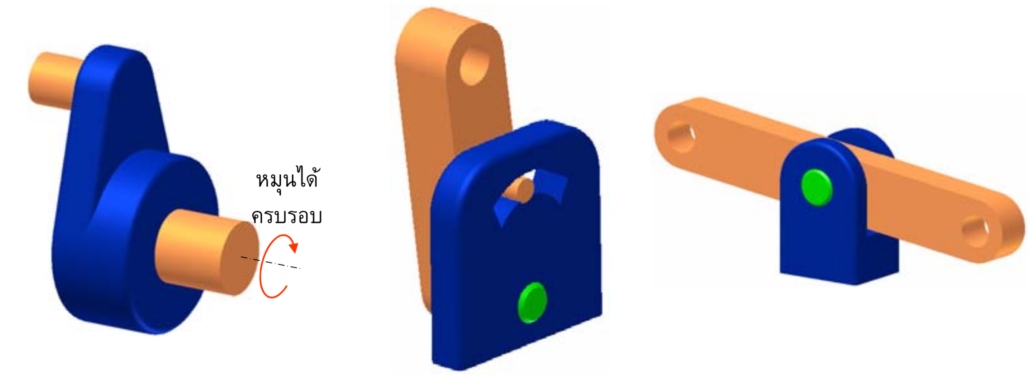
บทที่ 2
ลิงค์เกจ

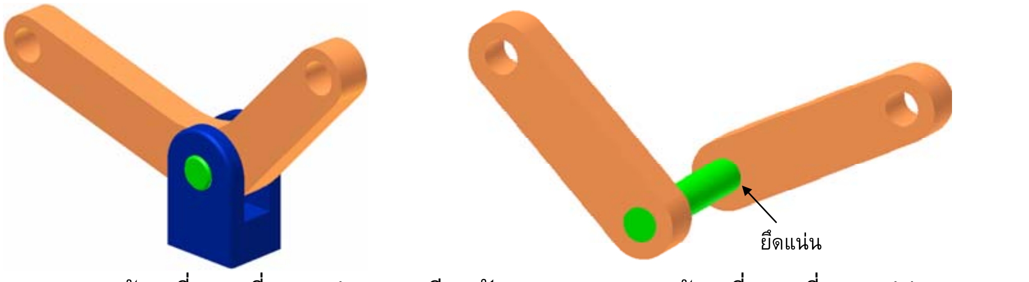
2.1 บทนำ

Hartenberg และ Denavit เสนอให้เรียกกลไกที่ประกอบด้วยคู่สัมผัสขั้นต่ำว่า *ลิงค์เกจ (linkage)* เพื่อให้แตกต่างจากกลไกทั่ว ๆ ไป อย่างไรก็ตาม คำว่า “ลิงค์เกจ” ได้ถูกใช้กันทั่วไปในความหมายเดียวกันกับคำว่า “กลไก” ในที่นี้ลิงค์เกจจะประกอบด้วยข้อต่อแบบต่าง ๆ มาต่อกัน แต่จะไม่รวมเฟือง ลูกเบี้ยว สายพาน และโซ่

โดยทั่วไปข้อต่อจะมีชื่อเฉพาะตามลักษณะการเคลื่อนที่หรือหน้าที่ของข้อต่อ *ข้อเหวี่ยง (crank)* คือข้อต่อที่หมุนได้รอบแกนหมุนซึ่งอยู่กับที่ดังรูปที่ 2.1(ก) *ก้านโยก (lever หรือ rocker)* คือข้อต่อที่ไม่สามารถหมุนรอบแกนหมุนซึ่งอยู่กับที่ได้ครบรอบดังรูปที่ 2.1(ข) *แขนแกว่ง (rocker arm)* คือก้านโยกที่มีจุดหมุนอยู่ใกล้กับ กับจุดกึ่งกลางของก้านโยกดังรูปที่ 2.1(ค) ถ้าแขนแกว่งงอทำมุมกันที่จุดซึ่งเป็นแกนหมุนแล้วจะเรียกว่า *ข้อเหวี่ยงงอ (bell-crank)* ดังรูปที่ 2.1(ง) แขนทั้งสองของข้อเหวี่ยงงออาจอยู่บนเพลาเดียวกันแต่อยู่บนระนาบต่างกันก็ได้ดังรูปที่ 2.1(จ))



(ก) ข้อเหวี่ยง (ข) ก้านโยก (ค) แขนแกว่ง



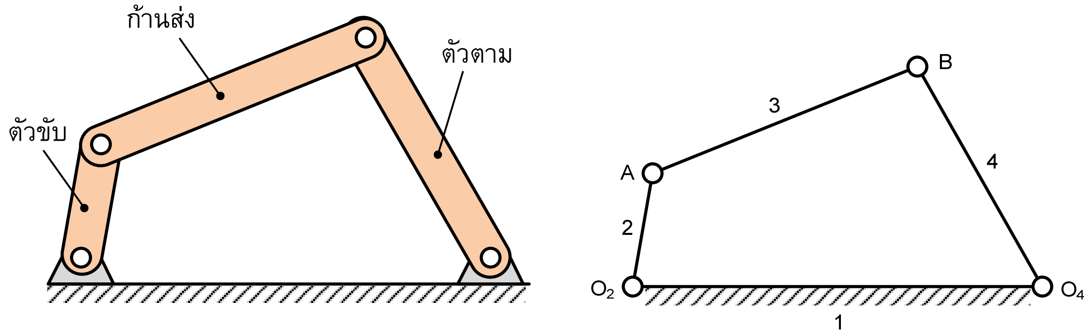
(ง) ข้อเหวี่ยงงอที่แขนอยู่ระนาบเดียวกัน (จ) ข้อเหวี่ยงงอที่แขนอยู่ต่างระนาบ

รูปที่ 2.1 ข้อต่อชนิดต่าง ๆ

2.2 กลไก 4 ข้อต่อ

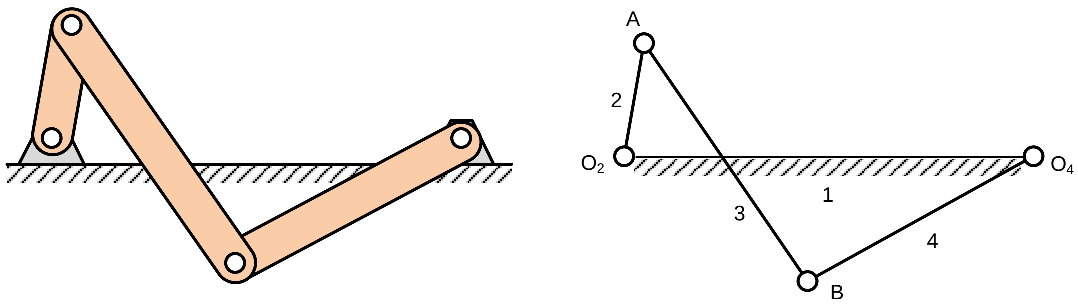
กลไกที่มีองศาเสรีเท่ากับ 1 ที่ไม่ซับซ้อนแต่มีความสำคัญชนิดหนึ่งคือ *กลไก 4 ข้อต่อ (fourbar linkage)* กลไกชนิดนี้ประกอบด้วยข้อต่อทวิภาค 4 ชิ้น มาต่อกันโดยจุดต่อเป็นคู่สัมผัสแบบหมุนดังรูปที่ 2.2 ข้อต่อหมายเลข 1 เป็นข้อต่อที่อยู่กับที่เรียกว่า *แท่นเครื่อง (frame)* ข้อต่อหมายเลข 2 ทำหน้าที่เป็น*ตัวขับ (driver)* ข้อต่อหมายเลข 4 เป็น*ตัวตาม (follower)* และข้อต่อหมายเลข 3 ซึ่งทำหน้าที่ส่งทอดการเคลื่อนที่จากข้อต่อหมายเลข 2 ไปยังข้อต่อหมายเลข 4 มีชื่อเรียกว่า *ก้านส่ง (coupler หรือ connecting rod)* ข้อต่อหมายเลข 2 และ 4 มีชื่อเรียกรวมกันว่า *ข้อต่อด้านข้าง (side link)* ข้อต่อด้านข้างที่หมุนได้ครบรอบเรียกว่าข้อเหวี่ยง แต่ถ้าหมุนหมุนได้ไม่ครบรอบจะเรียกว่าก้านโยก

กลไก 4 ข้อต่อในรูปที่ 2.2(ก) คือ *กลไก 4 ข้อต่อแบบเปิด (opened fourbar)* ส่วนรูปที่ 2.2 (ข) คือ *กลไก 4 ข้อต่อแบบไขว้ (crossed fourbar)* กลไก 4 ข้อต่อนี้ถูกนำไปใช้ในงานต่าง ๆ มากมาย เช่น ที่ปัดน้ำฝนของกระจกหน้ารถยนต์ เครื่องพิมพ์ดีด และกลไกบังคับเลี้ยวของล้อหน้ารถยนต์ เป็นต้น



แผนภาพคิเนแมติก

(ก) กลไก 4 ข้อต่อแบบเปิด



แผนภาพคิเนแมติก

(ข) กลไก 4 ข้อต่อแบบไขว้

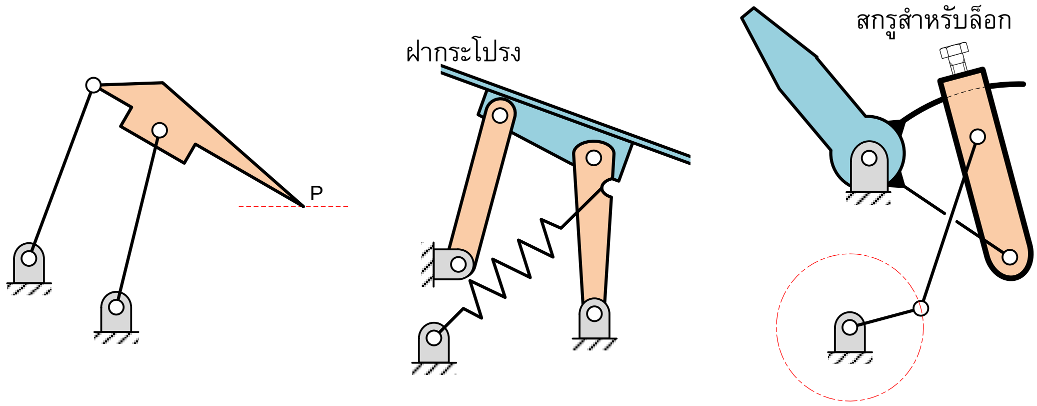
รูปที่ 2.2 กลไก 4 ข้อต่อ

กลไก 4 ข้อต่ออาจแบ่งเป็นชนิดต่าง ๆ ดังนี้

(ก) Path generation คือ กลไก 4 ข้อต่อที่สนใจการเคลื่อนที่ของจุด ๆ หนึ่งในกลไกว่าอยู่บนเส้นทางที่กำหนด เช่นจุด P ของ level luffing crane ในรูปที่ 2.3(ก) ที่เคลื่อนที่บนเส้นทางซึ่งเกือบเป็นเส้นตรง

(ข) Motion generation คือ กลไก 4 ข้อต่อที่สนใจการเคลื่อนที่ของก้านส่งว่าเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่งต่าง ๆ ที่กำหนด เช่น การเคลื่อนที่ของฝากระโปรงรถยนต์เมื่อเทียบกับตัวรถในรูปที่ 2.3(ข)

(ค) Function generation คือ กลไก 4 ข้อต่อที่สนใจสหสัมพันธ์ (correlation) ระหว่างการเคลื่อนที่ (หรือแรง) ของตัวขับกับตัวตาม เช่น เครื่องฉีดน้ำสนามที่สามารถปรับระยะการแกว่งของหัวฉีดด้วยการปรับความยาวและมุมของข้อต่อส่งออกในรูปที่ 2.3(ค)



(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 2.3 ตัวอย่างกลไก 4 ข้อต่อ

การแบ่งชนิดของกลไก 4 ข้อต่ออาจใช้เงื่อนไขของกราชอฟ (Grashof condition) ดังรายละเอียดต่อไปนี้ กำหนดให้

s เท่ากับ ความยาวของข้อต่อที่*สั้นที่สุด*

l เท่ากับ ความยาวของข้อต่อที่*ยาวที่สุด*

และ p, q เท่ากับ ความยาวของข้อต่อที่เหลือ

เงื่อนไขของกราชอฟกล่าวว่า กลไก 4 ข้อต่อจะมีข้อต่ออย่างน้อยหนึ่งชิ้นที่หมุนครบรอบ ถ้า

$$s + l \leq p + q \tag{2.1}$$

และข้อต่อ 3 ข้อต่อจะแกว่งไปมาถ้า

$$s + l > p + q \tag{2.2}$$

กลไกที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (2.1) เรียกว่า *กลไกของกราชอฟ(Grashof fourbar linkage)* แต่ถ้าไม่สอดคล้องจะเรียกว่า *non-Grashof fourbar linkage* ดังนั้นเกณฑ์ของกราชอฟสามารถแบ่งกลไก 4 ข้อต่อ ได้ 5 ชนิด ตามลักษณะการเคลื่อนที่ซึ่งแตกต่างกัน

ตารางที่ 2.1 ชนิดของกลไก 4 ข้อต่อ

กรณีที่	เงื่อนไข	ตำแหน่งข้อต่อที่สั้นที่สุด	ชนิดของกลไก
1	$s+l<p+q$	แท่นเครื่อง	ข้อเหวี่ยงคู่
2		ข้อต่อด้านข้าง	ข้อเหวี่ยง-แขนแกว่ง
3		ก้านส่ง	แขนแกว่งคู่
4	$s+l=p+q$	ตำแหน่งใดก็ได้	กลไกที่มีจุดเปลี่ยน
5	$s+l>p+q$	ตำแหน่งใดก็ได้	แขนแกว่งสามอัน

กรณีที่ 1 ข้อเหวี่ยงคู่ (double crank หรือ drag link mechanism)

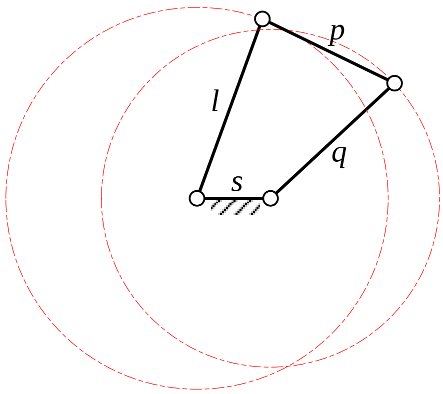
กลไก 4 ข้อต่อแบบนี้ แสดงอยู่ในรูปที่ 2.4(ก) จากรูปข้อต่อที่สั้นที่สุดจะเป็นแท่นเครื่อง ข้อต่อด้านข้างทั้งคู่จะหมุนได้ครบรอบ ถ้าข้อต่อด้านข้างตัวหนึ่งเป็นตัวขับที่หมุนด้วยความเร็วคงที่แล้ว ข้อต่อด้านข้างอันที่เหลือจะเป็นตัวตามที่หมุนด้วยความเร็วต่าง ๆ กันในระหว่างรอบการเคลื่อนที่ กล่าวคือบางจังหวะจะหมุนช้าและบางจังหวะจะหมุนเร็ว แต่ทั้งตัวขับและตัวถูกขับจะหมุนครบรอบพร้อมกัน

กรณีที่ 2 ข้อเหวี่ยง-แขนแกว่ง (crank-rocker mechanism)

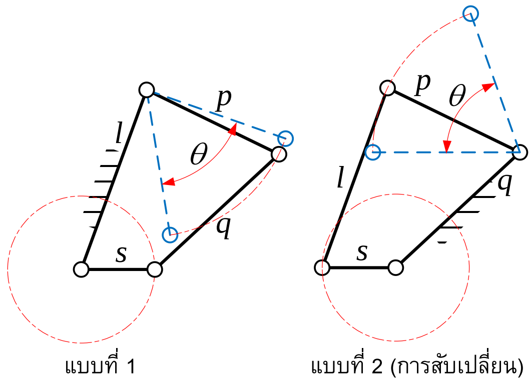
กลไก 4 ข้อต่อแบบนี้ แสดงอยู่ในรูปที่ 2.4(ข) ในกรณีนี้จะเกิดกลไกได้ 2 กรณี คือ กรณีข้อต่อด้านข้างชิ้นที่ยาว l เป็นแท่นเครื่อง (รูปซ้าย) และกรณีที่ชิ้นที่ยาว q เป็นแท่นเครื่อง (รูปขวา) กลไกทั้งสองชนิดจะมีข้อต่อที่สั้นที่สุดเป็นข้อต่อที่หมุนครบรอบ (หรือเรียกว่าข้อเหวี่ยง) ขณะที่ข้อต่อที่เป็นตัวตามจะแกว่งไปมาเป็นมุม θ

กรณีที่ 3 แขนแกว่งคู่ (double rocker mechanism)

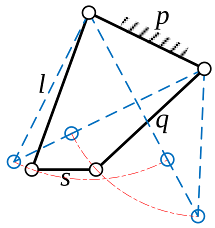
กลไก 4 ข้อต่อแบบนี้แสดงอยู่ในรูปที่ 2.4(ค) ในรูปกำหนดให้ข้อต่อที่อยู่ตรงข้ามกับข้อต่อที่สั้นที่สุดจะเป็นแท่นเครื่อง ข้อต่อด้านข้างของแท่นเครื่องทั้งคู่จะแกว่งไปมา และจะมีเพียงก้านส่ง (ข้อต่อที่สั้นที่สุด) เท่านั้นที่หมุนครบรอบ



(ก) ข้อเหวี่ยงคู่



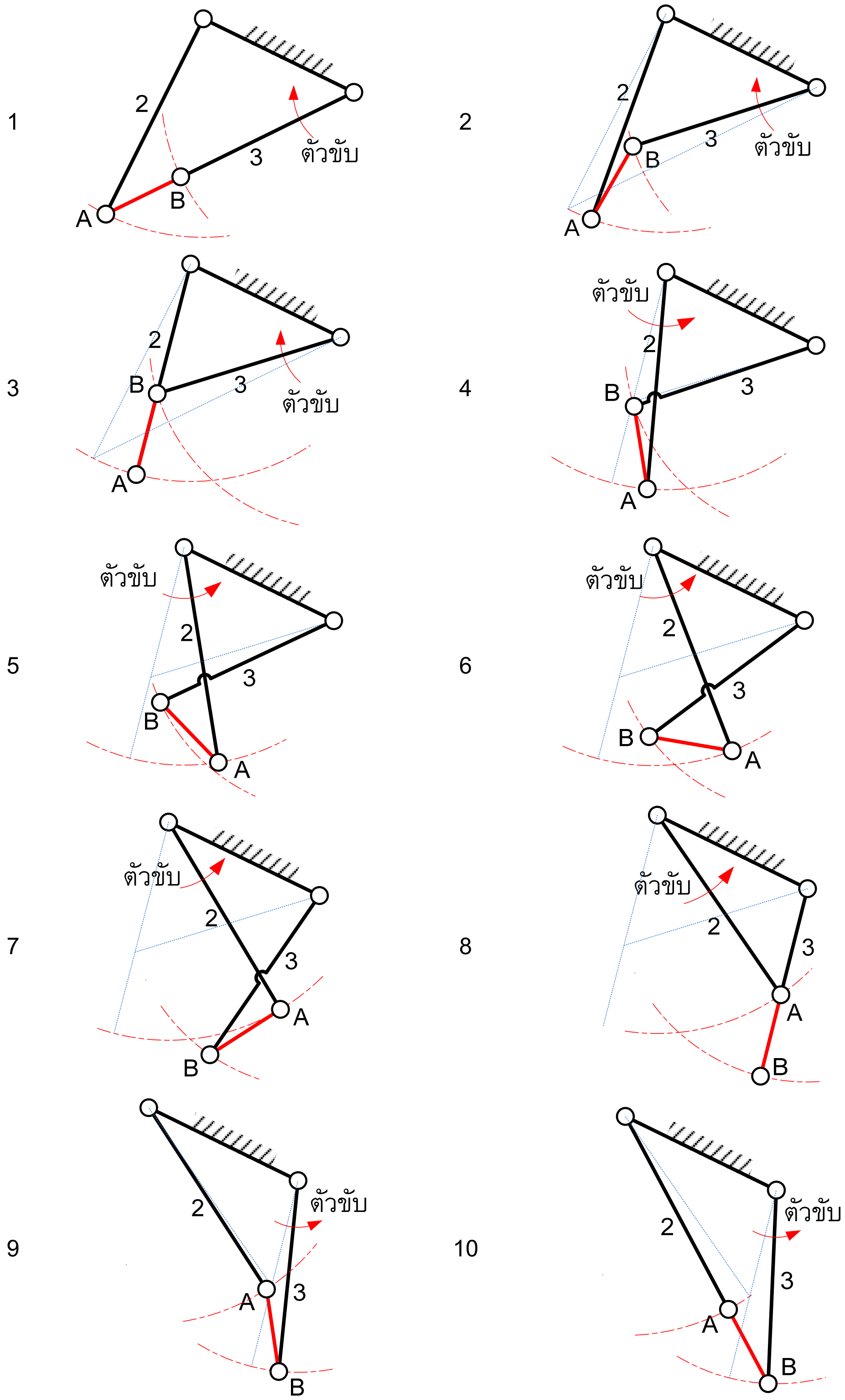
(ข) ข้อเหวี่ยง-แขนแกว่ง



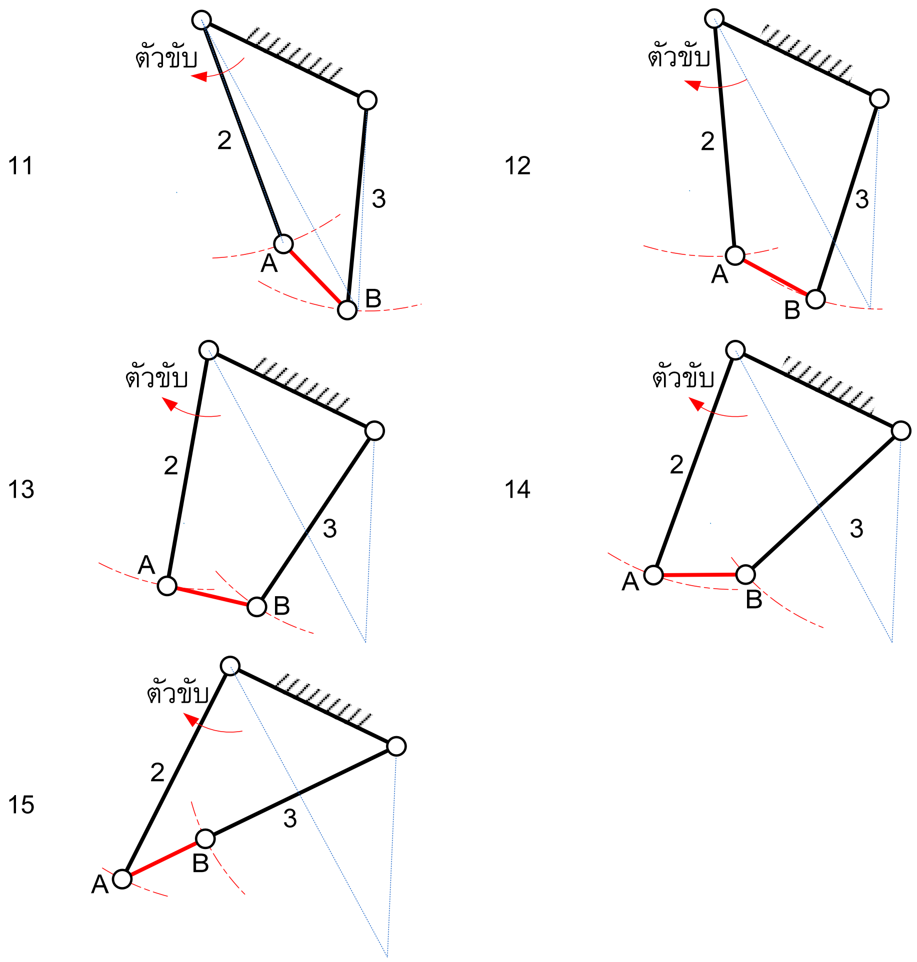
(ค) แขนแกว่งคู่

รูปที่ 2.4 ชนิดของกลไก 4 ข้อต่อ ตามเกณฑ์ของกราชอฟ

ลักษณะการเคลื่อนที่ของก้านส่งที่เวลาต่าง ๆ แสดงในรูปที่ 2.5 โดยมีรายละเอียดดังนี้ จังหวะที่ 1 กลไกอยู่ที่ตำแหน่งซ้ายสุด (ตำแหน่งจุดตายถ้าข้อต่อหมายเลข 2 เป็นตัวขับ หรือตำแหน่งขีดจำกัดถ้าข้อต่อ 3 เป็นตัวขับ) แต่เพื่อให้กลไกเคลื่อนที่ได้ข้อต่อหมายเลข 3 จึงเปลี่ยนมาเป็นตัวขับแทนดังแสดงในจังหวะที่ 2 และ 3 ตามลำดับ ในจังหวะที่ 3 กลไกจะเคลื่อนที่ต่อไม่ได้ถ้าข้อต่อหมายเลข 3 ยังเป็นตัวขับ ดังนั้นข้อต่อหมายเลข 2 จึงเป็นตัวขับดังแสดงในจังหวะที่ 4 ถึง 8 เส้นจางในจังหวะที่ 4 ถึง 8 คือตำแหน่งกลไกในจังหวะที่ 3 ในจังหวะที่ 8 กลไกจะเคลื่อนที่ต่อไม่ได้ถ้าข้อต่อหมายเลข 2 เป็นตัวขับ ดังนั้นข้อต่อหมายเลข 3 จึงเป็นตัวขับแทนดังแสดงในจังหวะที่ 9 และ 10 ในจังหวะที่ 10 กลไกอยู่ในตำแหน่งจุดตายถ้าข้อต่อหมายเลข 3 เป็นตัวขับ การเคลื่อนที่จากตำแหน่งในจังหวะที่ 11 ถึง 15 คือการเคลื่อนที่กลับไปยังตำแหน่งเริ่มต้น (จังหวะที่ 1) จากรูปข้อต่อหมายเลข 2 ทำหน้าที่เป็นตัวขับในจังหวะที่ 11 ถึง 15 หากพิจารณาการเคลื่อนที่ตั้งแต่จังหวะที่ 1 ถึง 15 จะเห็นว่าก้านส่ง AB หมุนทวนเข็มนาฬิกาตลอด และการย้อนกลับไปตำแหน่งเดิมได้ก็เป็นการพิสูจน์ว่าก้านส่งหมุนได้ครบรอบ หรือเงื่อนไขของกราชอฟเป็นจริง



รูปที่ 2.5 ลักษณะการเคลื่อนที่ของก้านส่งในกลไก 4 ข้อต่อแบบแขนแกว่งคู่



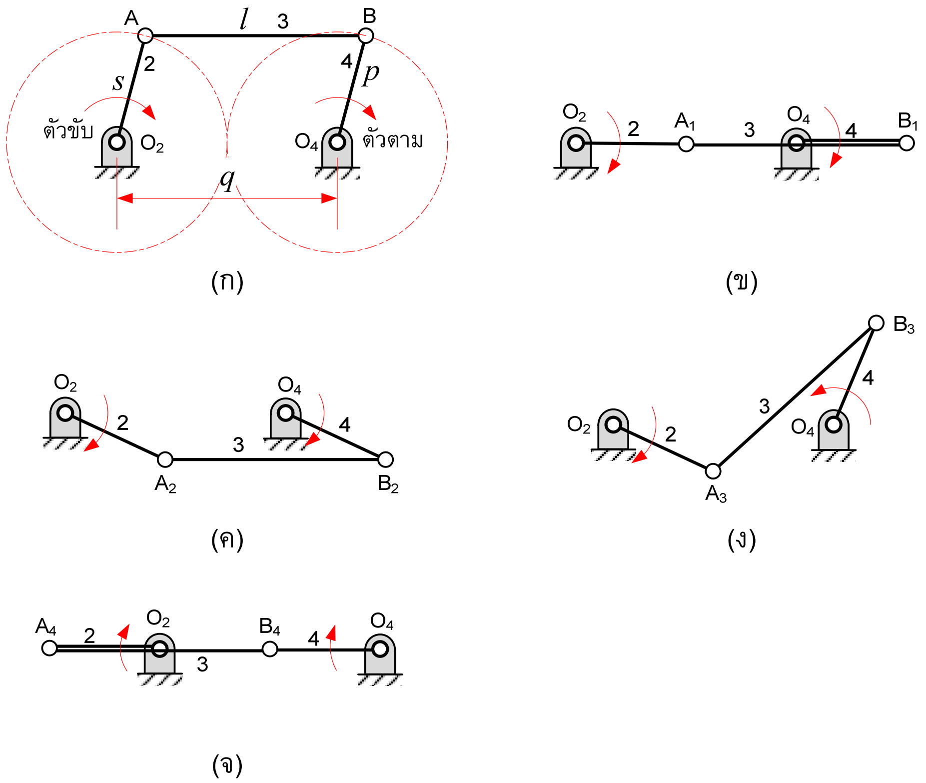
รูปที่ 2.5 (ต่อ)

กรณีที่ 4 กลไกที่มีจุดเปลี่ยน (change point mechanism)

กลไกที่มีจุดเปลี่ยน หมายถึงกลไกที่มีการเคลื่อนที่ของข้อต่อผ่านตำแหน่งซึ่งอาจทำให้รูปแบบการเคลื่อนที่ของกลไกเปลี่ยนไปจากเดิม ยกตัวอย่างเช่นกลไกในรูปที่ 2.6(ก) ถ้ากำหนดให้ข้อต่อด้านข้างของกลไกยาวเท่ากัน เมื่อข้อต่อเคลื่อนที่ถึงตำแหน่งที่ข้อต่อทั้งหมดอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน (รูปที่ 2.6(ข)) แล้วการเคลื่อนที่หลังจากนั้นมีโอกาสเกิดขึ้นได้ 2 แบบ คือ ยังคงเป็นกลไกสี่เหลี่ยมด้านขนาน (รูปที่ 2.6(ค)) หรือกลายเป็นกลไก 4 ข้อต่อแบบไขว้ (รูปที่ 2.6(ง)) ในกรณีที่กลายเป็นกลไก 4 ข้อต่อแบบไขว้ ตัวตามจะเปลี่ยนทิศการหมุนซึ่งอาจจะไม่ใช่สิ่งที่ต้องการ ตำแหน่งของกลไกในรูปที่ 2.6(ข) คือ *จุดเปลี่ยน (change point)* กลไกนี้มีตำแหน่งจุดเปลี่ยน 2 ตำแหน่งดังแสดงในรูปที่ 2.6(ข) และ 2.6(จ) กลไกที่มีจุดเปลี่ยนแบบอื่น ๆ และวิธีพากลไกเคลื่อนที่ผ่านจุดเปลี่ยนโดยไม่เปลี่ยนรูปแบบการเคลื่อนที่จะกล่าวในหัวข้อที่ 2.5

กรณีที่ 5 แขนแกว่งสามอัน (triple rocker)

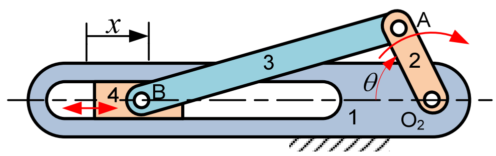
กลไกแบบนี้ ข้อต่อที่เคลื่อนที่ได้ทั้งหมด (3 ชิ้น) จะไม่มีชิ้นใดที่หมุนได้ครบรอบ ลักษณะการเคลื่อนที่มีทั้งสิ้น 4 แบบ ขึ้นกับว่าให้ข้อต่อใดเป็นแท่นเครื่อง



รูปที่ 2.6 กลไกที่มีจุดเปลี่ยน

2.3 การสับเปลี่ยน

กลไก คือโซ่คิเนแมติกเชิงบังคับที่มีข้อต่อชิ้นหนึ่งอยู่กับที่ ดังนั้นถ้ากำหนดให้ข้อต่ออื่น ๆ ในกลไกนั้นผลัดเปลี่ยนกันเป็นข้อต่อที่อยู่กับที่แล้วก็จะได้กลไกแบบต่าง ๆ เท่ากับจำนวนของข้อต่อในโซ่คิเนแมติก การสร้างกลไกใหม่ด้วยวิธีนี้เรียกว่า *การสับเปลี่ยน (inversion)* พิจารณาตัวอย่างกลไกในรูปที่ 2.7 เพื่อให้เข้าใจความหมายของวิธีสับเปลี่ยน รูปนี้เป็นกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงที่ข้อต่อหมายเลขหนึ่งเป็นข้อต่ออยู่กับที่ ข้อต่อหมายเลข 2 (O_2A) หมุนรอบจุด O_2 ทำให้ตัวเลื่อนหมายเลข 4 เคลื่อนที่ไป-กลับอยู่ในรางเลื่อนตามแนว O_2B



รูปที่ 2.7 กลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงที่ข้อต่อหมายเลข 1 เป็นข้อต่ออยู่กับที่

การสับเปลี่ยนแบบที่ 1 แสดงในรูปที่ 2.8(ก-1) จากรูปข้อต่อหมายเลข 2 ถูกยึดอยู่กับที่ แต่ข้อต่อที่เหลือเคลื่อนที่ได้ ในกลไกนี้เมื่อข้อต่อหมายเลข 3 หมุนรอบจุด A ตัวเลื่อนหมายเลข 4 จะเลื่อนไป-กลับในรางเลื่อนหมายเลข 1 พร้อมกับพารางเลื่อนให้หมุนรอบจุด O_2 ด้วย กลไกชนิดนี้ถูกใช้เป็นกลไกของเครื่องยนต์ในเครื่องบินสมัยสงครามโลกครั้งที่ 1 โดยมีชื่อเรียกว่า Gnome engine (รูปที่ 2.8(ก-2)) เสื้อสูบของเครื่องยนต์ซึ่งมีใบพัดติดอยู่จะหมุนรอบแกน O_2 จำนวนสูบเครื่องยนต์มีประมาณ 5 ถึง 7 สูบ

การสับเปลี่ยนแบบที่ 2 แสดงในรูปที่ 2.8(ข-1) จากรูปข้อต่อหมายเลข 3 ถูกยึดอยู่กับที่ แต่ข้อต่อที่เหลือเคลื่อนที่ได้ ถ้าข้อต่อหมายเลข 2 หมุนรอบจุด A แล้วตัวเลื่อนหมายเลข 4 จะเคลื่อนที่แบบแกว่งไป-มารอบจุด B ตัวอย่างการใช้งานคือ oscillating cylinder (รูปที่ (2.8(ข-2))

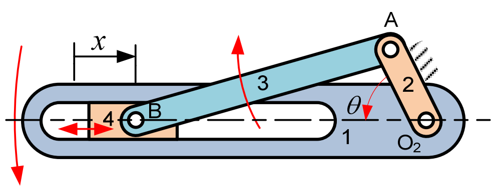
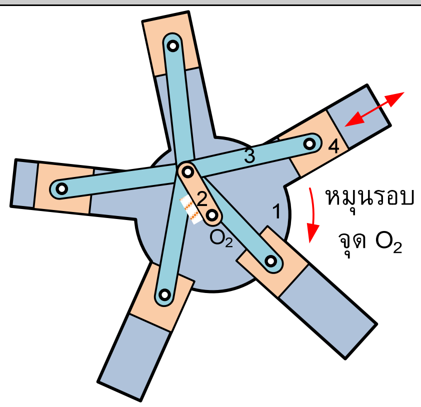
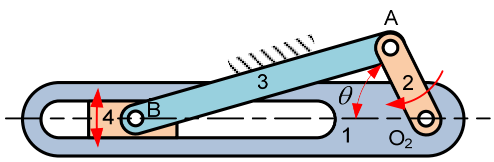
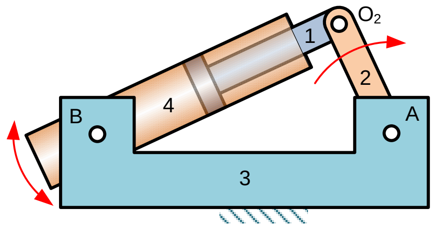
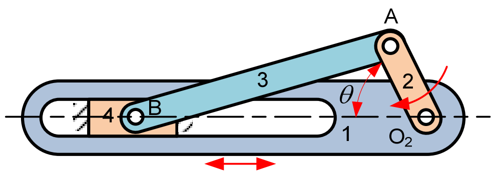
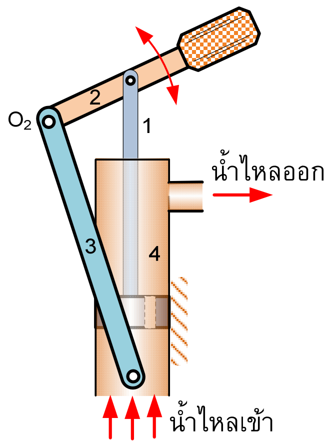
การสับเปลี่ยนแบบที่ 3 แสดงในรูปที่ 2.8(ค-1) จากรูปตัวเลื่อนหมายเลข 4 ถูกยึดอยู่กับที่แต่ข้อต่อที่เหลือเคลื่อนที่ได้ ถ้าข้อต่อหมายเลข 2 แกว่งหรือโยกไปมาแล้วข้อต่อหมายเลข 1 จะเลื่อนไปมา กลไกแบบนี้พบในเครื่องสูบน้ำแบบโยกด้วยมือ (รูปที่ 2.8(ค-2))

จากตัวอย่างกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงจะเห็นว่า การสับเปลี่ยนโซ่คิเนแมติกเชิงบังคับที่มีข้อต่อ 4 ชิ้น สามารถสร้างกลไกที่ต่างกันได้ 4 ชนิด (รูปที่ 2.7 และ 2.8) คุณสมบัติสำคัญของการสับเปลี่ยนคือ *การสับเปลี่ยนจะไม่ทำให้การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างข้อต่อต่าง ๆ ในโซ่คิเนแมติกเปลี่ยนจากเดิม* ยกตัวอย่างเช่น ในรูปที่ 2.8(ก-1) เมื่อข้อต่อหมายเลข 2 หมุนทำมุม θ กับรางเลื่อนหมายเลข 1 แล้วตัวเลื่อนหมายเลข 4 จะเคลื่อนที่เป็นระยะทาง x เทียบกับรางเลื่อน แต่ถ้าเป็นกรณีในรูปที่ 2.8(ข-1) ซึ่งข้อต่อหมายเลข 2 อยู่กับที่ เมื่อรางเลื่อนหมายเลข 1 เคลื่อนที่จนทำมุม θ กับข้อต่อหมายเลข 2 ตัวเลื่อนหมายเลข 4 ก็จะเคลื่อนที่เป็นระยะทาง x เทียบกับรางเลื่อนเช่นกัน

นอกจากการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างตัวเลื่อนหมายเลข 4 กับรางเลื่อนหมายเลข 1 ที่กล่าวไปแล้วนั้น การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของข้อต่อคู่ใด ๆ ก็ยังคงเหมือนเดิม ถัดไปจะพิจารณาการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างข้อต่อหมายเลข 1 และ 2 ในรูปที่ (2.6) และ (2.7) เพื่อเป็นการพิสูจน์คุณสมบัติของการสับเปลี่ยน

จากรูปที่ 2.7 ข้อต่อหมายเลข 2 ในกรณีแรกสามารถหมุนรอบจุด O_2 ได้ครบรอบและมุม θ ระหว่างข้อต่อหมายเลข 2 กับ 1 จะมีค่าในช่วง 0 ถึง 360 องศา ในรูปที่ 2.8(ก-1) และ (ก-2) ข้อต่อหมายเลข 1 หรือเสื้อสูบสามารถหมุนรอบจุด O_2 ได้ครบรอบและมุม θ ระหว่างข้อต่อหมายเลข 1 กับ 2 จะมีค่าในช่วง 0 ถึง 360 องศา เช่นกัน ในรูปที่ 2.8(ข-1) และ (ข-2) ข้อต่อหมายเลข 2 หมุนรอบจุด A ได้ครบรอบ ดังนั้นจุด O_2 จึงเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด A และมุม θ ระหว่างข้อต่อหมายเลข 1 กับ 2 จะมีค่าในช่วง 0 ถึง 360 องศา ในรูปที่ 2.8(ค-1) และ (ค-2) ข้อต่อหมายเลข 1 ถูกบังคับให้เคลื่อนที่เป็นแนวเส้นตรงตามแนวของกระบอกสูบ ขณะที่ข้อต่อหมายเลข 2 หมุนครบรอบ มุม θ ระหว่างข้อต่อหมายเลข 1 กับ 2 จะมีค่าในช่วง 0 ถึง 360 องศา

การศึกษาการเคลื่อนที่ของกลไกในลักษณะเช่นนี้เป็นข้อพิสูจน์ว่าการสับเปลี่ยนจะไม่ทำให้การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างข้อต่อต่าง ๆ ในโซ่คิเนแมติกเปลี่ยนจากเดิม

<table>
<tr><th>กลไกที่ได้จากการสับเปลี่ยนกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยง</th><th>ตัวอย่างการใช้งาน</th></tr>
<tr><td>(ก-1) การสับเปลี่ยนแบบที่ 1

</td><td>(ก-2)

</td></tr>
<tr><td>(ข-1) การสับเปลี่ยนแบบที่ 2

</td><td>(ข-2)

</td></tr>
<tr><td>(ค-1) การสับเปลี่ยนแบบที่ 3

</td><td>(ค-2)

</td></tr>
</table>

รูปที่ 2.8 การสับเปลี่ยนกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยง

กิจกรรมเสริม

1. ดูภาพเคลื่อนไหวของเครื่องยนต์ Gnome ที่เว็บไซต์
   http://www.keveney.com/gnome.html
2. ดูภาพถ่ายและวิธีซ่อมบำรุงเครื่องยนต์ Gnome ที่เว็บไซต์
   http://www.aviation-history.com/amh/1918p164.htm

2.4 ตำแหน่งขีดจำกัดและตำแหน่งจุดตาย

การออกแบบกลไกนอกจากจะต้องตรวจสอบการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นแล้ว ผู้ออกแบบยังต้องระวังตำแหน่งที่เป็นขีดจำกัดการเคลื่อนที่ของข้อต่อต่าง ๆ และตำแหน่งที่เป็นจุดตาย (dead point) ของกลไกด้วย ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงนิยามของตำแหน่งทั้งสองและยกตัวอย่างตำแหน่งทั้งสองในกลไก 4 ข้อต่อ

ตำแหน่งขีดจำกัด (limiting position) ของตัวตามคือ *ตำแหน่งที่ตัวขับอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันกับก้านส่ง* กลไก 4 ข้อต่อจะมีตำแหน่งขีดจำกัดของตัวตามได้สูงสุด 2 ตำแหน่ง ดังแสดงในรูปที่ 2.9(ข) และ 2.9(ค) จากรูปมุมที่ข้อต่อหมายเลข 4 แกว่งไปมาคือ $\phi_2 - \phi_1$

ตำแหน่งจุดตายในกลไกคือ *ตำแหน่งที่ก้านส่งอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันกับตัวตาม* ณ ตำแหน่งนี้ทิศของแรงส่งทอดจะผ่านจุดหมุนของตัวตามทำให้ไม่มีโมเมนต์เพื่อขับตัวตาม[1] ดังนั้นกลไกจะหยุดการเคลื่อนที่ ณ ตำแหน่งนี้ หรือในแง่ของคิเนแมติกก็คือไม่มีโมเมนต์มาขับตัวตาม ในรูปที่ 2.9 ถ้า O_2A เป็นตัวขับ และ O_4B เป็นตัวตามแล้วกลไกจะไม่มีจุดตาย แต่ถ้า O_4B เป็นตัวขับและ O_2A เป็นตัวตามแล้วกลไกนี้จะมีจุดตาย 2 ตำแหน่งดังแสดงในรูปที่ 2.9(ข) และ 2.9(ค)

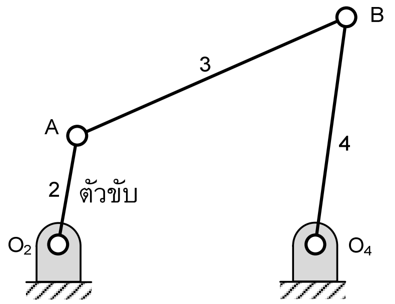
จุดตายเป็นตำแหน่งที่ต้องป้องกันไม่ให้เกิดขึ้นเพราะจะทำให้กลไกหยุดเคลื่อนที่ การออกแบบเพื่อหลีกเลี่ยงจุดตายทำได้หลายวิธี เช่น เพิ่มชิ้นส่วนป้องกันกลไกไม่ให้เคลื่อนที่จนถึงจุดตายดังรูปที่ 2.10 หรือสร้างแรงกระทำจากภายนอกในตำแหน่งที่เหมาะสมเพื่อพากลไกให้เคลื่อนที่ผ่านจุดตายไปได้ แรงกระทำจากภายนอกได้แก่ แรงจากล้อตุนกำลัง (flywheel) ในกรณีของกลไกในรูปที่ 2.10 ล้อตุนกำลังจะติดกับแกนหมุนที่จุด O_2 เพื่อพาตัวตามให้เคลื่อนที่ต่อไปได้

ในกลไกบางอย่างก็ใช้ประโยชน์จากจุดตาย อย่างเช่นกลไกในรูปที่ 2.11 และ 2.12 เป็นต้น สำหรับกลไกในรูปที่ 2.11 เมื่อพนักพิงของเบาะนั่งถูกพับรอบจุด O_2 ในทิศทวนเข็มจนกระทั่งมาอยู่ในแนวราบ ข้อต่อที่เป็น coupler และข้อต่อที่ชื่อ cover plate pan จะเคลื่อนที่มาอยู่แนวเส้นตรงเดียวกันซึ่งเป็นตำแหน่งจุดตาย จากนั้นก็กด cover plate pan ให้ผ่านจุดตายเพื่อให้กลไกเข้าตำแหน่งล็อกอยู่กับที่ การคลายล็อกทำได้โดยการยก cover plate pan ขึ้นให้ผ่านจุดตายก่อน แล้วจึงยกพนักพิงกลับที่เดิม

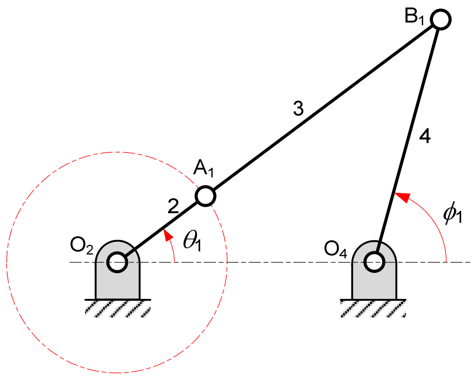
สำหรับกลไกในรูปที่ 2.12(ก) คือกลไกฝาท้ายรถบรรทุกขณะที่ฝาท้ายปิดกับกระบะ เมื่อฝาท้ายถูกเปิดก็จะเคลื่อนที่มาอยู่ในแนวระดับซึ่งเป็นตำแหน่งจุดตายของกลไกเพราะก้านส่งกับตัวตามอยู่แนวเส้นตรงเดียวกัน ที่ตำแหน่งนี้ฝาท้ายสามารถรับแรงเนื่องจากน้ำหนักสัมภาระที่จะวางบนตัวมันก่อนจะถูกเคลื่อนย้ายไปไว้ในกระบะ

---

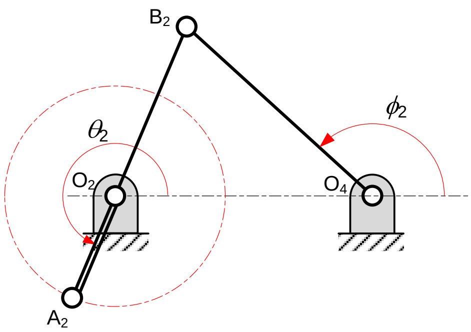
[1] ภายใต้ข้อสมมติที่ว่าก้านส่งเป็น 2-force member



(ก) กลไก 4 ข้อต่อแบบข้อเหวี่ยง-แขนแกว่ง

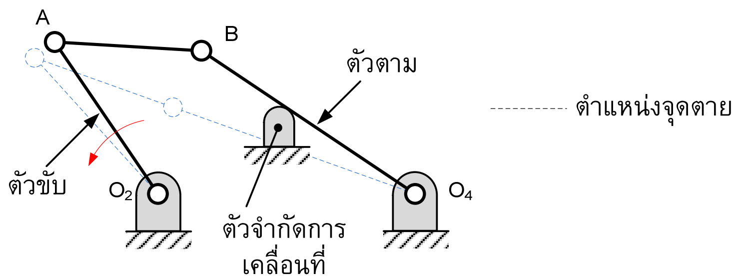


(ข) ตำแหน่งขีดจำกัด ตำแหน่งแรก

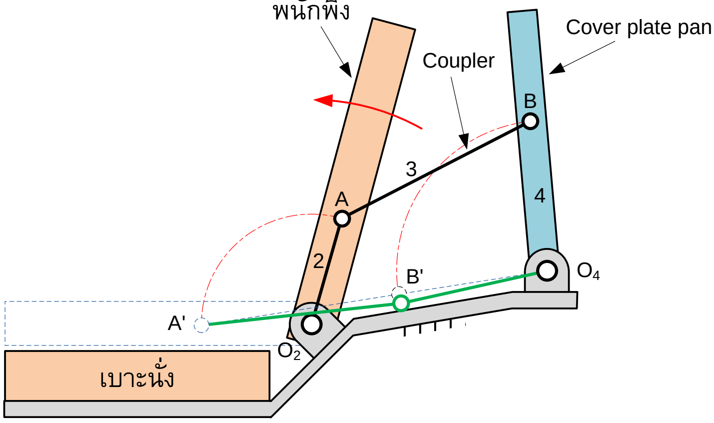


(ค) ตำแหน่งขีดจำกัด ตำแหน่งที่สอง

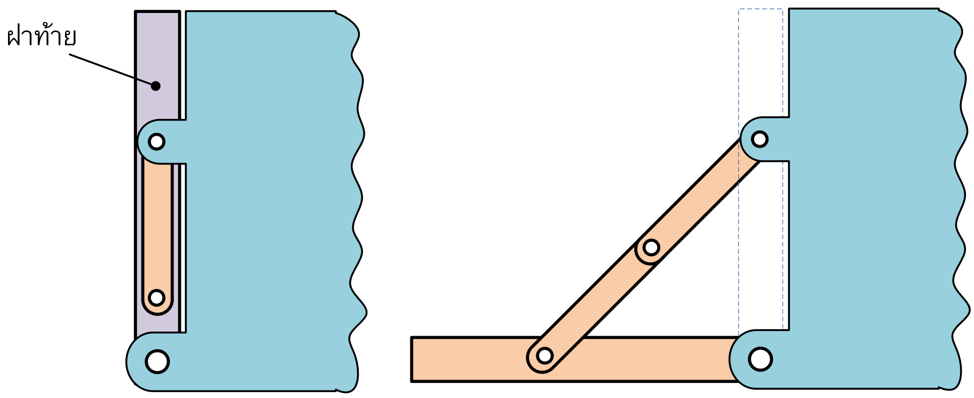
รูปที่ 2.9 ตำแหน่งขีดจำกัดของตัวตามในกลไก 4 ข้อต่อแบบข้อเหวี่ยง-แขนแกว่ง



รูปที่ 2.10 ตัวอย่างวิธีป้องกันไม่ให้กลไกเคลื่อนไปถึงตำแหน่งจุดตาย



รูปที่ 2.11 การใช้ประโยชน์จุดตายในกลไกเก้าอี้พับ

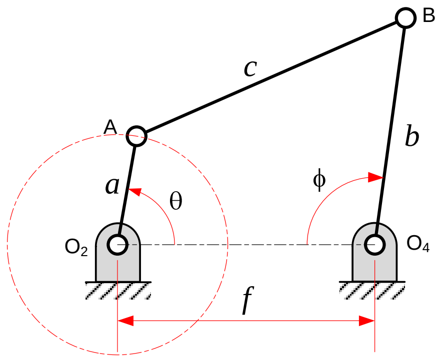


(ก) ขณะปิด (ข) ขณะใช้งาน

รูปที่ 2.12 การใช้ประโยชน์จุดตายในกลไกฝาท้ายรถบรรทุก

2.5 การหาตำแหน่งขีดจำกัดและตำแหน่งจุดตายในกลไก 4 ข้อต่อ

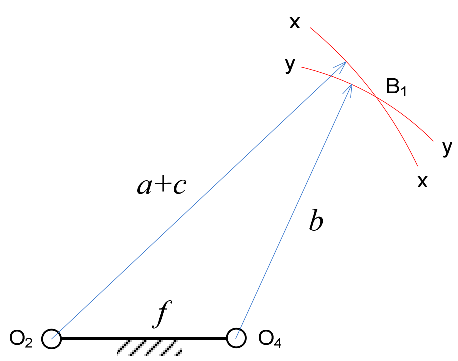
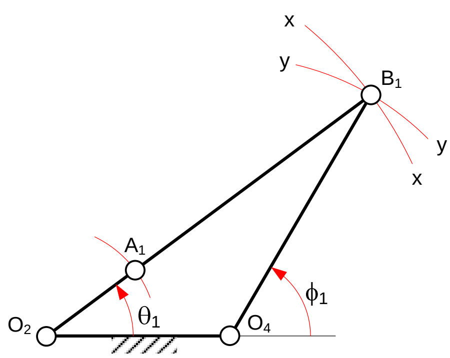
พิจารณากลไก 4 ข้อต่อแบบข้อเหวี่ยง-แขนแกว่งในรูปที่ 2.13 ความยาวของข้อต่อในกลไกมีดังนี้ ข้อต่อด้านข้างยาว a และ b ก้านส่งยาว c และข้อต่อที่เป็นแท่นเครื่องยาว f ข้อต่อด้านข้างที่สั้นที่สุด (ยาว a) เป็นตัวขับ ในหัวข้อนี้จะอธิบายวิธีหาตำแหน่งขีดจำกัดและตำแหน่งจุดตายในกลไก 4 ข้อต่อ สองวิธีคือ วิธีเขียนรูป และวิธีคำนวณ



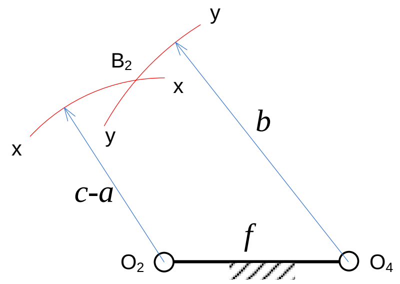
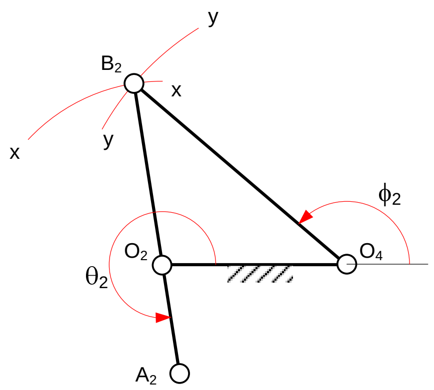
รูปที่ 2.13 กลไก 4 ข้อต่อแบบข้อเหวี่ยง-แขนแกว่ง

2.5.1 วิธีเขียนรูป

ขั้นตอนการหาตำแหน่งขีดจำกัดอันแรก แสดงอยู่ในตารางต่อไปนี้

ลำดับ	คำอธิบาย	ภาพประกอบ
1	ลากเส้นตรงยาว f หน่วย เพื่อแทนข้อต่อที่เป็นแท่นเครื่อง กำหนดชื่อจุดปลายข้อต่อเป็น O_2 และ O_4	
2	เขียนส่วนโค้ง x-x รัศมี $a+c$ และมีจุดศูนย์กลางที่ O_2	
3	เขียนส่วนโค้ง y-y รัศมี b และมีจุดศูนย์กลางที่ O_4	
4	ระบุจุดตัดของส่วนโค้ง (ตั้งชื่อว่า B_1)	
5	ลากเส้น O_2B_1 และ O_4B_1	
6	วัดมุม θ_1 และ ϕ_1 (ถ้าต้องการหาตำแหน่งจุดต่อ A_1 ก็เขียนส่วนโค้งรัศมี a มีจุดศูนย์กลางที่ O_2 ไปตัดกับเส้นตรง O_2B_1 จุดตัดคือตำแหน่งจุดต่อ A_1)	

ขั้นตอนการหาตำแหน่งขีดจำกัดอันที่สอง แสดงอยู่ในตารางต่อไปนี้

ลำดับ	คำอธิบาย	ภาพประกอบ
1	ลากเส้นตรงยาว f หน่วย เพื่อแทนข้อต่อที่เป็นแท่นเครื่อง กำหนดชื่อจุดปลายข้อต่อเป็น O_2 และ O_4	
2	เขียนส่วนโค้ง x-x รัศมี c-a และมีจุดศูนย์กลางที่ O_2	
3	เขียนส่วนโค้ง y-y รัศมี b และมีจุดศูนย์ กลางที่ O_4	
4	ระบุจุดตัดของส่วนโค้ง (ตั้งชื่อว่า B_2)	
5	ลากเส้น O_2B_2 และ O_4B_2	
6	วัดมุม θ_2 และ ϕ_2 (ถ้าต้องการระบุตำแหน่งจุดต่อ A_2 ก็เขียนส่วนโค้งรัศมี a มีจุดศูนย์กลางที่ O_2 จากนั้นต่อเส้น O_2B_2 จนตัดส่วนโค้งจุดตัดคือจุดต่อ A_2	

2.5.2 วิธีคำนวณ

จากรูปที่ 2.13 กำหนดให้ $e = O_2A + AB$, $\phi = \angle ADC$ โดย $\phi \geq 0$ และ $\theta = \angle DAC$ โดย $\theta \leq \pi$

จากกฎของโคไซน์[2] จะได้ $$\phi = \arccos\left(\frac{f^2 + b^2 - e^2}{2fb}\right) \quad (2.3)$$

และ $$\theta = \arccos\left(\frac{f^2 + e^2 - b^2}{2fe}\right) \quad (2.4)$$

สำหรับกลไกข้อเหวี่ยง-แขนแกว่ง (รูปที่ 2.13) เมื่อกลไกเคลื่อนที่ถึงตำแหน่งขีดจำกัดแล้วจะได้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ตำแหน่งขีดจำกัดที่ 1 (รูปที่ 2.14(ก)) : $e = O_2A_1 + A_1B_1 = c + a$

$\phi_1 = \phi$ และ $\theta_1 = \theta$

ตำแหน่งขีดจำกัดที่ 2 (รูปที่ 2.14(ข)) : $e = A_2B_2 - O_2A_2 = c - a$

$\phi_2 = \phi$ และ $\theta_2 = \theta + \pi$

(ถ้าข้อต่อ O_4B เป็นตัวขับแล้ว รูปที่ 2.14 จะแสดงตำแหน่งจุดตายของกลไกข้อเหวี่ยง-แขนแกว่ง)

สำหรับกลไกแขนแกว่งคู่ในรูปที่ 2.15 เมื่อข้อต่อ O_4B เป็นตัวขับและข้อต่อ O_2A เป็นตัวตาม จะหาความสัมพันธ์ต่อไปนี้ได้

$$\phi' = \arccos\left(\frac{e^2 + f^2 - a^2}{2ef}\right) \quad (2.5)$$

และ $$\theta' = \arccos\left(\frac{a^2 + f^2 - e^2}{2af}\right) \quad (2.6)$$

เมื่อกลไกเคลื่อนที่ถึงตำแหน่งขีดจำกัด แล้วจะได้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ตำแหน่งขีดจำกัดที่ 1 (รูปที่ 2.16(ก)) : $e = b - c$

$\phi_1 = \phi'$ และ $\theta_1 = \theta'$

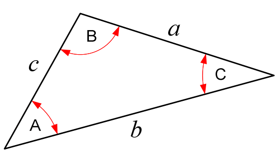
ตำแหน่งขีดจำกัดที่ 2 (รูปที่ 2.16(ข)) : $e = b + c$

$\phi_2 = \phi'$ และ $\theta_2 = \theta'$

(ถ้าข้อต่อ O_2A เป็นตัวขับแล้ว รูปที่ 2.16 จะแสดงตำแหน่งจุดตายของกลไกแขนแกว่งคู่)

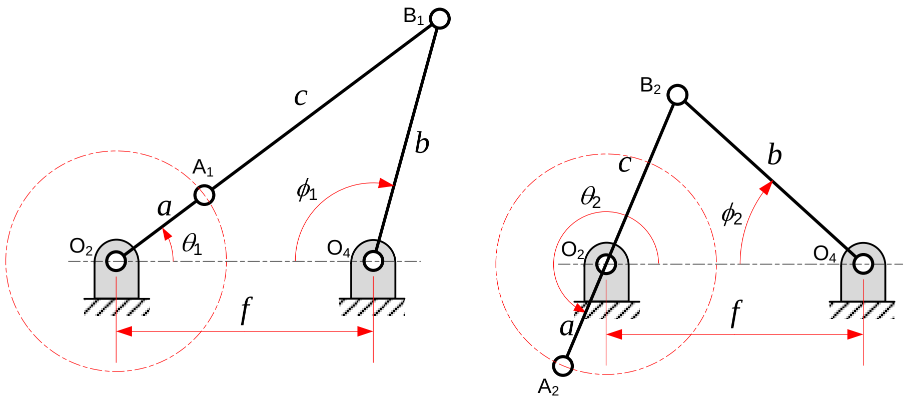
---

[2]



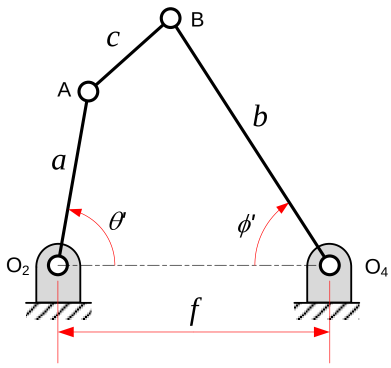
กฎของโคไซน์ คือ

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

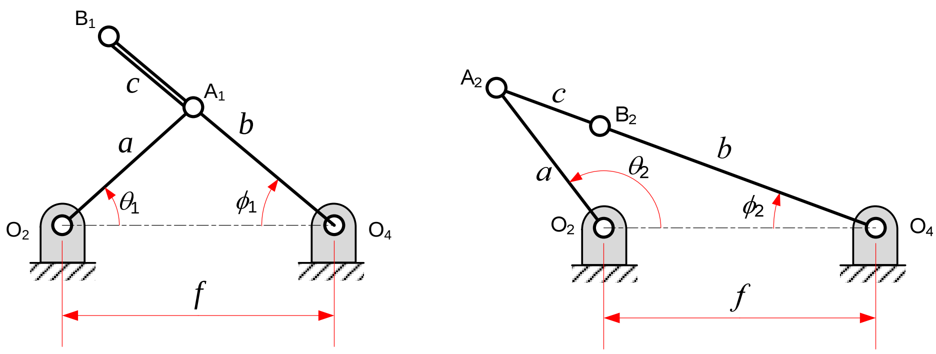


(ก) (ข)

รูปที่ 2.14 ตำแหน่งขีดจำกัดของกลไกข้อเหวี่ยง-แขนแกว่ง



รูปที่ 2.15 กลไกแขนแกว่งคู่



(ก) (ข)

รูปที่ 2.16 ตำแหน่งขีดจำกัดของกลไกแขนแกว่งคู่

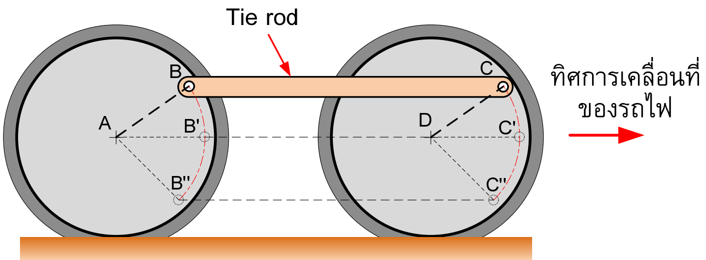
2.6 ตำแหน่งจุดเปลี่ยน

จากตารางที่ 2.1 เมื่อผลบวกของข้อต่อที่สั้นที่สุดกับข้อต่อที่ยาวที่สุดเท่ากับผลบวกของข้อต่อที่เหลืออีกสองชิ้น ($s+l=p+q$) แล้วการเคลื่อนที่ของกลไกจะต้องผ่านตำแหน่งที่เรียกว่า *ตำแหน่งจุดเปลี่ยน (change point)* ในกรณีนี้ข้อต่อทั้งหมดจะวางตัวในแนวเส้นตรงเดียวกัน

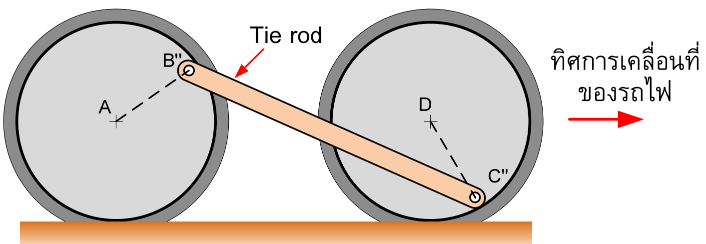
กลไกที่มีจุดเปลี่ยนซึ่งพบบ่อย คือ กลไกสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram linkage) ตัวอย่างเช่น ล้อรถไฟสองล้อที่เชื่อมต่อกันด้วยก้านส่ง (ในกรณีนี้มีชื่อเรียกเฉพาะว่า tie rod) แนวระดับ ในรูปที่ 2.17 กลไกนี้มีข้อต่อ AB ยาวเท่ากับข้อต่อ CD และข้อต่อ BC ยาวเท่ากับข้อต่อ AD เมื่อข้อต่อ BC เคลื่อนที่ไปอยู่ในตำแหน่ง B'C' ซึ่งอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันกับ AD และเป็นตำแหน่งของจุดเปลี่ยนแล้วรูปแบบการเคลื่อนที่จะไม่แน่นอนหรือเรียกว่า *ไม่สามารถระบุรูปแบบเชิงคิเนแมติกได้ (kinematically indeterminate)* กล่าวคือ ถ้าจุด C บนล้อหน้าเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่ง C" แล้วจุด B' อาจจะอยู่ที่ B" ซึ่งยังคงขนานกับ AD ดังในรูปที่ 2.17(ก) หรืออาจจะอยู่ที่ B" ในรูปที่ 2.17(ข) ถ้าเกิดกรณีนี้แล้วล้อหลังจะหมุนกลับทิศจากเดิม ทำให้ B"C" ตัดกับ AD กลายเป็นกลไก 4 ข้อต่อแบบไขว้ การเคลื่อนที่ของกลไกจะคงรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือเปลี่ยนไปเป็นแบบไขว้นั้นขึ้นกับวิธีพากลไกเคลื่อนผ่านจุดเปลี่ยน

วิธีพากลไกเคลื่อนผ่านจุดเปลี่ยนได้แก่ การใช้ล้อตุนกำลัง หรือการใช้กลไกขับเคลื่อน (เพื่อความแน่นอน) ล้อตุนกำลังทำหน้าที่สร้างแรงบิดเฉื่อยขณะที่ล้อกำลังหมุนเพื่อพากลไกเคลื่อนผ่านจุดเปลี่ยนโดยคงรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานต่อไป รูปที่ 2.18 แสดงตัวอย่างการใช้กลไกขับเคลื่อนจากรูปล้อฝั่งตรงข้ามมีก้านส่งอีกอันหนึ่ง ซึ่งตำแหน่งจุดเปลี่ยนอยู่คนละตำแหน่งกับของอันแรก

(ก)



(ข)

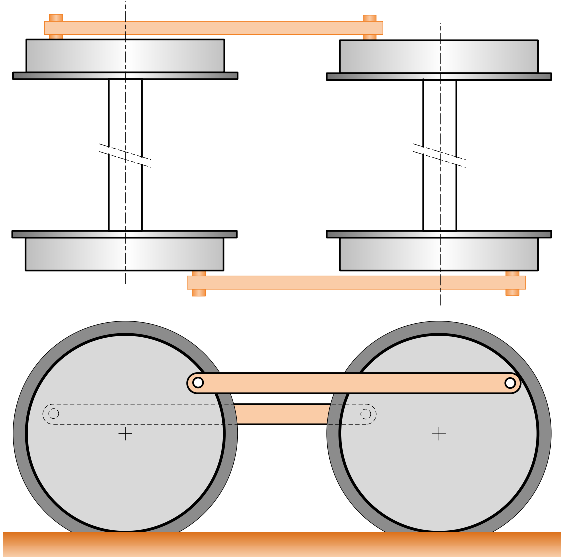


รูปที่ 2.17 กลไกสี่เหลี่ยมด้านขนานในล้อรถไฟ

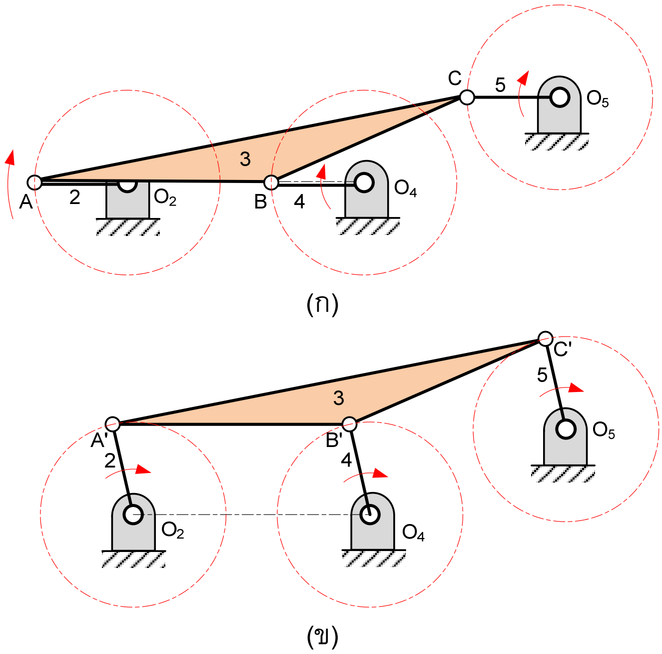
รูปที่ 2.19 แสดงวิธีพากลไกผ่านจุดเปลี่ยนโดยการเพิ่มข้อต่อ (หมายเลข 5) ให้เป็นกลไกสี่เหลี่ยมด้านขนานคู่ (double-parallelogram) ซึ่งมีตำแหน่งจุดเปลี่ยนของข้อต่อด้านข้างคู่ใด ๆ เกิดขึ้นไม่พร้อมกัน ยกตัวอย่างเช่นในรูปที่ 2.19(ก) แม้ว่าข้อต่อหมายเลข 2 และ 4 จะอยู่ในตำแหน่งจุดเปลี่ยนแต่ข้อต่อหมายเลข 4 และ 5 ก็ไม่ได้อยู่ในตำแหน่งจุดเปลี่ยนเป็นต้น ดังนั้นกลไกจึงเคลื่อนที่ผ่านจุดเปลี่ยนโดยคงลักษณะการเคลื่อนที่แบบเดิมได้ (รูปที่ 2.19(ข))

กลไกที่มีจุดเปลี่ยนอีกชนิดหนึ่งคือ กลไก Galloway (รูปที่ 2.20) หรือมีชื่อเรียกแบบอื่นว่า isosceles หรือ kite linkage กลไกนี้มีข้อเหวี่ยง O_2A ยาวเท่ากับข้อต่อ O_2O_4 และก้านส่ง AB ยาวเท่ากับตัวตาม O_4B ถ้าความยาว O_2A (และ O_2O_4) น้อยกว่าความยาวของ AB (และ O_4B) แล้วขณะที่ข้อเหวี่ยง O_2A หมุนไปสองรอบ ข้อต่อ O_4B จะหมุนไปเพียงหนึ่งรอบเท่านั้น

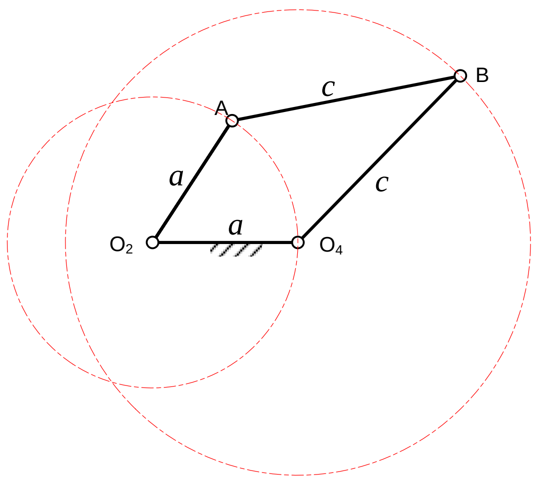
สำหรับกลไกสี่เหลี่ยมด้านขนาน 4 ข้อต่อแบบไขว้ในรูปที่ 2.21(ก) แม้ว่าความเร็วรอบของตัวขับจะคงที่แต่ความเร็วเชิงมุมของตัวตามจะไม่คงที่ (ขึ้นกับตำแหน่ง) อย่างไรก็ดีตัวตามและตัวตามจะหมุนครบรอบพร้อมกันแต่ขณะที่สวนกันจะมีทิศการหมุนสวนทางกัน ดังนั้นเพื่อให้แน่ใจว่าหลังจากผ่านจุดเปลี่ยนแล้วกลไกยังหมุนในแบบที่ต้องการเหมือนเดิม ก็อาจแทนกลไกนี้ด้วยลูกเบี้ยวดังแสดงในรูปที่ 2.21(ข) หรือดัดแปลงกลไกให้มีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 2.21 (ค) ในรูปที่ 2.21(ค) ข้อเหวี่ยงหมายเลข 2 ถูกต่อให้ยาวถึงจุด F และ F_1 จุด F ทำเป็นรูปถ้วย ส่วนจุด F_1 ทำเป็นลูกทรงกลม ในทำนองเดียวกันตัวตามก็ถูกต่อให้ยาวออกไปถึงจุด H และ H_1 จุด H ทำเป็นลูกทรงกลม ส่วนจุด H_1 ทำเป็นรูปถ้วย จุด F, F_1, H และ H_1 ในรูปนี้เป็นจุดเดียวกันกับจุดบนวงรีในรูปที่ 2.21(ข) สำหรับวิธีนี้เมื่อกลไกเคลื่อนมาถึงจุดเปลี่ยน ลูกทรงกลม H จะเข้าไปในถ้วย F ในทำนองเดียวกัน F_1 ก็จะเข้าไปในถ้วย H_1 ดังนั้นตัวตามจะถูกพาให้หมุนต่อไปในทิศทางเดิม



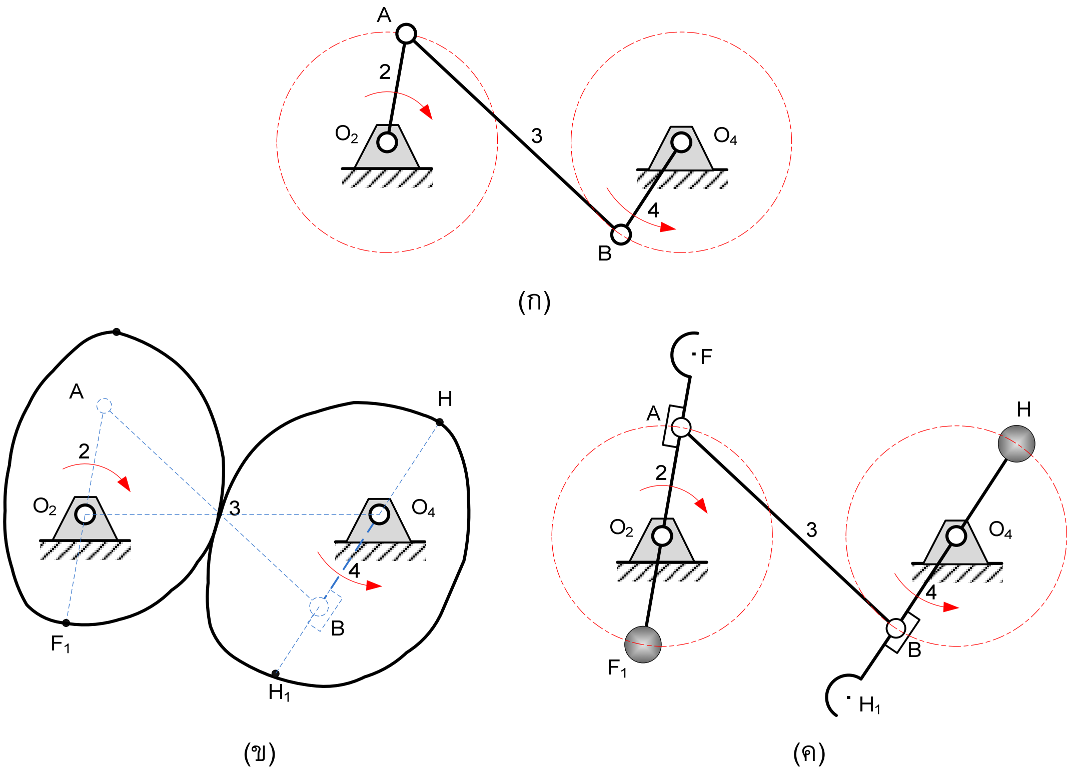
รูปที่ 2.18 การใช้กลไกเสริมเพื่อรักษารูปแบบการเคลื่อนที่เมื่อผ่านจุดเปลี่ยน



รูปที่ 2.19 การใช้กลไก double-parallelogram รักษารูปแบบการเคลื่อนที่เมื่อกลไกเคลื่อนผ่านจุดเปลี่ยน



รูปที่ 2.20 กลไก Galloway

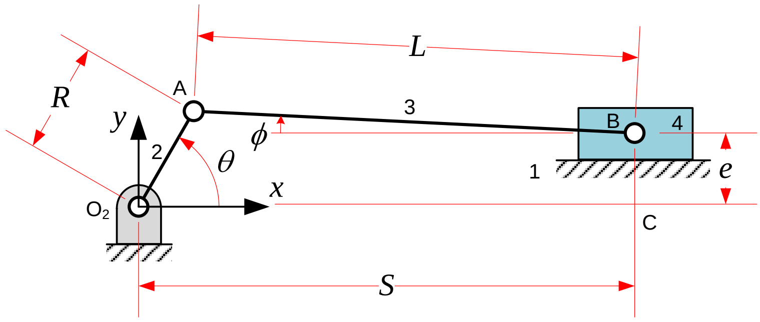


รูปที่ 2.21 วิธีพากลไก 4 ข้อต่อแบบไขว้เคลื่อนที่ผ่านจุดเปลี่ยนโดยมีทิศการหมุนเหมือนเดิม

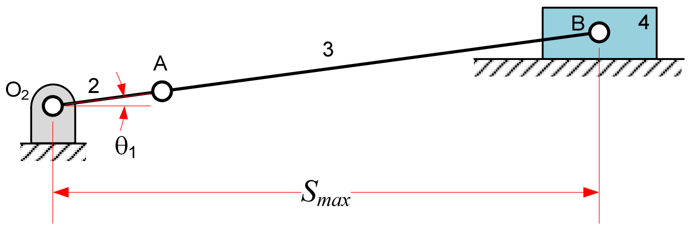
2.7 กลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยง

กลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงจะประกอบด้วยคู่สัมผัสแบบหมุน 3 คู่ และคู่สัมผัสแบบเลื่อนไถลอีก 1 คู่ รูปแบบทั่วไปของกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงแสดงอยู่ในรูปที่ 2.22(ก) จากรูปแนวการเคลื่อนที่ของตัวเลื่อน (หรือจุด B) จะเยื้องจากจุดหมุน O_2 เป็นระยะ e เรียกว่า *ระยะเยื้องแนว (offset)* กลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงที่พบในเครื่องยนต์ทั่วไปจะมีระยะเยื้องแนวเท่ากับศูนย์ กล่าวคือทางเดินของจุด B จะผ่านจุดหมุนของเพลาข้อเหวี่ยง อย่างไรก็ดี ถ้าระยะเยื้องแนวไม่เท่ากับศูนย์แล้วระยะเวลาที่ตัวเลื่อนใช้ในการเคลื่อนที่ไปจะไม่เท่ากับที่ใช้ในการเคลื่อนที่กลับ ในรูปที่ 2.22(ก) ข้อเหวี่ยง O_2A เป็นตัวขับที่หมุนได้ครบรอบและมีความยาว R ข้อต่อ AB เป็นก้านส่งยาว L ตัวเลื่อนหมายเลข 4 ซึ่งเลื่อนไปมาในรางเลื่อนหมายเลข 1 อาจจะเป็นลูกสูบ, crosshead, plunger หรือ ram ขึ้นกับชนิดของเครื่องจักร รูปที่ 2.22(ข) แสดงตำแหน่งขีดจำกัดอันแรก จากรูปตัวเลื่อนหมายเลข 4 อยู่ที่ตำแหน่งห่างจากจุด O_2 มากที่สุด กำหนดให้เท่ากับ S_{max} รูปที่ 2.22(ค) แสดงตำแหน่งที่สองของตำแหน่งขีดจำกัด ตัวเลื่อนจะอยู่ห่างจากจุด O_2 น้อยที่สุด กำหนดให้เท่ากับ S_{min} ระยะทั้งหมดที่ตัวเลื่อนหมายเลข 4 เคลื่อนที่ไป-กลับ เรียกว่า *ระยะชัก (stroke)* ซึ่งเท่ากับผลต่างระหว่าง S_{max} กับ S_{min}

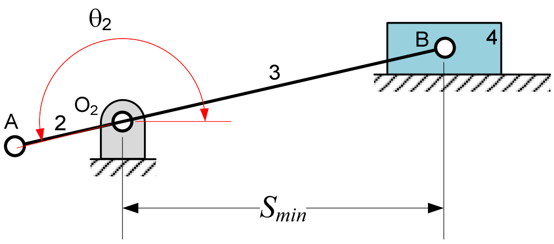
$$Stroke = S_{\max} - S_{\min} \tag{2.7}$$



(ก) กลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงเยื้องแนว และตัวแปรบอกมิติที่เกี่ยวข้อง



(ข) ตำแหน่งขีดจำกัด ตำแหน่งแรก

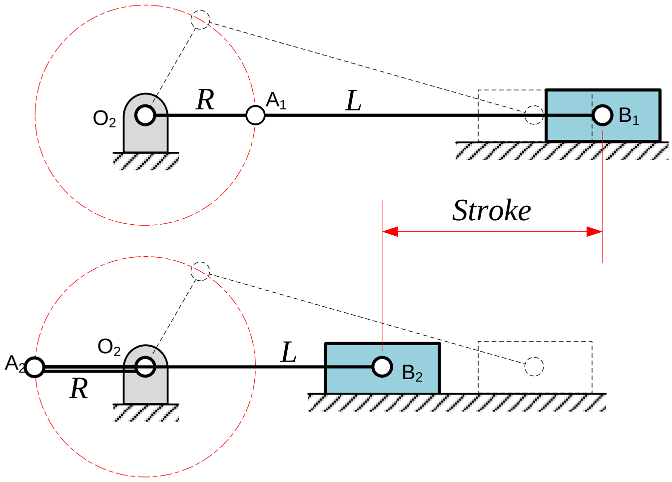


(ค) ตำแหน่งขีดจำกัด ตำแหน่งที่สอง

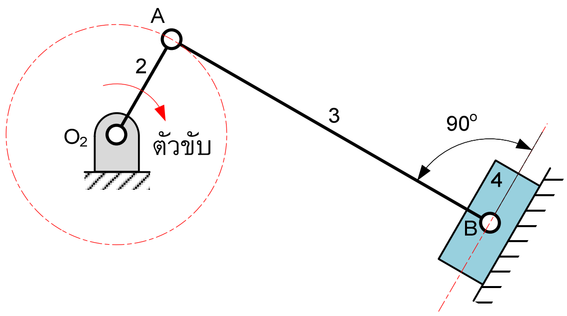
รูปที่ 2.22 กลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงเยื้องแนว และตำแหน่งขีดจำกัดของกลไก

ในกรณีที่ตัวเลื่อนหมายเลข 4 เป็นตัวขับแล้วตำแหน่งในรูป 2.22(ข) และ 2.22(ค) คือตำแหน่งจุดตาย

รูปที่ 2.23 แสดงตำแหน่งขีดจำกัดของกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงที่มีระยะเยื้องแนวเท่ากับศูนย์กรณีข้อเหวี่ยงหมายเลข 2 เป็นตัวขับ จากรูป กลไกนี้มีระยะชักเท่ากับ 2 เท่า ของความยาวข้อเหวี่ยง ตำแหน่งจุดตายของกลไกคือตำแหน่งที่ก้านส่งตั้งฉากกับเส้นทางเดินของตัวเลื่อนหมายเลข 4 (รูปที่ 2.24) ในกรณีที่ตัวเลื่อนหมายเลข 4 เป็นตัวขับแล้วตำแหน่งในรูปจะเป็นตำแหน่งจุดตาย



รูปที่ 2.23 ตำแหน่งขีดจำกัดของกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยง
(และตำแหน่งจุดตาย กรณีตัวเลื่อนเป็นตัวขับ)



รูปที่ 2.24 ตำแหน่งจุดตายของกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงเยื้องแนว กรณีข้อเหวี่ยงเป็นตัวขับ

ถัดไปจะแสดงวิธีเชิงวิเคราะห์เพื่อหาตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่งของตัวเลื่อนหมายเลข 4 ในกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงเยื้องแนว (รูปที่ 2.22(ก)) จากรูปตัวแปร S และ e สามารถเขียนในเทอมความยาวและมุมเอียงของข้อต่อ ได้ดังนี้

$$S = R\cos\theta + L\cos\phi \qquad (2.8ก)$$

$$e = R\sin\theta - L\sin\phi \qquad (2.8ข)$$

จัดรูปสมการที่ (2.8) จะได้

$$\phi = \arcsin\left(\frac{R}{L}\sin\theta - \frac{e}{L}\right) \qquad (2.9)$$

ถ้าข้อเหวี่ยงหมุนได้ครบรอบแล้วค่าสูงสุดและต่ำสุดของมุม ϕ จะเกิดที่มุม θ เท่ากับ 90 องศา และ -90 องศา ตามลำดับ แทนค่า θ ในสมการที่ (2.9) จะได้

$$\phi_{\max} = \arcsin\left(\frac{R-e}{L}\right) \qquad (2.10ก)$$

และ

$$\phi_{\min} = \arcsin\left(\frac{-R-e}{L}\right) \qquad (2.10ข)$$

ในกรณีที่ $e \geq 0$ [3] เงื่อนไขที่ข้อเหวี่ยงหมุนได้ครบรอบ คือ

$$R + e \leq L \tag{2.11ก}$$

สมการนี้แสดงให้เห็นว่า $\phi_{\min}$ เกิดขึ้นได้
และถ้าสมการ (2.11ก) เป็นไปได้แล้วจะได้ว่า

$$|R - e| \leq R + e \leq L \tag{2.11ข}$$

สมการนี้แสดงให้เห็นว่า $\phi_{\max}$ เกิดขึ้นได้

ดังนั้นข้อเหวี่ยงในเครื่องอัดลมและเครื่องยนต์จะหมุนได้ก็ต่อเมื่อสอดคล้องกับเงื่อนไขในสมการที่ (2.11ก) ถ้ากลไกประกอบขึ้นโดยมีตัวเลื่อนหมายเลข 4 อยู่ที่ด้านบวกของแกน x และเงื่อนไข (2.11ก) เป็นจริงแล้วมุม ϕ จะมีค่าอยู่ในช่วง $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ ในทางกลับกันถ้ากลไกมีตัวเลื่อนอยู่ด้านลบของแกน x แล้วมุม ϕ จะมีค่าอยู่ในช่วง $\pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2$ จากรูปที่ 2.22(ก) – (ค) จะได้

$$S_{\max} \equiv S_1 = \sqrt{(L+R)^2 - e^2} \tag{2.12ก}$$

ที่ตำแหน่ง
$$\theta_1 = \arcsin\frac{e}{L+R} \tag{2.12ข}$$

และ
$$S_{\min} \equiv S_2 = \sqrt{(L-R)^2 - e^2} \tag{2.12ค}$$

ที่ตำแหน่ง
$$\theta_2 = \pi + \arcsin\frac{e}{L-R} \tag{2.12ง}$$

ลูกสูบจะเคลื่อนที่ไปทางซ้าย ($\dot{x} < 0$) เมื่อ $\theta_1 < \theta < \theta_2$ และลูกสูบจะเคลื่อนที่ไปทางขวา ($\dot{x} > 0$) เมื่อ $\theta_2 < \theta < 2\pi + \theta_1$

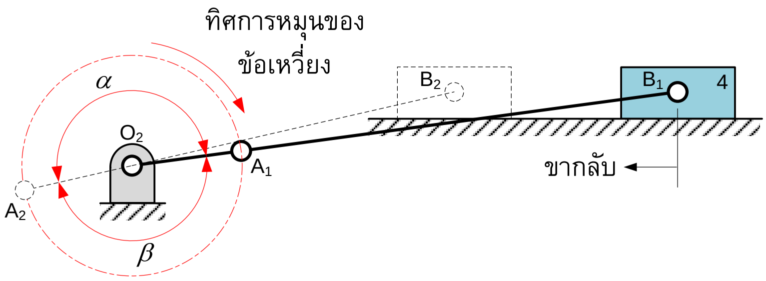
จากรูปที่ 2.25 ถ้าข้อเหวี่ยงหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ในทิศตามเข็มนาฬิกาแล้ว ช่วงเวลาที่ตัวเลื่อนเคลื่อนที่ไปทางซ้าย (ขากลับ) และทางขวา (ขาไป) จะแปรผันตรงกับกับระยะเคลื่อนตัวเชิงมุม β และ α ตามลำดับ ถ้านิยาม*อัตราส่วนเวลา (time ratio)* TR, คืออัตราส่วนเวลาขาไปต่อขากลับแล้วจะได้

$$TR = \frac{\alpha}{\beta} \tag{2.12จ}$$

จากรูปจะเห็นว่า $\alpha > \beta$ (หรือ TR > 1) ดังนั้นกลไกนี้จะใช้เวลาเคลื่อนที่ขาไปมากกว่าตอนขากลับ กลไกที่มีลักษณะเช่นนี้เรียกว่า *กลไกไปช้ากลับเร็ว (quick return mechanism)* ถ้าข้อเหวี่ยงหมุนในทิศตรงกันข้ามแล้วกลไกนี้จะกลายเป็นกลไกไปเร็วกลับช้า

---

[3] ถ้า $e < 0$ กลไกจะเป็นภาพสะท้อนของรูปที่ 2.19(ก) กับเส้น Ox ซึ่งสมมูลกับกลไกเดิม ดังนั้นจึงไม่ต้องแยกพิจารณาเป็นกรณีใหม่



รูปที่ 2.25 ระยะเคลื่อนตัวเชิงมุมของข้อเหวี่ยงขณะที่ตัวเลื่อนเคลื่อนที่ไป-กลับ

ความเร็วและความเร่งหาได้โดยการหาอนุพันธ์สมการที่ (2.8) และสมการที่ (2.9) ดังนี้

$$\dot{\phi} \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = K_{\phi}\dot{\theta} \tag{2.13ก}$$

$$\dot{S} \equiv \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = K_{S}\dot{\theta} \tag{2.13ข}$$

โดย
$$K_{\phi} \equiv \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{R\cos\theta}{L\cos\phi} \tag{2.14ก}$$

$$K_{S} \equiv \frac{dS}{d\theta} = -\left(R\sin\theta + LK_{\phi}\sin\phi\right) \tag{2.14ข}$$

และ
$$\ddot{\phi} = K_{\phi}\ddot{\theta} + K'_{\phi}\dot{\theta}^{2} \tag{2.15ก}$$

$$\ddot{S} = K_{S}\ddot{\theta} + K'_{S}\dot{\theta}^{2} \tag{2.15ข}$$

โดย
$$K'_{\phi} = \frac{dK_{\phi}}{d\theta} = -\frac{R\sin\theta}{L\cos\phi} + K_{\phi}^{2}\tan\phi \tag{2.16ก}$$

$$K'_{S} = \frac{dK_{S}}{d\theta} = -\left(R\cos\theta + LK'_{\phi}\sin\phi + LK_{\phi}^{2}\cos\phi\right) \tag{2.16ข}$$

ถ้า $e = 0$ จะได้

$$\frac{S}{R} = \cos\theta + \frac{L}{R}\cos\phi \tag{2.17ก}$$

และ
$$\sin\phi = \frac{R}{L}\sin\theta \tag{2.17ข}$$

จากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\cos\phi = \sqrt{1-\sin^{2}\phi}$ แทนสมการที่ (2.17ข) ลงไปจะได้

$$\cos\phi = \sqrt{1-\frac{R^{2}}{L^{2}}\sin^{2}\theta} \tag{2.18}$$

จากทฤษฎีบททวินาม [4] เทอมทางซ้ายมือของสมการที่ (2.18) จะเขียนได้ใหม่เป็น

$$\cos\phi = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{L^2}\sin^2\theta\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{R^4}{L^4}\sin^4\theta\right)-\frac{1}{16}\left(\frac{R^6}{L^6}\sin^6\theta\right)+\ldots \qquad (2.19)$$

เขียนสมการที่ (2.19) ในรูปของมุมหลายเท่าโดยใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ จะได้

$$\cos\phi = \frac{R}{L}\left(A_0+\frac{1}{4}A_2\cos 2\theta-\frac{1}{16}A_4\cos 4\theta+\frac{1}{36}A_6\cos 6\theta+\ldots\right) \qquad (2.20)$$

และสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ในสมการนี้ คือ

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{L}{R}-\frac{R}{4L}-\frac{3R^3}{64L^3}-\ldots\\
A_2 &= \frac{R}{L}+\frac{1}{4}\frac{R^3}{L^3}+\frac{15}{128}\frac{R^5}{L^5}+\ldots\\
A_4 &= \frac{1}{4}\frac{R^3}{L^3}+\frac{3}{16}\frac{R^5}{L^5}+\ldots\\
A_6 &= \frac{9}{128}\frac{R^5}{L^5}+\ldots
\end{aligned}$$

เนื่องจากเครื่องยนต์ทั่วไปมีอัตราส่วน R/L อยู่ในช่วง 1/6 ถึง 2/5 จึงสามารถประมาณสมการที่ (2.20) ด้วยเทอมเพียงสองเทอม เมื่อแทนในสมการที่ (2.17ก) จะได้

$$\frac{S}{R} \approx A_0+\cos\theta+\frac{1}{4}A_2\cos 2\theta \qquad (2.21)$$

ความเร็วและความเร่งของตัวเลื่อนหมายเลข 4 คือ

$$\frac{\dot{S}}{R} \approx \dot{\theta}\left(-\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right) \qquad (2.22)$$

$$\frac{\ddot{S}}{R} \approx \dot{\theta}^2\left(-\cos\theta-A_2\cos 2\theta\right)+\ddot{\theta}\left(-\sin\theta-\frac{1}{2}A_2\sin 2\theta\right) \qquad (2.23)$$

สำหรับเครื่องยนต์ทั่วไปใช้การประมาณค่าเพียงสองเทอมก็แม่นยำพอสมควรแล้ว ดังนั้น

$$S \approx L+R\left(\cos\theta+\frac{R}{4L}\cos 2\theta\right)$$

$$\dot{S} \approx -R\dot{\theta}^2\left(\sin\theta+\frac{R}{2L}\sin 2\theta\right)$$

---

[4] $(a+b)^n = a^n+\frac{na^{n-1}b}{1!}+\frac{n(n+1)a^{n-2}b^2}{2!}+\ldots$

และ $$\ddot{S} \approx -R\dot{\theta}^2\left(\cos\theta + \frac{R}{L}\cos 2\theta\right) - R\ddot{\theta}\left(\sin\theta + \frac{R}{2L}\sin 2\theta\right)$$

เทอมของมุม θ และ 2θ คือส่วนที่เป็นปฐมภูมิและทุติยภูมิ ตามลำดับ

ความเร็วและความเร่งเชิงมุมของก้านส่งคืออนุพันธ์อันดับที่ 1 และ 2 ของสมการที่ (2.19)

$$\dot{\phi}\sin\phi \approx \dot{\theta}\left(\frac{R^2}{L^2}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{R^4}{L^4}\sin^3\theta\cos\theta + \frac{3}{8}\frac{R^6}{L^6}\sin^5\theta\cos\theta\right)$$

จากสมการที่ (2.17ข) และเอกลักษณ์ตรีโกณมิติจะได้

$$\dot{\phi} = \frac{R}{L}\dot{\theta}\left(C_1\cos\theta - \frac{C_3}{3}\cos 3\theta + \frac{C_5}{5}\cos 5\theta\right) \tag{2.24}$$

และ

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} = &-\frac{R}{L}\dot{\theta}^2\left(C_1\cos\theta - C_3\sin 3\theta + C_5\sin 5\theta\right) + \\ &\frac{R}{L}\ddot{\theta}\left(C_1\cos\theta - \frac{C_3}{3}\cos 3\theta + \frac{C_5}{5}\cos 5\theta\right)\end{aligned} \tag{2.25}$$

สัมประสิทธิ์ในสมการคือ

$$C_1 \approx 1 + \frac{1}{8}\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{3}{64}\left(\frac{R}{L}\right)^4$$

$$C_3 \approx \frac{3}{8}\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{27}{128}\left(\frac{R}{L}\right)^4$$

$$C_5 \approx \frac{15}{128}\left(\frac{R}{L}\right)^4$$

2.8 มุมส่งทอด

สำหรับกลไก 4 ข้อต่อ (รูปที่ 2.26(ก)) *มุมส่งทอด (transmission angle)* μ คือ มุมระหว่างก้านส่งกับตัวตาม ขนาดของมุมส่งทอดและแรงกระทำระหว่างก้านส่งกับตัวตาม (รูปที่ 2.26(ข)) เป็นปัจจัยที่กำหนดขนาดโมเมนต์รอบจุดหมุนของตัวตาม ดังนั้นถ้ามุมส่งทอดมีค่าน้อยแล้วโมเมนต์รอบจุดหมุนของตัวตามอาจจะมีค่าไม่พอที่จะเอาชนะแรงเสียดทานที่จุดหมุน ซึ่งอาจทำให้กลไกหยุดเคลื่อนที่ได้ [5] ขีดจำกัดของมุมส่งทอดที่เหมาะสมนั้นไม่สามารถระบุเป็นค่าตาย

---

[5] ถ้าข้อต่อตัวขับและตัวตามยึดกับพื้นแล้วมุมส่งทอดสามารถใช้ทำนายคุณภาพของการส่งผ่านแรงหรือโมเมนต์ได้ แต่ถ้าใช้งานผ่านข้อต่อที่ไม่ได้ยึดกับพื้น เช่น ก้านส่ง แล้วก็ไม่จำเป็นต้องพิจารณาเกี่ยวกับมุมส่งทอด [1]

ตัวได้เพราะการเคลื่อนที่ของกลไกจะมีแรงเฉื่อยเกี่ยวข้องอยู่ด้วย อย่างไรก็ตามมุมส่งทอดควรอยู่ในช่วง $45 < \mu < 135$ องศา [2] เพื่อให้กลไกเคลื่อนที่ได้ราบเรียบ

รูปที่ 2.26(ค) และ 2.26(ง) แสดงตำแหน่งของตัวขับที่ทำให้มุมส่งทอดมีค่าต่ำสุด และสูงสุด จากรูปที่ 2.26(ก) พิจารณาสามเหลี่ยม O_2AO_4 จะได้

$$d^2 = a^2 + f^2 - 2af\cos\theta$$

พิจารณาสามเหลี่ยม ABO_4 จะได้

$$d^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\mu$$

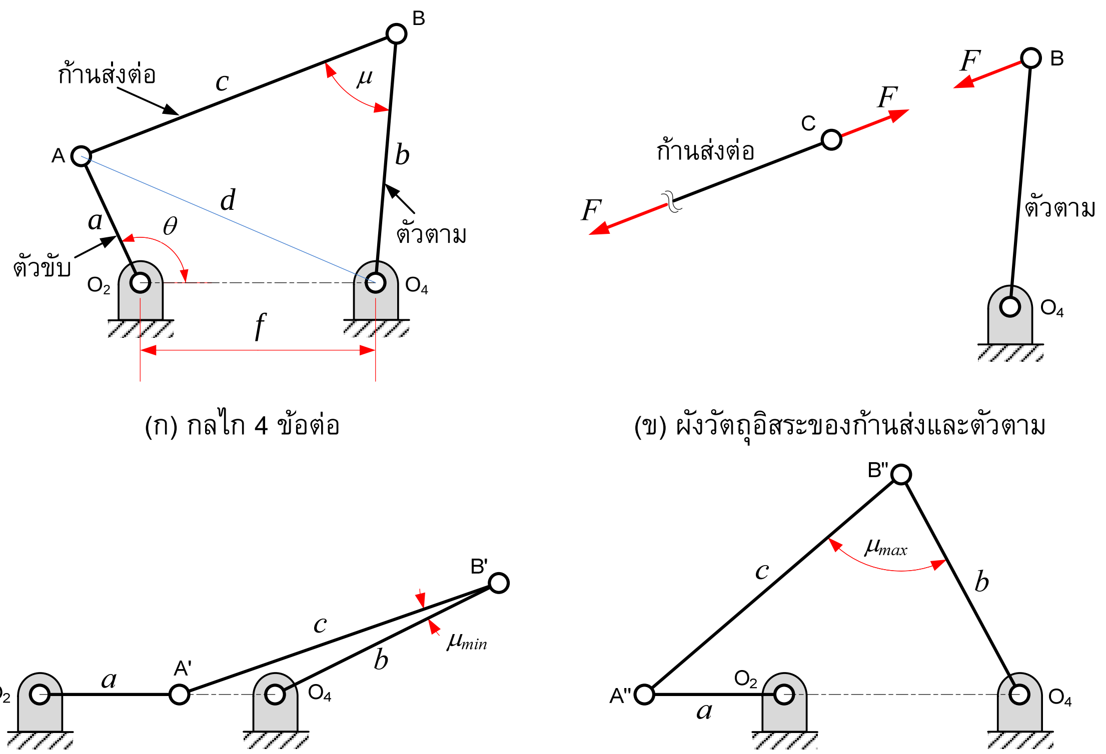
ดังนั้น
$$a^2 + f^2 - 2af\cos\theta = b^2 + c^2 - 2bc\cos\mu \tag{2.26}$$

ค่าสูงสุด-ต่ำสุดของ μ เกิดขึ้นที่ตำแหน่ง $d\mu/d\theta = 0$ สำหรับสมการข้างต้น จะได้

$$2af\sin\theta = -2bc\left(-\sin\mu\cdot\frac{d\mu}{d\theta}\right)$$

ดังนั้น
$$\frac{d\mu}{d\theta} = \frac{af}{bc}\frac{\sin\theta}{\sin\mu}$$

กำหนดอนุพันธ์ให้มีค่าเท่ากับศูนย์
$$\frac{af}{bc}\frac{\sin\theta}{\sin\mu} = 0$$



(ก) กลไก 4 ข้อต่อ

(ข) ผังวัตถุอิสระของก้านส่งและตัวตาม

(ค) ตำแหน่งของตัวขับที่ทำให้มุมส่งทอดต่ำสุด

(ง) ตำแหน่งของตัวขับที่ทำให้มุมส่งทอดสูงสุด

รูปที่ 2.26 มุมส่งทอดในกลไก 4 ข้อต่อ

แต่ a, f, b และ c ไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้น $\sin\theta = 0$ ซึ่งจะได้ $\theta = 0^o$ และ 180^o หากเขียนตำแหน่งของกลไกที่มุม θ เหล่านี้จะพบว่า $\mu_{\min}$ เกิดที่ $\theta = 180^o$ (รูปที่ 2.26(ค)) และ $\mu_{\max}$ เกิดที่ $\theta = 0^o$ (รูปที่ 2.26(ง)) ถ้าต้องการคำนวณขนาดมุม $\mu_{\min}$ และ $\mu_{\max}$ ก็ทำได้โดยแทนค่า $\theta = 0^o$ และ 180^o ตามลำดับลงในสมการที่ (2.26) ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$\mu_{\min} = \arccos\left[\frac{(a-f)^2 - (b^2 + c^2)}{-2bc}\right] \qquad (2.27ก)$$

และ

$$\mu_{\max} = \arccos\left[\frac{(a+f)^2 - (b^2 + c^2)}{-2bc}\right] \qquad (2.27ข)$$

สำหรับกรณีในรูปที่ 2.26(ก) $a = 19$ มม. $b = 34$ มม. $c = 46$ มม. $f = 32$ มม. เมื่อแทนค่าเหล่านี้ลงในสมการที่ (2.27) จะได้ $\mu_{\min} = 7.25^o$ และ $\mu_{\max} = 77.61^o$

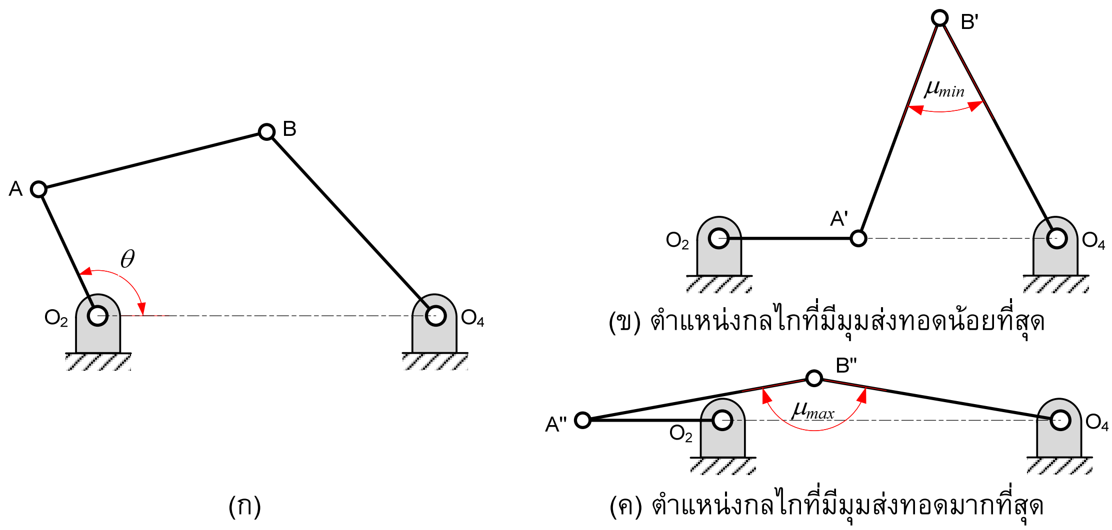
มุมส่งทอดมีโอกาสมากกว่า 90 องศาได้ ยกตัวอย่างเช่นถ้าให้ข้อต่อที่ยาวที่สุดเป็นข้อต่ออยู่กับที่ (พื้น) ดังรูปที่ 2.27(ก) สำหรับกรณีในรูปนี้ $a = 19$ มม. $b = 34$ มม. $c = 32$ มม. $f = 46$ มม. เมื่อแทนค่าเหล่านี้ลงในสมการที่ (2.27) จะได้ $\mu_{\min} = 48.18^o$ และ $\mu_{\max} = 160.02^o$ (รูปที่ 2.27(ข) และ 2.27(ค) ตามลำดับ)

ข้อสังเกตที่ควรทราบคือสมการที่ (2.27) ได้จากสมการความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต (สมการที่ (2.26)) ดังนั้นค่าต่ำสุด-สูงสุดของมุมส่งทอดที่ได้จึงแทนมุมระหว่างก้านส่งกับตัวตามที่น้อยสุดและสูงสุด ตามลำดับ จึงไม่เกี่ยวข้องกับคุณภาพของการส่งทอดแรง

จากรูปที่ 2.26(ข) ถ้าสมมติว่าแรง F คงที่ไม่ว่ากลไกจะอยู่ในตำแหน่งใดแล้วโมเมนต์รอบจุด O_4 คือ

$$M_{O4} = bF\cos(90^o - \mu) = bF\sin\mu$$

ถ้ากำหนดว่าการส่งทอดแรงที่ดีที่สุดคือ การมีโมเมนต์รอบจุด O_4 มากที่สุดแล้วจะได้ $\mu = 90^o$



รูปที่ 2.27 มุมส่งทอดในกลไก 4 ข้อต่อที่มีข้อต่อยาวที่สุดเป็นพื้น

ถัดไปพิจารณากลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยง สำหรับกลไกนี้มุมส่งทอดคือ มุมระหว่างเส้นตรงที่ลากตั้งฉากกับทางเดินของตัวเลื่อนกับก้านส่งดังแสดงในรูปที่ 2.28(ก) ถ้ากำหนดให้ O_2A เป็นตัวขับแล้วจะได้ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตต่อไปนี้

$$Ax = Az - e = a\sin\theta - e$$

และ

$$Ax = b\sin(\pi/2 - \mu) = b\cos\mu$$

ดังนั้น

$$a\sin\theta - e = b\cos\mu \qquad (2.28)$$

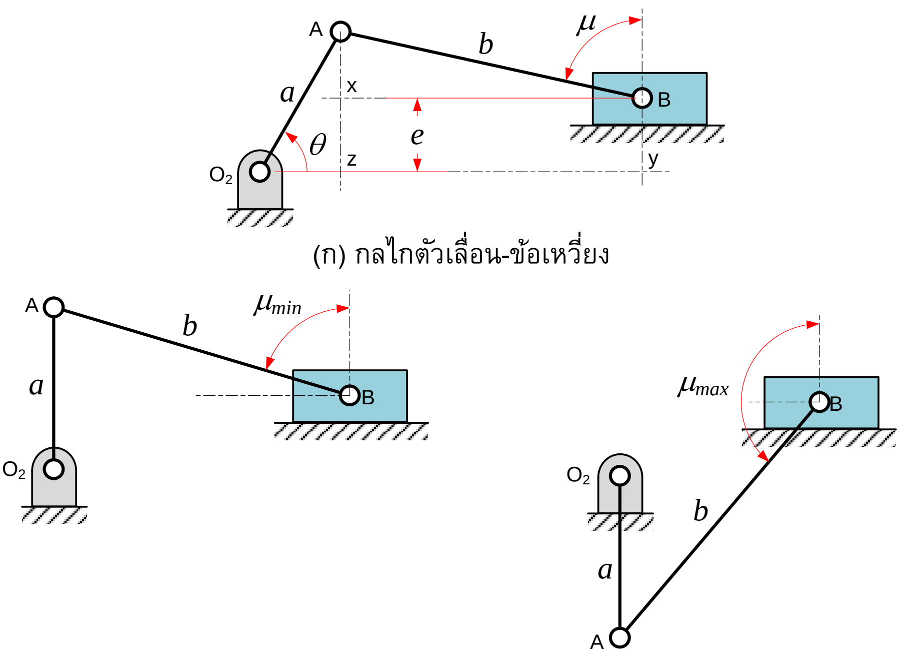
หาอนุพันธ์เทียบกับ θ จะได้

$$a\cos\theta = -b\sin\mu\frac{d\mu}{d\theta}$$

จัดรูปจะได้

$$\frac{d\mu}{d\theta} = -\frac{a}{b}\frac{\cos\theta}{\sin\mu}$$

เมื่อกำหนดให้อนุพันธ์เท่ากับศูนย์จะได้ $\cos\theta = 0$ ดังนั้น $\theta = 90^o$ และ 270^o หากเขียนตำแหน่งของกลไกที่มุม θ เหล่านี้ จะพบว่า $\mu_{\min}$ เกิดที่ $\theta = 90^o$ (รูปที่ 2.28(ข)) และ $\mu_{\max}$ เกิดที่ $\theta = 270^o$ (รูปที่ 2.28(ค)) โดยสามารถคำนวณค่าได้จากสมการต่อไปนี้



(ข) ตำแหน่งของตัวขับที่ทำให้มุมส่งทอดน้อยสุด

(ค) ตำแหน่งของตัวขับที่ทำให้มุมส่งทอดมากสุด

รูปที่ 2.28 มุมส่งทอดในกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยง

$$\mu_{\min} = \arccos\left(\frac{a-e}{b}\right) \tag{2.29ก}$$

$$\mu_{\max} = \arccos\left(\frac{-a-e}{b}\right) \tag{2.29ข}$$

ในทำนองเดียวกันกับกลไก 4 ข้อต่อ คุณภาพของการส่งทอดแรงที่ดีที่สุดของกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงเกิดขึ้นเมื่อ $\mu = 90^o$

2.9 กำลังและการได้เปรียบเชิงกล

นิยามของ*กำลัง (power)* P ในระบบกลคือ ผลคูณเชิงสเกล่าร์ (scalar product) ของเวกเตอร์แรง $\vec{F}$ และเวกเตอร์ความเร็ว $\vec{V}$ ที่จุดใด ๆ ดังนั้น

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

ในเครื่องจักรกลหมุน กำลัง P จะเท่ากับผลคูณของแรงบิด T และความเร็วเชิงมุม ω หรือ

$$P = T\omega \tag{2.30}$$

กำลังที่ป้อนเข้าระบบจะมีบางส่วนสูญเสีย ดังนั้นกำลังขาออก P_{out} คือ

$$P_{out} = P_{in} - P_{loss} \tag{2.31}$$

โดย P_{in} คือ กำลังขาเข้า

P_{loss} คือ กำลังสูญเสีย

ประสิทธิภาพเชิงกล (mechanical efficiency) η มีนิยามดังนี้

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} \tag{2.32}$$

ถ้าข้อต่อถูกสร้างมาเที่ยงตรงและมีแรงเสียดทานน้อยที่จุดต่อแล้วกำลังสูญเสียอาจจะน้อยกว่า 10 เปอร์เซ็นต์ ในการวิเคราะห์อย่างง่ายต่อไปนี้จะสมมติว่าไม่มีกำลังสูญเสียในระบบ

จากสมการที่ (2.30) กำลังขาเข้า คือ

$$P_{in} = T_{in}\omega_{in}$$

โดย T_{in} และ ω_{in} คือ แรงบิดขาเข้าและความเร็วเชิงมุมขาเข้า ตามลำดับ

ในทำนองเดียวกันกำลังขาออกคือ

$$P_{out} = T_{out}\omega_{out}$$

โดย T_{out} และ ω_{out} คือ แรงบิดขาออกและความเร็วเชิงมุมขาออก ตามลำดับ

แทนในสมการที่ (2.31) โดยไม่คิดกำลังสูญเสียจะได้

$$T_{in}\omega_{in} = T_{out}\omega_{out}$$

หรือ
$$m_T \equiv \frac{T_{out}}{T_{in}} = \frac{\omega_{in}}{\omega_{out}} \tag{2.33}$$

โดย m_T *คือ อัตราส่วนแรงบิด (torque ratio)* จากสมการจะเห็นว่าอัตราส่วนแรงบิด คือส่วนกลับของอัตราส่วนความเร็วเชิงมุม

นิยาม*การได้เปรียบเชิงกล (mechanical advantage)* m_A ดังนี้

$$m_A = \frac{F_{out}}{F_{in}} \qquad (2.34ก)$$

โดย F_{in} และ F_{out} คือ แรงที่ใส่กลไก (แรงขาเข้า) และแรงที่ได้จากกลไก (แรงขาออก) ตามลำดับ ถ้าสมมติว่าแรงขาเข้าและแรงขาออกกระทำตั้งฉากกับข้อต่อ ที่ตำแหน่งรัศมี r_{in} และ r_{out} ดังตัวอย่างกลไกในรูปที่ 2.29 แล้ว

$$F_{out} = \frac{T_{out}}{r_{out}}$$

และ
$$F_{in} = \frac{T_{in}}{r_{in}}$$

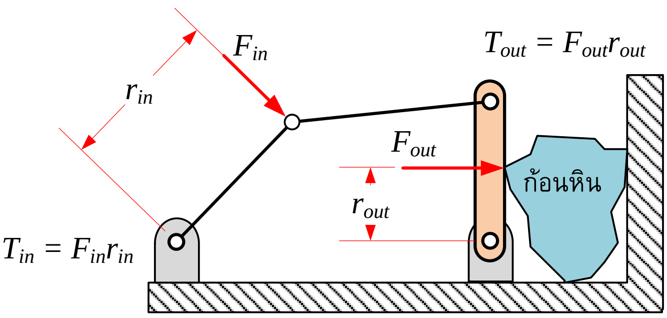
และจะเขียนการได้เปรียบเชิงกลในเทอมของแรงบิดได้ดังนี้

$$m_A = \frac{T_{out}}{T_{in}}\frac{r_{in}}{r_{out}} \qquad (2.34ข)$$

ถ้าแทนสมการที่ (2.33) จะได้

$$m_A = \frac{\omega_{in}}{\omega_{out}}\frac{r_{in}}{r_{out}} \qquad (2.34ค)$$

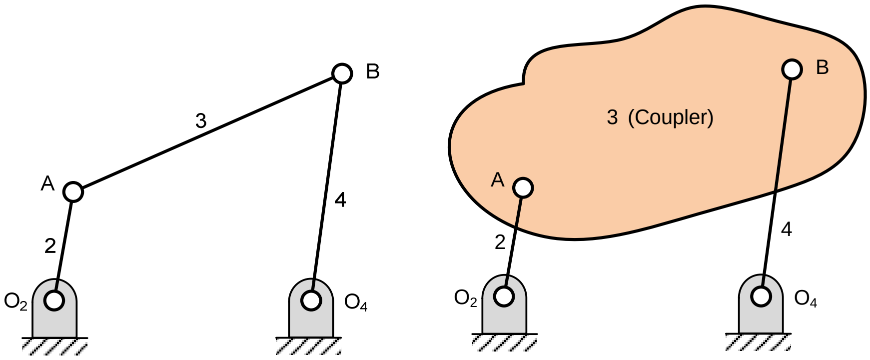
อัตราส่วนความเร็วเชิงมุมและการได้เปรียบเชิงกล สามารถใช้เป็นดัชนีสำหรับเปรียบเทียบกลไกแบบหนึ่งกับแบบอื่น ๆ ว่าเหมาะสมกับการใช้งานมากน้อยเพียงใดได้



รูปที่ 2.29 กลไกบดหิน

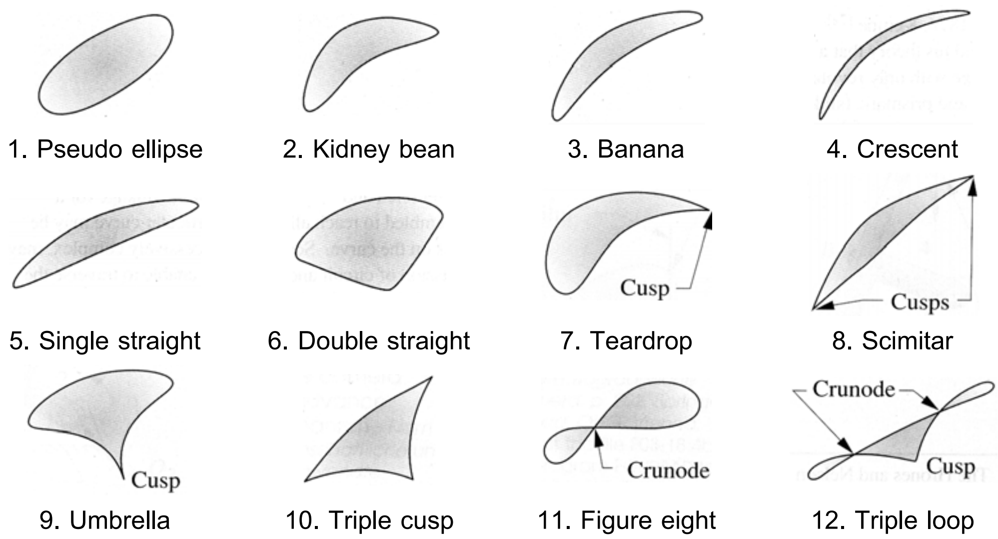
2.10 เส้นโค้ง Coupler

เส้นโค้ง coupler คือ เส้นโค้งที่เกิดจากทางเดินของจุดบนก้านส่งของกลไก 4 ข้อต่อบนระนาบอยู่กับที่ จุดบนก้านส่งที่สนใจมีชื่อเรียกว่า จุด coupler (coupler point) เนื่องจากก้านส่งสามารถขยายขนาดได้ไม่จำกัดแม้ว่าจะยังยึดกับข้อต่อที่เป็นตัวขับและตัวตาม ณ ตำแหน่งเดิมก็ตาม (รูปที่ 2.30(ข)) ดังนั้นจึงมีจุด coupler จำนวนไม่จำกัดสำหรับลากส่วนโค้ง coupler แบบต่าง ๆ ยกตัวอย่างเช่น จุด A และ B ในรูปที่ 2.30(ข) จะลากเส้นโค้งที่เป็นวงกลมรอบจุด O_2 และ O_4 ตามลำดับ จุดอื่น ๆ บน coupler สามารถสร้างเส้นโค้งปิดลักษณะต่าง ๆ ได้ดังแสดงในรูปที่ 2.31 จากรูปบางจุดอาจลากเส้นโค้ง บางจุดอาจลากเส้นโค้งที่เกือบเป็นเส้นตรง บางจุดก็ลากเส้นคล้ายรูปเลข 8 เป็นต้น จุดที่น่าสนใจของเส้นโค้ง coupler เหล่านี้คือจุดที่เป็น*บัพแหลม (cusp)* และจุดที่*บัพไขว้ (crunode)*



(ก) ก้านส่งก่อนขยายขนาด (ข) ก้านส่งหลังขยายขนาด

รูปที่ 2.30 การขยายขนาดก้านส่ง

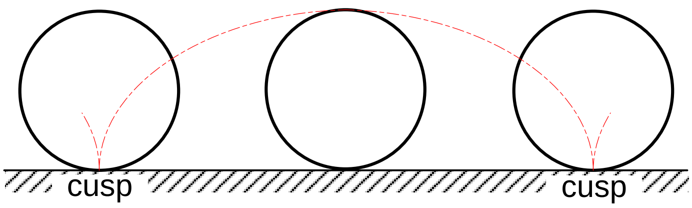


รูปที่ 2.31 ตัวอย่างเส้นโค้ง coupler

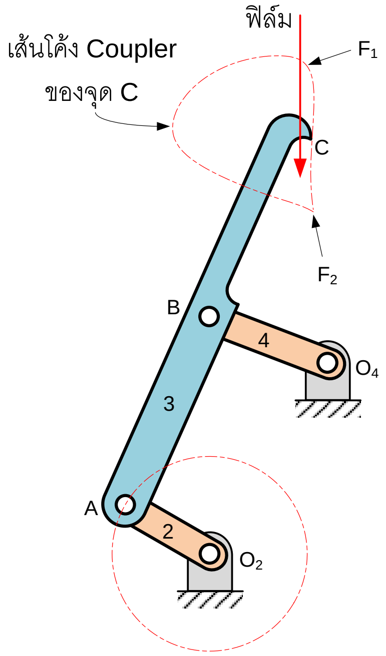
ตำแหน่งบัพแหลมเป็นตำแหน่งที่ความเร็วของจุด coupler มีความเร็วเท่ากับศูนย์ เช่น ส่วนโค้งไซคลอยด์ (cycloid) ซึ่งเป็นส่วนโค้งแสดงตำแหน่งการเคลื่อนที่ของจุดบนเส้นรอบวงของล้อที่กลิ้งไปบนพื้นราบโดยไม่ไถล ส่วนโค้งนี้จะมีบัพแหลมเกิดขึ้นเมื่อจุดบนล้อที่ลากส่วนโค้งสัมผัสกับพื้นราบพอดี ดังรูปที่ 2.32 ณ ตำแหน่งนี้จุดบนล้อจะมีความเร็วเป็นศูนย์หรือเรียกว่าเป็น instant center of zero velocity จุด coupler ที่ลากส่วนโค้งนี้จะเคลื่อนที่ราบเรียบด้วยความเร็วที่ค่อย ๆ ลดลงจนเป็นศูนย์ จากนั้นก็เคลื่อนที่จากไปด้วยความเร่งโดยการเคลื่อนที่ไม่สะดุด ดังนั้นจึงถูกนำไปใช้เป็นกลไกเลื่อนฟิล์มภาพยนตร์ดังรูปที่ 2.33

ตำแหน่งบัพไขว้จะมีเส้นโค้งมาตัดกัน จึงมีความชันของเส้นโค้ง ณ จุดเดียวกันมี 2 ค่า นอกจากนี้ความเร็วก็มี 2 ค่าด้วยแต่ไม่เท่ากับศูนย์

กลไกเลื่อนฟิล์มภาพยนตร์ (ซึ่งจัดเป็นกลไกแบบข้อเหวี่ยง-แขนแกว่ง) ในรูปที่ 2.33 ใช้ตะขอ (จุด C) ของ coupler AB เลื่อนฟิลม์ภาพยนตร์ จริง ๆ แล้วการฉายภาพยนตร์ก็คือการฉายภาพนิ่งทีละเฟรมอย่างต่อเนื่องและรวดเร็ว ภาพนิ่งแต่ละเฟรมจะถูกฉายขึ้นจอภาพเป็นเวลาเพียงเสี้ยววินาที จากนั้นก็ถูกเลื่อนออกไปเพื่อฉายภาพนิ่งเฟรมถัดไป ซ้ำเช่นนี้เรื่อยไป ระหว่างการเลื่อนภาพนิ่งเฟรมใหม่เข้ามาแทนเฟรมเก่าจอจะว่างเป็นเวลา 1/24 วินาที เนื่องจากสายตามนุษย์ไม่สามารถรับรู้การกระพริบจากการฉายภาพแต่ละเฟรมจึงมองเห็นเป็นภาพต่อเนื่อง กลไกที่ใช้ทำงานนี้ถูกเลือกมาอย่างชาญฉลาด จากรูปที่ 2.33 ตะขอ C จะเคลื่อนเข้าไปในร่องฟิล์มภาพยนตร์ขณะที่ผ่านจุด F_1 ในแนวเกือบตั้งฉากกับฟิล์มจึงไม่ทำให้ฟิล์มเสียหาย จากนั้นจุด C จะดึงฟิล์มให้เลื่อนลงมาตามแนวที่เกือบเป็นเส้นตรงจนถึงจุด F_2 ซึ่งภาพนิ่งเฟรมถัดไปอยู่ในตำแหน่งที่ต้องการ การเลื่อนของฟิล์มจะอยู่ในร่องตรงเรียกว่า "gate" และขณะที่เลื่อนฟิล์มจอจะว่างเปล่าเพราะแผ่นเปิดปิดเครื่องฉาย (shutter) ถูกปิดโดยการขับเคลื่อนของกลไกชุดอื่นที่มีเพลาขับเพลาเดียวกันกับเพลา O_2 ตะขอ C จะเคลื่อนออกจากฟิล์มที่จุด F_2 ซึ่งเป็นตำแหน่งบัพแหลม ดังนั้นความเร็วของตะขอก่อนถึงบัพแหลมจะลดลงอย่างราบเรียบจนเป็นศูนย์ที่บัพแหลม แล้วจึงเร่งด้วยความเร็วที่ค่อย ๆ เพิ่มขึ้นเพื่อให้ตะขอ C ออกจากร่องฟิล์มโดยไม่ทำให้ฟิล์มกระตุกขณะที่เครื่องฉายเปิดฉายรูปต่อไปพอดี

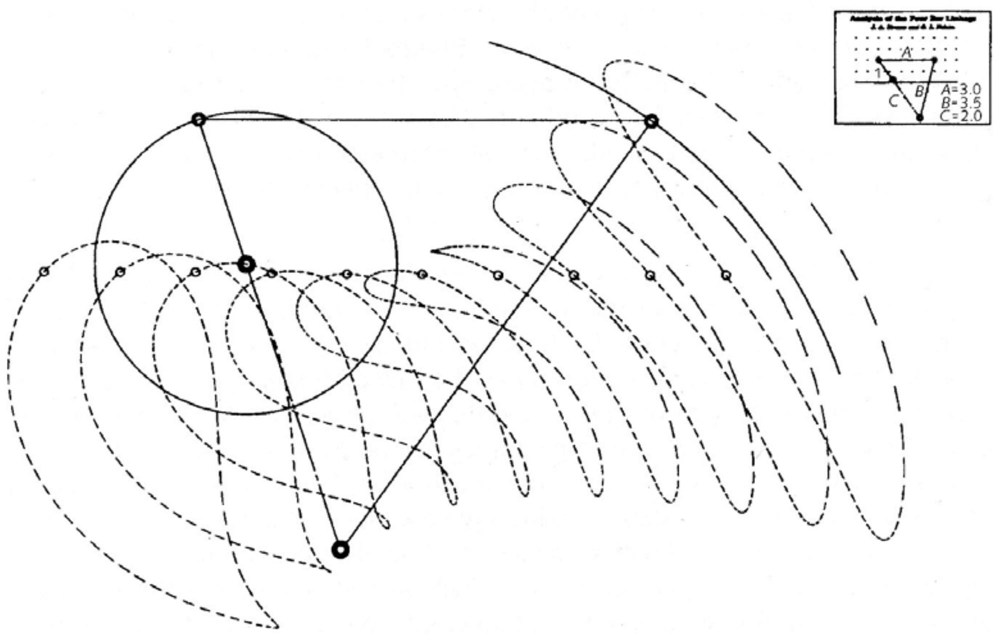


รูปที่ 2.32 ส่วนโค้ง cycloid

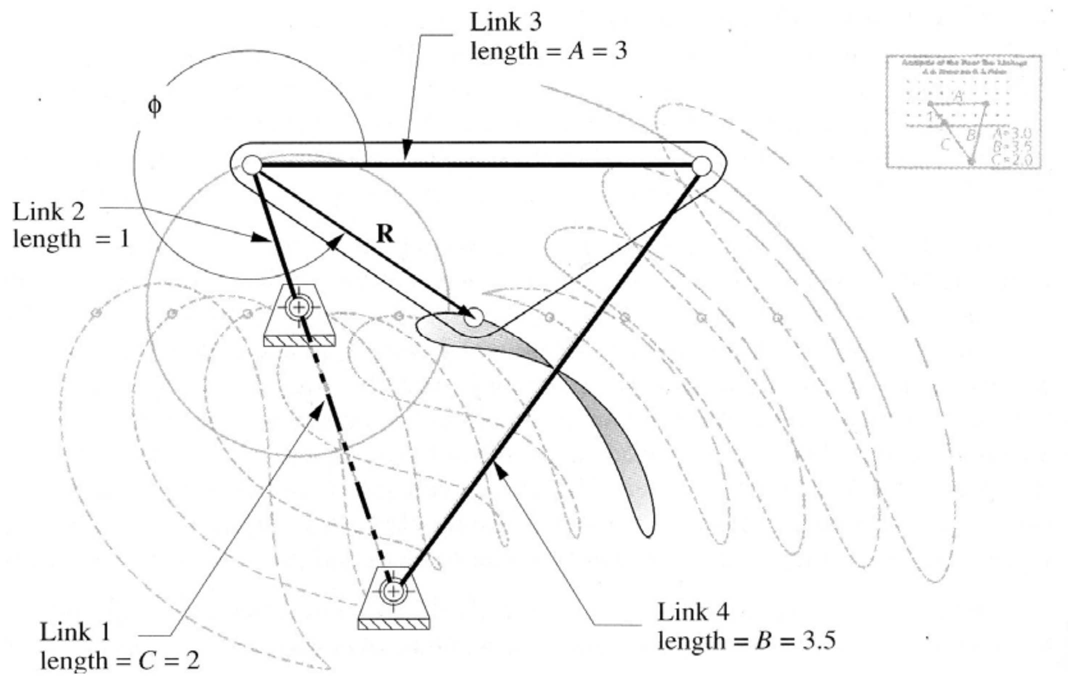


รูปที่ 2.33 กลเลื่อนฟิล์มภาพยนตร์

นักออกแบบสามารถดูเส้นโค้ง coupler แบบต่าง ๆ ที่ลากโดยกลไก 4 ข้อต่อแบบข้อเหวี่ยง-แขนแกว่งจากหนังสือของ Hrones and Nelson หนังสือเล่มนี้มีเส้นโค้ง coupler curves มากถึง 7000 เส้น รวมทั้งรูปร่างของกลไกที่ใช้ลากส่วนโค้งเหล่านี้ ความยาวของข้อต่อต่าง ๆ ในกลไกจะบอกเป็นอัตราส่วน โดยกำหนดความยาวข้อเหวี่ยงเท่ากับ 1 หน่วย รูปที่ 2.34(ก) เป็นตัวอย่างหนึ่งจากหนังสือเล่มนี้ จากรูป ก้านส่ง (ข้อต่อ A) ตัวตาม (ข้อต่อ B) และฐาน (ข้อต่อ C) มีความยาว 3, 3.5 และ 2 เท่า ของความยาวข้อเหวี่ยง รูปที่ 2.34(ข) แสดงวิธีสร้างกลไก 4 ข้อต่อจากเส้นโค้ง coupler ที่ต้องการ จากรูปวงกลมเล็ก ๆ ที่อยู่บนเส้นโค้ง coupler ก็คือจุด coupler ดังนั้นจะสร้างกลไกที่ลากเส้นโค้ง coupler ที่ต้องการได้โดยการขยายข้อต่อหมายเลข 3 (หรือ coupler) ให้คลุมจุดเล็ก ๆ นั้น



(ก) ตัวอย่างเส้นโค้ง coupler



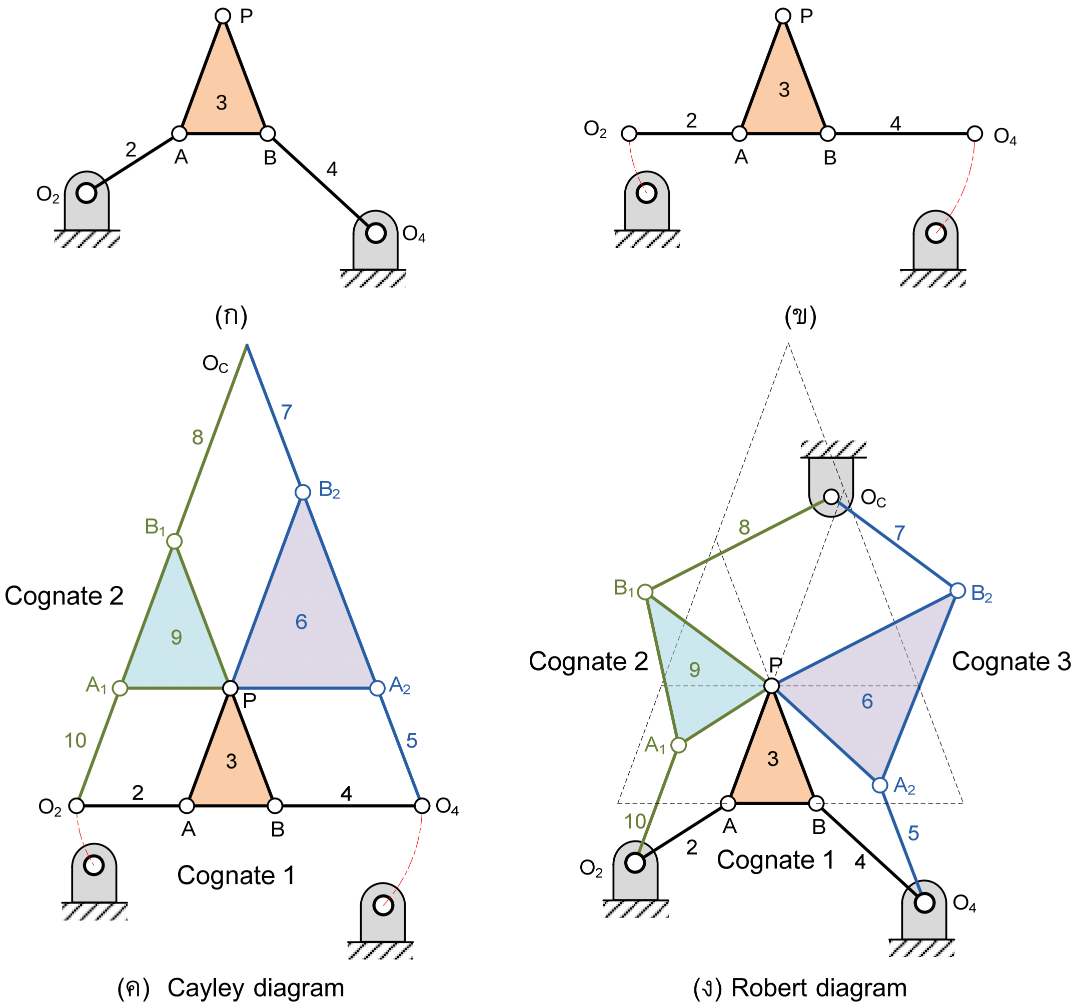
(ข) วิธีสร้างกลไกที่มีเส้นโค้ง coupler ที่ต้องการ

รูปที่ 2.34 ตัวอย่างเส้นโค้ง coupler จากหนังสือของ Hrones และ Nelson และวิธีสร้างกลไก

2.11 Cognates ของกลไก 4 ข้อต่อ

ในบางครั้ง แม้ว่ากลไกที่ได้จากการสังเคราะห์จะสร้างเส้นทางเดิน (path generation) ได้ตรงตามที่ต้องการ แต่จุดหมุนที่อยู่กับที่ไม่สอดคล้องกับตำแหน่งพื้นหรือโครงฐาน (frame) ในสถานการณ์นี้การประยุกต์แนวคิด cognate กับกลไกจะมีประโยชน์อย่างยิ่ง คำว่า cognate นี้ถูกใช้โดย Hartenberg และ Denavit ในความหมายว่า เป็นกลไกที่มีเรขาคณิตต่างกันแต่สามารถสร้างเส้นโค้ง coupler เส้นเดียวกันได้ Samuel Roberts (1875) และ Chebyschev (1878) ต่างก็เป็นผู้ค้นพบทฤษฎีซึ่งกล่าวว่า *สำหรับกลไก 4 ข้อต่อ จะมีกลไก 3 แบบต่างกันที่สามารถลากเส้นโค้ง coupler เส้นเดียวกันได้* ทฤษฎีนี้มีชื่อเรียกตามผู้ค้นพบว่า Roberts-Chebyschev theorem

รูปที่ 2.35 แสดงขั้นตอนการหา cognate อีก 2 แบบที่เหลือของกลไก 4 ข้อต่อในรูปที่ 2.35(ก) ขั้นตอนแรกซึ่งแสดงอยู่ในรูปที่ 2.35(ข) คือปลดข้อต่อหมายเลข 2 และ 4 ออกจากจุดหมุน O_2 และ O_4 แล้วหมุนข้อต่อหมายเลข 2 และ 4 จนอยู่แนวเดียวกับส่วนของเส้นตรง AB

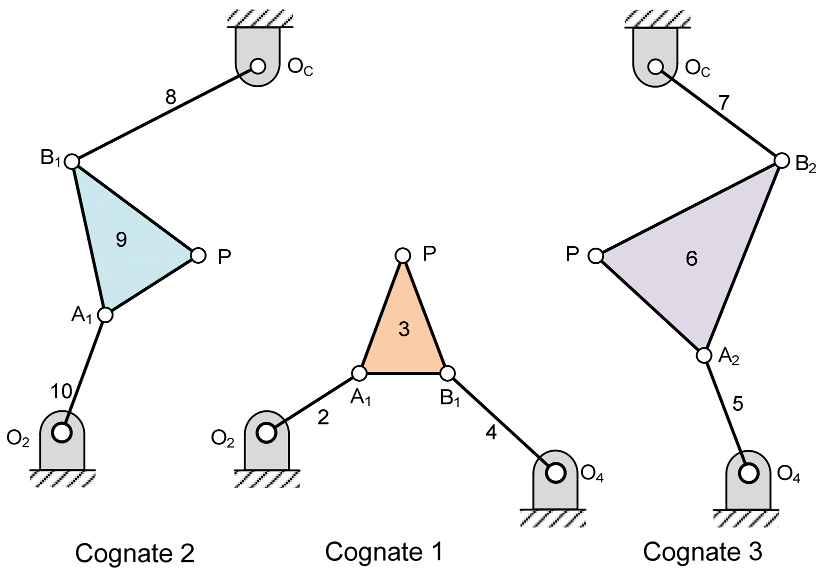


รูปที่ 2.35 การหา cognate ของกลไก 4 ข้อต่อจากแผนภาพ Cayley

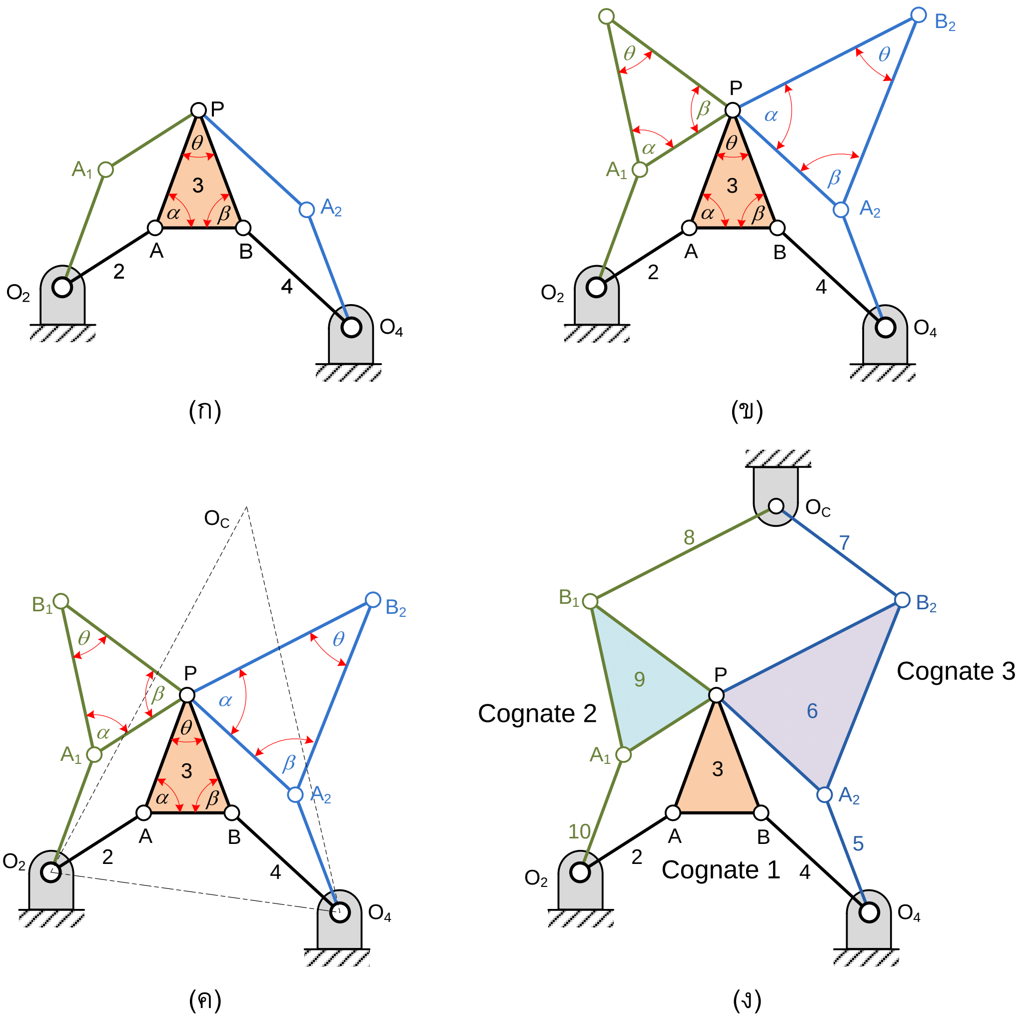
โดยให้ coupler (ข้อต่อหมายเลข 3) อยู่กับที่ ขั้นตอนที่สองซึ่งแสดงอยู่ในรูปที่ 2.35(ค) คือการลากเส้นตรงที่ขนานกับข้อต่อต่าง ๆ ทุกข้อต่อของกลไกเพื่อสร้าง Cayley diagram จากแผนภาพ Cayley ข้อต่อที่เพิ่มขึ้นคือข้อต่อหมายเลข 5 ถึง 10 ขั้นตอนที่สามซึ่งแสดงอยู่ในรูปที่ 2.35(ง) คือการหาตำแหน่งจริงของจุดหมุน O_C ซึ่งวิธีการก็คือ ขยับข้อต่อหมายเลข 2 และ 4 กลับตำแหน่งเดิม (O_2 และ O_4 ตามลำดับ) แล้วปล่อยให้ข้อต่อที่เหลือทั้งหมดยกเว้น coupler (ข้อต่อหมายเลข 3) เคลื่อนที่ ตำแหน่งของกลไกขณะนี้เรียกว่า Roberts diagram จากแผนภาพนี้จะเห็นกลไก 4 ข้อต่อ 3 ชุดซึ่งมีจุด coupler (จุด P) ร่วมกัน ขั้นตอนสุดท้ายซึ่งแสดงอยู่ในรูปที่ 2.36 ก็คือการแยกกลไกทั้ง 3 ชุดออกโดยคิดเสมือนว่าจุด P ของกลไกทั้งสามชุดแค่วางซ้อนกัน (ไม่ได้ยึดกัน)

Cognate ของกลไกสามารถหาได้โดยไม่ต้องสร้างแผนภาพ Cayley ดังขั้นตอนในรูปที่ 2.37 จากรูป 2.37(ก) ลากเส้น O_2A_1 และ A_1P ให้ขนานกับเส้น AP และ O_2A ตามลำดับ และลากเส้น O_4A_2 และ A_2P ให้ขนานกับเส้น BP และ O_4A ตามลำดับ จากนั้นสร้างสามเหลี่ยมคล้าย A_1PB_1 โดยฐานอยู่บนเส้นตรง A_1P และสามเหลี่ยมคล้าย A_2PB_2 โดยฐานอยู่บนเส้นตรง A_2P สามเหลี่ยมทั้งสองนี้เป็นสามเหลี่ยมคล้ายของสามเหลี่ยม APB ดังแสดงในรูปที่ 2.37(ข) ขั้นตอนถัดมาคือการหาจุดหมุนที่ยึดกับพื้น (จุด O_C) ซึ่งหาได้โดยเงื่อนไขว่าสามเหลี่ยม APB กับสามเหลี่ยม $O_2O_CO_4$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย ผลลัพธ์ที่ได้แสดงอยู่ในรูปที่ 2.37(ค) รูปที่ 2.37(ง) แสดง cognate ที่ได้ ซึ่งจะเห็นว่าเหมือนกับ cognate ที่หาด้วยวิธีที่แล้ว

ในกรณีที่จุด coupler P อยู่บนเส้นที่เชื่อมจุดต่อ A และ B ดังแสดงในรูปที่ 2.38(ก) แล้วแผนภาพ Cayley จะเป็นเส้นตรงหลาย ๆ เส้นซ้อนกัน จึงไม่สามารถหา cognate ได้ จึงต้องหาวิธีอื่น Hartenberg และ Denavit เสนอขั้นตอนต่อไปนี้



รูปที่ 2.36 กลไก 4 ข้อต่อ 3 แบบ ซึ่งเส้นโค้ง coupler ที่ลากโดยจุด P มีลักษณะเหมือนกัน

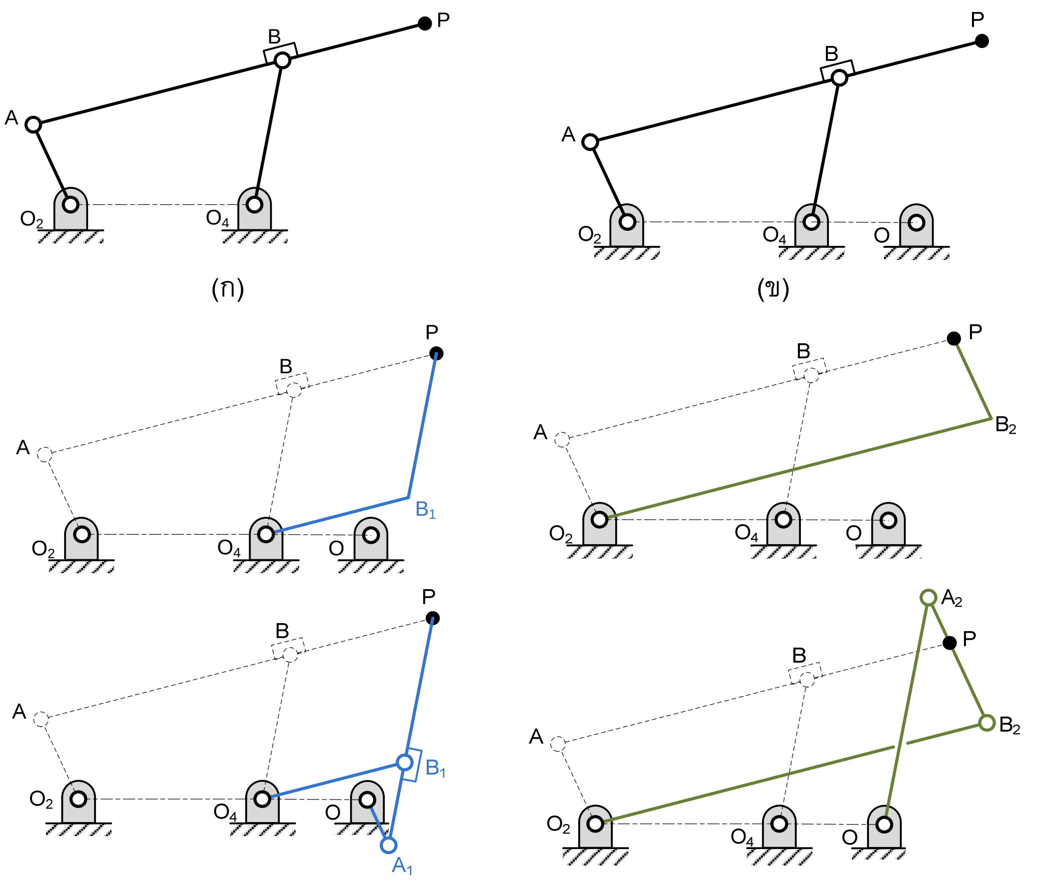


รูปที่ 2.37 การหา cognate ของกลไก 4 ข้อต่อด้วยวิธีสร้างสามเหลี่ยมคล้าย

1. หาตำแหน่งจุด O ซึ่งอยู่บนแนวเส้นที่เชื่อมจุด O_2O_4 และมีอัตราส่วน $\overline{O_2O_4}/\overline{O_4O} = \overline{AB}/\overline{BP}$ หรือ $\overline{O_4O} = \left(\overline{O_2O_4}\right)\left(\overline{BP}/\overline{AB}\right)$ ผลลัพธ์แสดงอยู่ในรูปที่ 2.38(ข)
2. หาตำแหน่งจุดต่อของกลไก cognate

2.1 สำหรับกลไก cognate อันแรก ($O_4B_1A_1O$) ในรูปที่ 2.38(ค) หาได้โดยสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน O_4BPB_1 จากนั้นลากเส้นขนานกับส่วนของเส้นตรง AO_2 จากจุด O ไปตัดกับเส้นตรง PB_1 (หรือส่วนต่อ) ที่จุด A_1

2.2 สำหรับกลไก cognate อันที่สอง ($O_2B_2A_2O$) ในรูปที่ 2.38(ง) หาได้โดยสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน O_2APB_2 จากนั้นลากเส้นขนานกับส่วนของเส้นตรง O_4B จากจุด O ไปตัดกับเส้นตรง PB_1 (หรือส่วนต่อ) ที่จุด A_2

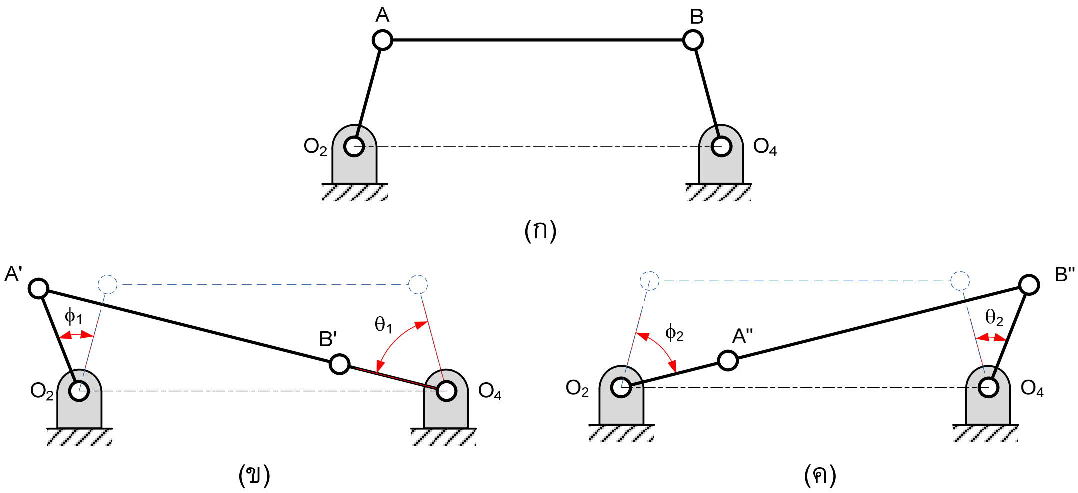


รูปที่ 2.38 การหา cognate ของกลไก 4 ข้อต่อเมื่อจุด coupler อยู่แนวเดียวกันกับก้านส่ง

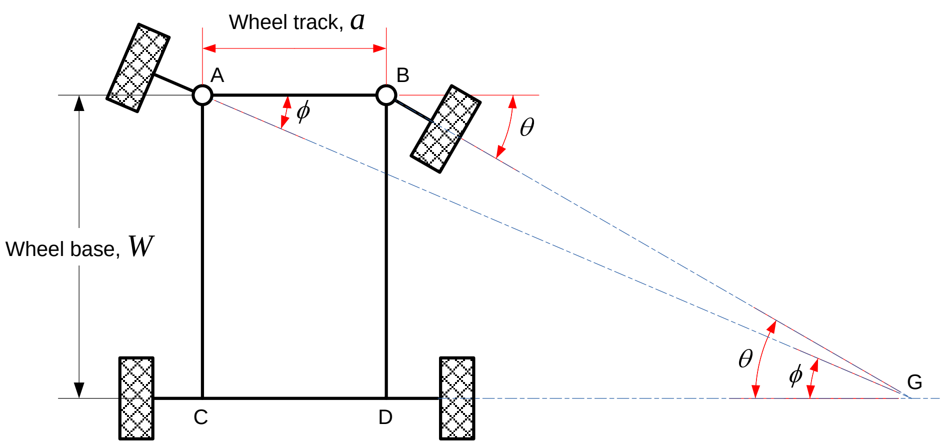
2.12 กลไกบังคับเลี้ยว

กลไกนี้คือกลไก 4 ข้อต่อที่มีความยาวข้อเหวี่ยงเท่ากันดังแสดงในรูปที่ 2.39(ก) จากรูป ความยาว O_2A เท่ากับ O_4B และความยาว AB น้อยกว่า O_2O_4 ขณะที่กลไกอยู่ในตำแหน่งสมมาตร (O_2ABO_4) ข้อต่อ AB จะขนานกับ O_2O_4 และมุม O_4O_2A เท่ากับมุม O_2O_4B ถ้าข้อต่อ O_4B หมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม θ_1 แล้วข้อต่อ O_2A จะหมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม ϕ_1 โดยที่ $\theta_1 > \phi_1$ (รูปที่ 2.39(ข)) แต่ถ้าข้อต่อ O_4B หมุนตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม θ_2 แล้วข้อต่อ O_2A จะหมุนตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม ϕ_2 โดยที่ $\phi_2 > \theta_2$ (รูปที่ 2.39(ค)) การที่ตัวขับและตัวตามมีระยะเคลื่อนตัวเชิงมุมไม่เท่ากันทำให้กลไกนี้ถูกนำไปใช้ในการบังคับเลี้ยว

ขณะที่รถยนต์เลี้ยวโค้ง ถ้าต้องการให้ล้อรถกลิ้งไปบนพื้นถนนโดยไม่มีการไถลแล้ว แกนของล้อทั้งหมดต้องตัดกันที่จุดเดียว (จุด G ในรูปที่ 2.40) ดังนั้นล้อทั้งหมดจะตั้งฉากกับรัศมีของส่วนโค้งถนน



รูปที่ 2.39 กลไก 4 ข้อต่อที่มีความยาวข้อเหวี่ยงเท่ากัน



รูปที่ 2.40 ลักษณะการเลี้ยวที่ล้อกลิ้งโดยไม่ไถล

จากรูปที่ 2.40 จะได้

$$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{CG} - \overline{DG}$$

$$\overline{AB} = \overline{AC}\cot\phi - \overline{BD}\cot\theta$$

$$\overline{AB} = \overline{AC}(\cot\phi - \cot\theta)$$

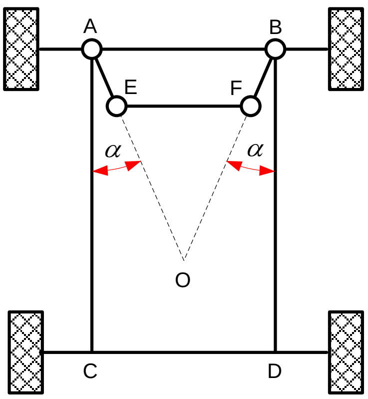
ดังนั้น

$$\cot\phi - \cot\theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{W} \tag{2.35}$$

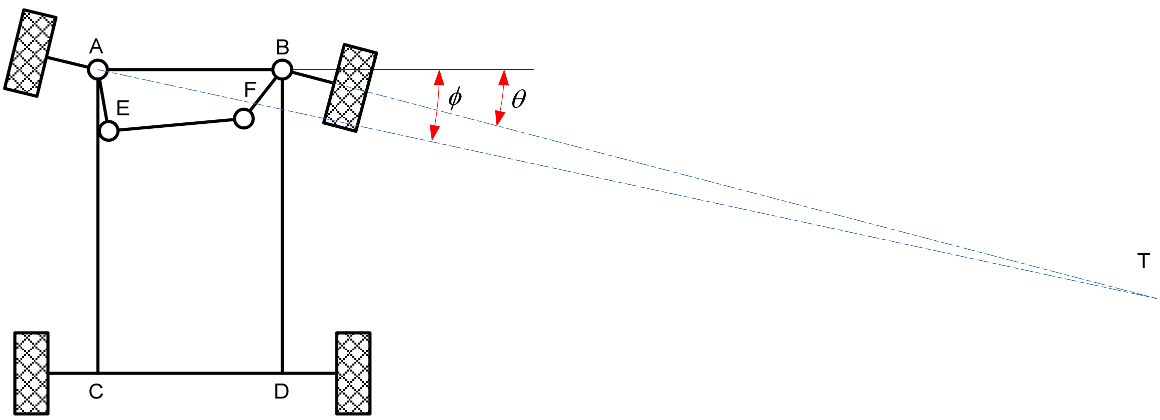
จากสมการที่ (2.35) จะเห็นว่า มุมบิดของล้อหน้าไม่ขึ้นกับรัศมีความโค้งของถนน

กลไกบังคับเลี้ยวที่ใช้กันแพร่หลายคือแบบ Ackermann ซึ่งแสดงอยู่ในรูปที่ 2.41 จากรูป 2.41(ก) ถ้ากลไกอยู่ในตำแหน่งสมมาตรรถจะวิ่งตรงโดย AE กับ BF ต่างก็ทำมุม α กับ AC และ BD ตามลำดับ เมื่อรถเลี้ยวขวา ล้อขวาจะบิดไปเป็นมุม θ ซึ่งมากกว่ามุมที่ล้อซ้ายบิดไป ϕ ถ้าทราบมุม θ แล้วมุม ϕ จะขึ้นกับอัตราส่วน AE : AB และมุม α

สมมติว่า AE/AB = 1/8.5 = 0.1176 มุม α = 18° และแปรค่ามุมบิดของล้อทีละ 10° โดยวิธีเขียนรูปจะวัดมุม ϕ ได้ดังแสดงในตารางที่ 2.1 ถ้าแทนค่ามุม θ และ ϕ ลงในสมการที่ (2.35) จะได้ค่า $\cot\phi - \cot\theta$ ดังตาราง หากรถยนต์มีอัตราส่วนระหว่างระยะล้อ (wheel track) ต่อช่วงล้อ (wheel base) เท่ากับ 0.4 แล้ว จากตารางจะเห็นว่ามุม θ ที่ทำให้ได้ค่า $\cot\phi - \cot\theta$ เท่ากับ 0.4 อยู่ระหว่าง 20° และ 30° ถ้าพล็อตกราฟระหว่าง θ กับ $\cot\phi - \cot\theta$ (รูปที่ 2.42) จะได้ผลเฉลยคือ $\theta \approx 24^{o}$ ซึ่งหมายความว่ากลไกแบบนี้จะให้ลักษณะการเลี้ยวแบบในรูปที่ 2.40 ที่ตำแหน่งเดียวคือ $\theta \approx 24^{o}$ เท่านั้น ในรูปที่ 2.41(ข) แสดงกรณีที่มุม $\theta \neq 24^{o}$ ซึ่งจะเห็นว่าแกนล้อไม่ได้ตัดที่จุดเดียวกัน หากคำนวณมุม ϕ ที่ทำให้เส้นศูนย์กลางล้อตัดที่จุดเดียวกันจากสมการ $\cot\phi - \cot\theta = 0.4$ จะได้มุม ϕ ทางทฤษฎีซึ่งแสดงในบรรทัดสุดท้ายของตาราง



(ก) วิ่งตรง

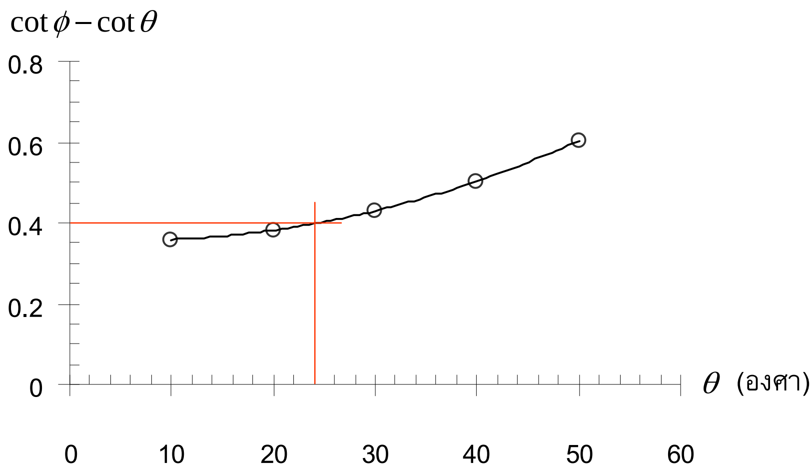


(ข) เลี้ยวขวา

รูปที่ 2.41 กลไกบังคับเลี้ยวของ Ackermann

ตารางที่ 2.1 การเปรียบเทียบมุมบิดของล้อที่ใช้กลไก Ackermann

θ	10°	20°	30°	40°	50°
ϕ (จากการวัด)	$9^\circ25'$	$17^\circ43'$	$24^\circ49'$	$30^\circ34'$	$34^\circ43'$
$\cot\phi - \cot\theta$	0.358	0.383	0.430	0.501	0.604
ϕ (ทฤษฎี)	$9^\circ21'$	$17^\circ38'$	$25^\circ8'$	$32^\circ80'$	$38^\circ54'$



รูปที่ 2.42 การหาผลเฉลยมุม θ ท◌ี◌่ทำให้ล้อกลิ้งโดยไม่ไถลขณะเลี้ยว
(อัตราส่วนระหว่างระยะล้อต่อช่วงล้อ เท่ากับ 0.4)

ถ้าเปรียบเทียบค่า ϕ ทางทฤษฎีกับค่าที่ได้จากการวัด จะเห็นว่าแตกต่างกันไม่มากที่มุม θ ไม่เกิน 30 องศา ดังนั้นรถต้องเลี้ยวโดยหักมุมไม่เกิน 30 องศา เพื่อให้ล้อทั้งหมดกลิ้งโดยไม่ไถล อย่างไรก็ตามถ้าล้อบิดมากกว่า 30 องศา แสดงว่าเป็นทางเลี้ยวหักศอก ซึ่งในกรณีนี้ต้องลดความเร็วรถ ดังนั้นความผิดพลาดของมุม ϕ จึงมีผลต่อการสึกหรอของยางไม่มากนัก

สรุปว่าระบบบังคับเลี้ยวของ Ackermann เป็นกลไกที่เหมาะสมเพราะไม่ซับซ้อน และเพื่อให้ผลดีที่สุดแขน AE กับ BF ต้องไปตัดกันที่จุด O ซึ่งมีค่าประมาณ 0.7 เท่า ของระยะล้อ

2.13 กลไกไปช้ากลับเร็ว

กลไกหลายชนิดถูกใช้งานในลักษณะที่การเคลื่อนที่ช่วงขาไปใช้เวลาไม่เท่ากับที่ใช้ช่วงขากลับ โดยทั่วไปช่วงขาไปจะเป็นช่วงทำงาน ช่วงขากลับที่เดิมจะเร็วกว่าช่วงขาไปเพื่อให้ช่วงทำงานเพิ่มขึ้น ในกรณีที่ข้อเหวี่ยงหมุนด้วยความเร็วคงที่ กลไกแบบนี้จะมีอัตราส่วนเวลา TR มากกว่า 1 กลไกแบบนี้มีชื่อเรียกว่า *กลไกไปช้ากลับเร็ว (quick return mechanism)* ตัวอย่างเครื่องจักรที่ใช้กลไกแบบนี้ได้แก่ เครื่องไส เลื่อยไฟฟ้า เป็นต้น ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงกลไกไปช้ากลับเร็วชนิดต่าง ๆ

2.13.1 Drag-link quick-return mechanism

กลไกนี้คือ กลไก 4 ข้อต่อที่ตัวขับและตัวตามสามารถเคลื่อนที่ได้ครบรอบ และเพิ่มเติมข้อต่อหมายเลข 5 และตัวเลื่อนหมายเลข 6 ดังรูปที่ 2.43(ก) จากรูปข้อต่อหมายเลข 2 ทำหน้าที่เป็นตัวขับ จากรูปที่ 2.43(ข) เมื่อตัวขับหมุนไป θ_1 ตัวเลื่อนหมายเลข 6 จะเลื่อนจาก C_1 ไป C_2 จากนั้นตัวขับจะหมุนไปอีก θ_2 และตัวเลื่อนหมายเลข 6 จะเลื่อนจาก C_2 กลับไป C_1 ถ้าความเร็วเชิงมุมของตัวขับคงที่เท่ากับ ω_2 แล้วตัวเลื่อนจะเคลื่อนที่จาก C_1 ไป C_2 ช้ากว่าเคลื่อนที่จาก C_2 กลับมา C_1 ถ้า t_1 และ t_2 เป็นเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ขาไปและขากลับตามลำดับแล้วจะได้ $t_1 = \theta_1/\omega_2$ และ $t_2 = \theta_2/\omega$ ดังนั้นอัตราส่วนเวลาคือ

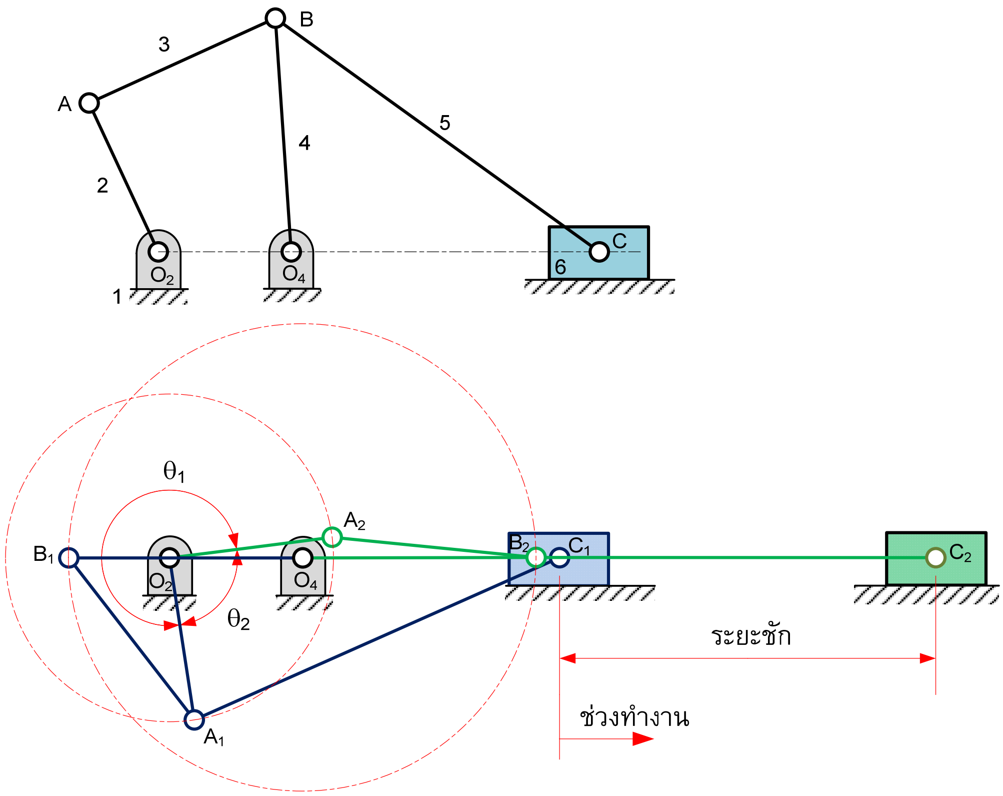
$$TR = \frac{t_1}{t_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

เนื่องจาก TR มากกว่าหนึ่ง จึงเป็นกลไกไปช้ากลับเร็ว

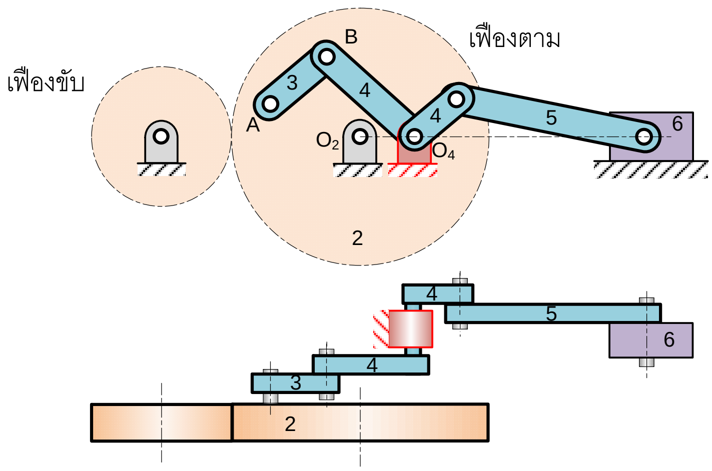
รูปที่ 2.44 แสดงรูปเขียนของกลไก drag link เฟืองตามหมายเลข 2 หมุนรอบจุดหมุน O_2 ปลาย A ของข้อต่อหมายเลข 3 ต่อกับเฟืองด้วยจุดต่อแบบหมุน ปลาย B ของข้อต่อหมายเลข 3 จะต่อกับข้อต่อหมายเลข 4 ด้วยจุดต่อแบบหมุน ปลายอีกข้างของข้อต่อหมายเลข 4 จะมีเพลาสอดผ่านจุดหมุน O_4 เพื่อเปลี่ยนระนาบของการเคลื่อนที่ ข้อต่อหมายเลข 4 บนระนาบใหม่นี้จะส่งทอดแรงและและการเคลื่อนที่ผ่านข้อต่อหมายเลข 5 ไปยังตัวเลื่อนหมายเลข 6 ต่อไป

(ก)

(ข) ตำแหน่งขีดจำกัด



รูปที่ 2.43 กลไก drag link และการเคลื่อนที่



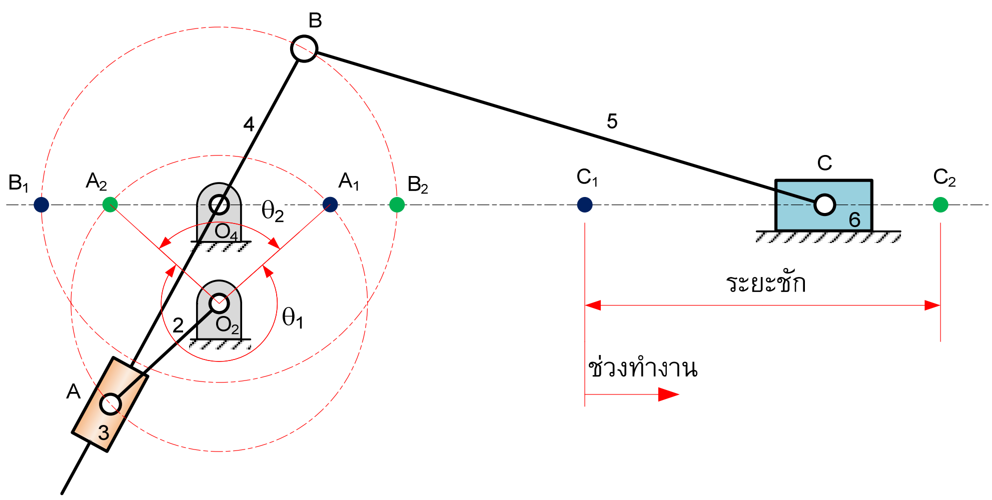
รูปที่ 2.44 กลไก drag link

2.13.2 Whitworth quick-return mechanism

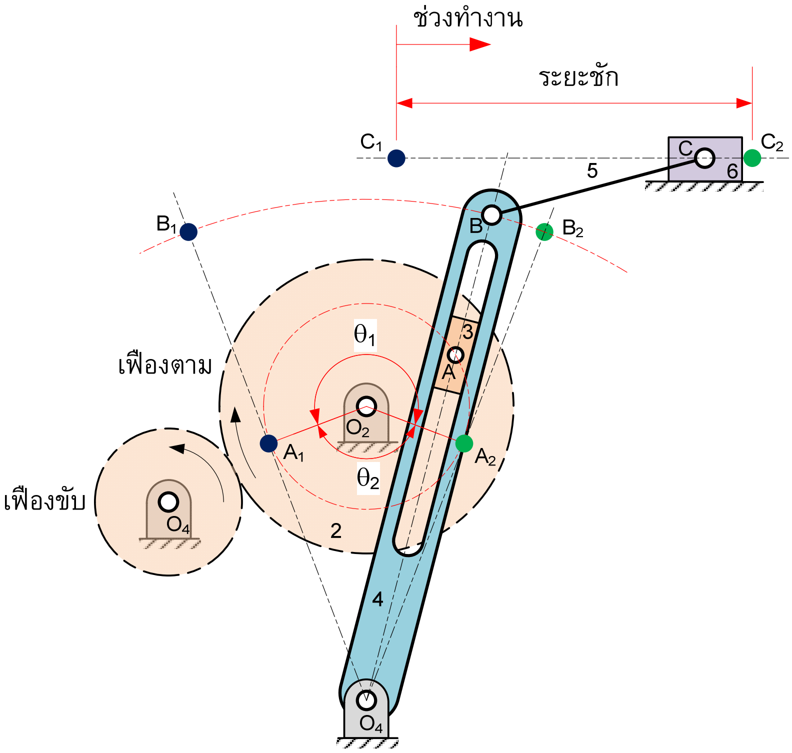
กลไกนี้ได้จากการสับเปลี่ยนกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยง ลักษณะของกลไกแสดงอยู่ในรูปที่ 2.45 ถ้าข้อเหวี่ยงหมายเลข 2 หมุนตามเข็มนาฬิกาด้วยความเร็วคงที่ ω_2 แล้วตัวเลื่อนจะเลื่อนไปทางขวาจาก C_1 ไป C_2 ขณะที่ข้อเหวี่ยงหมุนไปเป็นมุม θ_1 จากนั้นตัวเลื่อนจะเลื่อนจาก C_2 กลับมายัง C_1 โดยที่ข้อเหวี่ยงหมุนไปเป็นมุม θ_2 จะเห็นว่าช่วงทำงานคือ ช่วง C_1 ไป C_2 ช้ากว่าช่วง C_2 กลับมายัง C_1 ดังนั้นกลไกจะมีอัตราส่วนเวลามากกว่าหนึ่ง

2.13.3 Crank-shaper quick-return mechanism

กลไกนี้แสดงอยู่ในรูปที่ 2.46 จากรูปถ้าข้อเหวี่ยงหมายเลข 2 (แทนด้วยเฟือง) หมุนด้วยความเร็วคงที่ตามเข็มนาฬิกา ข้อต่อหมายเลข 4 จะเคลื่อนที่กลับไปกลับมา ในทางปฏิบัติ ระยะ O_2A สามารถปรับให้สั้นหรือยาวได้เพื่อที่จะได้เปลี่ยนระยะชักของตัวเลื่อนหมายเลข 6 ให้สั้นยาว



รูปที่ 2.45 กลไก whitworth quick-return และลักษณะการเคลื่อนที่



รูปที่ 2.46 กลไก Crank-shaper quick-return และลักษณะการเคลื่อนที่

ได้ตามต้องการ ช่วงทำงานคือช่วงจาก C_1 ไป C_2 และกลับจาก C_2 มายัง C_1 โดยข้อเหวี่ยงหมายเลข 2 จะหมุนไปเป็นมุม θ_1 และ θ_2 ตามลำดับ ดังนั้นกลไกจะมีอัตราส่วนเวลามากกว่าหนึ่ง

2.13.4 Offset slider crank

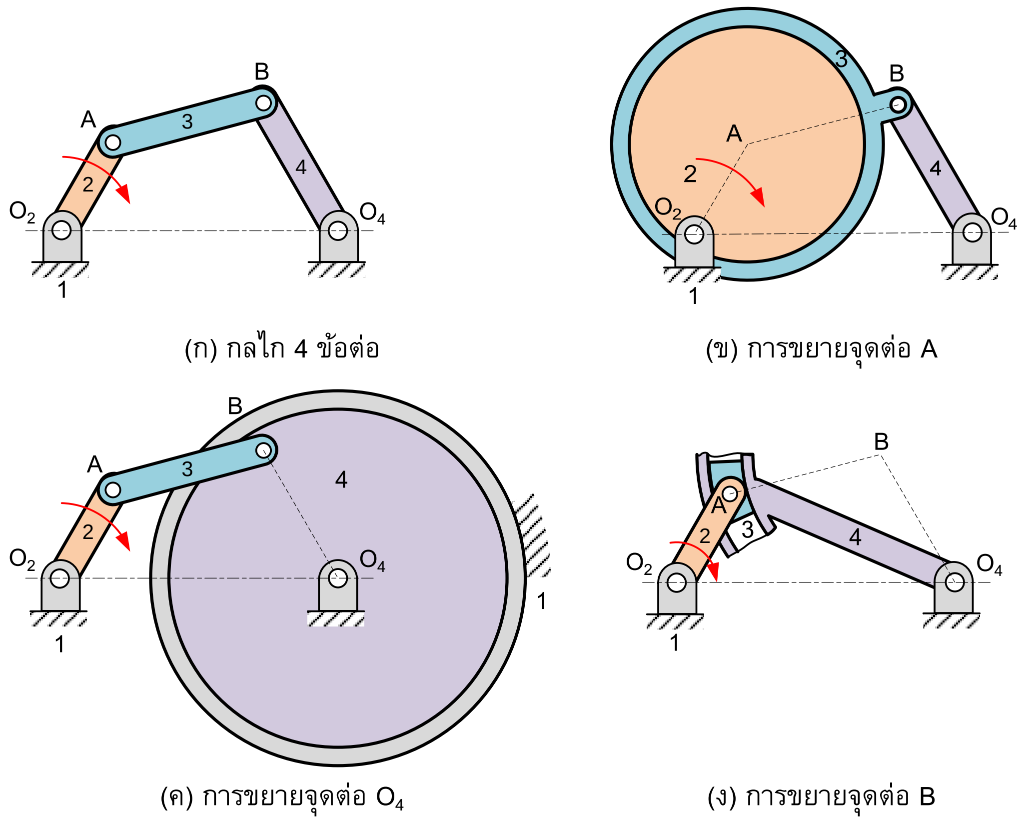
รายละเอียดของกลไกได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อที่ 2.7 แต่เนื่องจากกลไกชนิดนี้มีอัตราส่วนเวลามากกว่าหนึ่งเพียงเล็กน้อย ดังนั้นจึงถูกนำไปใช้ในกรณีที่มีเนื้อที่น้อยและต้องการกลไกแบบง่าย ๆ เช่น เครื่องเลื่อยเหล็กที่พบตามร้านค้าเหล็ก เป็นต้น

2.14 การขยายคู่สัมผัส

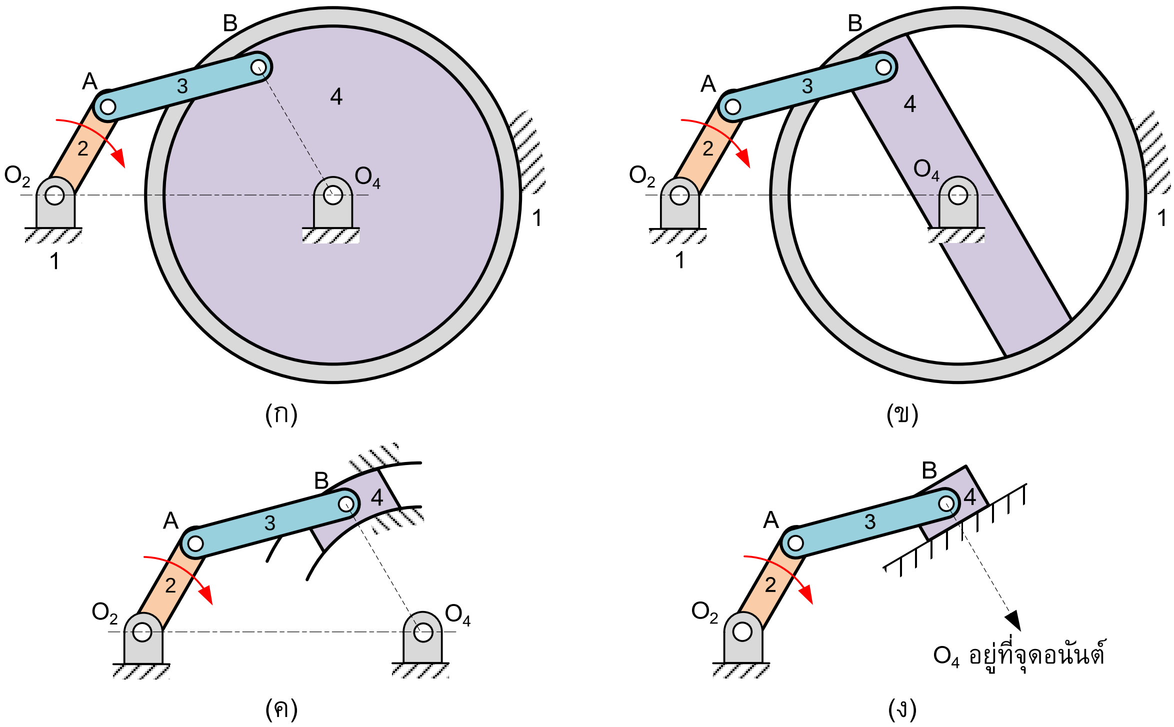
ขนาดของจุดต่อไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างข้อต่อที่ต่อโยงกัน ในบางครั้งการขยายคู่สัมผัสแบบหมุนทำให้กลไกมีรูปร่างลักษณะเปลี่ยนจากเดิมจนแทบจำไม่ได้ แต่พฤติกรรมการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนต่าง ๆ ยังเหมือนเดิม ด้วยเหตุนี้จึงพบเสมอว่ากลไกหรือเครื่องจักรกลที่มีรูปร่างแตกต่างกันสามารถทำงานลักษณะเดียวกันได้ สาเหตุที่ทำให้ต้องเปลี่ยนขนาดคู่สัมผัสคือ เพื่อเพิ่มความแข็งแรงของชิ้นส่วน เพื่อให้ผลิตได้ง่ายขึ้นหรือดูดีขึ้น เพื่อให้เหมาะสมกับข้อจำกัดด้านเนื้อที่ เป็นต้น

กลไก 4 ข้อต่อในรูปที่ 2.47(ก) เมื่อแทนข้อต่อ O_2A ด้วยจานกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ A และหมุนรอบจุด O_2 ดังที่เห็นในรูปที่ 2.47(ข) แล้วการเคลื่อนที่ของกลไกยังเหมือนเดิม จานกลมนี้เกิดจากการขยายจุดต่อ A ให้ใหญ่ขึ้นจนรวมจุดหมุน O_2 เข้าไปด้วย เส้นประในรูปเปรียบเสมือนข้อต่อ O_2A และจุด A ก็ยังหมุนรอบจุด O_2 เหมือนเดิม ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า การติดจานกลมหมุนรอบจุดหมุนซึ่งไม่ใช่จุดศูนย์กลางของจานกลม จะเทียบเท่ากับการใช้ข้อเหวี่ยงที่มีความยาวเท่ากับระยะเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity) ถัดไปพิจารณารูปที่ 2.47(ค) ซึ่งได้จากการขยายจุดต่อ O_4 ให้ใหญ่ขึ้นจนรวมจุด B และกลายเป็นจานกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ O_4 จานกลมนี้จะหมุนอยู่ในเบ้าวงกลมหมายเลข 1 สำหรับกลไกในรูปที่ 2.47(ง) ได้จากการขยายจุดต่อ B จนรวมจุด A จากที่กล่าวมาทั้งหมดจะเห็นว่ากลไกในรูปที่ 2.47(ข) ถึง 2.47(ง) เหมือนกับกลไกในรูปที่ 2.47(ก) ทุกประการ

กลไกในรูปที่ 2.47(ค) ซึ่งแสดงอีกครั้งในรูปที่ 2.48(ก) สามารถดัดแปลงต่อได้อีกดังแสดงในรูปที่ 2.48(ข) ถึง 2.48(ง) รูปที่ 2.48(ข) ดัดแปลงโดยการตัดเนื้อของจานกลมออกบางส่วนจนเหลือเป็นแถบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีปลาย 2 ด้านโค้งเข้ากับส่วนโค้งของเบ้าหมายเลข 1 การตัดเนื้อขอจานกลมแบบนี้ไม่ทำให้การเคลื่อนที่ของกลไกเปลี่ยนไปจากเดิม เนื่องจากจุด B ยังเคลื่อนที่เป็นส่วนโค้งที่มีจุด O_4 เป็นจุดศูนย์กลาง รูปที่ 2.48(ค) ดัดแปลงโดยการตัดแถบสี่เหลี่ยมผืนผ้า



รูปที่ 2.47 กลไกที่ได้จากการขยายจุดต่อต่าง ๆ ของกลไก 4 ข้อต่อ

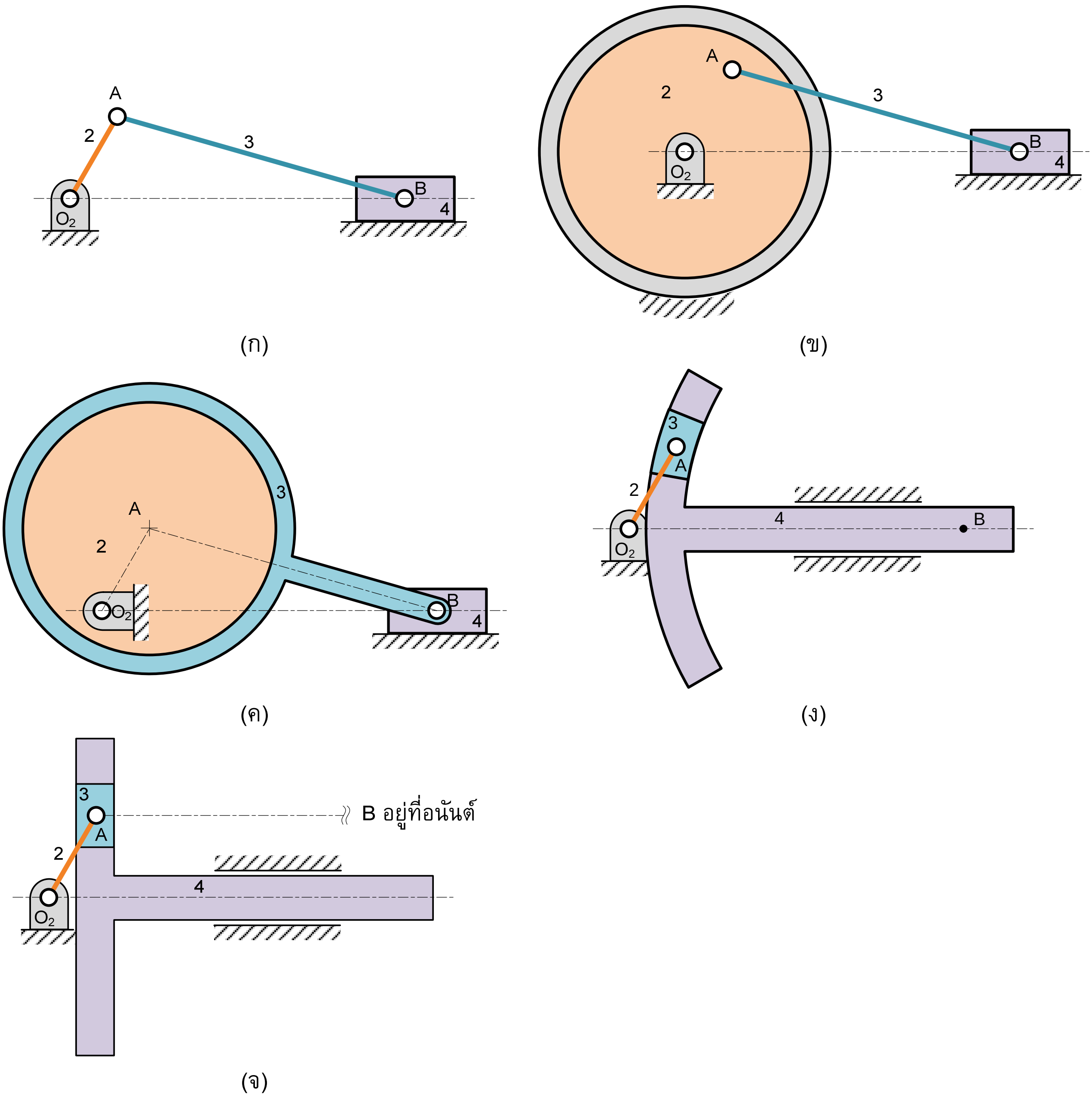


รูปที่ 2.48 การดัดแปลงกลไกซึ่งได้จากการขยายคู่สัมผัส O_4

ที่หมุนรอบจุด O_4 ให้กลายเป็นตัวเลื่อนผิวโค้งที่เลื่อนในรางเลื่อนโค้งหมายเลข 1 ถ้าแถบสี่เหลี่ยมผืนผ้าหมายเลข 4 ในรูป 2.48(ข) แกว่งไปมา (หมุนไม่ครบรอบ) แล้วก็สามารถตัดส่วนของรางเลื่อนโค้งที่แถบสี่เหลี่ยมผืนผ้าแกว่งไปไม่ถึง สุดท้ายแล้วการดัดแปลงที่กล่าวมาจะได้กลไกในรูปที่ 2.48(ค) ในตอนนี้จะเห็นว่ากลไกมีรูปร่างลักษณะต่างจากเดิมจนแทบจำไม่ได้ แต่กลไกยังคงมีลักษณะการเคลื่อนที่เหมือนเดิม พิจารณากรณีสุดท้ายในรูปที่ 2.48(ง) ซึ่งเป็นกรณีที่รัศมีของรางเลื่อนโค้งมีค่ามาก ทำให้สามารถประมาณรางเลื่อนโค้งด้วยรางเลื่อนตรง (จุดศูนย์กลางการหมุน O_4 อยู่ที่อนันต์) และกลไกที่ได้ก็คือกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยง กล่าวอีกอย่างหนึ่งก็คือกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงคือกรณีพิเศษของกลไก 4 ข้อต่อ

2.15 กลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงแบบต่าง ๆ

รูปแบบต่าง ๆ ของกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงที่จะกล่าวในหัวข้อนี้ได้จากจากการขยายคู่สัมผัสของกลไกพื้นฐานในรูปที่ 2.49(ก) จากรูปนี้ถ้าขยายจุดต่อ O_2 ให้ใหญ่ขึ้นจนรวมจุด A จะได้กลไกในรูปที่ 2.49(ข) จากรูปข้อต่อหมายเลข 2 กลายเป็นจานกลมหมุนรอบจุด O_2 ถ้าจุดต่อ A ใหญ่ขึ้นจนรวมจุด O_2 จะได้กลไกในรูปที่ 2.49(ค) ในรูปนี้ข้อเหวี่ยงหมายเลข 2 (จานกลม) จะหมุนรอบจุด O_2 ปลายด้านหนึ่งของก้านสูบหมายเลข 3 มีลักษณะเป็นวงแหวนสวมครอบจานกลม ระยะ O_2A คือ ระยะเยื้องศูนย์กลาง (eccentric) จะมีขนาดเท่ากับความยาวของข้อเหวี่ยง และ



รูปที่ 2.49 กลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงแบบต่าง ๆ ที่ได้จากการขยายคู่สัมผัส

ระยะ AB คือความยาวของก้านสูบ สำหรับรูปที่ 2.49(ง) ได้จากการขยายจุดต่อ B ให้ใหญ่ขึ้นจนรวมจุด A และเปลี่ยนก้านสูบเป็นตัวเลื่อนซึ่งเลื่อนไปมาในร่องโค้งของข้อต่อหมายเลข 4 เมื่อข้อเหวี่ยงหมายเลข 2 หมุนรอบจุด O_2 ตัวเลื่อนหมายเลข 3 จะพาข้อต่อหมายเลข 4 เลื่อนไปมาเนื่องจากร่องโค้งมีจุดศูนย์กลางที่ B ดังนั้นระยะ AB ซึ่งเทียบเท่ากับความยาวก้านสูบจะคงที่ตลอดเวลา ดังนั้นการเคลื่อนที่ของกลไกจึงเหมือนเดิม

ถ้าจุดศูนย์กลางของร่องโค้ง (จุด B) อยู่ที่อนันต์แล้วร่องโค้งจะกลายเป็นร่องตรง กลไกที่ได้มีชื่อเรียกว่า กลไก Scotch yoke (รูปที่ 2.49(จ)) กลไกแบบนี้จะทำให้ข้อต่อหมายเลข 4 เคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก (simple harmonic) ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

จากรูปที่ 2.50 ระยะเคลื่อนตัว x ของตัวเลื่อนหมายเลข 4 คือ

$$x = R - R\cos\theta = R(1-\cos\theta)$$

เนื่องจากทิศบวกของระยะเคลื่อนตัว x คือทิศที่ชี้ไปทางซ้ายมือ ดังนั้นความเร็วและความเร่งจะเป็นบวกถ้ามีทิศไปทางซ้าย (ชี้เข้าจุด O_2) [6]

ความเร็วของตัวเลื่อนคือ $$V = \frac{dx}{dt} = R\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \omega_2 R\sin\theta$$

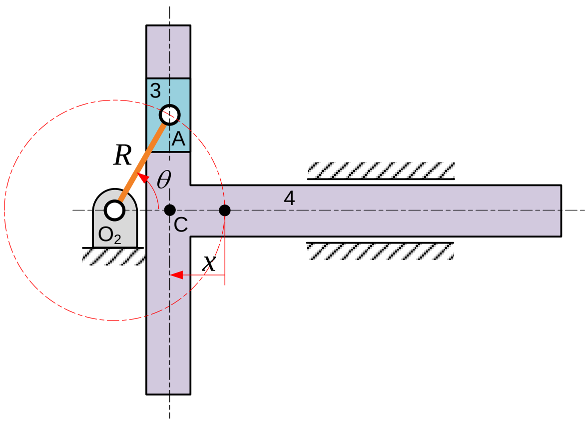
โดย ω_2 คือ ความเร็วเชิงมุมของข้อเหวี่ยงหมายเลข 2 มีหน่วยเป็น rad/s

ความเร่งของตัวเลื่อนคือ $$A = \frac{dV}{dt} = R\omega_2\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \omega_2^2 R\cos\theta \qquad (2.36)$$

เนื่องจากระยะ O_2C เท่ากับ $R\cos\theta$ ดังนั้น

$$A = \overline{O_2C}\,\omega_2^2 \qquad (2.37)$$

ถ้า ω_2 มีค่าคงที่แล้ว ความเร่งจะแปรผันตรงกับระยะ O_2C หรือระยะที่วัดจากจุดคงที่ O_2 และมีทิศชี้เข้าหาจุดคงที่ O_2 ดังนั้นตัวเลื่อน 4 จึงมีการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก



รูปที่ 2.50 ระยะเคลื่อนตัวของกลไก scotch yoke

---

[6] ถ้ากำหนดให้ทิศบวกของระยะเคลื่อนตัวชี้ไปทางขวาและวัดจากจุด O_2 จะได้ $x = R\cos\theta$; $\dot{x} = -\omega_2 R\sin\theta$ และ $\ddot{x} = -\omega_2^2 R\cos\theta = -x\omega_2^2$ ดังนั้น $\ddot{x} \propto -x$ เครื่องหมายลบแสดงว่าความเร่งมีทิศไปทางซ้าย

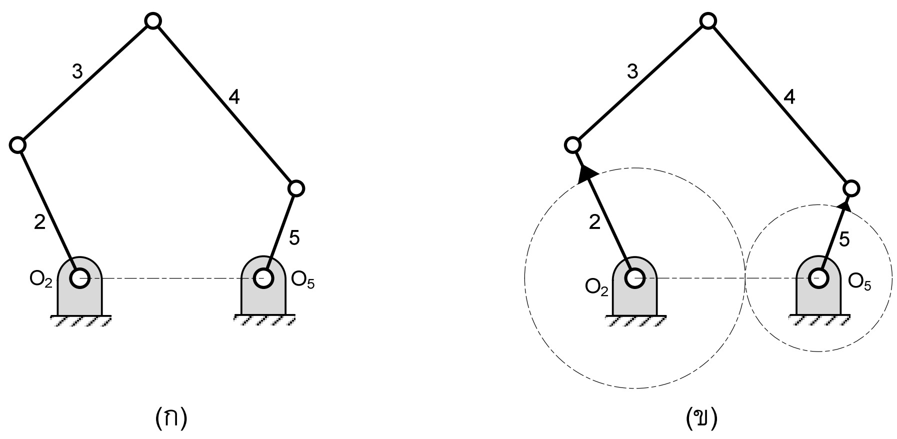
2.16 กลไกที่มีจำนวนข้อต่อมากกว่า 4 ชิ้น

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราทราบแล้วว่ากลไกที่เรียบง่ายที่สุดและมีจำนวนองศาเสรีเท่ากับ 1 คือกลไก 4 ข้อต่อ ซึ่งมีการประยุกต์ใช้งานที่หลากหลาย ปัญหาซับซ้อนต่าง ๆ ในระบบควบคุมสามารถแก้ได้โดยใช้เพียงข้อต่อ 4 ชิ้นกับจุดต่อแบบหมุน 4 จุดเท่านั้น ดังนั้นในขั้นต้นนักออกแบบควรแก้ปัญหาโดยใช้กลไก 4 ข้อต่อก่อน อย่างไรก็ตามในบางกรณีก็จำเป็นต้องใช้กลไกที่มีจำนวนข้อต่อมากกว่า 4 ชิ้น ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงกลไก 5 ข้อต่อ และ 6 ข้อต่อ ตามลำดับ

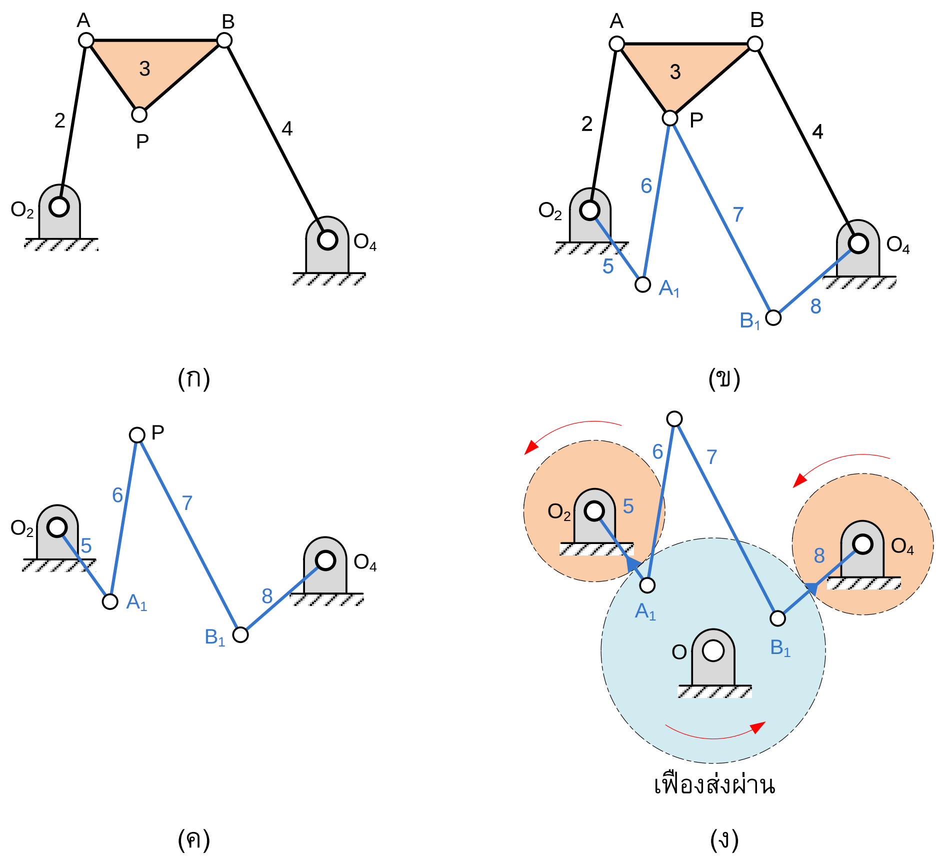
2.16.1 กลไก 5 ข้อต่อ

เช่น การเพิ่มข้อต่ออีก 1 ชิ้น และจุดต่อแบบหมุนอีก 1 จุด เข้าไปในกลไก 4 ข้อต่อกลายเป็นกลไก 5 ข้อต่อ ดังรูปที่ 2.51(ก) กลไกในรูปมีจำนวนองศาเสรีเท่ากับ 2 แต่ถ้าเพิ่มเฟืองอีก 1 คู่เพื่อเชื่อมข้อต่อ 2 ชิ้นเข้าด้วยกันดังรูปที่ 2.51(ข) แล้วจำนวนองศาเสรีจะเท่ากับ 1 เพราะคู่สัมผัสฟันเฟืองจะมีการสัมผัสแบบเลื่อนไถลยกเว้นการสัมผัส ณ จุดพิตช์ (pitch point) เท่านั้น ดังนั้นจากสมการของ Kutzbach จะได้ DOF = 3(5-1) – 2(5) – 1 = 12 – 10 – 1 = 1

Chebyschev ยังค้นพบว่าเส้นโค้ง coupler ใด ๆ ของกลไก 4 ข้อต่อสามารถลากได้ด้วยกลไก 5 ข้อต่อที่มีเฟืองอัตราทดเท่ากับหนึ่ง ซึ่งหมายความว่าเฟือง 2 อันหมุนด้วยความเร็วรอบเท่ากันและหมุนในทิศเดียวกัน การหากลไก 5 ข้อต่อที่มีเฟือง (geared fivebar) ที่เป็น cognate กับกลไก 4 ข้อต่อสามารถหาได้โดยตรงจากกลไก 4 ข้อต่อ ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.52 จากรูปที่ 2.52(ก) ซึ่งแสดงกลไก 4 ข้อต่อที่จุด coupler อยู่ที่จุด P กลไก 5 ข้อต่อที่ต้องการ (ดูรูปที่ 2.52 (ข) ประกอบ) จะมีข้อต่อหมายเลข 6 ขนานกับข้อต่อหมายเลข 2 มีข้อต่อหมายเลข 7 ขนานกับข้อต่อหมายเลข 4 มีข้อต่อหมายเลข 5 ขนานกับด้าน AP และมีข้อต่อหมายเลข 8 ขนานกับด้าน BP กลไก 5 ข้อต่อที่ได้แสดงอยู่ในรูปที่ 2.52(ค) จากนั้นเพิ่มเฟืองที่มีขนาดเท่ากันเพื่อเชื่อมข้อต่อ 5 กับ 8 เข้าด้วยกัน แต่เพื่อให้มีทิศการหมุนเหมือนกันแล้วจะต้องมีเฟืองส่งผ่าน (idle gear) ดังแสดงในรูปที่ 2.52(ง)



รูปที่ 2.51 กลไก 5 ข้อต่อ



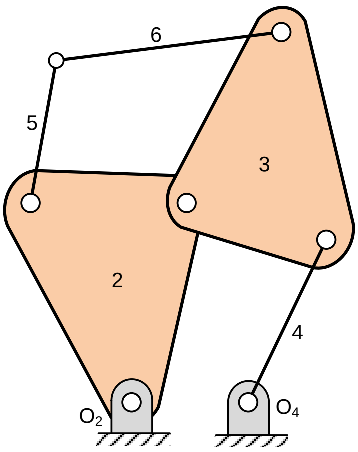
รูปที่ 2.52 ขั้นตอนการหากลไก 5 ข้อต่อที่มีเฟือง ซึ่งเป็น cognate กับกลไก 4 ข้อต่อ

2.16.2 กลไก 6 ข้อต่อ

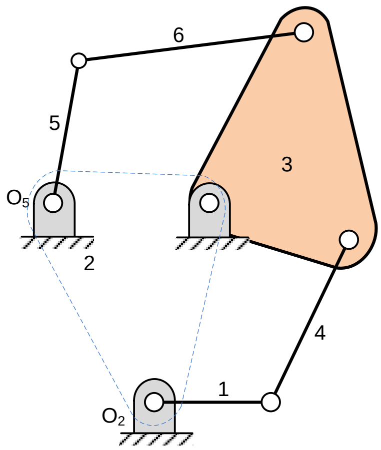
กลไกลำดับถัดไปที่ควรพิจารณาหลังจากกลไกที่ง่ายกว่าไม่สามารถทำงานได้คือ กลไก 6 ข้อต่อ (six-bar chains) จากตารางที่ 1.1 จะพบว่ากลไก 6 ข้อต่อที่มีจำนวนองศาเสรีเท่ากับ 1 นั้นมี 2 กรณีคือ 1) กลไกประกอบด้วยข้อต่อทวิภาค 4 ชิ้น และข้อต่อไตรภาค 2 ชิ้น หรือ 2) กลไกประกอบด้วยข้อต่อทวิภาค 5 ชิ้นกับข้อต่อจตุรภาค 1 ชิ้น กลไก 6 ข้อต่อกรณีแรกยังแบ่งออกเป็นกลไกของวัตต์ และกลไกของสเตฟเฟนสัน (Stephenson) กลไกทั้งสองนี้ต่างกันตรงที่ลักษณะการต่อกันของข้อต่อไตรภาค

สำหรับกลไกของวัตต์ ข้อต่อไตรภาคจะอยู่ติดกันดังรูปที่ 2.53(ก) การสับเปลี่ยนโดยให้ข้อต่อหมายเลข 2 อยู่กับที่จะได้กลไกของวัตต์แบบที่ 2 ดังรูปที่ 2.53(ข)

สำหรับกลไกของสเตฟเฟนสัน ข้อต่อไตรภาคจะไม่ต่อกันแต่จะมีข้อต่อทวิภาคคั่นกลาง โดยการสับเปลี่ยนให้ข้อต่อหมายเลข 1, 5 และ 4 เป็นข้อต่ออยู่กับที่จะได้กลไกสเตฟเฟนสัน 3 แบบ ดังรูปที่ 2.54(ก) ถึง 2.54(ค) ตามลำดับ

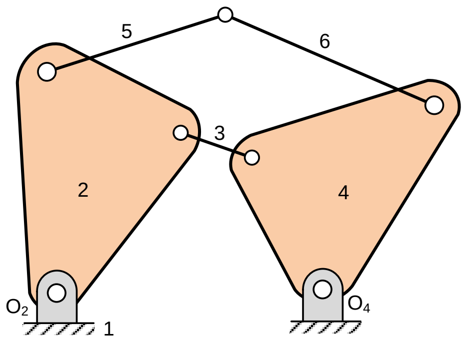


(ก) แบบที่ 1

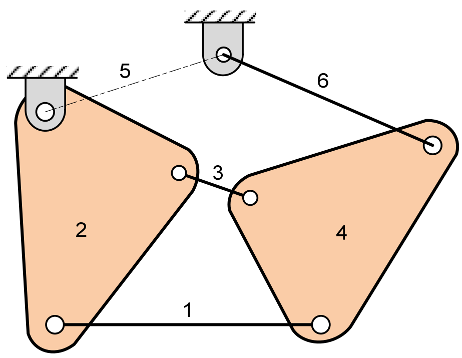


(ข) แบบที่ 2

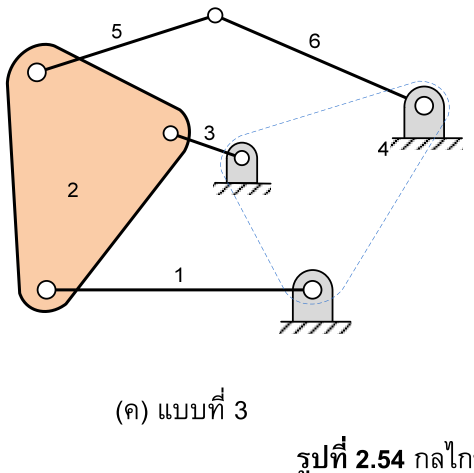
รูปที่ 2.53 กลไกของวัตต์



(ก) แบบที่ 1



(ข) แบบที่ 2

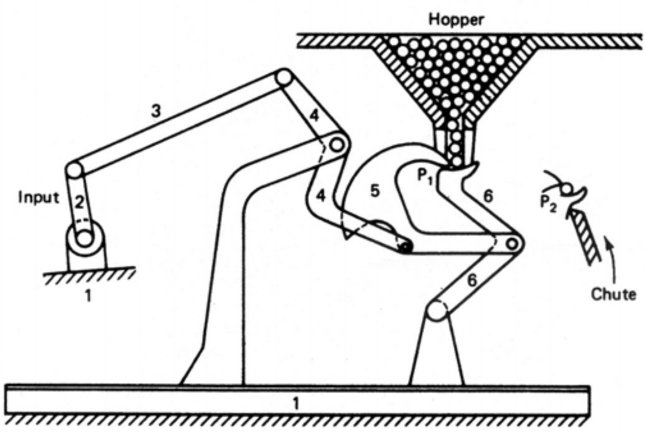


(ค) แบบที่ 3

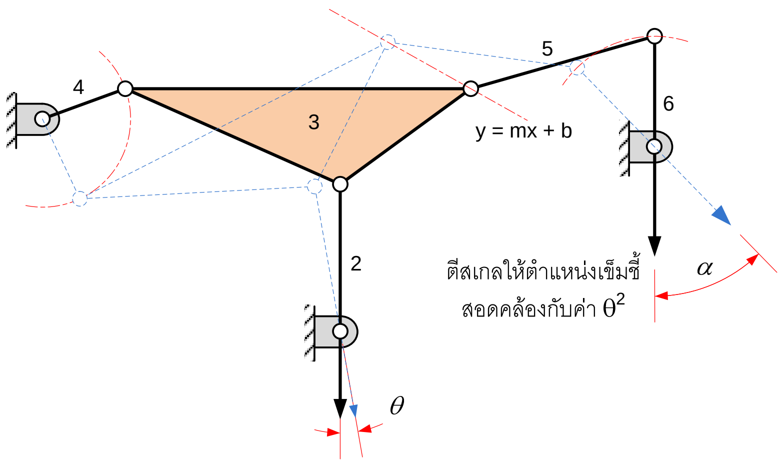
รูปที่ 2.54 กลไกของสเตฟเฟนสัน

รูปที่ 2.55 แสดงเครื่องป้อนลูกกลมอัตโนมัติจากกรวยไปยังปล่องรองรับสำหรับกระบวนการถัดไป เครื่องป้อนนี้ใช้กลไกของวัตต์แบบที่ 2 จากรูปข้อต่อหมายเลข 6 จะหมุนไปขอบปล่องรองรับโดยนำลูกกลมไปด้วยครั้งละหนึ่งลูก การหมุนของข้อต่อหมายเลข 6 จะสัมพันธ์กับการหมุนของตัวขับ (ข้อต่อหมายเลข 2) ขณะเดียวกันทางเดินของจุด P บนก้านส่ง (ข้อต่อหมายเลข 5) จะเคลื่อนที่ไปพร้อมกับข้อต่อหมายเลข 6 ตามเส้นทางที่กำหนดไว้ เพื่อดันลูกกลมให้หล่นลงไปในปล่องเมื่อข้อต่อหมายเลข 6 เคลื่อนไปถึงขอบปล่อง ในระหว่างที่กลไกนำลูกกลมจากกรวยไปยังปล่อง แขนของข้อต่อหมายเลข 4 จะเคลื่อนที่ไปปิดปากกรวยเพื่อไม่ให้ลูกกลมอันถัดไปไหลออกมา

รูปที่ 2.56 แสดงการประยุกต์กลไกสเตฟเฟนสันแบบที่ 3 กลไกนี้ทำหน้าที่ทั้ง path และ function generation ฟังก์ชันที่ต้องการคือ $\alpha = \theta^2$; $1 \le \theta \le 3$ โดยต้องการแสดงค่า θ และ α บนสเกลเชิงเส้น และทางเดินที่ต้องการคือเส้นตรง $y = mx + b$



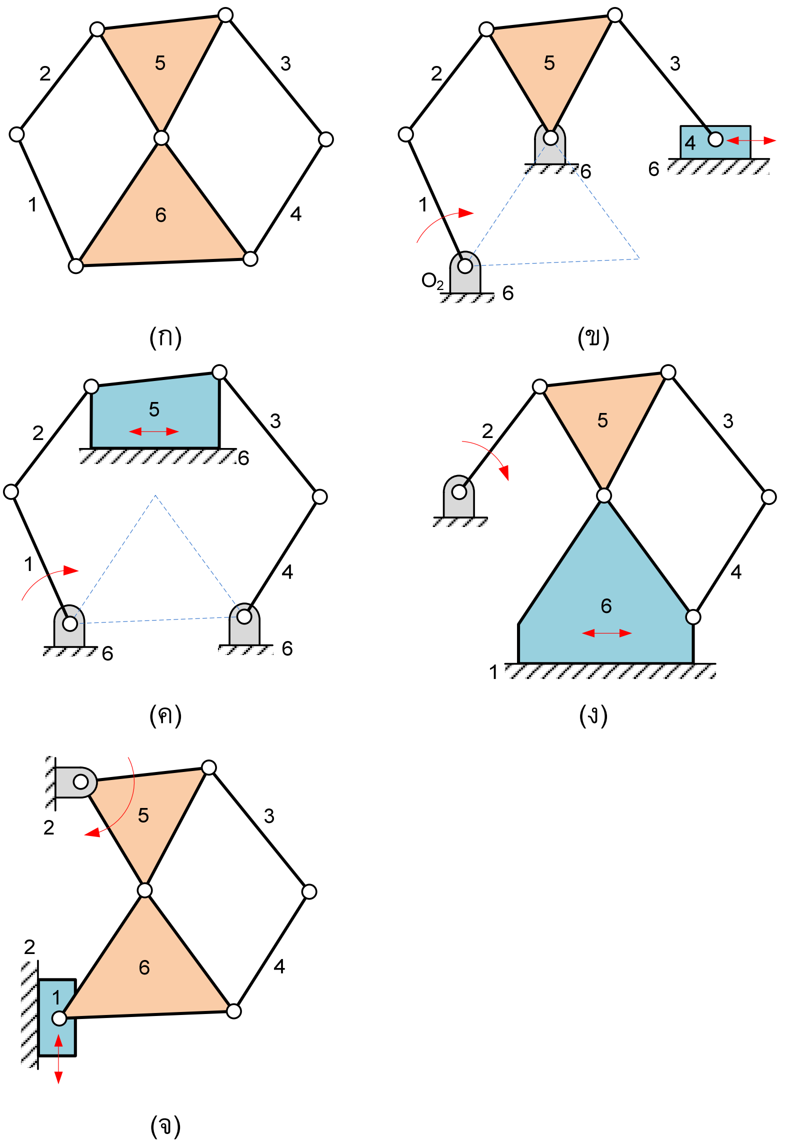
รูปที่ 2.55 กลไก 6 ข้อต่อสำหรับป้อนลูกกลม



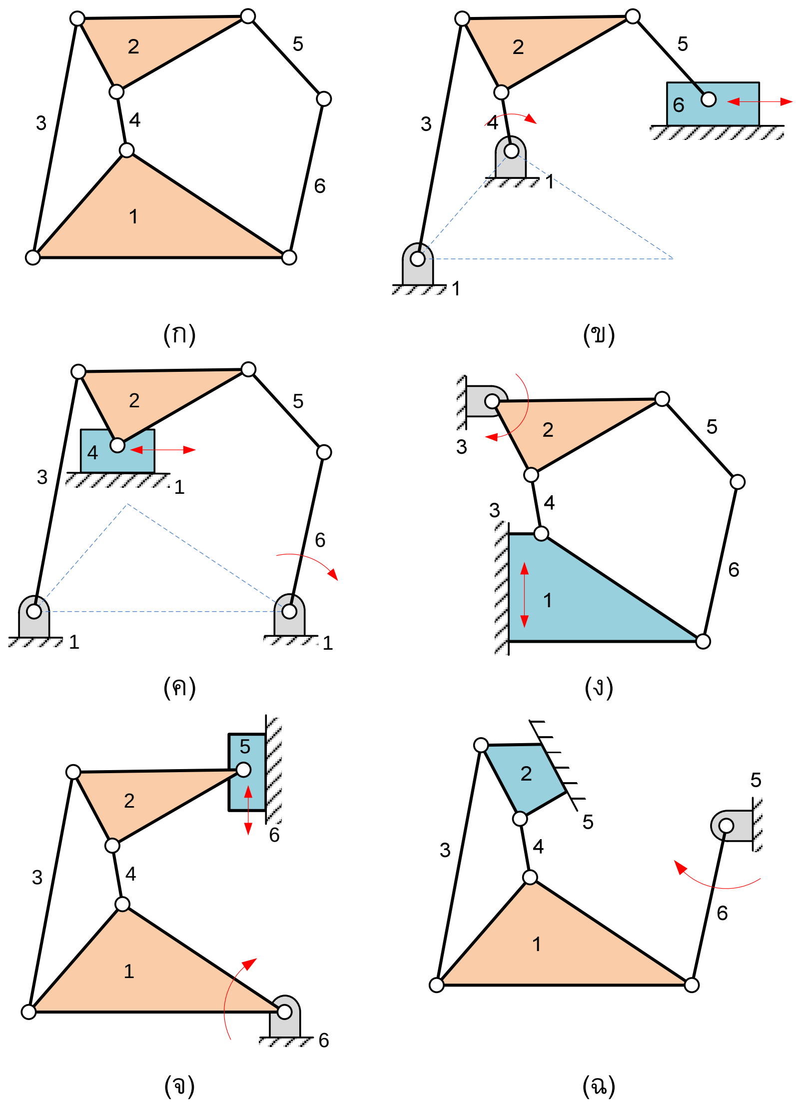
รูปที่ 2.56 การประยุกต์กลไกสเตฟเฟนสันแบบที่ 3 เป็นตัวชี้บอกตามฟังก์ชัน $\alpha = \theta^2$

กลไก 6 ข้อต่อของวัตต์ในรูปที่ 2.57(ก) ประกอบด้วยจุดต่อแบบหมุนทั้งสิ้น ถ้าข้อต่ออย่างน้อยหนึ่งชิ้นกลายไปเป็นตัวเลื่อนจะได้กลไกแบบต่าง ๆ ดังแสดงในรูปที่ 2.57(ข)-(จ) จากรูปกลไกในรูป 2.57(ค), (ง) และ (จ) ถือว่าเป็นกลไกแบบเดียวกับกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยง

กลไก 6 ข้อต่อของสเตฟเฟนสันในรูปที่ 2.58(ก) ประกอบด้วยจุดต่อแบบหมุนทั้งสิ้น ถ้าข้อต่ออย่างน้อยหนึ่งชิ้นกลายไปเป็นตัวเลื่อนจะได้กลไกแบบต่าง ๆ ดังแสดงในรูปที่ 2.58(ข)-(ฉ) กลไก 5 แบบที่ได้มีลักษณะแตกต่างจากกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงทั่วไป



รูปที่ 2.57 กลไก 6 ข้อต่อของวัตต์ซึ่งได้จากการแทนข้อต่อชิ้นหนึ่งด้วยตัวเลื่อน



รูปที่ 2.58 กลไก 6 ข้อต่อของสเตฟเฟอสัน ซึ่งได้จากการแทนข้อต่อชิ้นหนึ่งด้วยตัวเลื่อน

2.17 กลไกข้อต่อผ่อนแรง

พิจารณากลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยงในรูปที่ 2.59 เมื่อกลไกเคลื่อนที่เข้าใกล้ตำแหน่งที่ข้อต่อหมายเลข 2 และหมายเลข 3 อยู่บนแนวเส้นเดียวกันแล้วกลไกสามารถเอาชนะแรงต้าน Q ที่มีขนาดมากโดยที่แรงกด P มีขนาดไม่มาก ผลดังกล่าวนี้เรียกว่า *toggle effect*

สมมติให้ข้อต่อหมายเลข 2 และ 3 ยาวเท่ากัน จากผังวัตถุอิสระในรูปที่ 2.59(ข) จะได้สมการสมดุลของโมเมนต์รอบจุด A คือ

$$\left[\sum M_A = 0\,;CCW+\right] \qquad \frac{P}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\cos\alpha - Q\cdot\overline{AB}\cdot\sin\alpha = 0$$

นิยามการได้เปรียบเชิงกลคือ Q/P ดังนั้น

$$\frac{Q}{P} = \frac{1}{2\tan\alpha} \tag{2.38}$$

หรือ

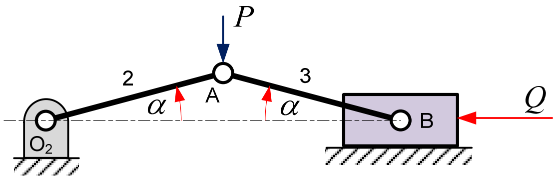
$$Q = \frac{P}{2\tan\alpha} \tag{2.39}$$

เมื่อ α เข้าใกล้ศูนย์แล้ว $\tan\alpha$ จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ดังนั้น Q จะเข้าสู่อนันต์ ซึ่งหมายความว่ากลไกสามารถเอาชนะแรงต้านขนาดใหญ่ได้ด้วยแรงที่ขนาดเล็กกว่ามากด้วยการดันข้อต่อที่ไม่ได้อยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกันให้เคลื่อนไปอยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกัน ในทางกลับกันอาจจะมองว่ากลไกสามารถสร้างแรงที่มีขนาดใหญ่ได้โดยออกแรงขนาดเล็กกว่าให้กับกลไก

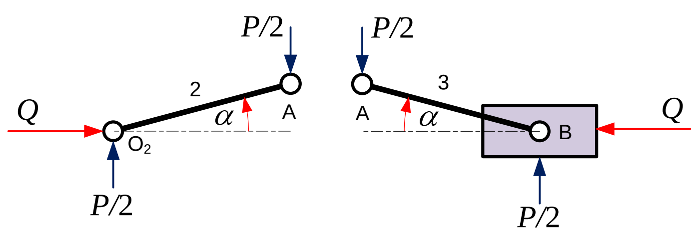
ถัดไปจะยกตัวอย่างเครื่องมือ และเครื่องจักรกลที่ใช้หลักการของ toggle effect ได้แก่ เครื่องบดหิน (stone crusher) เครื่องปั๊มโลหะ (punch press) เครื่องตอกหมุด (riveting machine) ที่ใช้ลม คีมล็อค (toggle plier หรือ vise-grip plier) เป็นต้น

2.17.1 เครื่องบดหิน

เครื่องบดหินในรูปที่ 2.60 มี toggle effect สองตำแหน่ง เพื่อให้ได้เปรียบเชิงกลมากขึ้น ตำแหน่งแรกเกิดเมื่อจุด A หมุนไปถึงตำแหน่ง A' เพราะว่า O_2A กับข้อต่อหมายเลข 3 อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันพอดี ตำแหน่งที่สองเกิดเมื่อข้อต่อหมายเลข 4 และ 5 ถูกข้อต่อหมายเลข 3 ดึงให้อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ดังนั้นเครื่องจะใช้แรงบิดที่ข้อเหวี่ยงหมายเลข 2 เพียงเล็กน้อยก็สามารถเอาชนะแรง Q ซึ่งใช้ในการบดหินได้



(ก)



(ข)

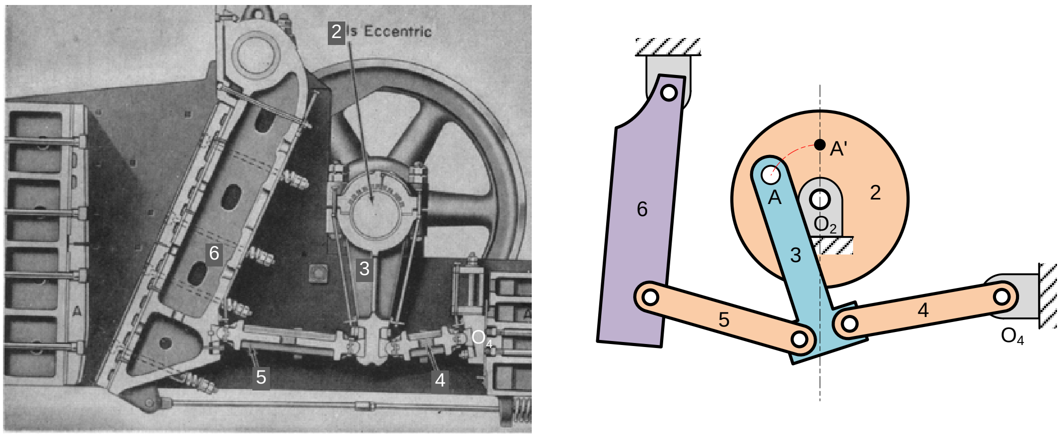
รูปที่ 2.59 Toggle effect ของกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยง

2.17.2 คีมล็อค

คีมล็อคในรูปที่ 2.39 ใช้สำหรับจับหรือบีบสิ่งของให้แน่น โดยใช้แรงบีบด้ามคีม (แรง P) ไม่มาก กลไกของคีมล็อกเกิด toggle effect เมื่อจุดต่อ A, B และ C อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน สลักเกลียว E ทำหน้าที่เปลี่ยนตำแหน่งของจุดหมุน A ซึ่งมีผลต่อความกว้างของปากคีม ก้าน F ทำหน้าที่ผลักจุดต่อ A, B และ C ออกจากตำแหน่ง toggle

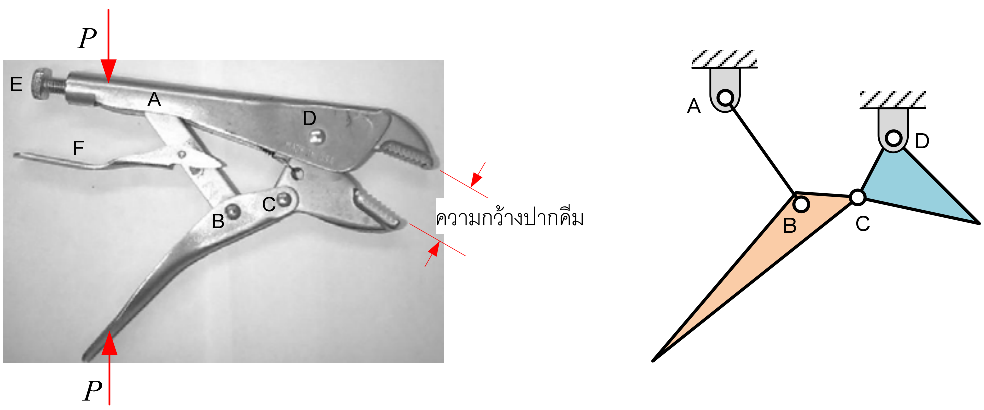
2.17.3 เครื่องตอกหมุด

รูปที่ 2.62(ก) แสดงเครื่องตอกหมุดที่ทำงานด้วยแรงดันลม จากรูปแรงดัน P ดันลูกสูบหมายเลข 5 ให้เคลื่อนที่ตามแนวของกระบอกสูบไปทางซ้าย ทำให้ข้อต่อหมายเลข 2 และ 3 เคลื่อนมาอยู่แนวเส้นตรงเดียวกัน (รูปที่ 2.62(ข)) ดังนั้นกลไกนี้จึงสามารถสร้างแรงสำหรับตอกหมุดซึ่งมีขนาดใหญ่ได้โดยใช้แรงดัน P ไม่มาก



(ก) (ข)

รูปที่ 2.60 กลไกเครื่องบดหิน[3]

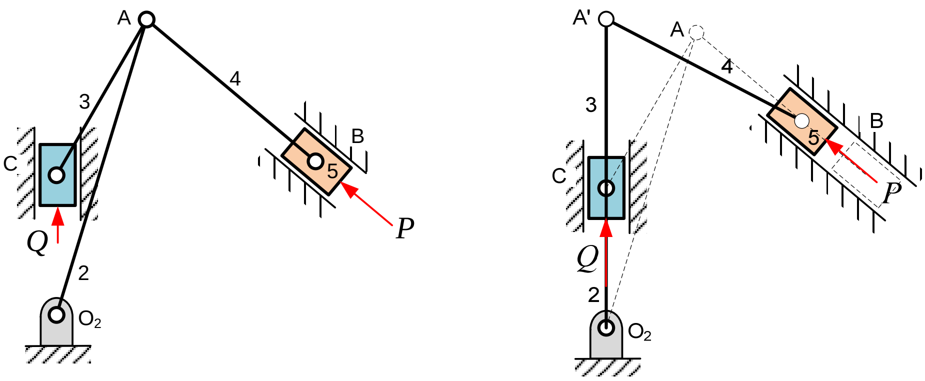


(ก) (ข)

รูปที่ 2.61 คีมล็อค

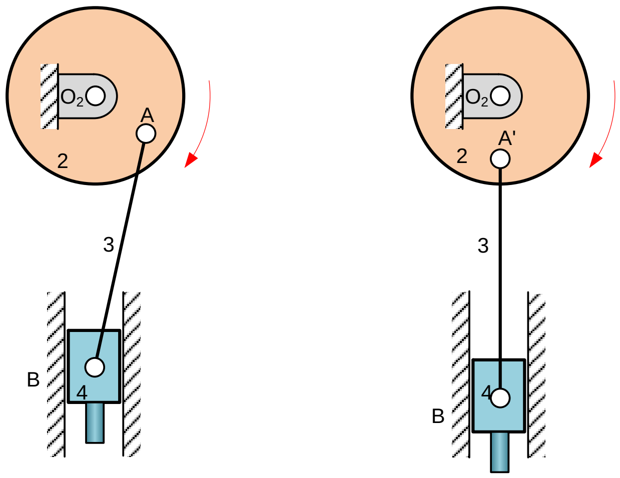
2.17.4 เครื่องปั๊มรู

รูปที่ 2.63 แสดงเครื่องปั๊มรู (punch press) ซึ่งต้องสร้างแรงขนาดใหญ่เพื่อปั๊มรูบนแผ่นโลหะ แรงนี้จะเกิดขึ้นเมื่อตัวเลื่อนหมายเลข 4 เคลื่อนที่มาถึงตำแหน่งต่ำสุด ซึ่งข้อต่อหมายเลข 3 จะอยู่แนวเส้นตรงเดียวกับข้อเหวี่ยงหมายเลข 2 ทำให้เกิด toggle effect หลังจากปั๊มรูแล้วตัวขับจะหมุนต่อเนื่องไป ดังนั้นในทางปฏิบัติจึงติดตั้งล้อตุนกำลังที่เพลาของข้อต่อ 2 เพื่อสะสมพลังงานขณะเลื่อนกลับ และนำมาใช้ผ่อนแรงขณะปั๊มรู



(ก) กลไก (ข) ตำแหน่งที่เกิด toggle effect

รูปที่ 2.62 เครื่องตอกหมุด

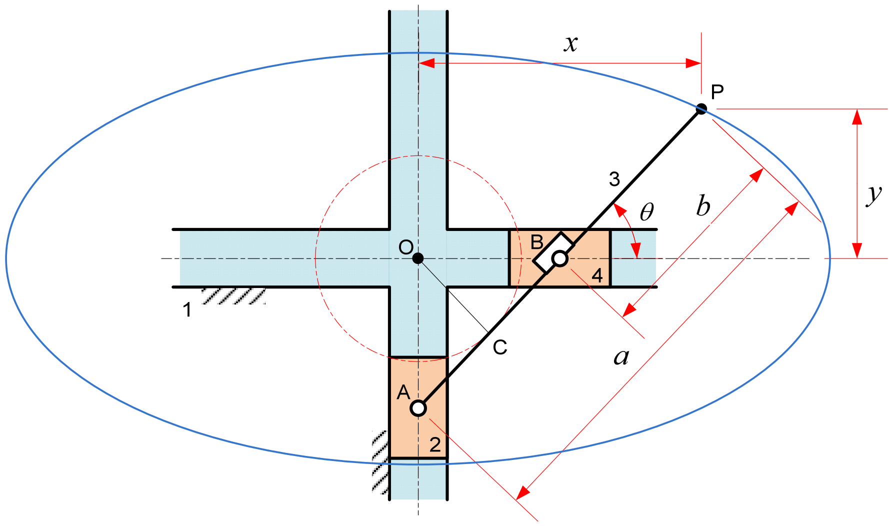


(ก) กลไก (ข) ตำแหน่งที่เกิด toggle effect

รูปที่ 2.63 เครื่องปั๊มรู

2.18 อุปกรณ์เขียนรูปวงรี

อุปกรณ์เขียนรูปวงรี (ellipsograph หรือ elliptic trammel) แสดงอยู่ในรูปที่ 2.64 จากรูปกลไกประกอบด้วยคู่สัมผัสแบบหมุน 2 คู่ (จุด A และ B) และคู่สัมผัสแบบเลื่อนไถลอีก 2 คู่ ตัวเลื่อนหมายเลข 2 และ 4 จะเลื่อนไปมาภายในร่องของรางเลื่อนหมายเลข 1 ซึ่งอยู่กับที่ อุปกรณ์เขียนรูปวงรีเกิดจากการสับเปลี่ยนกลไกตัวเลื่อนคู่-ข้อเหวี่ยง (double slider-crank)



รูปที่ 2.64 เครื่องเขียนรูปวงรี

จากรูปที่ 2.64 จุดใด ๆ บนข้อต่อหมายเลข 3 เช่นจุด P จะเคลื่อนที่เป็นรูปวงรี (ยกเว้นจุด C ที่เคลื่อนเป็นวงกลมมีจุด O เป็นจุดศูนย์กลาง) ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

จากรูปจะได้ $x = a\cos\theta$ และ $y = b\sin\theta$

จัดรูปใหม่เป็น

$$\cos^2\theta = \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

และ

$$\sin^2\theta = \left(\frac{y}{b}\right)^2$$

ดังนั้น

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

โดย $2a$ และ $2b$ คือ ความยาวแกนเอก (major axis) และความยาวแกนโท (minor axis) ตามลำดับ[7]

การสับเปลี่ยนกลไกตัวเลื่อนคู่-ข้อเหวี่ยง แบบอื่นได้แก่ การให้ตัวเลื่อนหมายเลข 2 หรือ 4 อยู่กับที่จะได้กลไก scotch yoke (รูปที่ 2.50) ถ้าให้ข้อต่อ AB อยู่กับที่ ตัวเลื่อนหมายเลข 2 และ 4 จะหมุนรอบจุด A และ B ถ้าตัวเลื่อนหมายเลข 2 บิดไปเป็นมุม θ ตัวเลื่อนหมายเลข 4 ก็จะบิดไปเป็นมุมเท่ากัน ในรูปที่ 2.64 เราพบว่าจุด C ซึ่งอยู่กึ่งกลาง AB จะเคลื่อนที่เป็นวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลางขณะที่ตัวกากบาทหมายเลข 1 อยู่กับที่ ดังนั้นเมื่อสับเปลี่ยนให้ AB อยู่กับที่ จุด O ก็ต้องเคลื่อนที่เป็นวงกลมโดยมีจุด C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมและ AB เป็นเส้นผ่าน

---

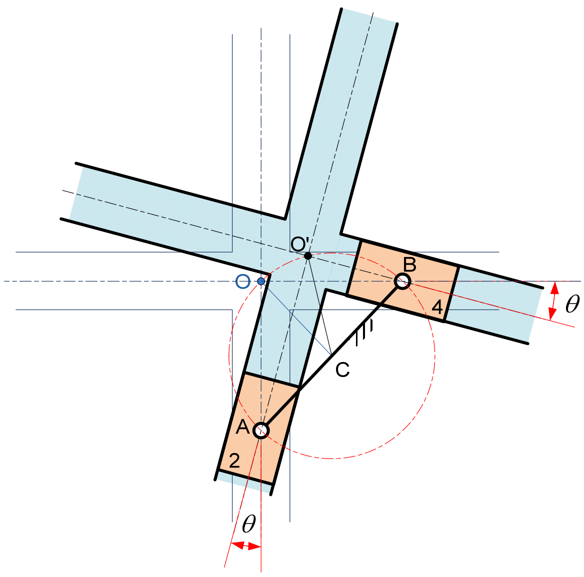
[7] ถ้าจุด P อยู่ที่ C แล้วระยะ $a = b$ ดังนั้น $x^2 + y^2 = a^2$ ซึ่งเป็นสมการวงกลมรัศมี $a = AB/2$ มีจุดศูนย์กลางที่ O

ศูนย์กลางดังรูปที่ 2.65 เมื่อให้ O เคลื่อนที่ไปอยู่ที่ O' จะพบว่า $\angle OAO'$ เท่ากับ OBO' เพราะว่า OO' คือคอร์ดร่วมที่รองรับมุมทั้งสองนี้ นั่นคือถ้าบิดตัวเลื่อนหมายเลข 2 เป็นมุม $\angle OAO = \theta$ แล้วตัวเลื่อน 4 จะถูกบิดไปเป็นมุม θ ด้วยหรือ $\omega_2/\omega_4 = 1$ ด้วยเหตุนี้กลไกจึงถูกนำไปใช้เป็นคู่ต่อประกบ (coupling) [8] ชนิดหนึ่งที่เรียกว่า *โอลแฮมคัปปลิ้ง (Oldham coupling)*

โอลแฮมคัปปลิ้ง คือคัปปลิ้งสำหรับต่อเพลาสองเพลาที่ขนานกัน แต่แกนเพลาไม่ได้อยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกันโดยจะมีระยะเยื้องแนวเล็กน้อย คัปปลิ้งแบบนี้ส่งทอดการหมุนจากเพลาขับไปยังเพลาตามด้วยอัตราส่วนความเร็วเชิงมุม (angular velocity ratio) คงที่ รูปที่ 2.66(ก) แสดงโอลแฮมคัปปลิ้ง จานกลมหมายเลข 2 และ 4 จะยึดแน่นกับเพลา บนผิวหน้าที่หันเข้าหากันจะทำเป็นร่องซึ่งทำมุมกัน 90 องศา (รูปที่ 2.66(ข) และ (ง)) จานกลมหมายเลข 3 มีเดือยยื่นออกมาที่ผิวทั้งสองด้านและทำมุมกัน 90 องศา (รูปที่ 2.66(ค))

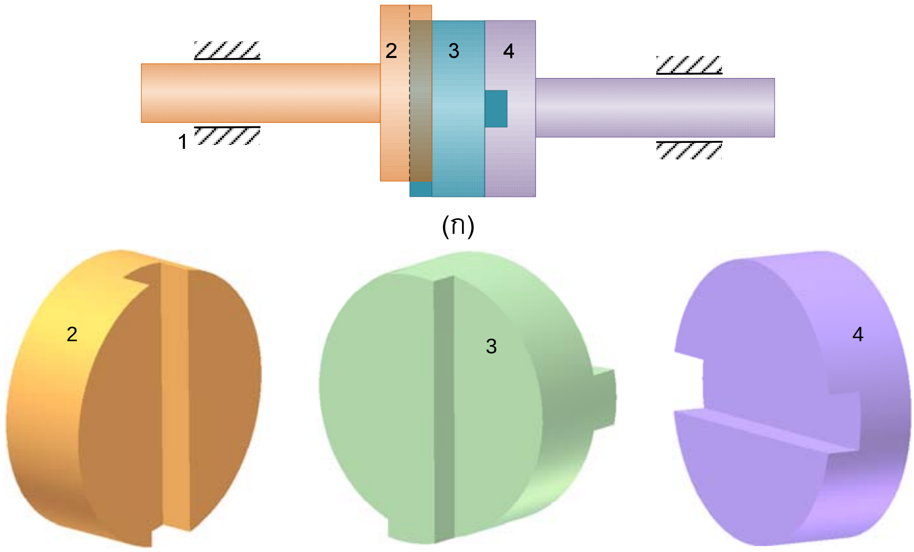
เมื่อเพลาหมายเลข 2 หมุนด้วยความเร็วคงที่ ω_2 เพลาหมายเลข 4 จะถูกขับให้หมุนด้วยความเร็วคงที่ ω_4 โดย $\omega_2/\omega_4 = 1$ การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างจานกลมหมายเลข 2 กับ 3 และระหว่าง 3 กับ 4 จะเป็นการเลื่อนตำแหน่ง (translation) เท่านั้น และจุดศูนย์กลางของจานกลมหมายเลข 3 จะเคลื่อนที่เป็นวงกลมโดยมีระยะระหว่างแกนเพลาเป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

รูปที่ 2.67 แสดงโอลแฮมคัปปลิ้งที่ใช้ในเชิงพานิชย์ จากรูปจะเห็นว่าจานกลมยึดกับเพลาด้วยการขันสกรูรัด ส่วนร่องและเดือยในรูปที่ 2.67(ข) แม้ว่าจะมีลักษณะและตำแหน่งต่างจากในรูปที่ 2.66 แต่ก็มีหลักการทำงานเหมือนกัน



รูปที่ 2.65 การสับเปลี่ยนอุปกรณ์เขียนรูปวงรี

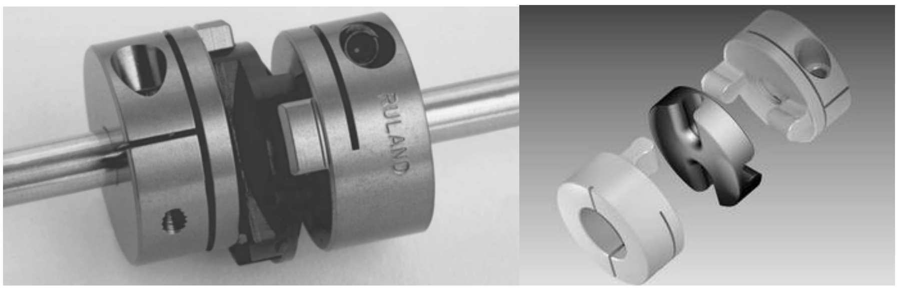
[8] หรือเรียกทับศัพท์ว่า “คัปปลิ้ง”



(ก)

(ข) (ค) (ง)

รูปที่ 2.66 ภาพการประกอบ และชิ้นส่วนของโอลแฮมคัปปลิ้ง



(ก) (ข)

รูปที่ 2.67 ลักษณะโอลแฮมคัปปลิ้งที่ใช้งานจริง และภาพการประกอบ

2.19 กลไกที่เคลื่อนที่เป็นเส้นตรง

กลไกที่เคลื่อนที่เป็นเส้นตรง (straight-line mechanism) หมายถึง กลไกที่การเคลื่อนที่ของจุด ๆ หนึ่งบนข้อต่อเป็นเส้นตรงแท้ (exact straight-line) หรือเป็นเส้นตรงโดยประมาณ (approximate straight-line) การเคลื่อนที่ที่เป็นเส้นตรงของจุดดังกล่าวจะเกิดขึ้นโดยไม่ต้องอาศัยรางเลื่อนตรงเพื่อนำการเคลื่อนที่ การใช้รางเลื่อนมีข้อเสียคือ ทำให้กลไกมีขนาดใหญ่ และหลังใช้งานไประยะหนึ่งผิวสัมผัสจะสึกหรอ ดังนั้นการออกแบบในบางกรณีจึงต้องใช้กลไกที่เคลื่อนที่เป็นเส้นตรงแทน

2.19.1 กลไกที่เคลื่อนที่เป็นเส้นตรงแท้

ก) Peaucellier mechanism

จากรูปที่ 2.68(ก) ข้อต่อของกลไกต้องมีความยาวดังนี้ $\overline{AB}=\overline{BC}, \overline{AD}=\overline{AE}$ และ $\overline{CD}=\overline{CE}=\overline{DE}=\overline{EF}$

ขณะที่กลไกเคลื่อนที่ ผลคูณระหว่าง $\overline{AC}$ กับ $\overline{AF}$ จะเป็นค่าคงที่ จุด C จะเคลื่อนที่เป็นวงกลมซึ่งผ่านจุด A ส่วนจุด F จะมีการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงแท้ (รูปที่ 2.68(ข)) หรือกล่าวว่า จุด F เคลื่อนที่บนวงกลมที่รัศมียาวเป็นอนันต์ นอกจากนี้ทางเดินของจุด F ยังตั้งฉากกับ AB กลไกนี้สามารถใช้เป็นกลไกเขียนส่วนโค้งขนาดใหญ่ได้ถ้าให้จุด A อยู่ด้านนอกทางเดินของจุด C การพิสูจน์ว่ากลไกมีลักษณะการเคลื่อนที่ดังที่กล่าวมีรายละเอียดดังนี้

จากรูปที่ 2.68(ค) ลากเส้นตรง DE และ CF เส้นตรงทั้งสองจะตั้งฉากกัน กำหนดให้จุดตัดคือจุด G พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก AGD จะได้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\overline{AD}^2=\overline{AG}^2+\overline{DG}^2 \qquad (ก)$$

จากสามเหลี่ยมมุมฉาก DGF จะได้

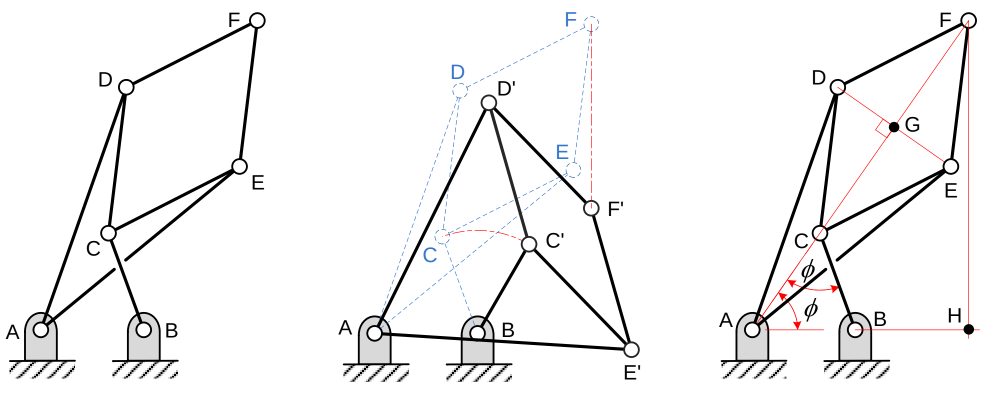
$$\overline{DF}^2=\overline{DG}^2+\overline{FG}^2 \qquad (ข)$$

สมการ (ก) – (ข) จะได้
$$\begin{aligned}\overline{AD}^2-\overline{DF}^2&=\overline{AG}^2-\overline{FG}^2\\&=\left(\overline{AG}-\overline{FG}\right)\left(\overline{AG}+\overline{FG}\right)\end{aligned}$$

แต่ $\overline{AG}-\overline{FG}=\overline{AC}$ และ $\overline{AG}+\overline{FG}=\overline{AF}$ ดังนั้น

$$\overline{AD}^2-\overline{DF}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AF}$$

แต่ข้อต่อ AD และ DF มีความยาวคงที่ ดังนั้น $\overline{AC}\cdot\overline{AF}$ จึงเป็นค่าคงที่



รูปที่ 2.68 กลไกเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงแท้ของ Peaucellier

จากรูปที่ 2.68(ค) $\overline{AF} = \dfrac{\overline{AH}}{\cos\phi}$ และ $\overline{AC} = 2\overline{AB}\cos\phi$

ดังนั้น $\overline{AC}\cdot\overline{AF} = 2\overline{AB}\cos\phi\left(\dfrac{\overline{AH}}{\cos\phi}\right) = 2\overline{AB}\cdot\overline{AH}$

จัดรูปสมการใหม่จะได้ $\overline{AH} = \dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{AF}}{2\overline{AB}}$

เนื่องจากเทอมด้านขวามือเป็นค่าคงที่ ดังนั้นภาพฉาย (projection) ของจุด F บนแนวเส้นตรง AB จึงมีค่าคงที่ หรือสรุปได้ว่าแนวการเคลื่อนที่ของจุด F เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ AB

ข) Hart mechanism

กลไกนี้แสดงอยู่ในรูปที่ 2.69 จากรูปความยาวของข้อต่อต่าง ๆ คือ $\overline{BC} = \overline{DE}$, $\overline{CD} = \overline{EB}$ และ $\overline{OA} = \overline{AQ}$ จากรูปจะเห็นว่า เส้นตรง CE ขนานกับเส้นตรง BD ในขณะเดียวกัน ถ้าจุด O, Q และ P อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันและขนานกับเส้น CE และ BD ที่ตำแหน่งหนึ่ง แล้วจุดเหล่านี้จะขนานกับเส้นตรงทั้งสองที่ตำแหน่งใด ๆ ด้วย ดังนั้นจุด P จึงเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

พิจารณาสามเหลี่ยม EDB จะได้

$$\overline{BE}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DE}^2 - 2\overline{BD}\cdot\overline{DE}\cos\alpha \qquad \text{(ก)}$$

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก ESD จะได้

$$\cos\alpha = \frac{\overline{SD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BD}-\overline{CE}}{2\overline{DE}}$$

แทนในสมการ (ก) จะได้

$$\overline{BE}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DE}^2 - 2\overline{BD}\cdot\overline{DE}\left(\frac{\overline{BD}-\overline{CE}}{2\overline{DE}}\right)$$

$$\overline{BE}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DE}^2 - \overline{BD}\left(\overline{BD}-\overline{CE}\right)$$

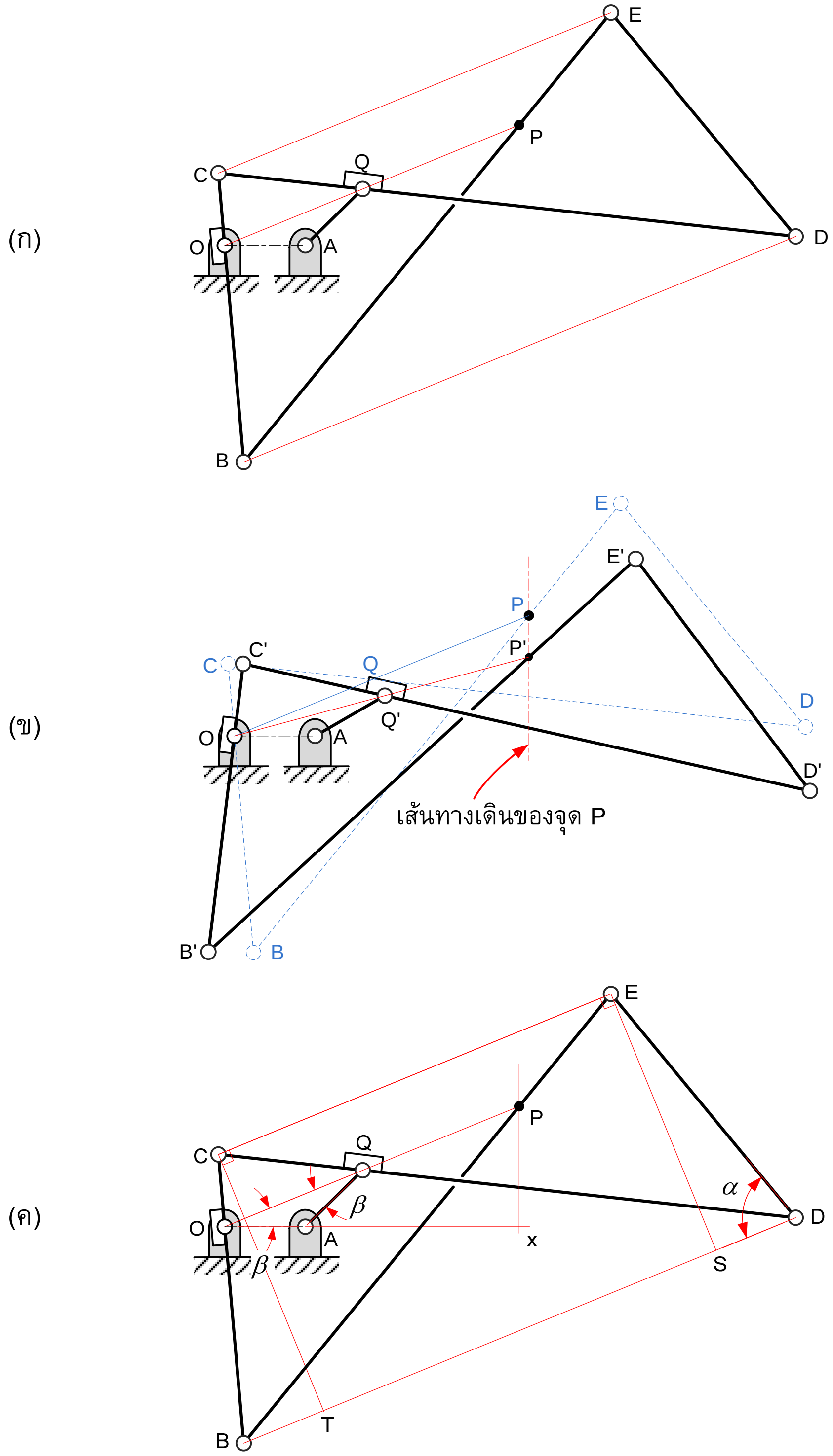
$$\overline{BE}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{BD}\cdot\overline{CE}$$

จัดรูปใหม่จะได้ $$\overline{BD}\cdot\overline{CE} = \overline{BE}^2 - \overline{DE}^2 \qquad \text{(ข)}$$

เทอมทางขวามือของสมการ (ข) เป็นค่าคงที่ เพราะ $\overline{BE}$ และ $\overline{DE}$ คือ ความยาวของข้อต่อ เนื่องจาก สามเหลี่ยม BCE และสามเหลี่ยม BOP เป็นสามเหลี่ยมคล้าย ดังนั้น

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}}$$

หรือ $$\overline{CE} = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{OP}}{\overline{OB}}$$



รูปที่ 2.69 กลไกเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงแท้ของ Hart

นอกจากนี้ สามเหลี่ยม BCD และสามเหลี่ยม OCQ ก็เป็นสามเหลี่ยมคล้าย ดังนั้น

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}}$$

หรือ
$$\overline{BD} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{OQ}}{\overline{OC}}$$

แทนในสมการ (ข) จะได้

$$\overline{BE}^2 - \overline{DE}^2 = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{OP}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{BC} \cdot \overline{OQ}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OQ} \cdot \overline{OP} \cdot \overline{BC}^2}{\overline{OB} \cdot \overline{OC}}$$

เนื่องจาก $\overline{BC}, \overline{OB}$ และ $\overline{OC}$ มีค่าคงที่ ดังนั้นผลคูณของ $\overline{OQ}$ กับ $\overline{OP}$ จึงเป็นค่าคงที่

จาก
$$\overline{OQ} = 2\overline{OA}\cos\beta$$

โดย $\cos\beta = \overline{OX}/\overline{OP}$

ดังนั้น
$$\overline{OQ} = 2\overline{OA}\left(\overline{OX}/\overline{OP}\right)$$

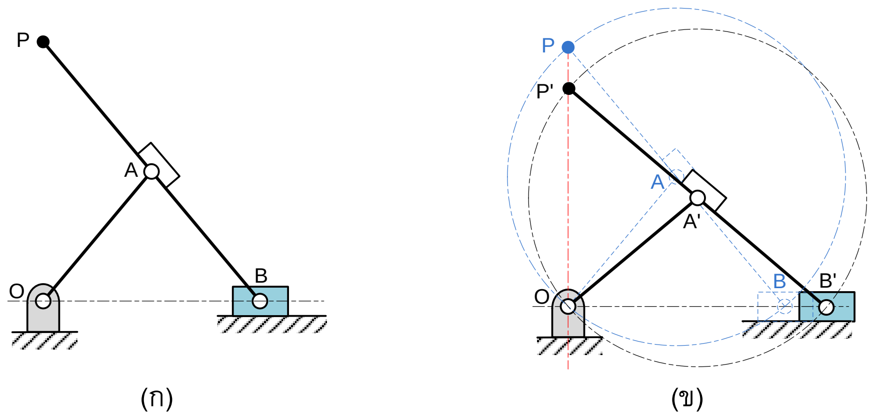
หรือ
$$\overline{OX} = \frac{\overline{OQ} \cdot \overline{OP}}{2\overline{OA}}$$

เทอมทางขวามือของผลลัพธ์ข้างต้นเป็นค่าคงที่ ดังนั้นทางเดินของจุด P จะเป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ลากผ่าน OA

กลไกของ Hart ใช้ข้อต่อเพียง 6 ชิ้น ขณะที่กลไกของ Peaucellier ใช้ข้อต่อถึง 8 ชิ้น แต่กลไกของ Hart มีข้อเสียคือกลไกจะใช้เนื้อที่มากแม้ว่าจะต้องการระยะทางที่จุด P เคลื่อนที่ไม่มาก

ค) Scotch-Russel mechanism

กลไกนี้แสดงอยู่ในรูปที่ 2.70 จากรูปกลไกประกอบด้วยคู่สัมผัสแบบเลื่อนไถล 1 คู่ และมีลักษณะเหมือนกับกลไกตัวเลื่อน-ข้อเหวี่ยง จากรูปความยาวของข้อต่อคือ $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{AP}$ จุด P จะเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ OB ถ้าใช้ A เป็นจุดศูนย์กลางเขียนวงกลมรัศมี AB แล้ววงกลมนี้จะผ่านจุด P, O และ B เสมอ เพราะว่า $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{AP}$ ดังนั้นไม่ว่ากลไกจะเคลื่อนที่ไปอยู่ตำแหน่งใดก็ตาม เส้นตรง PAB จะเป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุด O เสมอและมุม POB จะเป็นมุมฉากเสมอไม่ว่ากลไกจะอยู่ตำแหน่งใดก็ตาม ดังนั้นจุด P จึงเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงตั้งฉากกับ OB อย่างไรก็ดีกลไกนี้ไม่เป็นที่นิยมเพราะมีคู่สัมผัสแบบเลื่อนไถลจึงมีความเสียดทานและการสึกหรอมากกว่าคู่สัมผัสแบบหมุน



รูปที่ 2.70 กลไกเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงแท้ของ Scotch และ Russell

2.19.2 กลไกที่เคลื่อนที่เป็นเส้นตรงโดยประมาณ

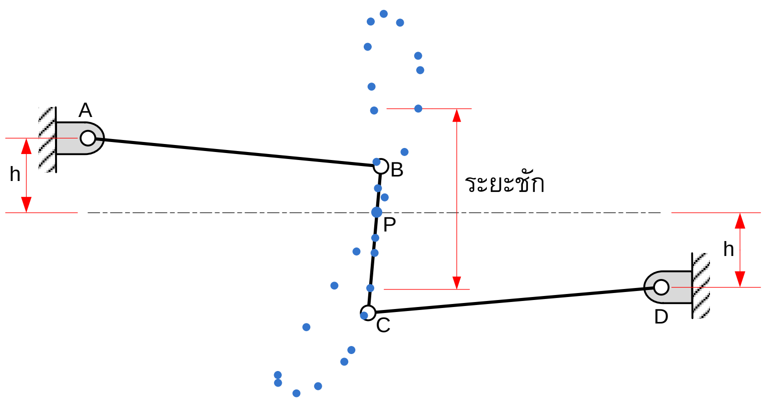
กลไกแบบนี้จะมีจุดที่มีเส้นทางเคลื่อนที่เกือบเป็นเส้นตรง ตัวอย่างได้แก่ กลไก 4 ข้อต่อของวัตต์ กลไก 4 ข้อต่อของโรเบิร์ต กลไก 4 ข้อต่อของ Tchebysheff's เป็นต้น

ก) กลไก 4 ข้อต่อของวัตต์

กลไกนี้แสดงอยู่ในรูปที่ 2.71 ถ้าข้อต่อ AB ยาวเท่ากับข้อต่อ CD แล้วจุด P จะเคลื่อนที่เป็นเลขแปดสมมาตรซึ่งมีบางส่วนเกือบเป็นเส้นตรง จุดสีแดงในรูปคือเส้นทางเดินของจุด P ส่วนที่ทางเดินเกือบเป็นเส้นตรงก็คือส่วนที่ใช้งานซึ่งก็คือระยะชัก เส้นทางเดินของจุด P จะใกล้เคียงกับเส้นตรงมากที่สุดเมื่อ ความยาวข้อต่อ BC เท่ากับ 2/3 เท่า ของระยะชัก S และความยาวข้อต่อ AB (และ CD) เท่ากับ 1.5S และระยะเยื้องแนว h เท่ากับ $\overline{BC}/2$

ถ้าความยาวข้อต่อ AB ไม่เท่ากับของ CD แล้วจะได้เลขแปดไม่สมมาตร โดยจะมีส่วนหนึ่งของเส้นทางเดินที่ตรงกว่า และจะใกล้เคียงกับเส้นตรงถ้า $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$

ถ้ากำหนดจุด A กับ D พร้อมกับตำแหน่งของส่วนที่เป็นเส้นตรง และระยะ S มาให้ความยาวของ AB, CD และจุดที่ลากเส้นตรง (จุด P) สามารถหาได้ดังนี้ จากรูปที่ 2.72 ให้ y-y เป็น



รูปที่ 2.71 กลไก 4 ข้อต่อของวัตต์

ตำแหน่งเส้นทางเดินที่เกือบเป็นเส้นตรง และ S คือ ระยะชัก ลากเส้นตรงจากจุด A และ D ไปตั้งฉากกับแนวเส้น y-y ที่จุด F และ H ตามลำดับ จากนั้นคำนวณระยะ AB และ CD จากสมการ

$$\overline{AB} = \overline{AF} + \frac{S^2}{16\overline{AF}}$$

และ

$$\overline{CD} = \overline{DH} + \frac{S^2}{16\overline{DH}}$$

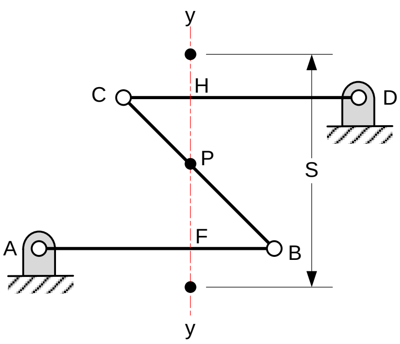
และจุด P ก็คือจุดตัดระหว่างเส้น CB กับแนวเส้น y-y

ข) กลไก 4 ข้อต่อของโรเบิร์ต

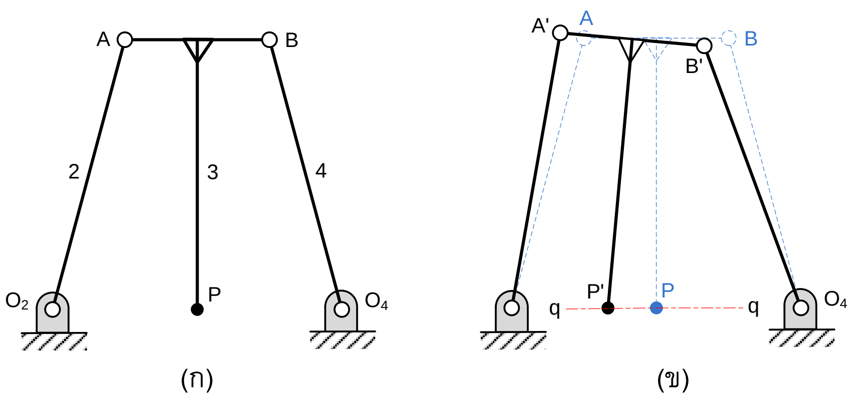
จุด P ในรูปที่ 2.73 จะเคลื่อนที่โดยมีเส้นทางเดิน q-q เกือบเป็นเส้นตรง ความยาวของข้อต่อต่าง ๆ มีดังนี้ $\overline{O_2A} = \overline{AP} = \overline{BP} = \overline{O_4B}$ และ $\overline{AB} = \overline{O_2P} = \overline{O_4P}$ จุด P จะเคลื่อนที่เข้าใกล้เส้นตรงมากขึ้นถ้าอัตราส่วนของความสูงต่อความกว้างเพิ่มขึ้น

ค) กลไก 4 ข้อต่อของ Tchebysheff

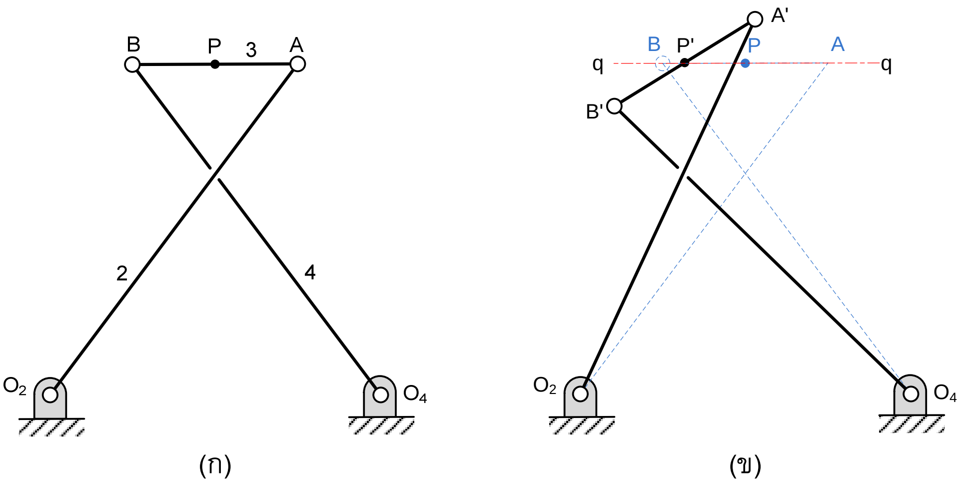
จุด P ในรูปที่ 2.74 ซึ่งอยู่กึ่งกลางข้อต่อหมายเลข 3 จะมีเส้นทางเดิน q-q เกือบเป็นเส้นตรง ความยาวของข้อต่อต่าง ๆ เป็นดังนี้ $\overline{O_2A} = \overline{O_4B} = 1.25\overline{O_2O_4}$ และ $\overline{AB} = \overline{O_2O_4}/2$



รูปที่ 2.72 การหาตำแหน่งจุด P ที่ลากเส้นทางที่เกือบเป็นเส้นตรง ในกลไกของวัตต์



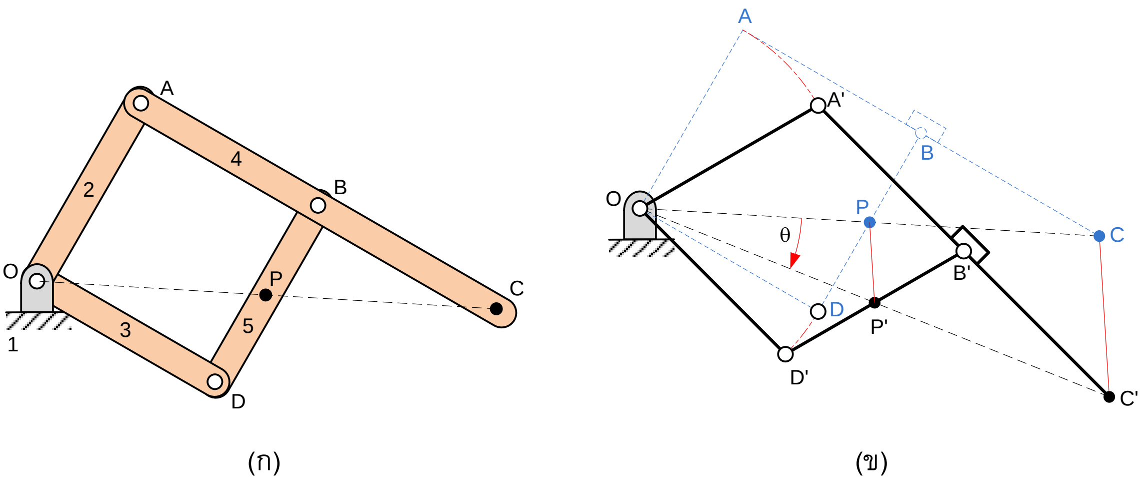
รูปที่ 2.73 กลไก 4 ข้อต่อของ Robert



รูปที่ 2.74 กลไก 4 ข้อต่อของ Tchebysheff

2.20 แพนโตกราฟ

แพนโตกราฟ (pantograph) เป็นอุปกรณ์สำหรับขยายหรือย่อขนาดรูป สามารถประยุกต์ได้กับการทำแผนที่ การตัดโลหะ เป็นต้น รูปที่ 2.75(ก) แสดงรูปแบบหนึ่งของกลไกแพนโตกราฟ ข้อต่อหมายเลข 2, 3, 4 และ 5 จะต่อกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและจุด C เป็นจุดบนข้อต่อหมายเลข 4 ส่วนที่ยื่นต่อออกไป จุด P อยู่บนข้อต่อหมายเลข 5 ตรงจุดตัดของเส้นตรง OC กับเส้นตรง BD การที่เส้นทางเดินของจุด P และ C จะเหมือนกันนั้น อัตราส่วน $\overline{OC}/\overline{OP}$ ต้องคงที่ตลอดช่วงการเคลื่อนที่ ยกตัวอย่างในรูปที่ 2.75(ข) เมื่อจุด C เคลื่อนไปที่ C' บนแนวเส้นตรงแล้วจุด P ก็จะเคลื่อนไปที่ P' บนแนวเส้นตรงที่ขนานกันด้วย เป็นต้น การพิสูจน์สามารถแสดงได้ดังนี้

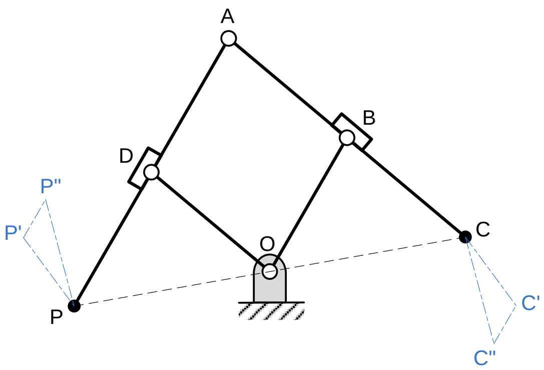


รูปที่ 2.75 กลไกแพนโตกราฟ

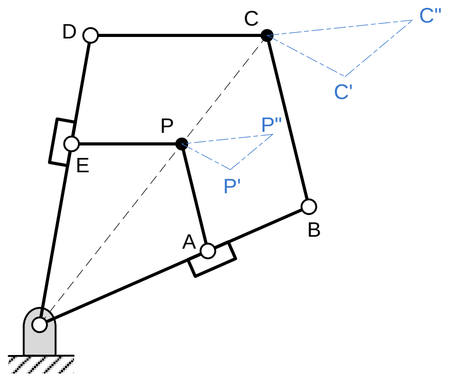
พิจารณาสามเหลี่ยมคล้าย BCP และ OAC จะได้ $\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ จากนั้นพิจารณาสามเหลี่ยมคล้าย B'C'P' กับ OA'C' จะได้ $\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OP'}} = \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$ แต่ $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ และ $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ดังนั้น $\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OP'}}$ หรือกล่าวได้ว่าอัตราส่วนของระยะจากจุด O ถึงจุด C และถึงจุด P มีค่าคงที่ เพราะว่า CAO กับ BCP เป็นสามเหลี่ยมคล้ายที่ทุก ๆ ตำแหน่งการเคลื่อนที่ จึงทำให้ OC ตัดกับ BD ที่ตำแหน่งเดิม (จุด P) เสมอ ดังนั้นการเคลื่อนที่เชิงมุมของจุด P และ C รอบจุด O จะเท่ากัน

เส้นทางเดินของจุด C กำหนดได้ด้วยการเคลื่อนที่เชิงมุม θ รอบจุด O และระยะตามแนวรัศมีจาก O ถึง C และเพราะว่าการเคลื่อนที่เชิงมุมของจุด C และ P รอบจุด O เท่ากัน ไม่ว่าการเคลื่อนที่ของจุด C จะเป็นแบบใด นอกจากนี้อัตราส่วนของระยะตามแนวรัศมี $\overline{OC}/\overline{OP}$ ก็คงที่เสมอ ดังนั้นเส้นทางเดินของจุด P จึงเหมือนของจุด C ทุกประการ

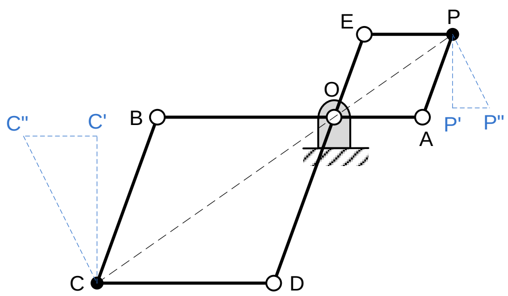
กลไกแพนโตกราฟนี้มีรูปแบบอื่น ๆ อีกดังตัวอย่างในรูปที่ 2.76(ก)–(ง) สำหรับกลไกทุกแบบ อัตราส่วนของขนาดการเคลื่อนที่ของจุด C ต่อจุด P คือ $\overline{OC}/\overline{OP}$



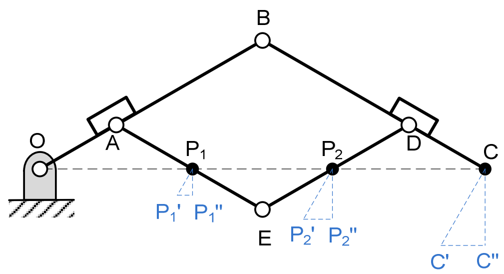
(ก) $\overline{AC} = \overline{AP}; \overline{AD} = \overline{DP} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{OB} = \overline{OD}$



(ข) $\overline{OB} = \overline{OD}; \overline{BC} = \overline{CD}; \overline{OE} = \overline{OA}; \overline{EP} = \overline{AP}$



(ค) $\overline{OD} = \overline{BC}; \overline{OB} = \overline{CD}; \overline{OE} = \overline{AP}; \overline{EP} = \overline{OA}$



(ง) $AB = DE; AE = BD;$

$OB : BC = P_2D : DC = OA : AP_1$

รูปที่ 2.76 แพนโตกราฟแบบต่าง ๆ

รูปแบบต่าง ๆ ของแพนโตกราฟในรูปที่ 2.76 นี้ ทุกรูปจุดที่อยู่กับที่อาจเป็นจุดอื่น ๆ เช่น จุด C หรือจุด P แทนจุด O ก็ได้ และจุดที่ใช้ลอกแบบคือจุดอื่น ๆ ที่เหลือ

นอกจากแพนโตกราฟจะถูกใช้ในการลอกแบบรูปเรขาคณิตแล้วยังถูกนำไปใช้เพิ่มหรือลด การเคลื่อนที่ในสัดส่วนที่แน่นอน เช่น ใช้ใน engine indicator เป็นต้น

กิจกรรมเสริม

เข้าชมเว็บไซต์ http://www.peter.com.au/articles/pantograph.html

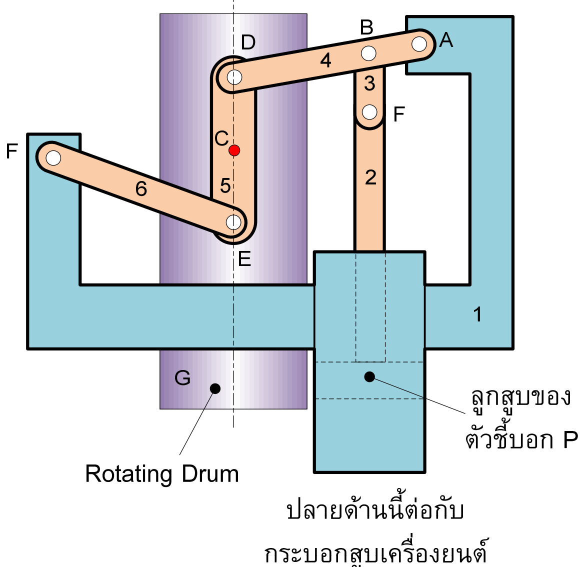
(How to build Pantograph ?)

2.21 กลไกชี้บอก

กลไกชี้บอก (indicator mechanism) มีหน้าที่ขยายการเคลื่อนที่ของลูกสูบของตัวชี้บอก ซึ่งเคลื่อนที่ตามลูกสูบในกระบอกสูบของเครื่องยนต์เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงความดันในกระบอกสูบ ลูกสูบของตัวชี้บอกจะเคลื่อนที่แบบเส้นตรงและอัตราขยายของการเคลื่อนที่ต้องเป็นค่าคงที่ด้วย กลไกที่ทำหน้าที่ดังกล่าวได้แก่ กลไกชี้บอกของ Richard และกลไกชี้บอกของ Crosby

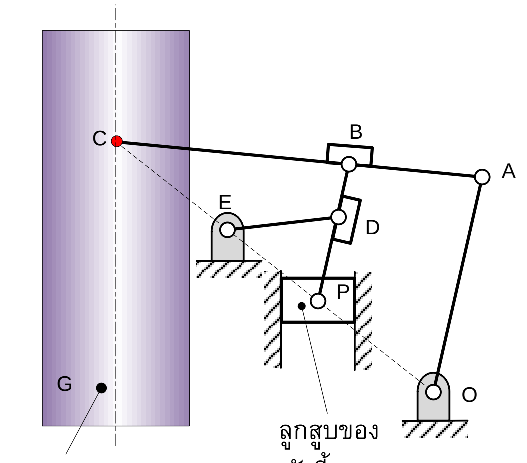
กลไกชี้บอกของ Richard ในรูปที่ 2.77 ใช้กลไกเส้นตรงของวัตต์ (รูปที่ 2.72) เพื่อทำให้จุด C ซึ่งเป็นตำแหน่งของดินสอเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง

กลไกชี้บอกของ Crosby ในรูปที่ 2.78 เป็นกลไกแบบใหม่กว่าและดัดแปลงจากกลไกแพนโตกราฟ การทำงานของกลไกคือ ลูกสูบของตัวชี้บอก P เคลื่อนที่ตามแรงดันในกระบอกสูบ การเคลื่อนที่ของ P จะถูกต้านโดยแรงดันของสปริงที่ทราบค่าความแข็งเกร็ง (รูปที่ 2.78(ข)) และ

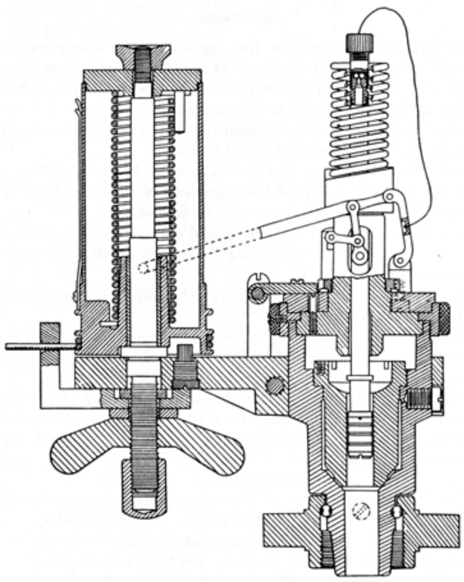


รูปที่ 2.77 กลไกชี้บอกของ Richard

จะส่งทอดการเคลื่อนที่ต่อไปจนถึงจุด C จุด C จะเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง และเคลื่อนที่ให้เป็นสัด-ส่วนกับจุด P ที่จุด C มีดินสอสำหรับเขียนแผนภาพความดัน-ปริมาตร (หรือการขจัด) บนกระดาษที่พันรอบ rotating drum G ซึ่งหมุนไปมารอบแกนโดยสัมพันธ์กับตำแหน่งลูกสูบของเครื่องยนต์ แผนภาพที่เขียนได้มีลักษณะดังรูปที่ 2.79

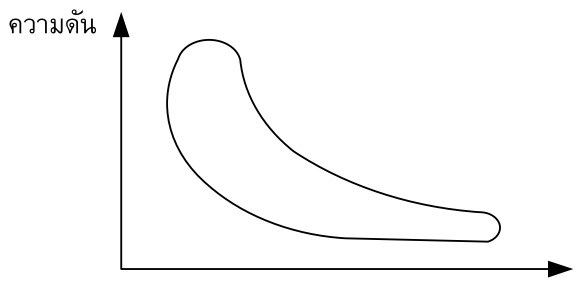


(ก) แผนภาพคิเนแมติก



(ข) ภาพตัดของกลไก [4]

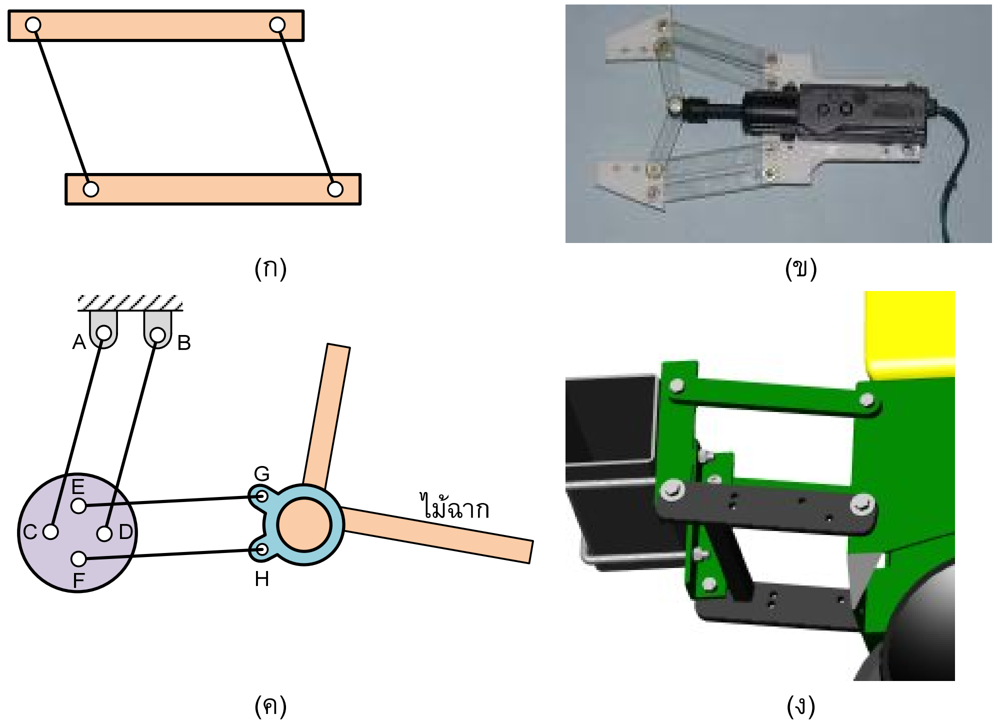
รูปที่ 2.78 กลไกชี้บอกของ Crosby



รูปที่ 2.79 แผนภาพความดัน-ปริมาตร

2.22 กลไกด้านขนาน

กลไกด้านขนาน (parallel mechanism) คือ กลไก 4 ข้อต่อ ที่มีข้อต่อทั้งหมดวางตัวเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเสมอไม่ว่ากลไกจะอยู่ ณ ตำแหน่งใด กลไกนี้ถูกนำไปใช้หลายลักษณะอย่างเช่น ไม้บรรทัดขนานในรูปที่ 2.80(ก) มือจับในหุ่นยนต์ในรูปที่ 2.80(ข) เครื่องมือเขียนแบบ (universal drafting machine) ในรูปที่ 2.80(ค) กลไกยกของในรูปที่ 2.80(ง) เป็นต้น



รูปที่ 2.80 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้กลไกด้านขนาน

สำหรับ universal drafting machine เป็นเครื่องมือที่ติดตั้งกับโต๊ะเขียนแบบ เพื่อทำหน้าที่ของไม้ที และไม้ฉากสามเหลี่ยม เครื่องมือประกอบด้วยกลไกรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานสองรูป คือ ABCD และ EFGH มาต่อกัน สำหรับไม้ฉากนั้นสามารถหมุนทำมุมตามที่ต้องการและล็อคได้ เมื่อกลไกเคลื่อนที่ ไม้ฉากก็จะเคลื่อนที่ขนานกับตำแหน่งเดิมเสมอ

2.23 กลไกที่เคลื่อนที่เป็นจังหวะ

การเคลื่อนที่เป็นจังหวะ (intermittent motion) คือลักษณะการเคลื่อนที่ที่กลไกจะเคลื่อนที่สลับกับหยุดนิ่ง ช่วงหยุดนิ่ง (dwell)[9] หมายถึงช่วงที่ข้อต่อขาออก (output link) อยู่กับที่ขณะที่ข้อต่อตัวขับเคลื่อนที่อยู่อย่างต่อเนื่อง งานหลายประเภทต้องการกลไกที่เคลื่อนที่เป็นจังหวะ ในหัวข้อนี้จะยกตัวอย่างกลไกที่มีการเคลื่อนที่แบบนี้

2.23.1 กลไกเจนีวา

กลไกเจนีวา (geneva mechanism) แสดงอยู่ในรูปที่ 2.81 กลไกนี้ได้จากการแปลงรูปกลไก 4 ข้อต่อ โดยแทนที่ก้านส่งด้วยจุดต่อแบบครึ่ง ข้อเหวี่ยงซึ่งทำหน้าที่เป็นตัวขับ (หมายเลข 2) จะหมุนด้วยความเร็วรอบคงที่ วงล้อเจนีวา (Geneva wheel) จะมีร่อง (slot) วางตัวแนวรัศมี

---

[9] อ่านว่า ดเวลล์

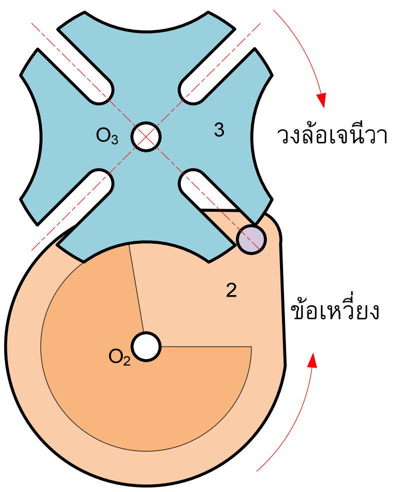
อย่างน้อย 3 ร่อง ที่ระยะห่างเท่า ๆ กัน ข้อเหวี่ยงซึ่งมีสลักจะเข้าไปในร่องและขับวงล้อเจนีวาให้หมุน เมื่อสลักเลื่อนพ้นร่องวงล้อเจนีวาจะหยุดนิ่งจนกว่าสลักจะเคลื่อนเข้าไปยังร่องถัดไป ดังนั้นวงล้อเจนีวาจะเคลื่อนที่เป็นจังหวะ นอกจากนี้บนข้อเหวี่ยงจะมีส่วนโค้งที่รับกับส่วนเว้าบนวงล้อเจนีวาได้พอดี ส่วนโค้งนี้ทำให้วงล้อเจนีวาหยุดนิ่งในตำแหน่งที่เมื่อสลักเคลื่อนออกจากร่อง

2.23.2 กลไก Ratchet และ Pawl

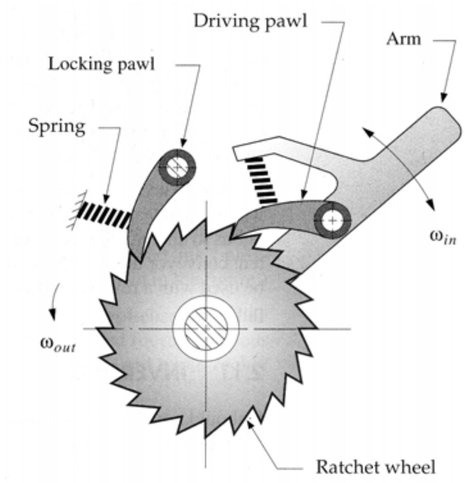
กลไกนี้แสดงอยู่ในรูปที่ 2.82 จากรูป ด้าม (arm) เคลื่อนที่รอบจุดศูนย์กลางของ ratchet wheel ที่มีฟันตามขอบนอก เมื่อโยกด้ามทวนเข็มนาฬิกา driving pawl จะดัน ratchet wheel ให้หมุนไปพร้อมกับด้ามโดยที่ locking pawl จะไม่ต้านการเคลื่อนที่นี้ หลังจากด้ามอยู่ในตำแหน่งที่ต้องการแล้ว ถ้าโยกด้ามในทิศตามเข็มจะพบว่า locking pawl จะยันกับฟันของ ratchet wheel ทำให้โยกด้ามกลับไม่ได้ สปริงทำหน้าที่ดัน pawl ให้แนบกับฟันของ ratchet กลไกแบบนี้พบในประแจ ratchet กว้าน (winches) เป็นต้น

2.23.3 กลไกเจนีวาเชิงเส้น

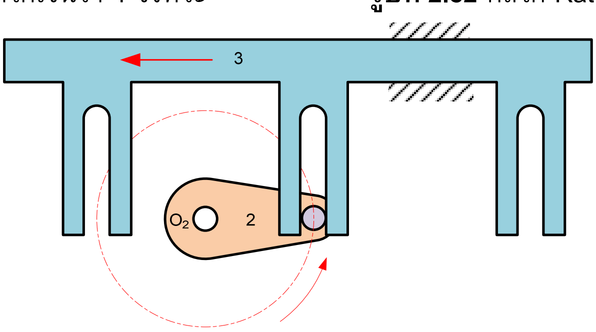
กลไกนี้แสดงอยู่ในรูปที่ 2.83 กลไกนี้เปลี่ยนการเคลื่อนที่แบบหมุนให้เป็นการเคลื่อนที่เชิงเส้น หลักการทำงานของกลไกเหมือนกับกลไกเจนีวา



รูปที่ 2.81 กลไกเจนีวา 4 จังหวะ



รูปที่ 2.82 กลไก Ratchet และ Pawl



รูปที่ 2.83 กลไกเจนีวาเชิงเส้น

2.24 ข้อต่อสากล

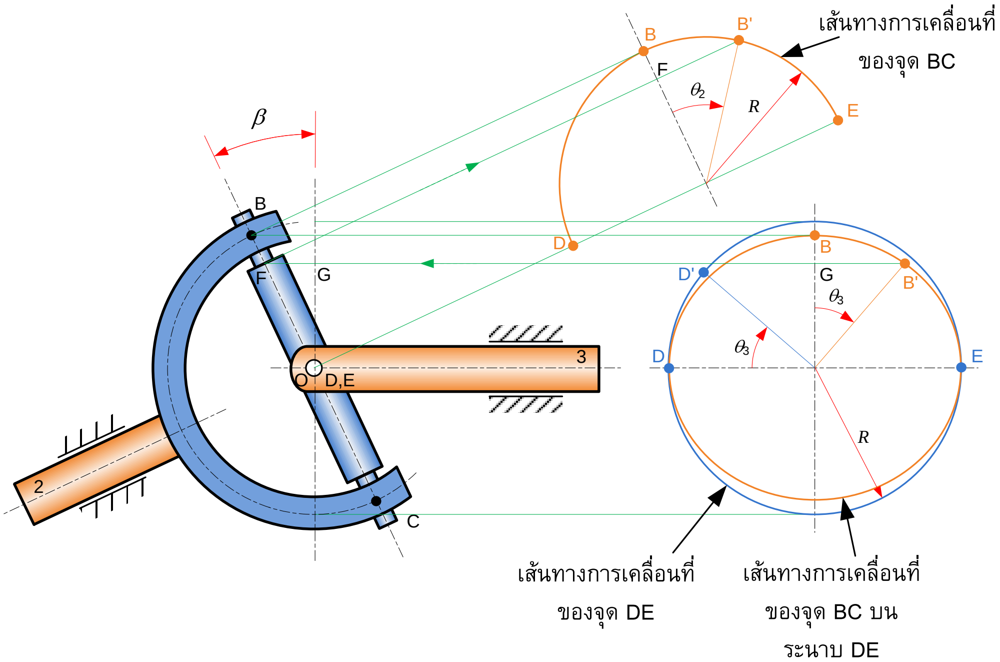
ข้อต่อสากล (universal joint) หรือข้อต่อของฮุค (Hooke's joint) หรือข้อต่อ Cardan[10] คือ ข้อต่อที่ใช้ต่อเพลาสองเพลาที่อยู่บนระนาบเดียวกันแต่ไม่ขนานกัน หน้าที่ของข้อต่อนี้คือเพื่อส่งทอดการหมุนจากเพลาหนึ่งไปยังอีกเพลาหนึ่ง ถ้าเพลาตัวขับหมุนด้วยความเร็วคงที่แล้วเพลาตาม (หรือเพลาตัวถูกขับ) จะหมุนด้วยความเร็วไม่คงที่ในแต่ละรอบ กล่าวอีกอย่างก็คือข้อต่อชนิดนี้จะส่งทอดการหมุนด้วยอัตราส่วนความเร็ว (velocity ratio) ไม่คงที่ ในระหว่างส่งทอดการหมุน มุมระหว่างแกนพลาทั้งสองอาจจะเปลี่ยนแปลงได้ ในรถยนต์ใช้ข้อต่อแบบนี้เพื่อส่งทอดการหมุนจากกระปุกเกียร์ (gearbox) ไปยังกระปุกเฟืองท้าย

ข้อต่อแบบนี้ประกอบด้วยง่าม (yoke) ต่อกับข้อต่อรูปกากะบาท (cross link) ดังรูปที่ 2.84 แขนของข้อต่อกากะบาททำมุมระหว่างกัน 90 องศา มุมระหว่างเพลาทั้งสองคือ β (คิดมุมที่เล็กกว่าเสมอ) จากรูป ง่ามของเพลา 3 อยู่ในระนาบนอน ส่วนง่ามของเพลา 2 อยู่ในระนาบดิ่ง

ลักษณะการเคลื่อนที่ของข้อต่อแบบนี้แสดงอยู่ในรูปที่ 2.85 จากรูปเมื่อเพลา 3 หมุน จุด D และ E จะเคลื่อนที่เป็นวงกลม ขณะเดียวกันจุด B และ C ก็จะเคลื่อนที่เป็นวงกลม แต่อยู่บนระนาบเอียงที่ทำมุม β กับระนาบการเคลื่อนที่ของ DE ดังนั้นเมื่อฉายวงกลมของ BC ไปบนระนาบของ DE ก็จะเห็นเป็นรูปวงรี สมมติให้เพลา 3 หมุนไปเป็นมุม θ_3 จุด D จะเคลื่อนไปที่ D' และจุด B เคลื่อนที่ไปที่ B' ทั้งมุม DOD' และมุม BOB' จะมีค่าเท่ากับ θ_3 มุม θ_3 นี้ไม่ใช่มุมที่เพลา 2 หมุนไป มุมที่เพลา 2 หมุนไปหาได้โดยฉายจุด B' กลับไปยังระนาบของการเคลื่อนที่ของ BC ซึ่งจะได้ว่ามุมที่เพลา 2 หมุนไปคือมุม BOB' $\equiv \theta_2$

รูปที่ 2.84 ข้อต่อสากล

[10] Cardan (1501-1575) ชาวอิตาลี เป็นคนแรกที่บรรยายข้อต่อชนิดนี้ไว้ และ Robert Hooke (1635-1703) ชาวอังกฤษ เป็นคนแรกที่นำไปใช้ในการส่งทอดการหมุน Hooke เป็นนักฟิสิกส์และนักคณิตศาสตร์ที่รู้จักกันแพร่หลายจากกฎของ Hooke ในวิชากลศาสตร์วัสดุ



รูปที่ 2.85 การส่งทอดการหมุนของข้อต่อสากล

2.24.1 ความเร็วเชิงมุมของเพลาตาม

จากรูปที่ 2.85 บนเส้นทางการเคลื่อนที่ของจุด BC จะได้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$OF = R\cos\theta_2 \qquad (ก)$$

และ
$$B'F = R\sin\theta_2 \qquad (ข)$$

จากรูปที่ 2.85 ที่ภาพประกอบของข้อต่อ จะได้

$$OG = OF\cos\beta \qquad (ค)$$

แทนในสมการ (ก) จะได้

$$OG = R\cos\theta_2\cos\beta \qquad (ง)$$

จากรูปที่ 2.85 บนเส้นทางการเคลื่อนที่ของจุด BC บนระนาบ DE จะได้

$$B'G = B'F \qquad (จ)$$

ดังนั้น
$$B'G = R\sin\theta_2 \qquad (ฉ)$$

และ
$$\tan\theta_3 = \frac{B'G}{OG} \qquad (ช)$$

แทนสมการ (ง) และ (จ) ในสมการ (ช) จะได้

$$\tan\theta_3 = \frac{R\sin\theta_2}{R\cos\theta_2\cos\beta}$$

จัดรูปจะได้
$$\tan\theta_3 = \frac{\tan\theta_2}{\cos\beta} \qquad (ญ)$$

โดยทั่วไปจะถือว่ามุมระหว่างเพลา β มีค่าคงที่ ดังนั้นเมื่อหาอนุพันธ์สมการ (ญ) เทียบกับเวลาจะได้

$$\sec^2\theta_3 \frac{d\theta_3}{dt} = \frac{\sec^2\theta_2}{\cos\beta}\frac{d\theta_2}{dt}$$

กำหนดให้ $d\theta_3/dt \equiv \omega_3$ และ $d\theta_2/dt \equiv \omega_2$ ดังนั้น

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\sec^2\theta_3\cos\beta}{\sec^2\theta_2} = \frac{\sec^2\theta_3\cos\beta}{1+\tan^2\theta_2} \qquad \text{(ซ)}$$

จากสมการ (ญ) $\tan\theta_2 = \tan\theta_3\cos\beta$ แทนค่าในสมการข้างต้นจะได้

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\sec^2\theta_3\cos\beta}{1+\tan^2\theta_3\cos^2\beta}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\cos\beta}{\cos^2\theta_3+\sin^2\theta_3\cos^2\beta}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\cos\beta}{\cos^2\theta_3+\sin^2\theta_3\left(1-\sin^2\beta\right)}$$

จัดรูปจะได้

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\cos\beta}{1-\sin^2\theta_3\sin^2\beta} \qquad (2.40)$$

สมการที่ (2.40) สามารถเขียนในเทอมของ θ_2 ได้ดังนี้

จากสมการ (ซ)

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\sec^2\theta_3\cos\beta}{\sec^2\theta_2}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\left(1+\tan^2\theta_3\right)\cos\beta}{\sec^2\theta_2}$$

แทนสมการ (ญ)

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\left(1+\dfrac{\tan^2\theta_2}{\cos^2\beta}\right)\cos\beta}{\sec^2\theta_2} = \frac{\cos\beta}{1+\tan^2\theta_2}\left(\frac{\cos^2\beta+\tan^2\theta_2}{\cos^2\beta}\right)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\cos^2\beta+\tan^2\theta_2}{\cos\beta\left(1+\tan^2\theta_2\right)} = \frac{1-\sin^2\beta+\tan^2\theta_2}{\cos\beta\left(1+\tan^2\theta_2\right)}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{1-\dfrac{\sin^2\beta}{1+\tan^2\theta_2}}{\cos\beta} = \frac{1-\dfrac{\sin^2\beta}{\sec^2\theta_2}}{\cos\beta}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{1-\cos^2\theta_2\sin^2\beta}{\cos\beta} \qquad (2.41)$$

หรือ $$\omega_3 = \left(\frac{\cos\beta}{1-\cos^2\theta_2\sin^2\beta}\right)\omega_2 \tag{2.42}$$

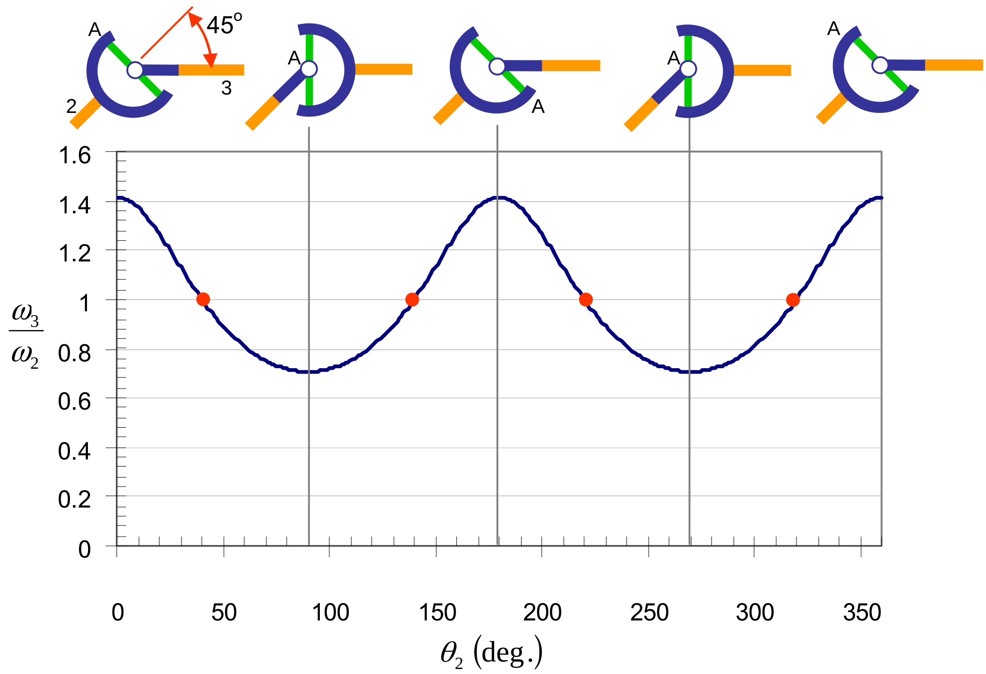
จากสมการที่ (2.42) ω_3 จะมีค่ามากที่สุดเมื่อเทอม $1-\cos^2\theta_2\sin^2\beta$ มีค่าน้อยที่สุด ถ้าให้มุม β คงที่แล้ว เทอม $1-\cos^2\theta_2\sin^2\beta$ จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $\cos^2\theta_2$ มีค่ามากที่สุด ซึ่งเท่ากับ 1 ดังนั้นมุม θ_2 ที่ทำให้ $\cos^2\theta_2$ มีค่ามากที่สุด คือ $0, \pi, 2\pi, \ldots$ และความเร็วสูงสุดของเพลาตามคือ

$$(\omega_3)_{\max} = \frac{\omega_2}{\cos\beta} \tag{2.43ก}$$

ในทำนองเดียวกัน ω_3 จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อเทอม $1-\cos^2\theta_2\sin^2\beta$ มีค่ามากที่สุด หรือ $\cos^2\theta_2$ มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งเท่ากับศูนย์ ดังนั้นมุม θ_2 ที่ทำให้ $\cos^2\theta_2$ มีค่าน้อยที่สุดคือ $\pi/2, 3\pi/2, \ldots$ และความเร็วต่ำสุดของเพลาตามคือ

$$(\omega_3)_{\min} = \omega_2\cos\beta \tag{2.43ข}$$

รูปที่ 2.86 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ω_3/ω_2 กับ θ_2 เมื่อ β เท่ากับ 45 องศา จากรูปจะเห็นว่าการหมุนของเพลาหนึ่งรอบ จะมีตำแหน่งที่ $\omega_2 = \omega_3$ ทั้งหมด 4 ตำแหน่ง หากต้องการหาตำแหน่งดังกล่าวที่มุม β ใด ๆ ก็สามารถทำได้ดังนี้



รูปที่ 2.86 อัตราส่วนความเร็วของเพลาตามต่อเพลาขับ เมื่อเพลาขับหมุนไปเป็นมุมต่าง ๆ

จากสมการที่ (2.42) ถ้า $\omega_2 = \omega_3$ แล้วจะได้

$$\frac{\cos\beta}{1-\cos^2\theta_2 \sin^2\beta} = 1$$

จัดรูปจะได้ $$\cos^2\theta_2 = \frac{1-\cos\beta}{\sin^2\beta} \tag{ฌ}$$

ดังนั้น $$\theta_2 = \arccos\left(\pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{\sin^2\beta}}\right) \tag{2.44}$$

หรือถ้าต้องการผลลัพธ์ที่กระชับกว่านี้ ก็สามารถทำได้ดังนี้

จากสมการ (ฌ) $$\cos^2\theta_2 = \frac{1-\cos\beta}{\sin^2\beta} \tag{ญ}$$

$$\sin^2\theta_2 = 1-\frac{1-\cos\beta}{\sin^2\beta} = 1-\frac{1-\cos\beta}{1-\cos^2\beta}$$

$$\sin^2\theta_2 = 1-\frac{1}{1+\cos\beta} = \frac{\cos\beta}{1+\cos\beta}$$

หารด้วยสมการ (ญ) จะได้

$$\tan^2\theta_2 = \frac{\cos\beta}{1+\cos\beta}\cdot\frac{\sin^2\beta}{1-\cos\beta}$$

$$\tan^2\theta_2 = \cos\beta$$

ดังนั้น $$\theta_2 = \arctan\left(\pm\sqrt{\cos\beta}\right) \tag{2.45}$$

เนื่องจาก $\tan\theta$ จะมีค่าเท่ากันเมื่อ θ เป็นมุมที่อยู่ในควอดแรนต์ 1 และ 3 หรือ 2 และ 4 ดังนั้นเมื่อแก้สมการที่ (2.45) แล้วได้ผลเฉลยเป็นมุมในควอดแรนต์ 1 และ 2 ก็หมายความว่ามีผลเฉลยอีก 2 ตัว ซึ่งหาได้โดยการบวกผลเฉลยที่ได้อีก 180 องศา

2.24.2 ความเร่งเชิงมุมของเพลาตาม

ความเร่งเชิงมุมของเพลาตาม α_3 คือ อนุพันธ์ของสมการที่ (2.42) เทียบกับเวลา ดังนั้น

$$\alpha_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{-\omega_2^2\cos\beta\sin 2\theta_2\sin^2\beta}{\left(1-\cos^2\theta_2\sin^2\beta\right)^2} \tag{2.46}$$

ความเร่งเชิงมุมของเพลาตาม α_3 จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $d\alpha_3/d\theta_2 = 0$ หลังจากจัดรูปจะได้ผลลัพธ์ต่อไปนี้

$$\cos 2\theta_2 = \frac{\sin^2\beta\left(2-\cos^2 2\theta_2\right)}{2-\sin^2\beta} \tag{2.47}$$

มุม θ_2 ที่ทำให้ α_3 มีค่ามากที่สุดหาได้โดยแก้สมการข้างต้นด้วยวิธีเชิงตัวเลข แต่ถ้า β น้อยกว่า 30 องศา แล้วสมการที่ (2.47) สามารถประมาณค่าได้ดังนี้

$$\cos 2\theta_2 \approx \frac{2\sin^2\beta}{2-\sin^2\beta} \tag{2.48}$$

2.24.3 การกระเพื่อมสูงสุดของความเร็ว

การกระเพื่อมของความเร็ว (speed flucturation) คือการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมของเพลาตามขณะที่เพลาขับหมุนไปยังตำแหน่งต่าง ๆ ด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ ดังนั้นการกระเพื่อมสูงสุดของความเร็ว (maximum fluctuation speed) คือ ผลต่างของความเร็วเชิงมุมสูงสุดและต่ำสุดของเพลาตาม หรือ $(\omega_3)_{\max}-(\omega_3)_{\min}$ จากสมการที่ (2.43(ก)) และ (2.43(ข)) จะได้

$$(\omega_3)_{\max}-(\omega_3)_{\min} = \frac{\omega_2}{\cos\beta}-\omega_2\cos\beta$$

$$=\omega_2\left(\frac{1-\cos^2\beta}{\cos\beta}\right)=\omega_2\left(\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}\right)$$

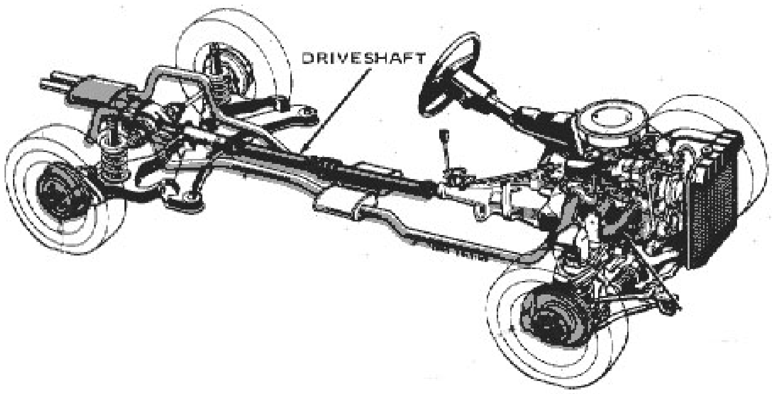
$$(\omega_3)_{\max}-(\omega_3)_{\min} = \omega_2\tan\beta\sin\beta \tag{2.49}$$

ถ้า β มีค่าน้อย แล้ว $\tan\beta\approx\sin\beta\approx\beta$ ดังนั้น

$$(\omega_3)_{\max}-(\omega_3)_{\min} = \omega_2\beta^2 \tag{2.50}$$

2.24.4 Double Hooke's joint

ข้อเสียของ Hooke's joint คือ อัตราส่วนความเร็วของเพลาขับและเพลาตามมีค่าไม่คงที่ในระหว่างการส่งทอดการหมุน ถ้านำข้อต่อนี้ไปใช้ในรถยนต์โดยให้เพลาขับต่อกับกระปุกเกียร์และเพลาตามต่อกับเฟืองท้าย แล้วจะทำให้เกิดแรงเฉื่อยขึ้นที่ปลายเพลาทั้งสอง ด้านกระปุกเกียร์จะมีแรงเฉื่อยที่เกิดจากเครื่องยนต์และล้อตุนกำลังซึ่งหมุนด้วยความเร็วรอบคงที่ ส่วนอีกด้านจะมีน้ำหนักของรถซึ่งกำลังวิ่งด้วยความเร็วสูง เมื่อใช้ Hooke's joint เพียงตัวเดียวแล้ว ความเร็วของเครื่องยนต์หรือไม่ก็ความเร็วของรถจะต้องเปลี่ยนไปในระหว่างรอบการหมุนของเพลา แรงเฉื่อยที่ปลายทั้งสองจะต้านทานการเปลี่ยนแปลงความเร็วทำให้ล้อรถเกิดการไถล และชิ้นส่วนในชุดส่งทอดกำลังจะรับความเค้นสูง ดังนั้นถ้าจะใช้ข้อต่อชนิดนี้ในรถยนต์แล้วจะต้องติดตั้งเพลากลาง (หรือ drive shaft) ที่มีปลายทั้งสองข้างเป็น Hooke's joint ระหว่างเพลาขับและเพลาตาม ดังรูปที่ 2.87



รูปที่ 2.87 การใช้งาน double Hooke's joint เพื่อส่งกำลังจากกระปุกเกียร์ไปยังเฟืองท้าย [5]

จากรูปที่ 2.88 เมื่อพิจารณาเพลา 2 กับ 3 จะได้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้ (จากสมการ (ญ))

$$\tan\theta_2 = \tan\theta_3 \cos\beta_1$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาเพลา 3 กับ 4 จะได้

$$\tan\theta_4 = \tan\theta_3 \cos\beta_2$$

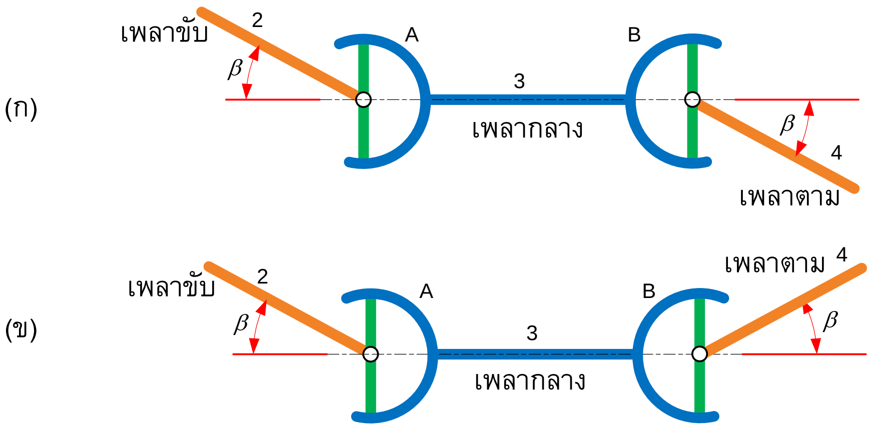
ถ้าเพลาขับและเพลาตามทำมุมกับเพลากลางเท่ากัน ($\beta_1 = \beta_2 \equiv \beta$) แล้ว

$$\tan\theta_2 = \tan\theta_4$$

หรือ $$\theta_2 = \theta_4$$

ดังนั้น $$\omega_2 = \omega_4$$

สรุปว่าเงื่อนไขที่ทำให้ $\omega_2 = \omega_4$ มีดังนี้



รูปที่ 2.88 Double Hooke's joint ในตำแหน่งที่ทำให้ความเร็วเชิงมุมของเพลาตามเท่ากับของเพลาขับ

1) มุมที่เพลาขับทำกับเพลากลาง ต้องเท่ากับมุมที่เพลาตามทำกับเพลากลาง โดยจะมีลักษณะดังรูปที่ 2.88(ก) หรือ 2.88(ข) ก็ได้
2) ถ้าเพลา 2 กับ 4 อยู่บนระนาบเดียวกัน ง่าม A กับ B ของเพลากลาง 3 ต้องอยู่ในระนาบเดียวกัน (ขนานกัน) ด้วย
3) ถ้าเพลา 2 กับ 4 ไม่ได้อยู่บนระนาบเดียวกัน ง่าม A ต้องอยู่ในระนาบของเพลา 2 กับ 3 ส่วนง่าม B ก็ต้องอยู่ในระนาบของเพลา 3 กับ 4

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> เพลา 2 เพลาทำมุมระหว่างกัน 20 องศา และต่อกันด้วยข้อต่อสากล ถ้าความเร็วของเพลาขับเท่ากับ 1000 รอบ/นาที จงหาค่าของ 1) ความเร็วสูงสุด และต่ำสุดของเพลาตาม 2) ความเร่งเชิงมุมสูงสุดของเพลาตาม

<u>วิธีทำ</u> แปลงหน่วยความเร็วของเพลาขับ ω_2 เป็น เรเดียน/วินาที ดังนี้

$$\omega_2 = 1000rpm = 1000\frac{rev}{min}\times\frac{min}{60s}\times 2\pi\frac{rad}{rev} = 104.72\, rad/s$$

จากสมการที่ (2.43(ก)) จะได้

$$\omega_3 = \frac{\omega_2}{\cos\beta} = \frac{104.72}{\cos 20^o} = 111.44\, rad/s \text{ หรือ } 1064.18 \text{ รอบ/นาที}$$

จากสมการที่ (2.43(ข)) จะได้

$$\omega_3 = \omega_2\cos\beta = 104.72\cos 20^o = 98.40\, rad/s \text{ หรือ } 939.65 \text{ รอบ/นาที}$$

ตำแหน่งที่เกิดความเร่งเชิงมุมสูงสุดหาได้จากสมการที่ (2.48) [11]

$$\cos 2\theta_2 = \frac{2\sin^2\beta}{2-\sin^2\beta} = \frac{2\sin^2 20^o}{2-\sin^2 20^o} = 0.124$$

$$2\theta_2 = 82.88 \text{ องศา และ } 277.12 \text{ องศา}$$

ดังนั้น $\theta_2 = 41.438, 138.56$ องศา

แทนค่าในสมการที่ (2.46) เพื่อหาความเร่งเชิงมุมสูงสุดของเพลาตาม

---

[11] ถ้าหาค่า θ_2 จากสมการที่ (2.47) ด้วยวิธีเชิงตัวเลขจะได้ คำตอบคือ 41.46 องศา และ 318.54 องศา ซึ่งใกล้เคียงกับผลเฉลยโดยประมาณที่หาจากสมการที่ (2.46)

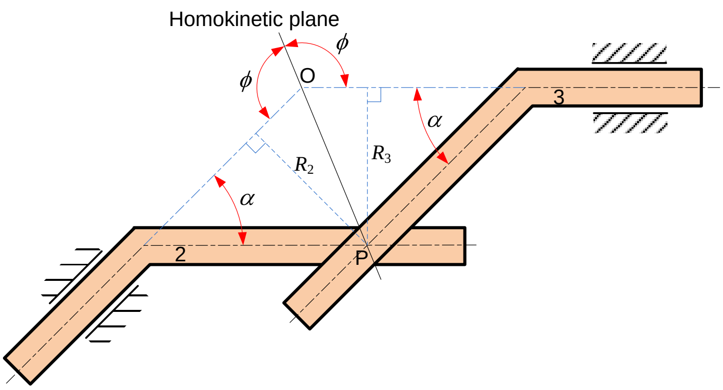
$$(\alpha_3)_{\max} = -\frac{(104.72)^2 \cos 20^o \sin 82.88^o \sin^2 20^o}{\left(1-\cos^2 41.44^o \sin^2 20^o\right)^2} = -1369.43\, rad/s^2$$

ความเร่งเชิงมุมนี้มีทิศตรงข้ามกับความเร็ว ซึ่งหมายความว่าเพลาตามจะมีความหน่วงมากที่สุด เมื่อ $\theta_2 = 41.44$ องศา หรือ $180+41.44$ องศา แต่จะมีทิศทางเดียวกับความเร็วเมื่อ $\theta_2 = 138.56$ องศา หรือ $180+138.56$ องศา

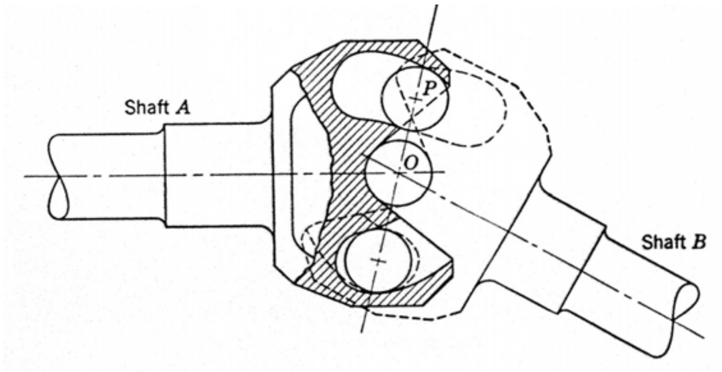
2.25 ข้อต่อสากลความเร็วคงที่

ข้อต่อสากลความเร็วคงที่ (constant-velocity universal joint) คือข้อต่อสากลที่สามารถส่งทอดการหมุนซึ่งมีอัตราส่วนความเร็วคงที่ได้โดยไม่ต้องมีเพลากลาง ข้อต่อสากลความเร็วคงที่ซึ่งมีลักษณะง่ายที่สุดแสดงอยู่ในรูปที่ 2.89 จากรูปแนวแกนของเพลา 2 กับ 3 ตัดกันที่จุด O แกนของเพลาทั้งสองอยู่บนระนาบเดียวกัน ซึ่งแทนด้วยแผ่นกระดาษนี้ สำหรับเฟสที่แสดงในรูปจุด P อยู่บนระนาบของกระดาษด้วย ถ้ากำหนดระนาบที่ตั้งฉากกับกระดาษแผ่นนี้ และระนาบผ่านจุด P และแบ่งครึ่งมุมระหว่างแกนของเพลา แล้วเมื่อเพลา 2 กับ 3 หมุนไปจุดสัมผัส P จะเคลื่อนที่อยู่บนระนาบนี้เท่านั้น และเนื่องจากระยะจากจุด P ถึงแกนเพลาทั้งสองเท่ากันเสมอไม่ว่าจุด P จะอยู่ที่ใดบนระนาบ ($R_2 = R_4$) ดังนั้นเพลาขับและพลาตามนี้จะหมุนด้วยความเร็วเท่ากันตลอดเวลา ระนาบที่จุด P เคลื่อนที่ มีชื่อเรียกว่า ระนาบโฮโมคิเนติก (homokinetic plane)

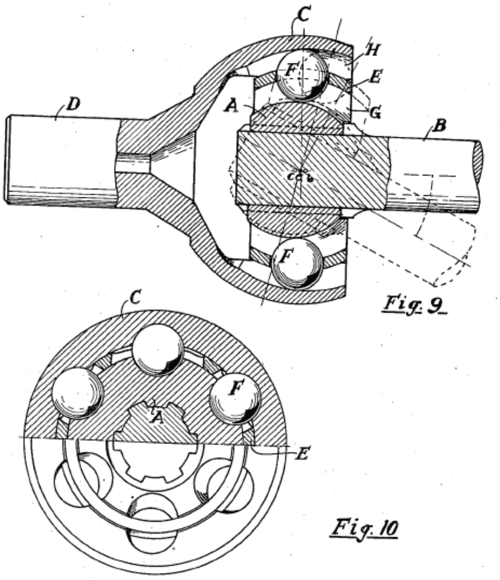
นอกจากข้อต่อสากลความเร็วคงที่แบบที่กล่าวไปแล้ว ยังมีข้อต่อชนิดนี้ในลักษณะอื่น ๆ อีก ได้แก่ Bendix-Weiss joint (รูปที่ 2.90), Rzeppa (รูปที่ 2.91) และ Tracta joint (รูปที่ 2.92) เป็นต้น



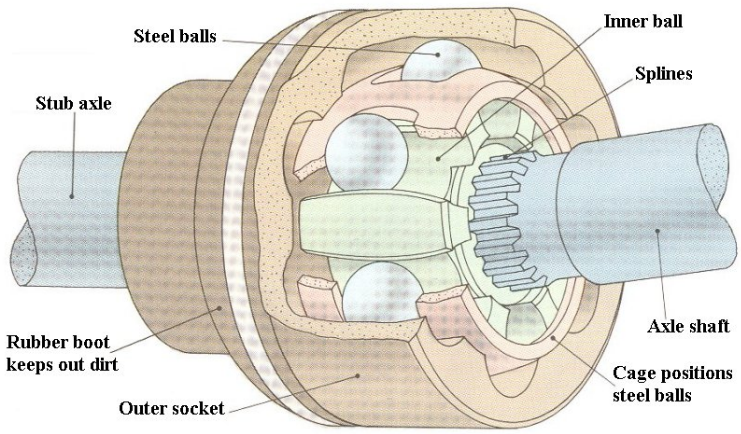
รูปที่ 2.89 ตัวอย่างข้อต่อสากลแบบความเร็วคงที่



รูปที่ 2.90 ข้อต่อสากลความเร็วคงที่ชนิด Bendix-Weiss [6]

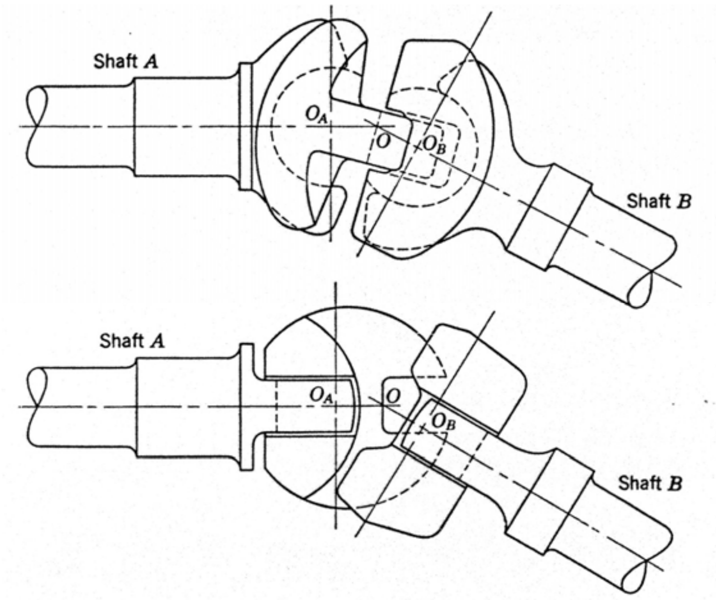


(ก) ภาพตัดของข้อต่อ [7]



(ข) ภาพสามมิติของข้อต่อ [8]

รูปที่ 2.91 ข้อต่อสากลความเร็วคงที่ ซึ่งประดิษฐ์โดย Alfred H. Rzeppa ในปี 1934



รูปที่ 2.92 ข้อต่อสากลความเร็วคงที่ชนิด tracta [6]

เอกสารอ้างอิง

[1] Norton, R.L. Design of Machinery, 2nd eds. McGraw-Hill, 2002, p. 81.

[2] Myszka, D.H. *Machines and Mechanisms : Applied Kinematic Analysis*. Prentice Hall, 2002. p. 153.

[3] Faires, V.M. Kinematics. McGraw-Hill, 1959, p.140.

[4] Billings, J.H. *Applied Kinematics*. D. Van Nostrand, 1958, p.65.

[5] http://www.motorera.com/dictionary/pics/d/driveshaft.gif

[6] Mabie, H.H, and Reinholtz, C.F. Mechanisms and dynamics of machinery 4th eds., John Wiley & Sons, 1987, p.48.

[7] US Patent No. 2046584

[8] www.motorera.com/dictionary/pics/c/cvjoint.jpg