัมผัสแบบนี้จะมีพื้นผิวที่สัมผัสระหว่างกันเป็นเกลียว เช่น สลักเกลียว (bolt) กับแป้นเกลียว (nut) เป็นต้น ตัวอย่างคู่สัมผัสแบบนี้แสดงอยู่ในรูปที่ 1.6(ง) จากรูปจะเห็นว่า เมื่อจับชิ้นส่วนใดชิ้นส่วนหนึ่งในคู่สัมผัสให้อยู่กับที่แล้วหมุนชิ้นส่วนที่เหลือจะพบว่าชิ้นส่วนจะหมุนรอบตัวเองพร้อมกับเคลื่อนที่ตามแนวแกนของการหมุนด้วย สำหรับคู่สัมผัสแบบเกลียวการเคลื่อนที่เชิงมุมและการเคลื่อนที่เชิงเส้น (ตามแนวแกน) จะมีความสัมพันธ์กัน

จ) คู่สัมผัสแบบทรงกระบอก (*cylindrical pair*)

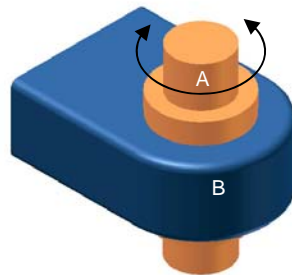
คู่สัมผัสแบบนี้จะมีชิ้นส่วนหนึ่งสามารถเคลื่อนที่แบบหมุนและเคลื่อนที่ตามแนวแกนของการหมุนได้ ซึ่งลักษณะการเคลื่อนที่คล้ายกับคู่สัมผัสแบบเกลียว เนื่องจากคู่สัมผัสแบบนี้ไม่มีเกลียวทำให้การเคลื่อนที่เชิงมุมและการเคลื่อนที่เชิงเส้น (ตามแนวแกน) ของเฟลาเป็นอิสระต่อกัน ตัวอย่างเช่น เฟลาในแบร็งที่ไม่มีการจำกัดการเคลื่อนที่ของเฟลาในทิศตามแนวแกน (รูปที่ 1.6(จ))

ฉ) คู่สัมผัสแบบทรงกลม (spherical pair)

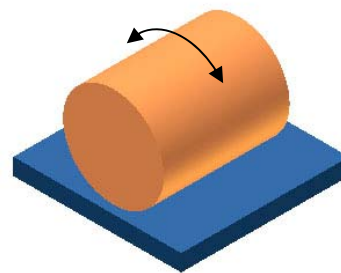
ลูกบอลกับช็อกเก็ตในรูปที่ (1.6(ฉ)) เป็นคู่สัมผัสแบบทรงกลม ในกรณีนี้คู่สัมผัสตัวใดตัวหนึ่งสามารถเคลื่อนที่ได้ในทุกระนาบ และจุดใด ๆ บนชิ้นส่วนที่เคลื่อนที่จะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของลูกบอลเป็นระยะคงที่เสมอ



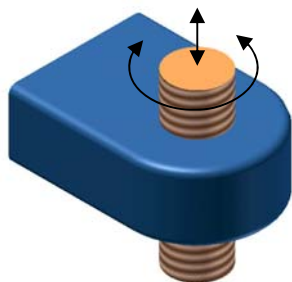
(ก) คู่สัมผัสแบบเลื่อนไถล



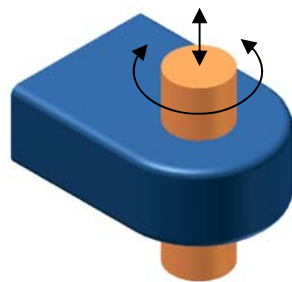
(ข) คู่สัมผัสแบบหมุน



(ค) คู่สัมผัสแบบกลิ้ง



(ง) คู่สัมผัสแบบเกลียว

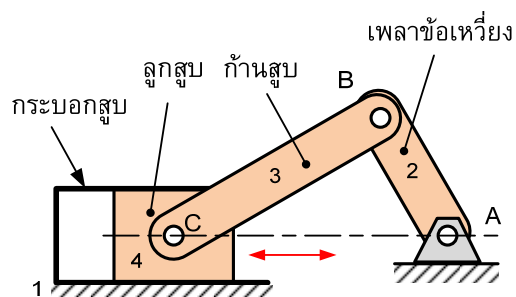


(จ) คู่สัมผัสแบบทรงกระบอก



(ฉ) คู่สัมผัสแบบทรงกลม

รูปที่ 1.6 คู่สัมผัสแบบต่าง ๆ



รูปที่ 1.7 คู่สัมผัสแบบเลื่อนไถลในกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยง (slider crank)

1.4.2 เกณฑ์ลักษณะการสัมผัสระหว่างพื้นผิวของชิ้นส่วนทั้งสอง

ก) คู่ชั้นต่ำ

คู่ชั้นต่ำ (lower pair) คือคู่สัมผัสที่มีส่วนสัมผัสกันระหว่างข้อต่อมีลักษณะเป็นพื้นผิวที่เคลื่อนที่สัมผัสกันอาจเป็นแบบเลื่อนไถลหรือแบบหมุนก็ได้ โดยนิยามนี้ คู่สัมผัส (ก), (ข), (ง), (จ) และ (ฉ) ในรูปที่ 1.6 และคู่สัมผัส A, B, C ในรูปที่ 1.7 จะเป็นคู่ชั้นต่ำ

ข) คู่ชั้นสูง

คู่ชั้นสูง (higher pair) คือคู่สัมผัสที่มีส่วนสัมผัสกันระหว่างข้อต่อมีลักษณะเป็นเส้นหรือจุด ตัวอย่างได้แก่ คู่สัมผัส (ค) ในรูปที่ 1.6 การสัมผัสระหว่างลูกเบี้ยว (cam) กับตัวตาม (follower) ในรูปที่ 1.8(ก) การสัมผัสระหว่างฟันเฟืองที่ขบกัน ในรูปที่ 1.8(ข) และ เป็นต้น

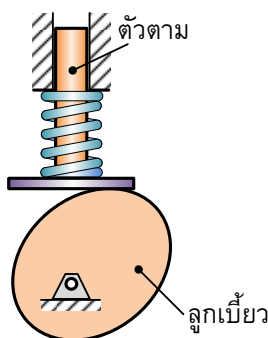
1.4.3 เกณฑ์ลักษณะการบังคับเชิงกลระหว่างชิ้นส่วนทั้งสอง

ก) คู่ปิดเชิงกล (form-closed pair)

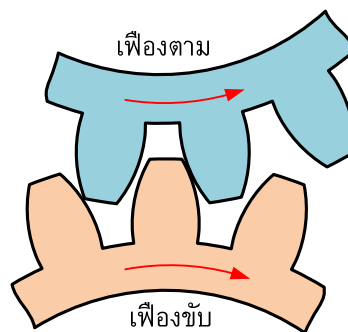
คือคู่สัมผัสซึ่งผิวสัมผัสถูกยึดให้สัมผัสกันด้วยวิธีเชิงกล โดยไม่ต้องใช้แรงภายนอกมาช่วยให้เกิดการสัมผัส ตัวอย่างเช่น คู่สัมผัส (ก), (ข), (ง), (จ) และ (ฉ) ในรูปที่ 1.6 เป็นต้น

ข) คู่เปิดโดยแรง (force-closed pair)

คือคู่สัมผัสซึ่งผิวสัมผัสถูกทำให้สัมผัสกันโดยอาศัยแรงเนื่องจากน้ำหนักของชิ้นส่วนหรือแรงภายนอกอื่น ๆ เช่น สปริง ตัวอย่างเช่น การสัมผัสระหว่างลูกเบี้ยวและตัวตามในรูปที่ 1.8(ก) ต้องอาศัยแรงกดจากสปริงดันตัวตามให้แนบกับลูกเบี้ยว การสัมผัสของฟันเฟืองในรูปที่ 1.8(ข) เกิดจากฟันของเฟืองขับหมุนมาสัมผัสกับฟันของเฟืองตาม การสัมผัสของลูกกลิ้งที่กลิ้งไปบนพื้นโดยไม่ไถลก็ต้องอาศัยน้ำหนักของล้อ เป็นต้น



(ก) ลูกเบี้ยวกับตัวตาม



(ข) เฟืองที่ขบกัน

รูปที่ 1.8 คู่ชั้นสูง

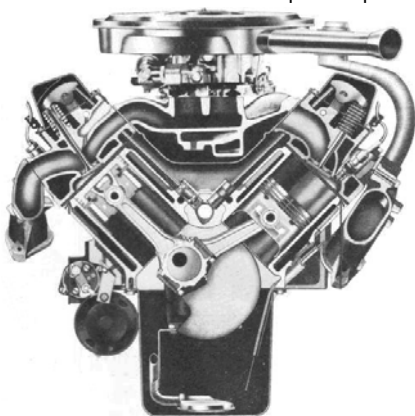


กิจกรรมเสริม

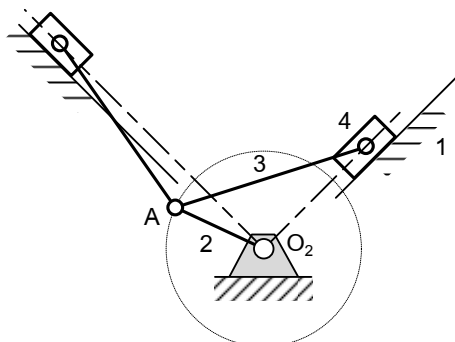
1. เข้าชมเว็บไซต์ www.carbibles.com/fuel_engine_bible.html แล้วศึกษาเนื้อหาต่อไปนี 1) ส่วนประกอบที่สำคัญของเครื่องยนต์ 2) หลักการทำงานของเครื่องยนต์ และสิ่งที่แตกต่างกันระหว่างเครื่องยนต์ 2 จังหวะและ 4 จังหวะ (ดูภาพเคลื่อนไหวในเว็บไซต์ประกอบ) 3) รูปแบบของการจัดวางลูกสูบ
2. สำรวจผลิตภัณฑ์ที่อยู่รอบ ๆ ตัว เช่น ล้อประตูรั้ว บานพับประตู รางลื่นชัก ฯลฯ แล้ววิเคราะห์ว่าผลิตภัณฑ์เหล่านี้มีคู่สัมผัสชนิดใด

1.5 แผนภาพคิเนแมติก

การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนของกลไกใด ๆ นิยมเขียนรูปกลไกในลักษณะที่เรียกว่า แผนภาพคิเนแมติก (kinematic diagram) แทนการเขียนรูปร่างจริงของมัน ทั้งนี้เพื่อให้การวิเคราะห์ทำได้สะดวก ตัวอย่างเช่นเครื่องยนต์แบบวี 2 สูบ (รูปที่ 1.9(ก)) จะเขียนแผนภาพคิเนแมติกได้ดังแสดงในรูปที่ 1.9(ข) เป็นต้น จากรูปจะเห็นว่าแผนภาพคิเนแมติกแสดงเฉพาะชิ้นส่วนของเครื่องยนต์ที่ต้องการทราบการเคลื่อนที่เท่านั้น นอกจากนี้ในรูปที่ 1.9 ก้านสูบถูกแทนด้วยเส้นตรงซึ่งมีวงกลมเล็ก ๆ ที่ปลาย A และ B เหตุผลที่แสดงเพียงเท่านั้นเพราะปริมาณทางคิเนแมติก เช่น ความเร็วและความเร่งของก้านสูบไม่ขึ้นกับความกว้างและความหนาของก้านสูบ แต่ขึ้นกับความยาวของเพลาช้อเหวี่ยง O_2A และความยาวของตัวมันเองเท่านั้น นอกจากนี้วัตถุที่มีการเคลื่อนที่บนระนาบ (plane motion) จุดสองจุดใด ๆ บนวัตถุนั้นจะแทนการเคลื่อนที่ของวัตถุทั้งชิ้นได้เนื่องจากเส้นที่ลากเชื่อมจุดสองจุดคือเส้นตรง ดังนั้นจึงกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่าการเคลื่อนที่ของเส้นตรงใด ๆ ที่อยู่บนวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่แบบระนาบจะแทนการเคลื่อนที่ของวัตถุทั้งชิ้น หรือการเคลื่อนที่ของจุดใด ๆ บนวัตถุสามารถหาได้ถ้าทราบการเคลื่อนที่ของจุดสองจุดหรือเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุด



(ก) ภาพถ่ายเครื่องยนต์แบบวี 2 สูบ ^[2]

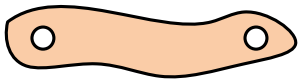
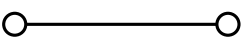
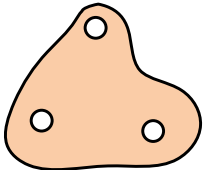
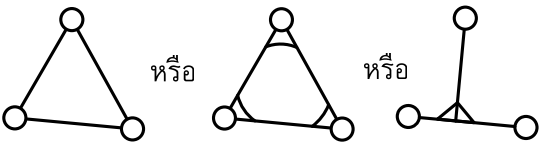
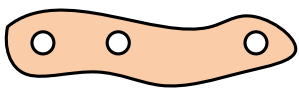
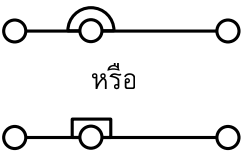
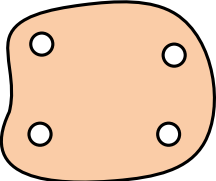
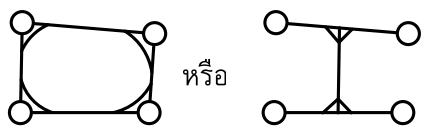


(ข) แผนภาพคิเนแมติก

รูปที่ 1.9 ตัวอย่างการแทนกลไกเครื่องยนต์แบบวีด้วยแผนภาพคิเนแมติก

สำหรับเส้นตรงที่ใช้แทนการเคลื่อนที่ของข้อต่อใด ๆ โดยทั่วไปจะลากเชื่อมจุดต่อแบบ หมุด (pin joint) หรือจุดต่อแบบหมุนของข้อต่อนั้น ๆ ดังนั้นเส้นตรงในแผนภาพคิเนแมติกอาจ หมายถึงวัตถุที่มีความกว้างและความยาวไม่จำกัด

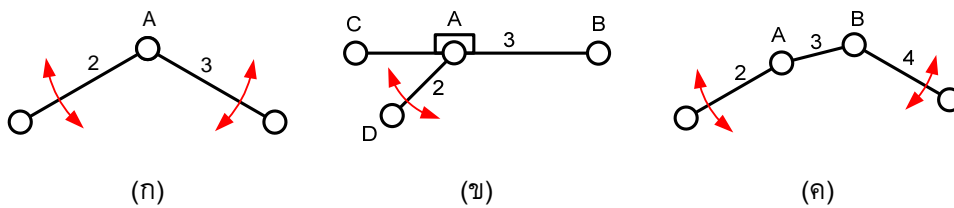
สัญลักษณ์ที่ใช้กันในแผนภาพคิเนแมติก แสดงอยู่ในรูปที่ 1.10 มีดังนี้คือ ข้อต่อเชิงเดียว หรือข้อต่อทวิภาค (มีจุดต่อกับข้อต่ออื่น 2 จุด) ในรูปที่ 1.10(ก) ข้อต่อเชิงเดียวแสดงด้วยเส้นตรง ที่เชื่อมวงกลมเล็ก ๆ สองวง วงกลมเล็ก ๆ นี้คือสัญลักษณ์แทนจุดต่อของข้อต่อ ข้อต่อไตรภาค ซึ่งมีจุดต่อ 3 จุด ไม่อยู่บนแนวเดียวกัน (รูปที่ 1.10(ข)) แสดงด้วยรูปสามเหลี่ยมมีวงกลมเล็ก ๆ 3 วงที่มุม หรือแสดงด้วยรูปสามเหลี่ยมที่มีเส้นโค้งที่มุม หรือแสดงด้วยเส้นตรงที่เชื่อมกันโดยจุดที่ เชื่อมจะมีเส้นเฉียงเขียนกำกับด้วย เส้นโค้งที่มุมและเส้นเฉียงนั้นมีหน้าที่กำกับว่ามุมระหว่างส่วน ของเส้นตรงจะมีค่าเท่าเดิมเสมอ ข้อต่อไตรภาค ซึ่งมีจุดต่อทั้ง 3 จุด อยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกัน (รูปที่ 1.10(ค)) แสดงได้ด้วยเส้นตรงเชื่อมจุดต่อที่ปลาย แต่ที่จุดต่อตรงกลางจะเขียนรูปครึ่ง วงกลมหรือสี่เหลี่ยมกำกับไว้เพื่อแสดงว่าส่วนของเส้นตรงที่อยู่ด้านซ้ายและด้านขวาของจุดต่อ ตรงกลางจะทำมุมกัน 180 องศา เสมอ ข้อต่อจตุรภาค (รูปที่ 1.10(ง)) แสดงด้วยรูปสี่เหลี่ยมมี วงกลม 4 วงที่มุมและมีเส้นโค้งที่มุม หรือแสดงเป็นเส้นตรงต่อเชื่อมกันโดยที่จุดเชื่อมมีเส้นเฉียง

รูปเขียนลักษณะของข้อต่อและจุดต่อ	สัญลักษณ์คิเนแมติกของข้อต่อและจุดต่อ
(ก) ข้อต่อทวิภาค (ข้อต่อเชิงเดียว) 	
(ข) ข้อต่อไตรภาค 	
(ค) ข้อต่อไตรภาคที่จุดต่ออยู่บนแนว เส้นตรงเดียวกัน 	
(ง) ข้อต่อจตุรภาค 	

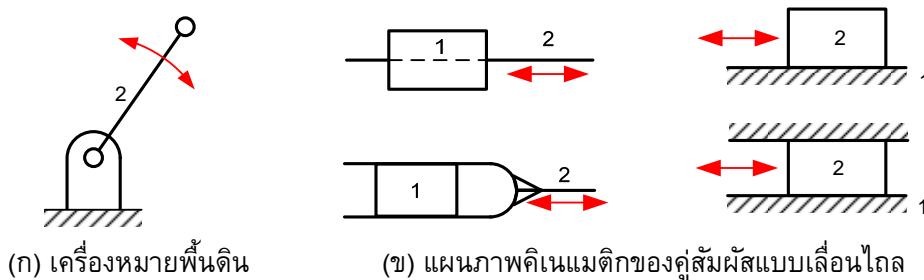
รูปที่ 1.10 สัญลักษณ์คิเนแมติกของข้อต่อแบบต่าง ๆ ที่มีจุดต่อเป็นรูสำหรับสวมหมุด

สัญลักษณ์คิเนแมติกแสดงการต่อของข้อต่อด้วยหมุดหรือวิธีอื่น ๆ แสดงอยู่ในรูปที่ 1.11 รูปที่ 1.11(ก) แสดงข้อต่อเชิงเดียว 2 ชั้น ต่อกันที่จุดต่อ A ข้อต่อทั้งสองสามารถหมุนไปมารอบจุด A ได้ ดังนั้นจุด A คือ คู่สัมผัสแบบหมุน ตรงกลางของวงกลมจะเขียนจุดหรือไม่เขียนก็ได้ รูปที่ 1.11(ข) แสดงข้อต่อเชิงเดียวต่อกับข้อต่อไตรภาคที่จุดต่อ A ในรูปนี้ CAB เป็นข้อต่อไตรภาค ดังนั้น CA และ CB จะหมุนรอบจุด A ไม่ได้ แต่ DA หมุนรอบจุด A ได้ รูปที่ 1.11(ค) แสดงข้อต่อเชิงเดียว 3 ชั้น ต่อเรียงแถว ดังนั้นข้อต่อหมายเลข 2 และ 3 จะหมุนรอบจุด A และข้อต่อหมายเลข 3 และ 4 จะหมุนรอบจุด B ได้

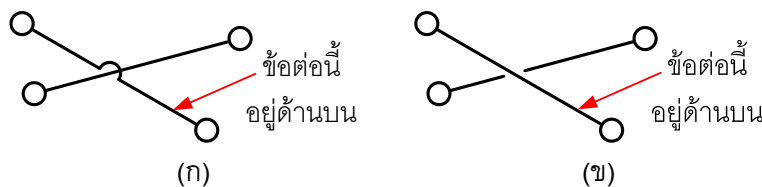
รูปที่ 1.12(ก) แสดงข้อต่อเชิงเดียวต่อกับแกนหมุนซึ่งอยู่กับที่ สัญลักษณ์สำหรับแสดงการอยู่กับที่คือ เครื่องหมายพื้นดิน (ground mark หรือ cross-hatching) รูปที่ 1.12(ข) คือ สัญลักษณ์คิเนแมติกสำหรับคู่สัมผัสแบบเลื่อนไถล จากรูปกำหนดให้ข้อต่อหมายเลข 1 อยู่กับที่ ดังนั้นข้อต่อหมายเลข 1 จึงมีเครื่องหมายพื้นดินกำกับ ถ้าข้อต่อไขว้กันเราสามารถเขียนรูปคิเนแมติกได้ 2 วิธี คือ 1) เขียนส่วนโค้งเล็ก ๆ ที่ข้อต่อขึ้นบนตรงจุดไขว้ ดังรูปที่ 1.13(ก) หรือ 2) เว้นช่องว่างเล็ก ๆ ที่ข้อต่อขึ้นล่างตรงจุดไขว้ ดังรูปที่ 1.13(ข)



รูปที่ 1.11 แผนภาพคิเนแมติกของการต่อกันของข้อต่อชนิดต่าง ๆ ด้วยหมุด



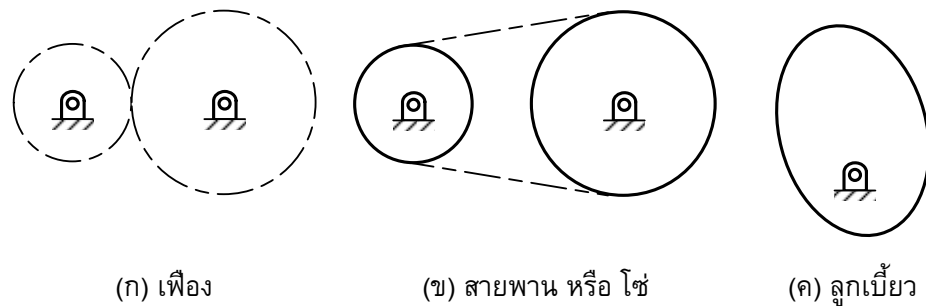
รูปที่ 1.12 เครื่องหมายพื้นดิน และแผนภาพคิเนแมติกของคู่สัมผัสแบบเลื่อนไถล



รูปที่ 1.13 แผนภาพคิเนแมติกของข้อต่อที่ไขว้กัน

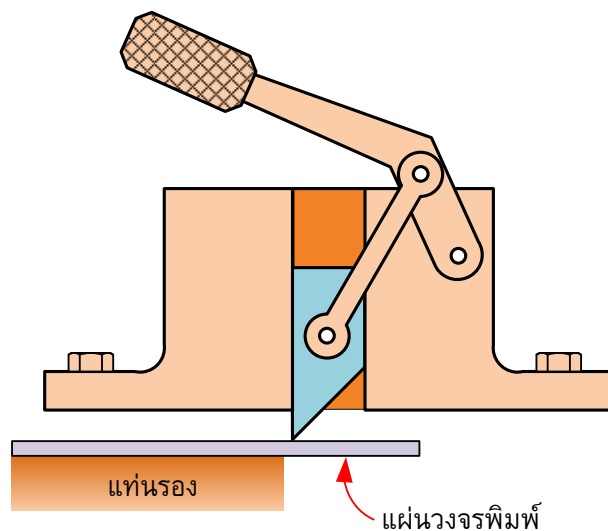
แผนภาพคิเนแมติกของเฟือง และล้อสายพาน (pulley) แสดงอยู่ในรูปที่ 1.14(ก) และ (ข) ตามลำดับ สำหรับเฟืองจะแทนด้วยวงกลมที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับวงกลมพิตช์ (pitch circle) และเขียนวงกลมด้วยเส้นผ่านศูนย์กลาง สำหรับล้อสายพานจะแทนด้วยวงกลมเขียนด้วยเส้นเติม แต่ส่วนที่เป็นโซ่หรือสายพานจะแสดงด้วยเส้นผ่านศูนย์กลาง สำหรับลูกเบี้ยว (รูปที่ 1.14(ค)) จะเขียนด้วยเส้นเติมตามรูปร่างจริง

เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของข้อต่อซึ่งแสดงเป็นแผนภาพคิเนแมติก จะใช้ตัวเลข 1, 2, 3, ... สำหรับระบุข้อต่อแต่ละชิ้นในกลไก หมายเลข 1 ใช้กับข้อต่อที่อยู่กับที่ และจะใช้ตัวอักษร A, B, C, ... สำหรับระบุจุดต่อ จุดต่อที่เป็นจุดหมุนอยู่กับที่จะกำกับด้วยตัวอักษร O ตามด้วยตัวห้อยเป็นตัวเลขแสดงหมายเลขของข้อต่อที่มาต่อกับจุดหมุนอยู่กับที่นั้น

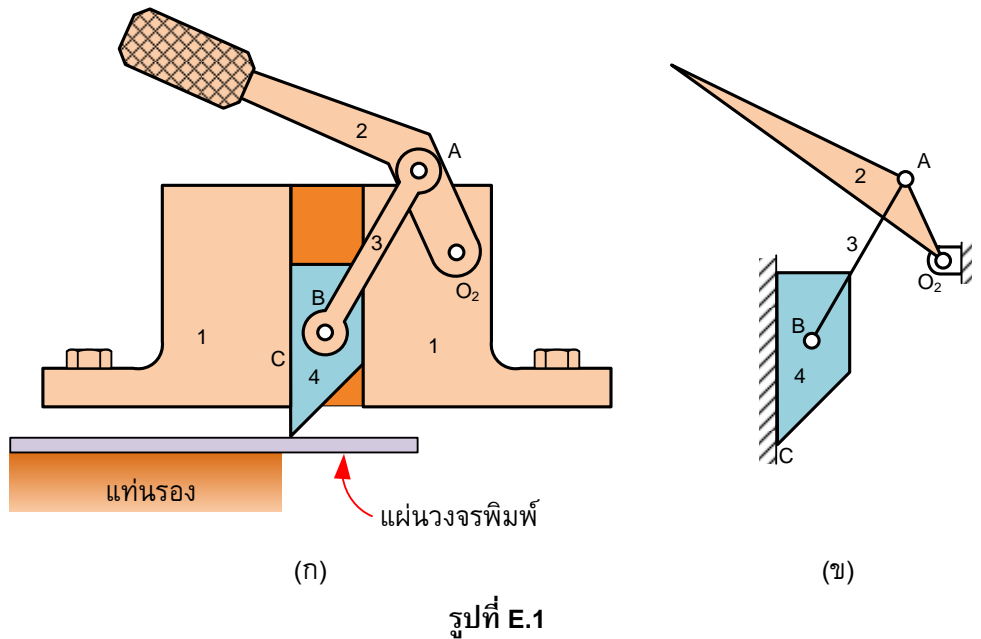


รูปที่ 1.14 แผนภาพคิเนแมติกของ (ก) เฟืองที่ขบกัน (ข) สายพาน (หรือโซ่) บนล้อสายพาน (หรือจานโซ่) (ค) ลูกเบี้ยว

ตัวอย่างที่ 1 ^[3] จากกลไกสำหรับตัดแผ่นวงจรพิมพ์ จงกำกับข้อต่อและจุดต่อทั้งหมดของกลไก ด้วยหมายเลขและตัวอักษร ตามลำดับ และเขียนแผนภาพคิเนแมติก

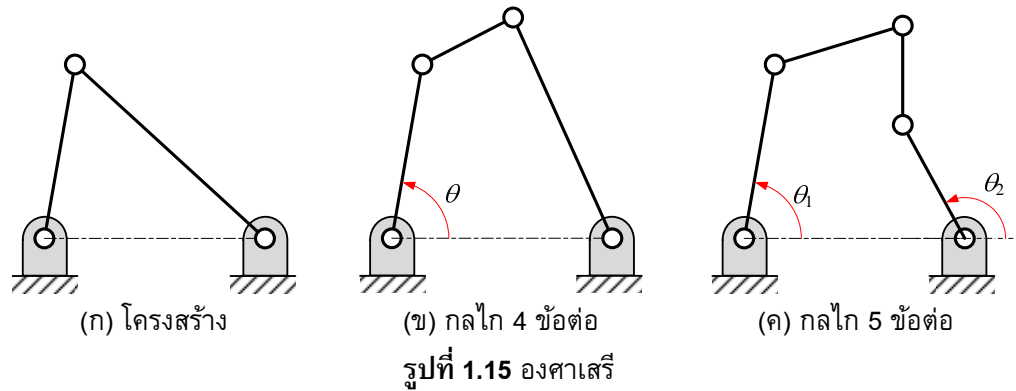


วิธีทำ กำหนดให้ตัวเรือนของเครื่องเป็นข้อต่อที่อยู่กับที่ ดังนั้นกำกับด้วยหมายเลข 1 ข้อต่อที่เคลื่อนที่ได้ที่เหลื้อมีดังนี้ ก้านโยก ใบมีด และก้านส่งการเคลื่อนที่จากก้านโยกไปยังใบมีด กำกับด้วยหมายเลข 2, 4 และ 3 ตามลำดับ (รูปที่ E.1(ก)) คู่สัมผัสแบบหมุนมี 3 จุด กำหนดให้เป็น O_2 (เพราะคู่สัมผัสเกิดจากข้อต่อหมายเลข 2 ต่อกับตัวเรือนซึ่งอยู่กับที่), A และ B และคู่สัมผัสแบบเลื่อนไถล 1 จุด กำหนดให้เป็น C จากนั้นจะได้รูปคิเนแมติกดังแสดงในรูปที่ E.1(ข)



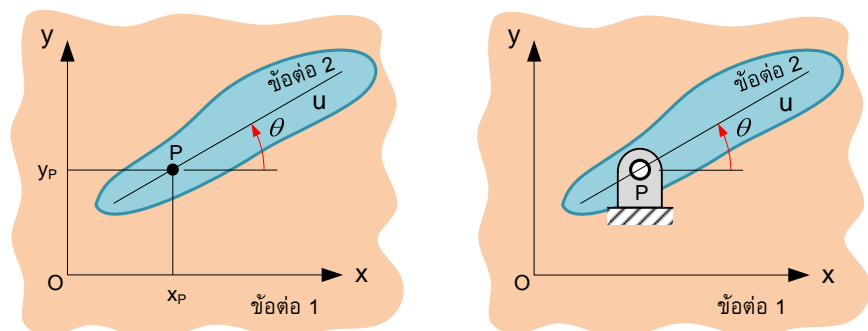
1.6 องศาเสรี

องศาเสรี (degree of freedom, DOF) ของระบบ คือ จำนวนตัวแปรอิสระที่ต้องกำหนดเพื่อให้ทราบตำแหน่งที่แน่ชัดของระบบ สำหรับใช้คิเนแมติกองศาเสรีหรือเรียกอีกอย่างว่า สภาพเคลื่อนที่ได้ (mobility) หมายถึงจำนวนตัวแปรอิสระที่ต้องกำหนดเพื่อให้ทราบตำแหน่งสัมพัทธ์ระหว่างข้อต่อต่าง ๆ ตัวอย่างเช่น โครงสร้างในรูปที่ 1.15(ก) มีองศาเสรีเท่ากับศูนย์ ซึ่งหมายความว่าตำแหน่งสัมพัทธ์ระหว่างข้อต่อทราบได้จากความยาวของข้อต่อแต่ละชิ้น ไม่จำเป็นต้องมีตัวแปรระบุตำแหน่งของข้อต่อต่าง ๆ เนื่องจากข้อต่อในโครงสร้างไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ ในรูปที่ 1.15(ข) ซึ่งเป็นกลไก 4 ข้อต่อจะมีองศาเสรีเท่ากับ 1 เพราะต้องการตัวแปรเพียงตัวเดียว เช่น θ ก็สามารถกำหนดตำแหน่งของข้อต่อทั้งหมดได้ กลไก 5 ข้อต่อในรูปที่ 1.15(ค) ต้องการตัวแปร 2 ตัว เช่น θ_1 และ θ_2 เพื่อให้กำหนดตำแหน่งของข้อต่อทั้งหมดได้ ดังนั้นกลไกจึงมีองศาเสรีเท่ากับ 2



โซคิเนแมติกจะเคลื่อนที่ได้ก็ต่อเมื่อมีจำนวนองศาเสรีเท่ากับ 1 หรือมากกว่า โครงสร้างที่เคลื่อนที่ไม่ได้จะมีจำนวนองศาเสรีน้อยกว่าหนึ่ง โซคิเนแมติกที่มีจำนวนองศาเสรีเท่ากับ 1 จัดเป็นโซเชิงบังคับ กลไกเกือบทั้งหมดที่ใช้ในเครื่องจักรกลทั่วไปมีการเคลื่อนที่เชิงบังคับ อย่างไรก็ตามกลไกควบคุมบางอย่างอาจมีข้อต่อที่ทำหน้าเป็นตัวขับเคลื่อนมากกว่า 1 ชิ้น ดังนั้นจำนวนองศาเสรีจึงเท่ากับจำนวนตัวขับเคลื่อนที่จำเป็นสำหรับการทำให้การเคลื่อนที่ของกลไกสามารถทำนายได้

จำนวนองศาเสรีของกลไกสามารถคำนวณได้จาก *เกณฑ์หรือสมการของ Gruebler* ซึ่งมีที่มาดังนี้ พิจารณาข้อต่อ 2 ชิ้น ซึ่งเคลื่อนที่บนระนาบที่ต่างกันแต่ขนานกันในรูปที่ 1.16(ก) ระบบพิกัด Oxy ติดอยู่กับข้อต่อหมายเลข 1 เพื่อใช้เป็นระนาบอ้างอิง พิจารณาเส้นตรง u ซึ่งลากผ่านจุด P บนข้อต่อหมายเลข 2 ตำแหน่งขณะใด ๆ ของข้อต่อหมายเลข 2 เทียบกับหมายเลข 1 ถูกกำหนดด้วยตัวแปร 3 ตัว คือ ระยะ x_p, y_p ของจุด P และมุม θ ของเส้นตรง u ตัวแปรทั้งสามนี้ก็คือองศาเสรี ดังนั้นข้อต่อหมายเลข 2 จึงมีจำนวนองศาเสรีเท่ากับ 3 ถ้าจุด P กลายเป็นจุดต่อแบบหมุน (รูปที่ 1.16(ข)) แล้ว x_p และ y_p จะเป็นค่าคงที่ ดังนั้นตำแหน่งใด ๆ ของข้อต่อหมายเลข 2 จึงกำหนดได้โดยใช้มุม θ เพียงตัวเดียว สรุปว่าจุดต่อแบบหมุน 1 จุดทำให้จำนวนองศาเสรีลดลงเท่ากับ 2 สำหรับกรณีนี้จำนวนองศาเสรีของข้อต่อหมายเลข 2 เท่ากับหนึ่ง



(ก) ข้อต่อหมายเลข 2 เคลื่อนที่ได้อิสระบนระนาบ

(ข) ข้อต่อหมายเลข 2 ถูกตรึงด้วยจุดต่อแบบหมุนที่จุด P

รูปที่ 1.16 องศาเสรีของข้อต่อ

พิจารณาโซ่คิเนแมติกแบบปิด ซึ่งประกอบด้วยข้อต่อ n ชั้น ต่อกันด้วยจุดต่อแบบหมุน j จุด ก่อนที่ข้อต่อทั้งหมดจะมาต่อกันนั้น ข้อต่อแต่ละชั้นจะมีจำนวนองศาเสรีเท่ากับ 3 ดังนั้นข้อต่อ n ชั้น จะมีจำนวนองศาเสรีเท่ากับ $3n$ เมื่อเลือกข้อต่อชั้นหนึ่งเป็นพื้นแล้วจำนวนข้อต่อที่เคลื่อนที่ได้จะเหลือ $n-1$ ชั้น เมื่อข้อต่อทั้งหมดมาต่อกัน จำนวนองศาเสรีจะลดลงเท่ากับ 2 สำหรับแต่ละจุดต่อ ดังนั้นจุดต่อ j จุด จะทำให้จำนวนองศาเสรีลดลงเท่ากับ $2j$ สุดท้ายแล้วจะได้สมการสำหรับคำนวณจำนวนองศาเสรีของโซ่คิเนแมติก หรือสมการของ Gruebler ดังนี้

$$DOF = 3(n-1) - 2j \quad (1.1)$$

ให้สังเกตด้วยว่าสมการนี้เกี่ยวข้องกับจำนวนข้อต่อและจำนวนจุดต่อ ไม่ได้คำนึงถึงความยาวและรูปทรงของกลไก

กลไกที่มีการเคลื่อนที่เชิงบังคับจะมีจำนวนองศาเสรีเท่ากับ 1 เมื่อแทนค่าในสมการที่ (1.1) จะได้

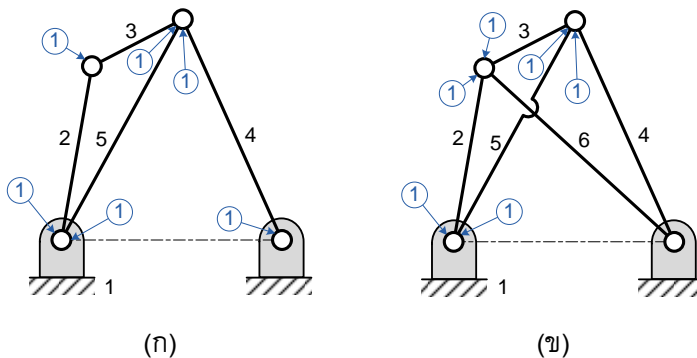
$$1 = 3(n-1) - 2j$$

จัดรูปสมการจะได้

$$2j - 3n + 4 = 0 \quad (1.2)$$

ย้อนกลับไปพิจารณารูปที่ 1.15 เพื่อประยุกต์สมการของ Gruebler สำหรับกลไกในรูปที่ 1.15(ก) จะได้ $n = 3$ และ $j = 3$ ดังนั้น $DOF = 3(3-1) - 2(3) = 0$ สรุปว่าเป็นโครงสร้างหรือโซ่ล๊อค สำหรับกลไกในรูปที่ 1.15(ข) จะได้ $n = 4$ และ $j = 4$ ดังนั้น $DOF = 3(4-1) - 2(4) = 1$ สรุปว่าเป็นโซ่คิเนแมติกเชิงบังคับ สำหรับกลไกในรูปที่ 1.15(ค) จะได้ $n = 5$ และ $j = 5$ ดังนั้น $DOF = 3(5-1) - 2(5) = 2$

พิจารณาตัวอย่างเพิ่มเติมในรูปที่ 1.17 ในรูปที่ 1.17(ก) มีข้อต่อเพิ่มขึ้น 1 ชั้น และจุดต่อเพิ่มขึ้น 2 รอย ดังนั้น $n = 5$ และ $j = 6$ และ $DOF = 3(5-1) - 2(6) = 0$ แสดงว่าเป็นโครงสร้างแบบ statically determinate ในรูปที่ 2.21(ข) ถ้าเพิ่มข้อต่ออีก 1 ชั้น จะได้ $n = 6$ และ $j = 8$ ดังนั้น $DOF = 3(6-1) - 2(8) = -1$ แสดงว่าเป็นโครงสร้างแบบ statically indeterminate

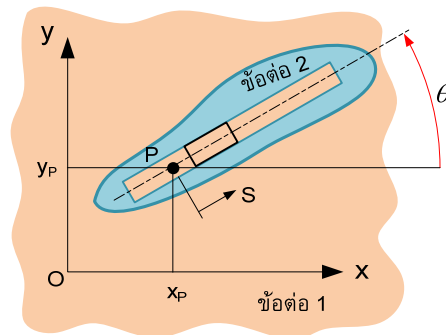


รูปที่ 1.17 กลไกตัวอย่างสำหรับคำนวณองศาเสรี (ตัวเลขในวงกลมคือจำนวนจุดต่อที่ถูกนับ)

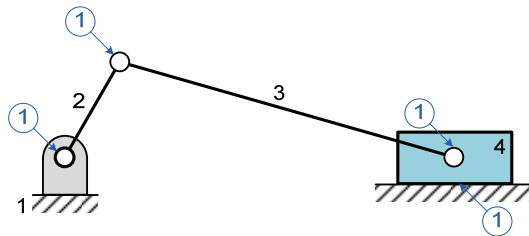
พิจารณากลไกที่มีคู่สัมผัสแบบเลื่อนไถลในรูปที่ 1.18 จากรูปข้อต่อหมายเลข 2 ถูกแบ่งสี่เหลี่ยมซึ่งตรึงอยู่กับข้อต่อหมายเลข 1 บังคับให้เลื่อนไปมาได้ตามแนวเอียง θ เท่านั้น ถ้ากำหนดจุด P เป็นจุดอ้างอิงสำหรับวัฏระยะเคลื่อนที่แล้ว ตำแหน่งของข้อต่อ 2 สามารถระบุได้ถ้าทราบระยะ S ดังนั้นคู่สัมผัสแบบเลื่อนไถลจึงมีจำนวนองศาเสรีเท่ากับหนึ่ง หรือกล่าวได้ว่าคู่สัมผัสแบบนี้สมมูลกับจุดต่อแบบหมุน 1 จุด

พิจารณากลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงในรูปที่ 1.19 จะได้ $n = 4$ และ $j = 4$ ดังนั้น $DOF = 3(4-1)-2(4) = 1$

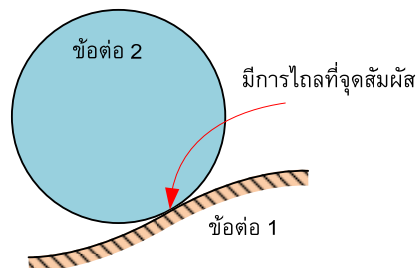
ในกรณีที่ข้อต่อชั้นหนึ่งกลิ้งและไถลไปบนข้อต่ออีกชั้นหนึ่ง (คู่ชั้นสูง) ดังรูปที่ 1.20 แล้วจำนวนองศาเสรีจะเท่ากับ 2 ดังนั้นต้องนับคู่สัมผัสแบบนี้เป็น 2 จุดต่อแบบหมุน และเพิ่มจำนวนข้อต่ออีก 1 ชั้น คู่สัมผัสแบบนี้มีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า จุดต่อแบบครึ่ง (half joint)



รูปที่ 1.18 องศาเสรีของกลไกที่มีคู่สัมผัสแบบเลื่อนไถล



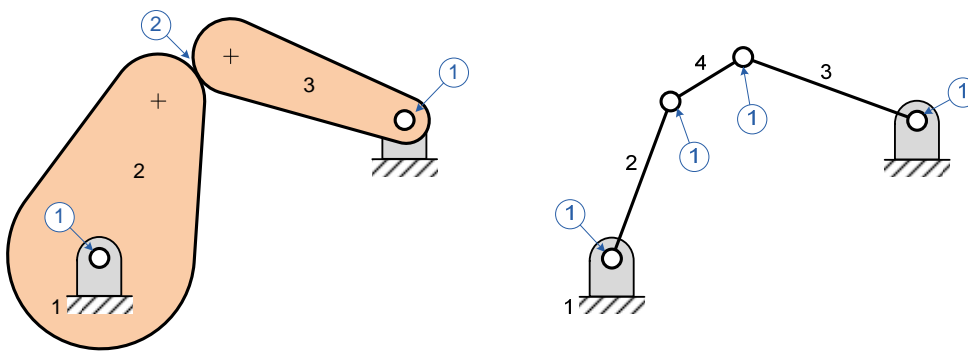
รูปที่ 1.19 คู่สัมผัสในกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยง



รูปที่ 1.20 คู่สัมผัสแบบกลิ้งและไถลพร้อมกัน

พิจารณากลไกในรูปที่ 1.21(ก) จะได้จำนวนข้อต่อเท่ากับ 3 ชั้น จำนวนจุดต่อแบบหมุน 2 ตำแหน่ง และคู่สัมผัสแบบกลิ้งพร้อมกับไถล 1 ตำแหน่ง หลังจากปรับคู่สัมผัสแบบกลิ้งพร้อมกับไถลให้เป็นจุดต่อแบบหมุนแล้วจะได้ จำนวนข้อต่อคือ 4 ชั้น และจำนวนจุดต่อแบบหมุนคือ $2+2 = 4$ ตำแหน่ง ดังนั้นจำนวนองศาเสรีคือ $3[(3+1)-1] - 2(2+2) = 1$ หากพิจารณากลไกนี้ให้ดีจะพบว่า ณ ตำแหน่งที่แสดงในรูป กลไกจะสมมูลกับกลไกในรูปที่ 1.21(ข) ซึ่งมีจำนวนองศาเสรีเท่ากับ $3(4-1)-2(4) = 1$

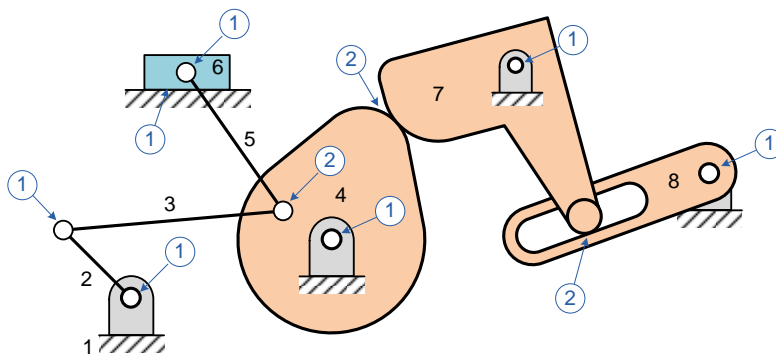
พิจารณากลไกที่ซับซ้อนขึ้นในรูปที่ 1.22 จากรูปจำนวนข้อต่อคือ 8 ชั้น จำนวนคู่สัมผัสแบบหมุน 8 ตำแหน่ง คู่สัมผัสแบบเลื่อนไถล 1 ตำแหน่ง และคู่สัมผัสแบบกลิ้งพร้อมกับไถล 2 ตำแหน่ง หลังจากปรับคู่สัมผัสแบบกลิ้งพร้อมกับไถลให้เป็นจุดต่อแบบหมุนแล้วจะได้ จำนวนข้อต่อคือ $8+2 = 10$ ชั้น และจำนวนจุดต่อแบบหมุนเป็น $(8+1) + 4 = 13$ ตำแหน่ง ดังนั้นจำนวนองศาเสรีคือ $3(10-1) - 2(13) = 1$



(ก)

(ข) กลไกสมมูล

รูปที่ 1.21 กลไกตัวอย่างที่มีคู่สัมผัสแบบกลิ้งและไถลพร้อมกัน



รูปที่ 1.22 กลไกตัวอย่างสำหรับคำนวณองศาเสรี

จำนวนองศาเสรีของกลไกสามารถหาได้จากสมการของ Kutzbach ซึ่งอยู่ในรูปต่อไปนี้

$$DOF = 3(n-1) - 2J_1 - J_2 \quad (1.3)$$

โดย J_1 คือ จำนวนของคู่สัมผัสแบบหมุนหรือเลื่อนไถล หรือจุดต่อแบบเต็ม (full joint)

J_2 คือ จำนวนของคู่สัมผัสแบบกึ่งพร้อมไถล หรือจุดต่อแบบครึ่ง

สำหรับกลไกในรูปที่ 1.22 ถ้าใช้สมการของ Kutzbach จะได้จำนวนองศาเสรีคือ $3(8-1) - 2(9) - 2 = 1$ จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่าการหาจำนวนองศาเสรีของกลไกด้วยสมการของ Kutzbach มีความสะดวกกว่าการใช้สมการของ Gruebler เพราะไม่ต้องมาปรับจำนวนข้อต่อและจำนวนจุดต่อแบบหมุนเมื่อกลไกมีคู่สัมผัสแบบกึ่งพร้อมไถล

1.7 การสังเคราะห์จำนวน^[4]

การสังเคราะห์จำนวน (number synthesis) หมายถึง การหาจำนวนข้อต่ออันดับต่าง ๆ ในกลไกที่มีจำนวนองศาเสรีเท่ากับที่กำหนด อันดับของข้อต่อในที่นี้หมายถึง ข้อต่อทวิภาค ข้อต่อไตรภาค ข้อต่อจตุรภาค ฯลฯ

ในที่นี้จะยกตัวอย่างการผสมผสานของข้อต่อให้เป็นกลไกซึ่งมีองศาเสรีเท่ากับ 1 โดยจะจำนวนข้อต่อตั้งแต่ 4 ชั้น ถึง 8 ชั้น และข้อต่อที่มีจุดต่อตั้งแต่ 2 จุด ถึง 6 จุด (hexagonal link) อย่างไรก็ดีเพื่อให้เข้าใจง่ายจะสมมติว่าจุดต่อทั้งหมดเป็นจุดต่อแบบเต็ม

สมมติฐานที่ต้องทราบก่อนคือ ถ้าจุดต่อทั้งหมดเป็นจุดต่อแบบเต็มแล้ว จำนวนองศาเสรีที่เป็นเลขคู่ต้องการจำนวนข้อต่อเป็นเลขคู่ และกลับกันถ้าจำนวนองศาเสรีที่ต้องการเป็นเลขคู่แล้วจำนวนข้อต่อที่ต้องการจะเป็นเลขคู่

รายละเอียดของการพิสูจน์สมมติฐานข้างต้นมีดังนี้

กำหนดให้ n แทนจำนวนข้อต่อ j แทนจำนวนจุดต่อ DOF แทนจำนวนองศาเสรี และ M, N เป็นจำนวนเต็มบวก

จัดรูปสมการของ Gruebler (สมการ 1.1) ใหม่จะได้

$$j = \frac{3}{2}(n-1) - \frac{DOF}{2} \quad (1.4)$$

พิจารณากรณีที่ 1 จำนวนข้อต่อและจำนวนองศาเสรีเป็นเลขคู่ หรือ $n = 2N$ และ $DOF = 2M$ เมื่อแทนค่าในสมการที่ (1.4) จะได้

$$j = 3N - M - \frac{3}{2}$$

ผลลัพธ์นี้แสดงว่าจำนวนจุดต่อไม่มีทางที่จะเป็นจำนวนเต็ม

พิจารณากรณีที่ 2 จำนวนข้อต่อและจำนวนองศาเสรีเป็นเลขคี่ หรือ $n = 2N - 1$ และ $DOF = 2M - 1$ เมื่อแทนค่าในสมการที่ (1.4) จะได้

$$j = 3N - M - \frac{5}{2}$$

ผลลัพธ์นี้แสดงว่าจำนวนจุดต่อไม่มีทางที่จะเป็นจำนวนเต็ม

พิจารณากรณีที่ 3 จำนวนข้อต่อเป็นเลขคู่ แต่จำนวนองศาเสรีเป็นเลขคี่ หรือ $n = 2N$ และ $DOF = 2M - 1$ เมื่อแทนค่าในสมการที่ (1.4) จะได้

$$j = 3N - M - 2$$

ผลลัพธ์นี้แสดงว่าจำนวนจุดต่อเป็นจำนวนเต็มบวกเมื่อ $DOF \geq 1$ และ $n \geq 2$

พิจารณากรณีที่ 4 จำนวนข้อต่อเป็นเลขคี่ แต่จำนวนองศาเสรีเป็นเลขคู่ หรือ $n = 2N - 1$ และ $DOF = 2M$ เมื่อแทนค่าในสมการที่ (1.4) จะได้

$$j = 3N - M - 3$$

ผลลัพธ์นี้แสดงว่าจำนวนจุดต่อเป็นจำนวนเต็มบวกเมื่อ $DOF \geq 1$ และ $n \geq 2$

การพิสูจน์ข้างต้นแสดงว่า กลไกที่มีองศาเสรีเท่ากับหนึ่ง (เลขคี่) มีจำนวนข้อต่อเท่ากับ 2, 4, 6, 8,... ขึ้น ก่อนที่จะเริ่มการสังเคราะห์จำนวน สมมติสัญลักษณ์ที่แทนอันดับของข้อต่อดังนี้

B แทน จำนวนข้อต่อทวิภาค (binary link) หรือจำนวนข้อต่ออันดับ 2

T แทน จำนวนข้อต่อไตรภาค (ternary link) หรือจำนวนข้อต่ออันดับ 3

Q แทน จำนวนข้อต่อจตุรภาค (quaternary link) หรือจำนวนข้อต่ออันดับ 4

P แทน จำนวน pentagonal link หรือจำนวนข้อต่ออันดับ 5

H แทน จำนวน hexagonal link หรือจำนวนข้อต่ออันดับ 6

ดังนั้นจำนวนข้อต่อในกลไกคือ

$$n = B + T + Q + P + H \quad (1.5)$$

จำนวนจุดต่อทั้งหมดก่อนประกอบเป็นกลไกมีค่าเท่ากับ ผลคูณของอันดับของข้อต่อกับจำนวนข้อต่ออันดับนั้น หรือ

$$Node = 2B + 3T + 4Q + 5P + 6H$$

จุดต่อ 1 จุดที่เกิดจากข้อต่อมาประกอบกันจะใช้จำนวน Node เท่ากับ 2 ดังนั้นจำนวนจุดต่อในกลไกจะเท่ากับ

$$j = \frac{2B + 3T + 4Q + 5P + 6H}{2} \quad (1.6)$$

แทนสมการที่ (1.5) และ (1.6) ในสมการของ Gruebler (สมการที่ 1.1) จะได้

$$DOF = 3(B + T + Q + P + H - 1) - 2\left(\frac{2B + 3T + 4Q + 5P + 6H}{2}\right)$$

$$\text{จัดรูปจะได้} \quad DOF = B - Q - 2P - 3H - 3 \quad (1.7)$$

จากสมการที่ (1.7) จะเห็นว่าจำนวนข้อต่อไตรภาคไม่มีผลต่อจำนวนองศาเสรี
แทนสมการที่ (1.4) ในด้านซ้ายของสมการที่ (1.6) จะได้

$$\frac{3}{2}(n-1) - \frac{DOF}{2} = \frac{2B + 3T + 4Q + 5P + 6H}{2}$$

$$\text{หรือ} \quad 3n - 3 - DOF = 2B + 3T + 4Q + 5P + 6H \quad (1.8)$$

จัดรูปสมการที่ (1.5) ใหม่ดังนี้

$$B = n - T - Q - P - H \quad (1.9)$$

แทนในสมการที่ (1.8) จะได้

$$3n - 3 - DOF = 2n + T + 2Q + 3P + 4H$$

$$\text{หรือ} \quad n - 3 - DOF = T + 2Q + 3P + 4H \quad (1.10)$$

สำหรับกรณี $DOF = 1$ สมการที่ (1.9) จะลดรูปเหลือ

$$n - 4 = T + 2Q + 3P + 4H \quad (1.11)$$

การสังเคราะห์จำนวนที่จะกล่าวต่อไปก็คือการแก้สมการที่ (1.11) เพื่อหาจำนวนข้อต่ออันดับต่าง ๆ ในกลไก

กรณีที่ 1 จำนวนข้อต่อเท่ากับ 2 ชั้น ($n = 2$)

แทนค่า $n = 2$ ในสมการที่ (1.10) จะได้เทอมทางซ้ายมือติดลบ ดังนั้นกลไกจึงมีจำนวนข้อต่อ 2 ชั้นไม่ได้

กรณีที่ 2 จำนวนข้อต่อเท่ากับ 4 ชั้น ($n = 4$)

$$\text{แทนค่า } n = 4 \text{ ในสมการที่ (1.11) จะได้ } T + 2Q + 3P + 4H = 0$$

แต่เนื่องจากจำนวนข้อต่อเป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้นสมการข้างต้นจะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ $T = Q = P = H = 0$ หรือกลไกต้องไม่มีข้อต่ออันดับ 3 ขึ้นไป หากพิจารณาสมการที่ (1.9) จะเห็นว่ากลไกประกอบด้วยข้อต่อทวิภาค 4 กลไกแบบนี้มีชื่อเรียกว่า กลไก 4 ข้อต่อ (fourbar linkage) รายละเอียดจะกล่าวในบทที่ 2 หัวข้อที่ 2.2

กรณีที่ 3 จำนวนข้อต่อเท่ากับ 6 ชั้น ($n = 6$)

$$\text{แทนค่า } n = 6 \text{ ในสมการที่ (1.11) จะได้ } T + 2Q + 3P + 4H = 2 \text{ จัดรูปใหม่จะได้}$$

$$T + 2Q = 2 - (3P + 4H)$$

เพื่อให้เทอมทางซ้ายมือเป็นจำนวนเต็มบวก ทำให้จำนวนข้อต่ออันดับ 5 และ 6 ต้องเท่ากับศูนย์ (หรือ $P = H = 0$) สมการจะลดรูปเหลือ

$$T + 2Q = 2$$

หรือ

$$T = 2 - 2Q$$

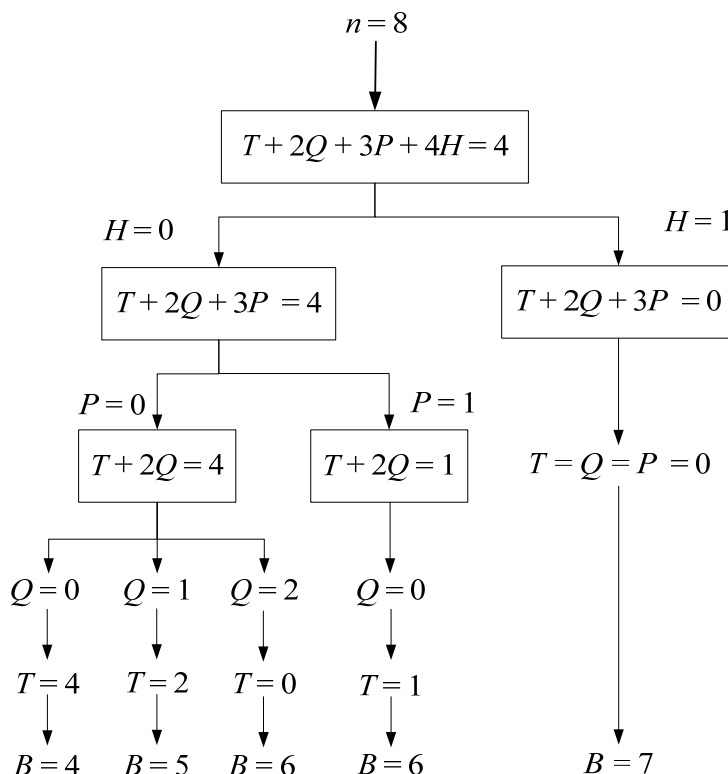
สมการข้างต้นจะเป็นไปได้เมื่อ $Q = 0$ หรือ 1 ซึ่งจะทำให้ $T = 2$ และ 0 ตามลำดับ

พิจารณาสมการที่ (1.9) เพื่อหาจำนวนข้อต่อทวิภาค

- ถ้า $Q = 0, T = 2$ จะได้ $B = 6 - 2 - 0 = 4$ ชั้น
- ถ้า $Q = 1, T = 0$ จะได้ $B = 6 - 0 - 1 = 5$ ชั้น

กรณีที่ 4 จำนวนข้อต่อเท่ากับ 8 ชั้น ($n = 8$)

แทนค่า $n = 8$ ในสมการที่ (1.11) จะได้ $T + 2Q + 3P + 4H = 4$ ขั้นตอนการแก้สมการนี้แสดงอยู่ในรูปที่ 1.23 จากรูปการลดรูปสมการได้จากการแทนค่าจำนวนข้อต่อที่เป็นไปได้โดยไล่จากอันดับสูงสุด (H) ไปยังอันดับต่ำสุดที่อยู่ถัดไป หลังจากทำเช่นนี้จนได้จำนวนข้อต่ออันดับที่สุด (B) จะพบว่ากรณีนี้มีการผสมผสานของข้อต่อได้ทั้งสิ้น 5 แบบ



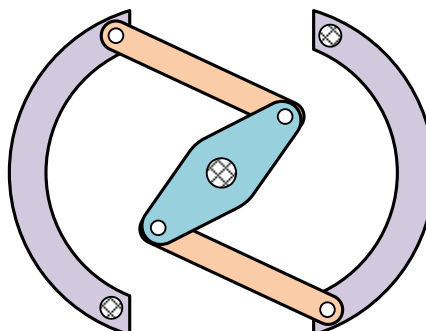
รูปที่ 1.23 การสังเคราะห์จำนวนของกลไก 8 ข้อต่อที่มีจำนวนองศาเสรีเท่ากับ 1

ตารางที่ 1.1 สรุปรูปแบบการผสมผสานกลไกที่มีจำนวนข้อต่อตั้งแต่ 4 ข้อ ถึง 8 ข้อ และมีข้อต่ออันดับ 2 ถึง 6 ซึ่งมีจำนวนองศาเสรีเท่ากับ 1

ตารางที่ 1.1 สรุปผลการสังเคราะห์จำนวนกลไกที่มีจำนวนองศาเสรีเท่ากับหนึ่ง

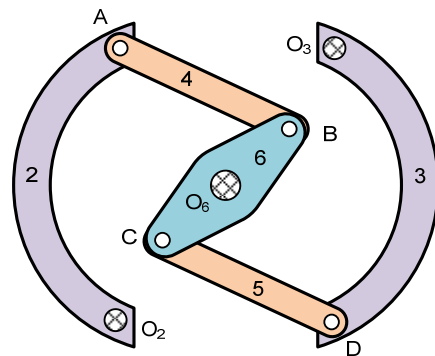
จำนวนข้อต่อ (ชั้น)	ชนิด (อันดับ) ข้อต่อ				
	ทวิภาค	ไตรภาค	จตุรภาค	อันดับ 5	อันดับ 6
4	4	0	0	0	0
6	4	2	0	0	0
	5	0	1	0	0
8	4	4	0	0	0
	5	2	1	0	0
	6	0	2	0	0
	6	1	0	1	0
	7	0	0	0	1

ตัวอย่างที่ 2 ^[4] จงหาจำนวนองศาอิสระของกลไกต่อไปนี้ หากกลไกมีจำนวนองศาอิสระเท่ากับ 1 แล้วจงเปรียบเทียบว่ากลไกนี้สอดคล้องกับการสังเคราะห์จำนวนรูปแบบใดในตารางที่ 1.1
หมายเหตุ วงกลมเล็กที่แรงาเป็นเส้นกากบาทคือจุดต่อที่ยึดกับพื้น



วิธีทำ เขียนหมายเลขและตัวอักษรกำกับข้อต่อและจุดต่อดังแสดงในรูปที่ E.1 จากรูปจะได้จำนวนข้อต่อ n เท่ากับ 6 และจำนวนจุดต่อ j เท่ากับ 7 จุด จากสมการที่ (1.1) จะได้จำนวนองศาเสรีของกลไกนี้คือ $DOF = 3(6 - 1) - 2(7) = 1$

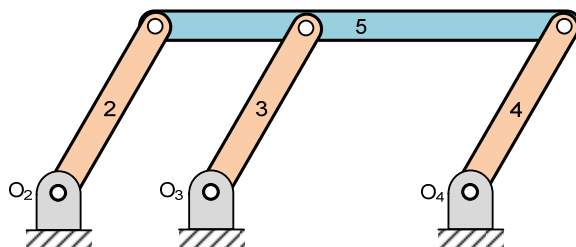
กลไกนี้ประกอบด้วยข้อต่อทวิภาคเท่ากับ 4 ข้อ คือข้อต่อหมายเลข 2, 3, 4 และ 5 และประกอบด้วยข้อต่อไตรภาค 2 ข้อ คือข้อต่อหมายเลข 1 (พื้นดิน) กับ 6 ดังนั้นสอดคล้องกับแถวที่สองของตารางที่ 1.1



รูปที่ E.1

1.8 ปฏิสัมพันธ์

ปฏิสัมพันธ์ (paradox) ในที่นี้หมายถึง กรณีที่ผลการคำนวณจำนวนองศาเสรีด้วยสมการของ Gruebler ไม่สอดคล้องกับพฤติกรรมจริงของกลไก พิจารณากลไกในรูปที่ 1.24 จากรูปจำนวนข้อต่อเท่ากับ 5 ชิ้น และจำนวนจุดต่อเท่ากับ 6 ดังนั้นจำนวนองศาเสรีคือ $3(5-1) - 2(6) = 0$ หากพิจารณาผลการคำนวณจะสรุปได้ว่ากลไกนี้เป็นโครงสร้างเพราะเคลื่อนที่ไม่ได้ แต่ถ้าพิจารณารูปจะเห็นว่ากลไกสามารถเคลื่อนที่ได้ (สมมติว่าข้อต่อหมายเลข 2,3 และ 4 ยาวเท่ากัน) โดยมีจำนวนองศาเสรีเท่ากับ 1



รูปที่ 1.24 กลไกที่มีจำนวนองศาเสรีไม่สอดคล้องกับที่คำนวณด้วยสมการของ Gruebler

เอกสารอ้างอิง

- [1] <http://em-ntserver.unl.edu/Mechanics-Pages/Luke-schreier/unzip/Tension%20and%20Compression%20in%20Connecting%20Rods%20VI.htm>
- [2] <http://www.heal-a-seal.com/ENGINE6500X491.jpg>
- [3] Myszka, D.H. *Machines and Mechanisms : Applied Kinematic Analysis*. Prentice Hall, 2002.
- [4] Norton, R.L. *Design of Machinery*, 2nd eds. McGraw-Hill, 2002, p. 33-36.