Technische Informatik 2

Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung

Teil 1 – Einführung

Prof. Dr. Ivo Wolf

Institut für Medizinische Informatik

hochschule mannheim

Überblick

Signalverarbeitung

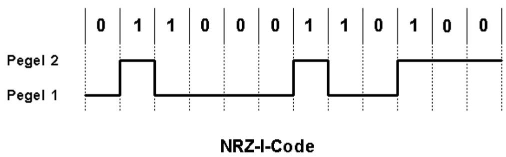
1. Signale
2. Schwingungen
3. Abtastung
4. Systeme, LTI-Systeme, Impulsantwort und Faltung
5. Up- und Downsampling
6. Fouriertransformation
7. Faltungstheorem
8. Signalerkennung

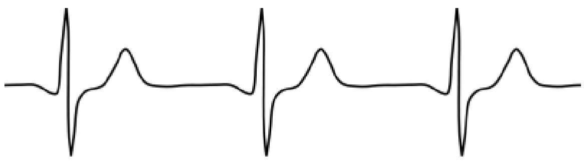
Signalverarbeitung

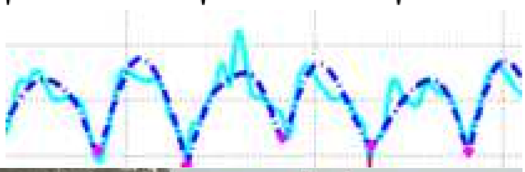
1. Signale

Beispiele für Signale

- Akustische Signale:
  Sprache, Musik
- Elektrische Signale
- Datenströme:
  USB, Ethernet, WLAN, Bluetooth
- Abstandsmessungen mit Ultraschall, Radar, Laser
- Messungen an Maschinen (Druck, Temperatur, Drehzahl, …)
- Puls, EKG, EEG
- Sensordaten von Smartphones: Beschleunigungssensor, Lagesensor (Gyroskop), Magnetometer, …
- Kursverläufe von Aktien
- Bilder, Videos



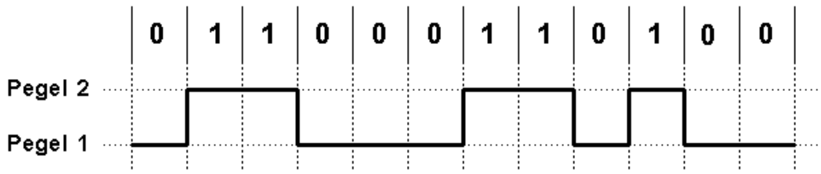




Anwendungen

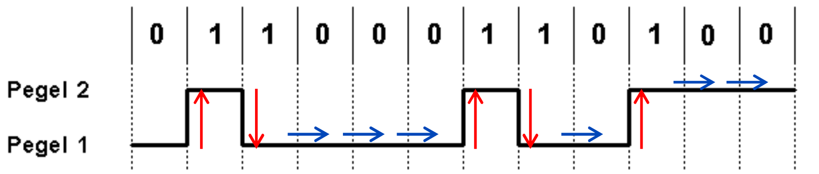
- Übertragung von Daten

RS-232



NRZ-L-Code

USB, Ethernet,
CD, Festplatten

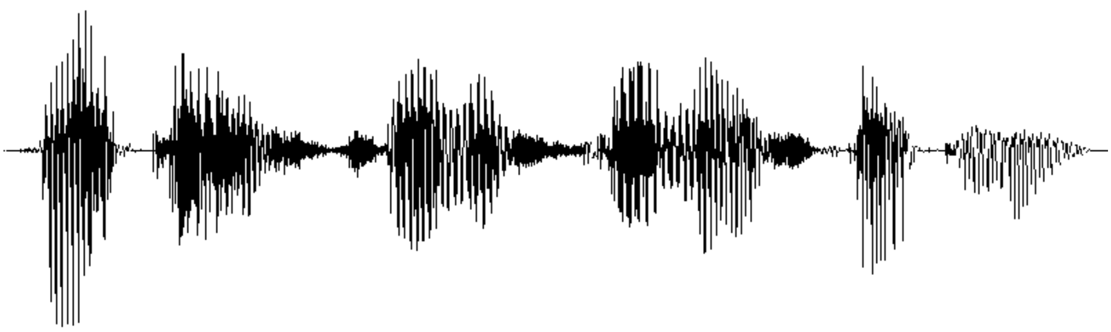


NRZ-I-Code

NRZ-I: Pegelwechsel ist 1,
kein Pegelwechsel ist 0

Anwendungen

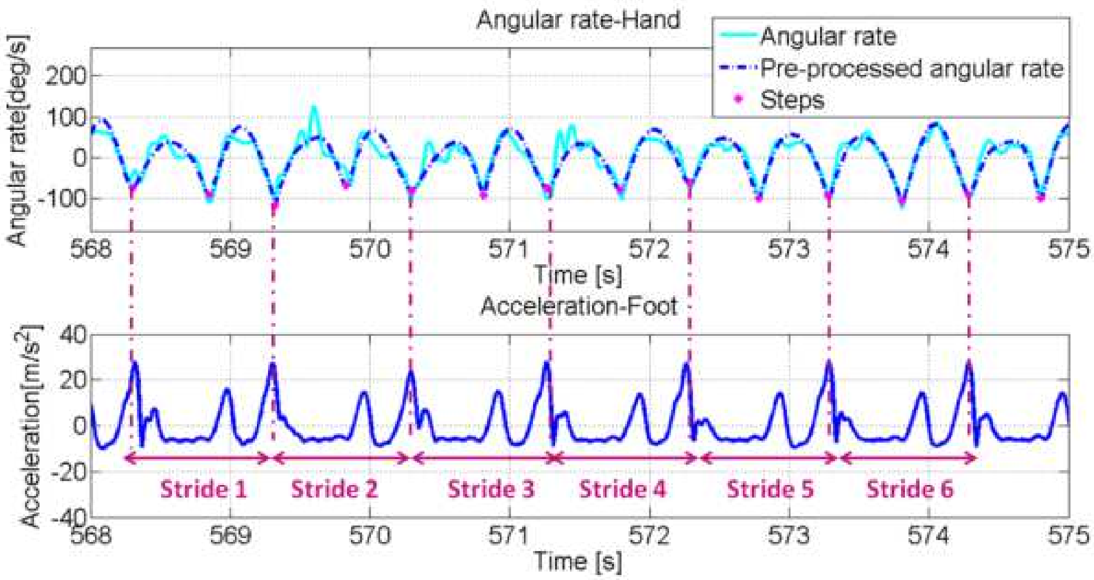
- Akustische Signale: Sprache, Musik



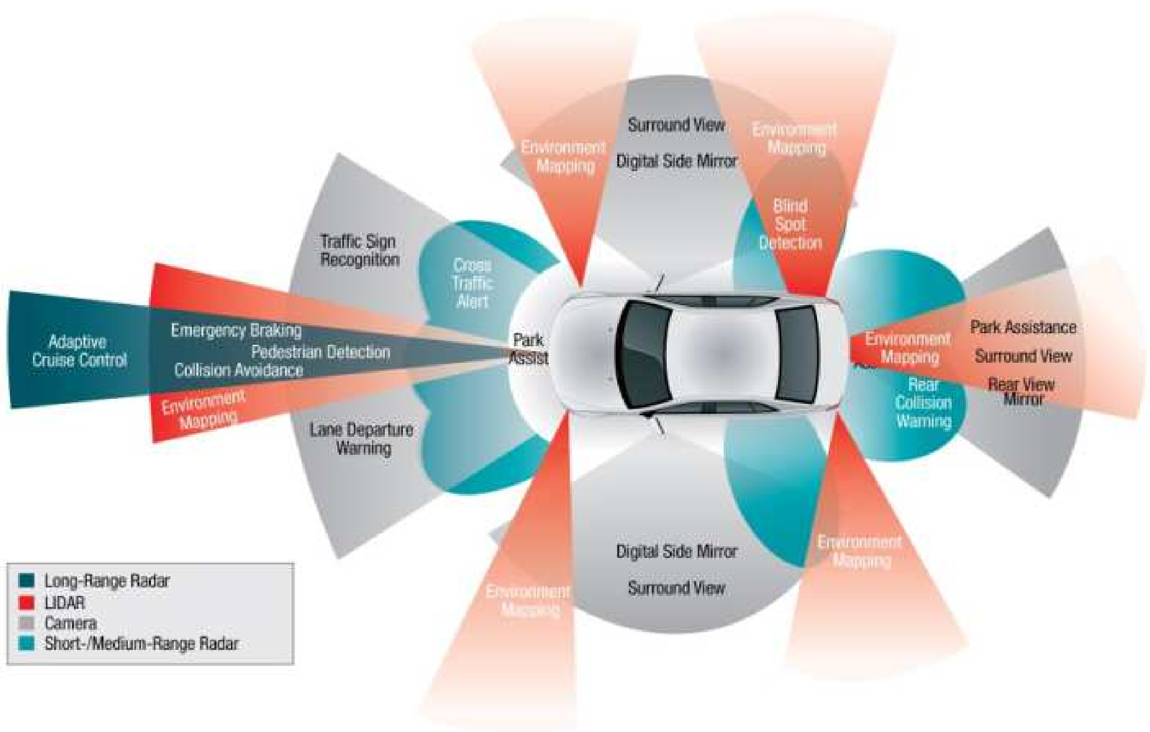
  - Bässe verstärken
  - Komprimieren (verlustfrei oder mit Verlust wie bei mp3)
  - Sprache erkennen
  - Stimme erkennen
  - Sprache, Musik synthetisieren

Anwendungen

- Signale von Beschleunigungssensoren, Gyroskopen: Schritte erkennen, Art der Bewegung erkennen (Laufen, Radfahren, Treppensteigen, usw.)



Anwendungen: Fahrerassistenzsysteme



Definition Signal

Signal:

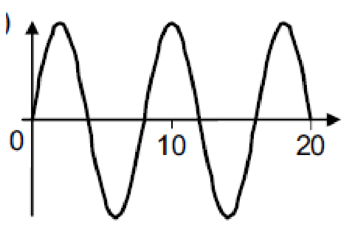
- Mathematische Funktion von mindestens einer unabhängigen Variablen

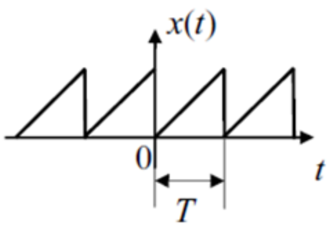
Bemerkungen:

- Oft ist die unabhängige Variable die Zeit: $x(t)$
  - Töne, EKG, usw.
- Signale mit mehreren unabhängigen Variablen:
  - Bilder: $\mathrm{helligkeit}(x, y)$
  - Videos: $\mathrm{helligkeit}(x, y, t)$
  - Bildvolumen in der Medizin: $\mathrm{helligkeit}(x, y, z)$

Einteilung von Signalen: periodisch

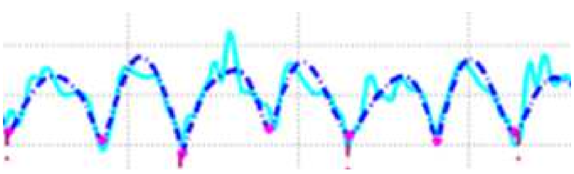
- Periodische Signale wiederholen sich nach einer bestimmten Zeit, der Periodendauer T

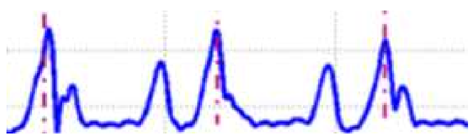




$$x(t + T) = x(t)$$

- Viele Signale sind annähernd periodisch

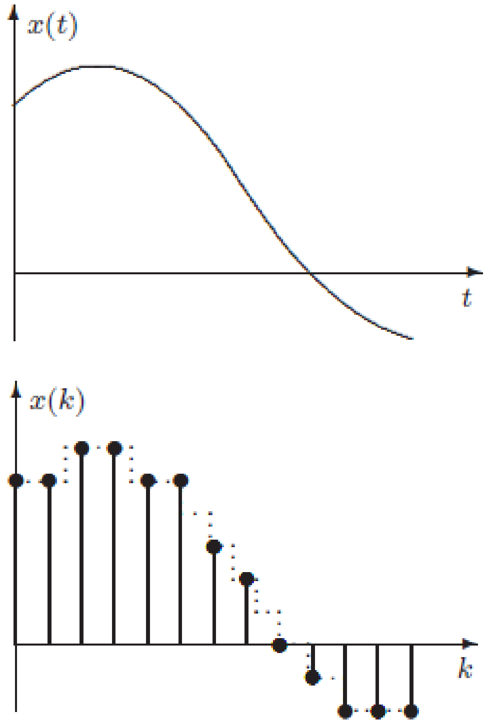




[Abb. Oben Werner 2008, S 5]

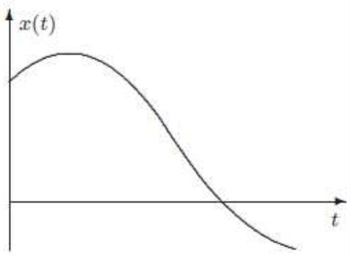
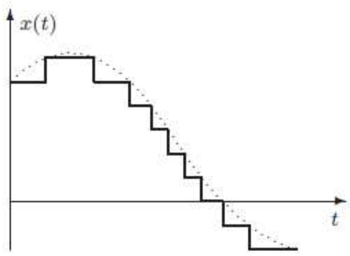
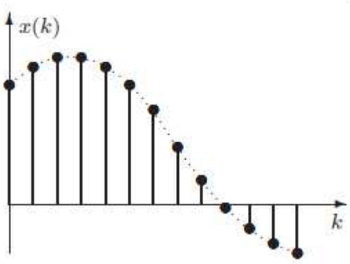
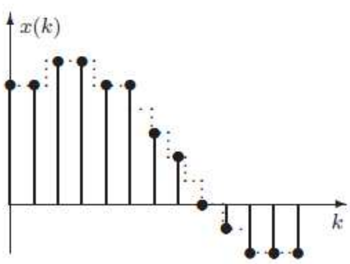
Einteilung von Signalen: kontinuierlich und diskret

- Signale können:
  - kontinuierlich oder
  - diskret sein
- sowohl bezüglich
  - der Zeit (unabhängige Variable),
  - als auch der Werte



[Hoffmann 1, S 5]

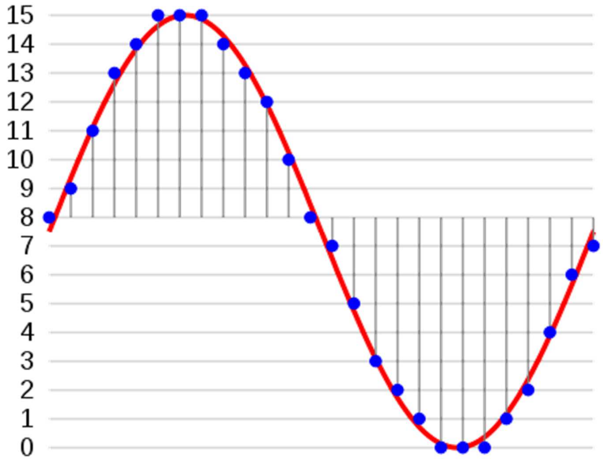
Einteilung von Signalen: kontinuierlich und diskret

	$\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ kontinuierliche Funktionswerte	$\mathcal{X} \subseteq \mathbb{Z}$ diskrete Funktionswerte
$\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$ kontinu-ierliche Zeit		
$\mathcal{T} \subseteq \mathbb{Z}$ diskrete Zeit		

[Hoffmann 1, S 5]

Puls-Code-Modulation (PCM)

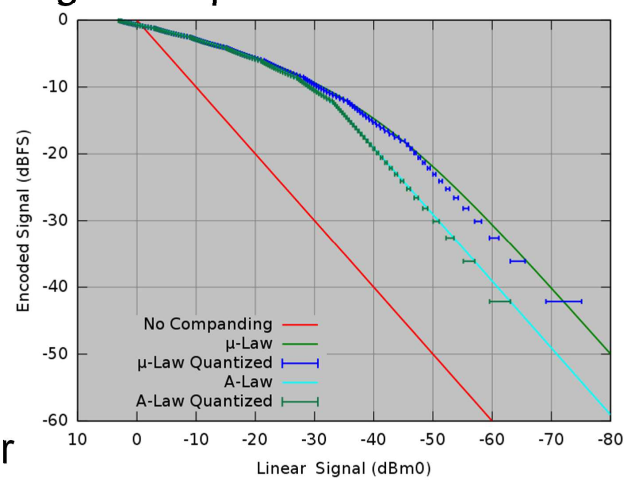
- PCM: Amplitude des analogen Signals in regelmäßigen Zeitintervallen gemessen (Abtastung) *und* die Werte diskretisiert (Quantisierung) und digital kodiert
- LPCM: Lineare Quantisierung, d.h. Quantisierungsstufen gleich groß
- Beispiel rechts: LPCM mit 4 bit
- Nicht selten wird zu LPCM einfach PCM gesagt, obwohl PCM ein allgemeinerer Begriff ist
- Differential pulse-code modulation (DPCM): Kodierung der Differenz zum vorherigen oder einem vorhergesagten Wert



Nicht-lineares PCM

Nicht lineares PCM z.B. in der Telefonie:

- ITU-T Standard G.711: logarithmische Quantisierung (mit 2 Varianten: µ-law und A-law)
  – große Signalauslenkungen gröber quantisiert als kleine
  → höherer Dynamik-Umfang bzw.
  → besseres Signal-Rausch-Verhältnis bei gleicher Auflösung (Datenmenge)

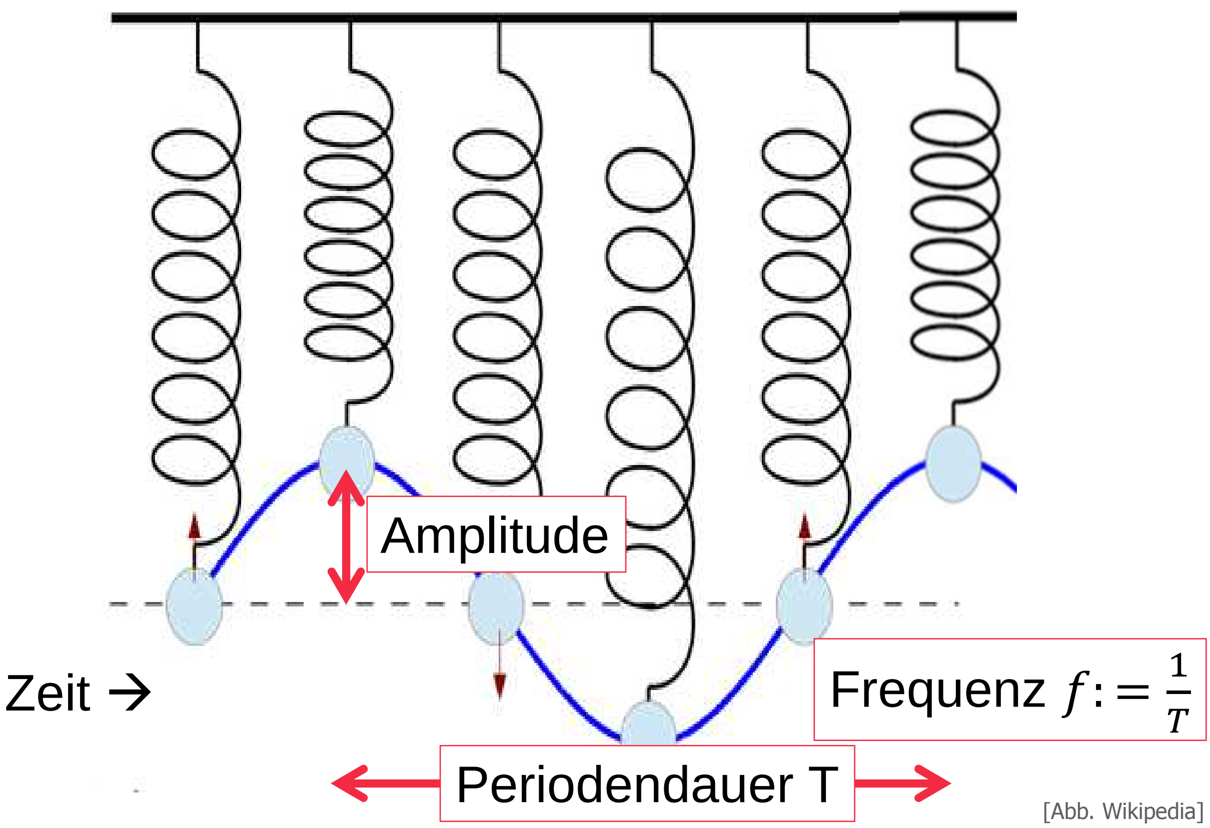


- Adaptive DPCM (ADPCM):
  – DPCM mit Skalierung der Quantisierungsstufen in Abhängigkeit vom Signalverlauf

Signalverarbeitung

2. Schwingungen

Periodische Schwingung



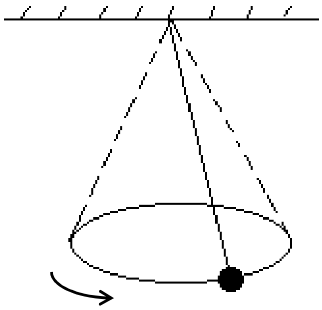
[Abb. Wikipedia]

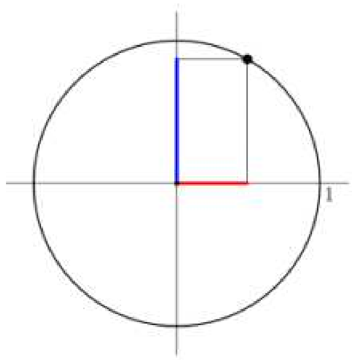
Periodische Schwingung

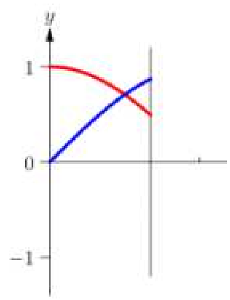
- Periodendauer T, Einheit: s (Sekunde)
- Frequenz $f := \frac{1}{T}$, Einheit: $\frac{1}{s} = s^{-1} =: Hz$ (Hertz)
  (statt f wird auch ν („nü“) verwendet)
- Kreisfrequenz $\omega := 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
  (ω ist ein kleines „Omega“)
  Einheit: $\frac{1}{s} = s^{-1}$ (aber *nicht* Hertz genannt!)

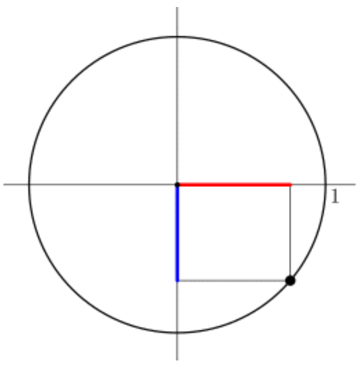
Spezialfall: Harmonische Schwingung

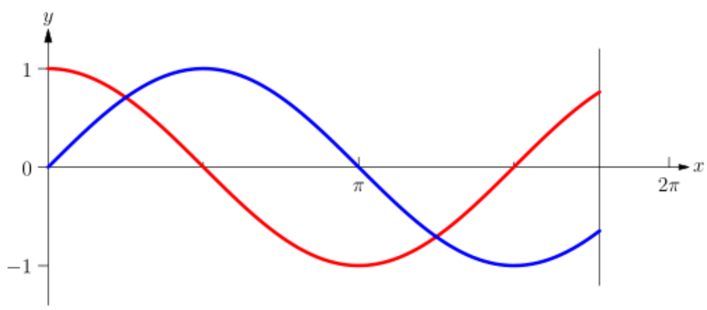
- Kreispendel





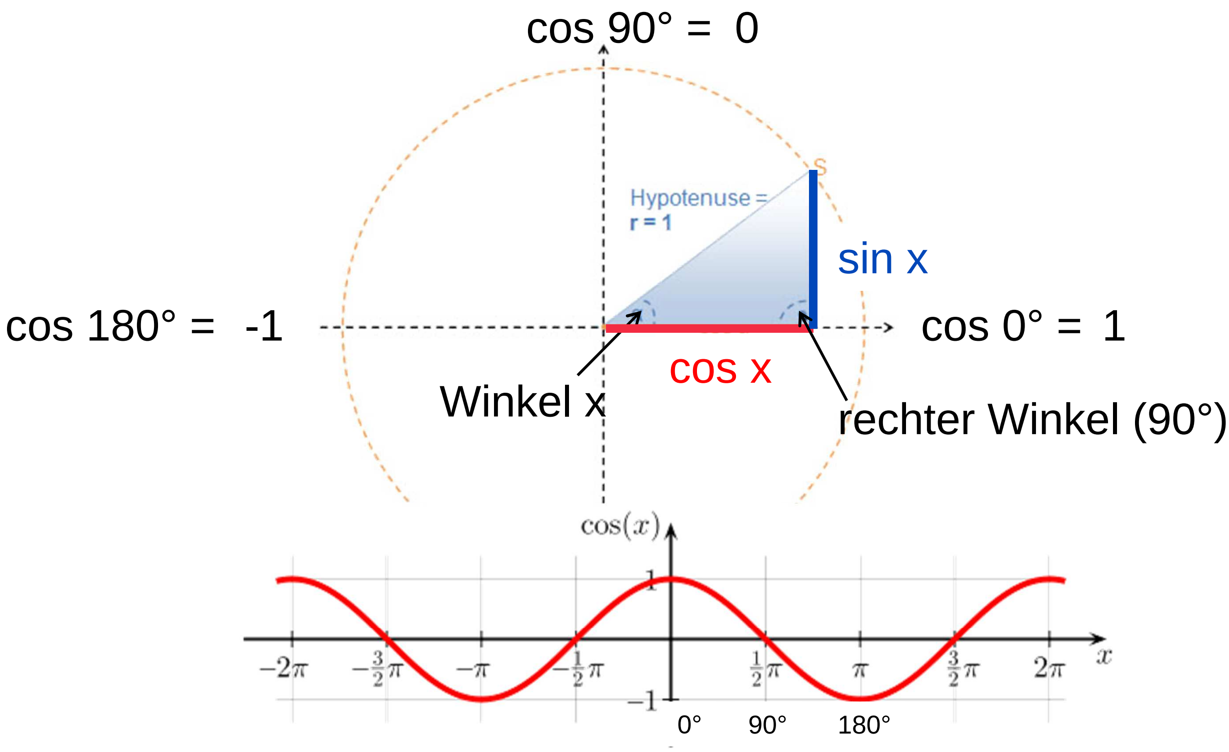






[Animation: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Mfnf-sincos.gif]

Kosinus am Einheitskreis (Radius=1)



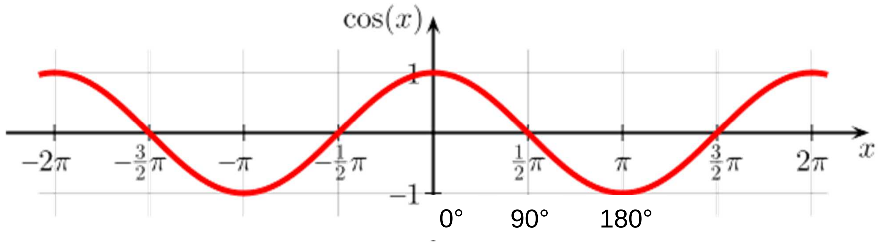
[Abb. www.mathematik-wissen.de (oben), Wikipedia (unten)]

Winkelmaß „Bogenmaß“

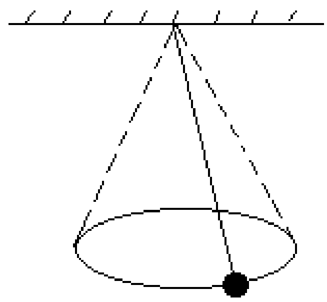
- Umfang Kreis mit Radius r:
  $$U = 2\pi r$$
  - bei Radius $r = 1$: $U = 2\pi$
- Bogenmaß (Radiant, rad):
  Bogenlänge eines Kreis-Stücks mit Radius $r = 1$
  - 360° entspricht dem kompletten Kreisumfang, also 2π
  - 180° dem halben Kreisumfang, also $\frac{2\pi}{2} = \pi$
  - 90° einem Viertel des Kreisumfangs, also $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
  - usw.

  Also: Winkel α in Grad ist im Bogenmaß $x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$
- Das Bogenmaß ist ein „natürlicheres“ Winkelmaß als Grad!
  - In der Mathematik und Programmiersprachen der Normalfall!

Periodendauer des sin/cos



- Periodendauer des Sinus/Kosinus ist 2π
- Daher der Begriff Kreisfrequenz $\omega := 2\pi f$:
  – Überstrichener Winkel (=Bogenlänge) pro Zeiteinheit (Sekunde)
  – Beispiel:
    • bei Kreisfrequenz 2π pro Sekunde überstreicht das Pendel einen kompletten Kreis in einer Sekunde (entsprechend $f = 1\ Hz$)



Harmonische Schwingung – Formel

Formel der harmonischen Schwingung
(mit im Bogenmaß definierter Kosinus-Funktion):

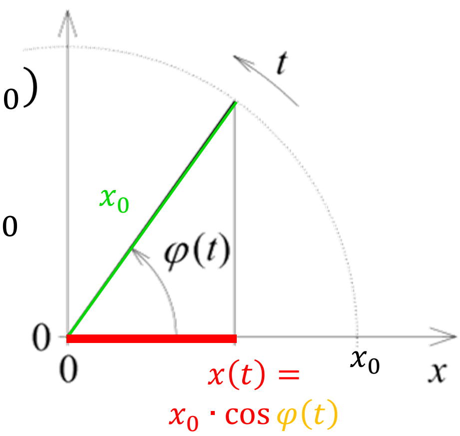
$$x(t) = x_0 \cos(2\pi f \cdot t + \varphi_0)$$

mit der Frequenz $f := \frac{1}{T}$

oder:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

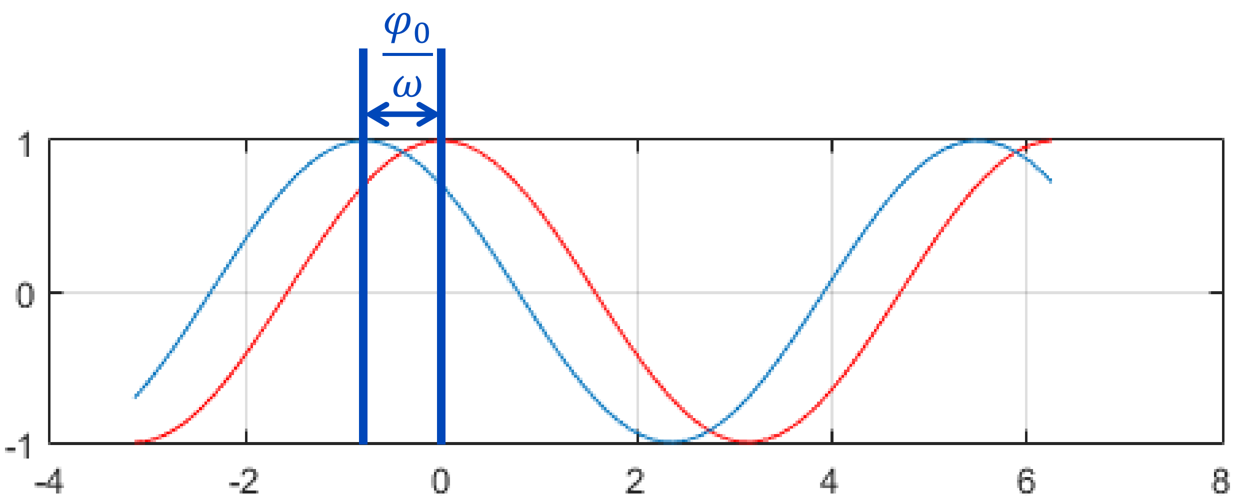
mit der Kreisfrequenz $\omega := 2\pi f$.



- Der aktuelle Winkel $\varphi(t) := \omega \cdot t + \varphi_0$ wird Phase oder Phasenwinkel genannt
- Der Winkel φ_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ wird Nullphasenwinkel genannt.

Nullphasenwinkel

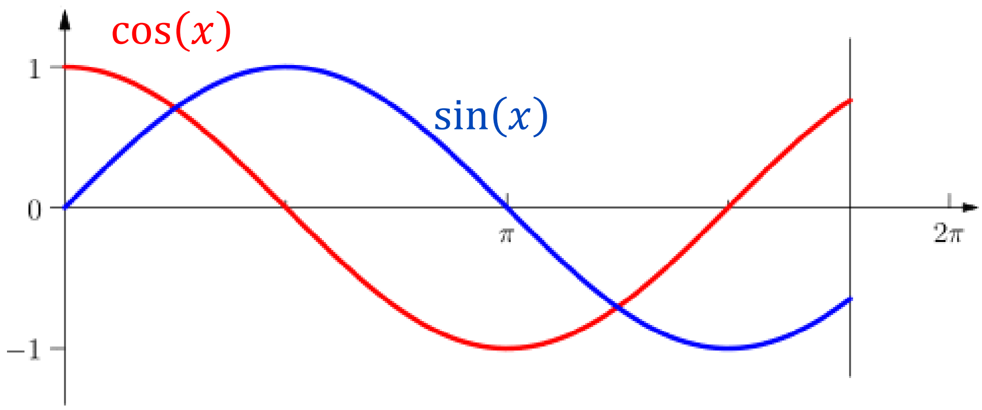
- Nullphasenwinkel φ_0 für den blau dargestellte Fall (im roten Fall ist der Nullphasenwinkel 0)



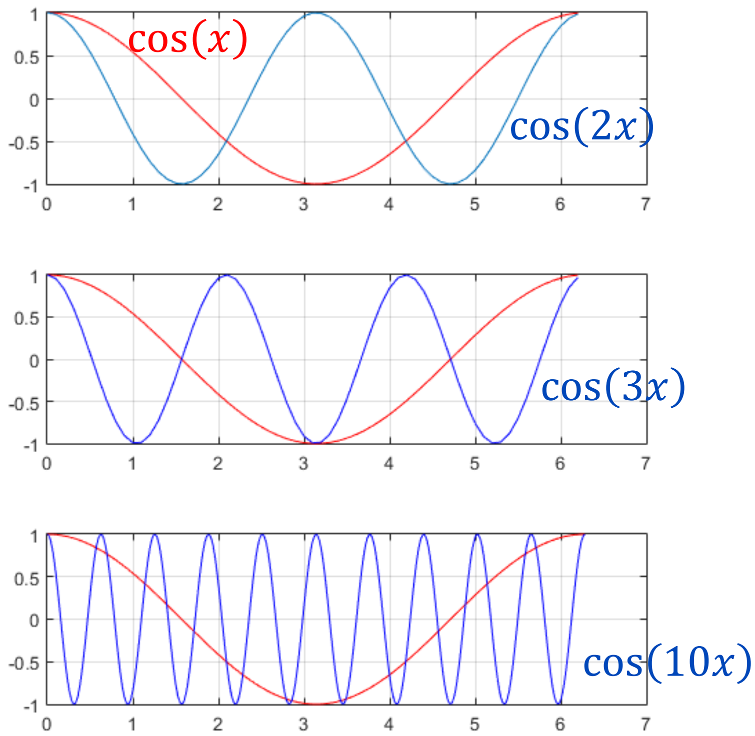
- Ein positiver Wert von φ_0 verschiebt die Kurve um $\frac{\varphi_0}{\omega}$ nach links!

Phasenverschiebung zwischen Sinus und Kosinus

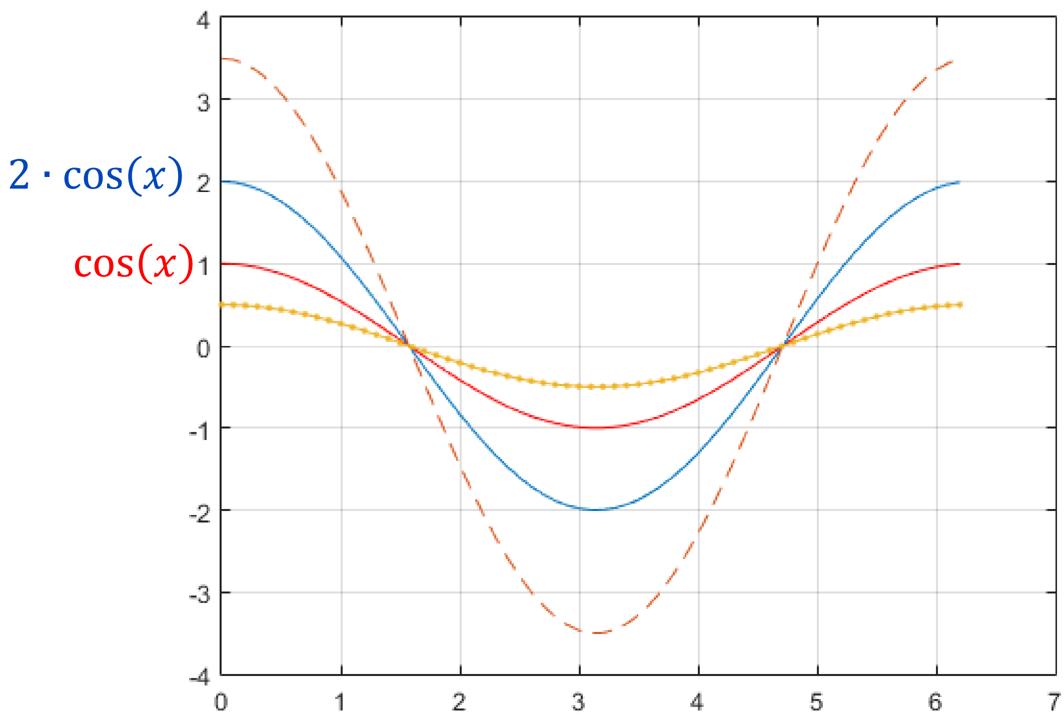
- Die Phasenverschiebung des Sinus zum Kosinus beträgt
$$-\frac{\pi}{2}$$
- Es ist also: $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$



Höhere (Kreis-)Frequenzen



Verschiedene Amplituden



Berechnung von sin oder cos?

- CPUs haben keine Hardware-Implementierung von sin oder cos
  - Sie haben also keinen Maschinensprache-Befehl, der sin oder cos direkt berechnet
- Die Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) gibt es als Maschinensprache-Befehle
  - Wie lässt sich damit sin oder cos berechnen?

Signalverarbeitung

Einschub 1: Reihen

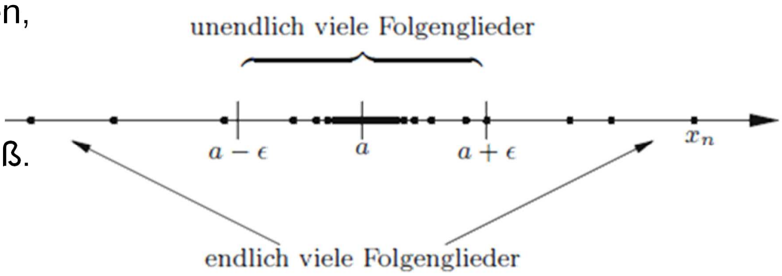
Folgen, Konvergenz

Definition „Folge“:

- Eine Folge x_n ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ (natürliche Zahlen nach $\mathbb{R}$ (reelle Zahlen) oder $\mathbb{C}$ (komplexe Zahlen): jedem Index $n \in \mathbb{N}$ wird eine reelle oder komplexe Zahl x_n zugeordnet.
  - Beispiel $x_n = n^2$: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$, usw.

Definition „Konvergenz“, „Grenzwert“:

- Eine Folge x_n heißt konvergent mit Grenzwert a, wenn es für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\forall\, n \geq N$: $|x_n - a| < \varepsilon$.
  - Also: ab N liegen alle Folgenglieder „ganz nahe“ (näher als ε) bei a.
  - Da wir ε wählen können, kommen sie a sogar beliebig nahe.
  - Insbesondere werden sie nicht unendlich groß.



- Schreibweise: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
- Beispiel $x_n := \frac{1}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

[Abb. Plaue S. 167]

Reihe

Definition „Reihe“ (auch: „unendliche Reihe“):

- Sei a_k eine Folge.

  Die Folge s_n der sog. Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

  wird Reihe genannt.
  - Falls die Reihe (also die Folge der Partialsummen) konvergiert, so wird ihr Grenzwert als Wert der Reihe bezeichnet:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Potenzreihen, Polynome

Definition „Potenzreihe“:

- Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

heißt Potenzreihe um (den Mittelpunkt oder Entwicklungspunkt) c.

  – Die Zahlen a_k werden Koeffizienten genannt.

- Die Partialsummen sind sog. Polynome.
  – Die größte Zahl n mit $a_n \neq 0$ heißt Grad des Polynoms.
  – Polynom vom Grad n für Entwicklungspunkt $c = 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Reihendarstellung von Sinus und Kosinus

- Sinus:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots - \ldots + \ldots$$

- Kosinus:

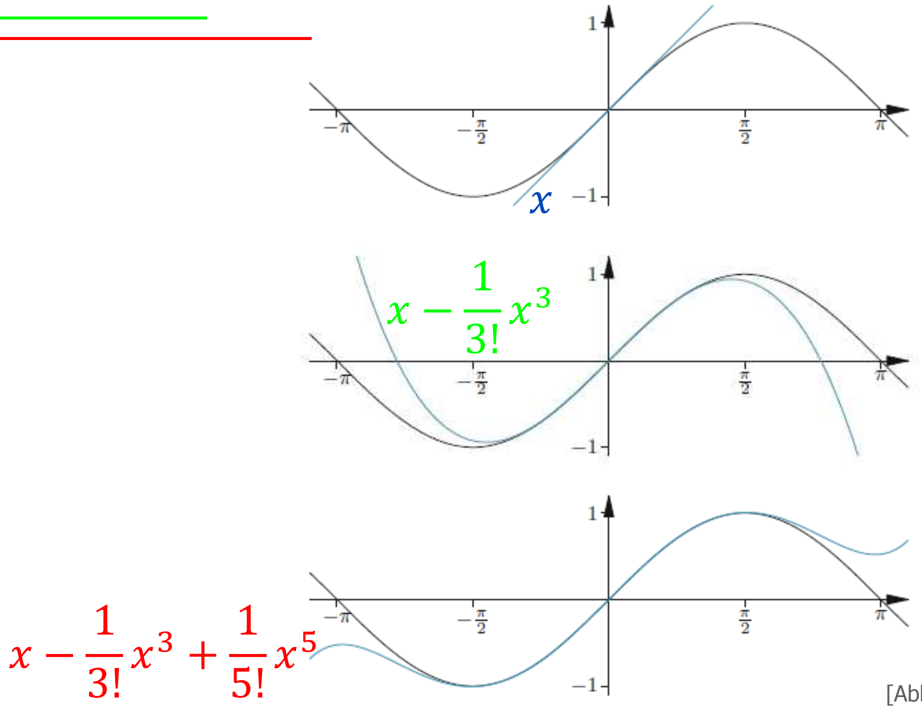
$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots - \ldots + \ldots$$

➔ Beim Sinus nur die ungeraden,
beim Kosinus nur die geraden Exponenten

Näherung von sin(x) durch seine Potenzreihe

- $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots$



[Abb. Plaue S. 223]

Abschneidefehler

- Verfahrensfehler / Diskretisierungsfehler / Abschneidefehler (engl. truncation error):
  - Viele Operationen sind numerisch nicht exakt realisierbar, sondern werden nach endlich vielen Schritten abgebrochen, z.B.:

    unendliche Reihen, Grenzwerte, Integrale, …
  - Verfahrensfehler würden auch auftreten, wenn Computer beliebig genau rechnen könnten
- Rundungsfehler (engl. roundoff error):
  - Zahlen können im Computer nur mit begrenzter Genauigkeit dargestellt werden

Reihendarstellung der Exponentialfunktion exp(x)

- Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

- Mit $i^2 = -1$:

$$\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (ix)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (ix)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (ix)^{2k+1}$$

Aufteilung in gerade und ungerade Exponenten

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} i(-1)^k x^{2k+1}$$

$$= \cos(x) + i \sin(x)$$

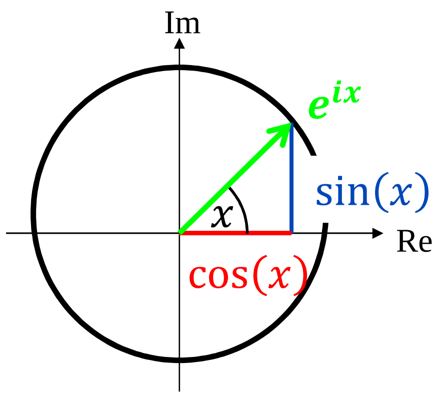
[s. z.B. Plaue S. 252]

Euler-Formel

- $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$
- Also für $x \in \mathbb{R}$:

  $\cos(x) = Re(e^{ix})$ (Realteil von e^{ix})

  $\sin(x) = Im(e^{ix})$ (Imaginärteil von e^{ix})



- Betrag von e^{ix}:

$$\left|e^{ix}\right| = 1 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2$$

Natürlicher Logarithmus

- Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion heißt natürlicher Logarithmus:

$$\ln(e^x) = x \text{ und } e^{\ln x} = x$$

  – Die Berechnung erfolgt über eine Potenzreihe.

- Rechenregeln:
  - $e^{x+y} = e^x e^y$
  - $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
    – da $e^{\ln(xy)} = xy = e^{\ln x} e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$
  - Also insbesondere:

$$\ln(x^2) = \ln(x \cdot x) = \ln x + \ln x = 2 \cdot \ln x$$

  - Allgemein sollte wohl gelten: $\ln(x^y) = y \ln x$
  - Daher: $x^y := e^{y \ln x}$, für beliebiges $y \in \mathbb{R}$ (falls $x \geq 0$).
    – Also auch z.B. $x^{0{,}123}$
    – Programmiersprachen: `pow(double x, double y)` berechnet `exp(y*ln(x))`
    ➔ `exp` und `ln` werden über Reihen berechnet!
    ➔ `pow(x,2.0)` ist langsam und ungenau! Besser: `x*x` …

[zu Potenzreihe von ln(x) für beliebiges x siehe z.B. Forster „Analysis 1", S. 181f]

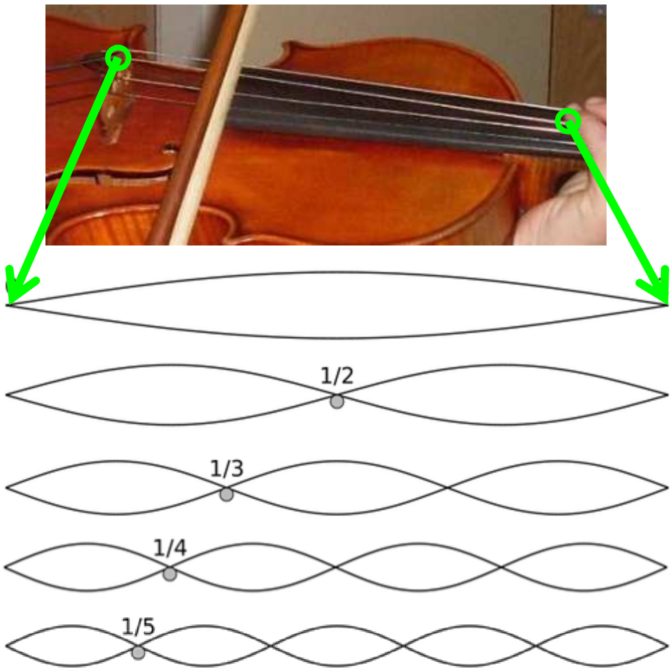
Signalverarbeitung

Ende Einschub 1: Reihen

- zurück zu Schwingungen

Obertöne, Harmonische

- Schwingungen einer Saite eines Musikinstruments



Grundton =1. Harmonische		$f_0 = 440\ \mathrm{Hz}$
1. Oberton =2. Harmonische		$f = 2 \cdot f_0$
2. Oberton		$f = 3 \cdot f_0$
3. Oberton		$f = 4 \cdot f_0$
4. Oberton		$f = 5 \cdot f_0$

[Abb. nach de.wikipedia.org/wiki/Datei:Harmonic_partials_on_strings.svg]

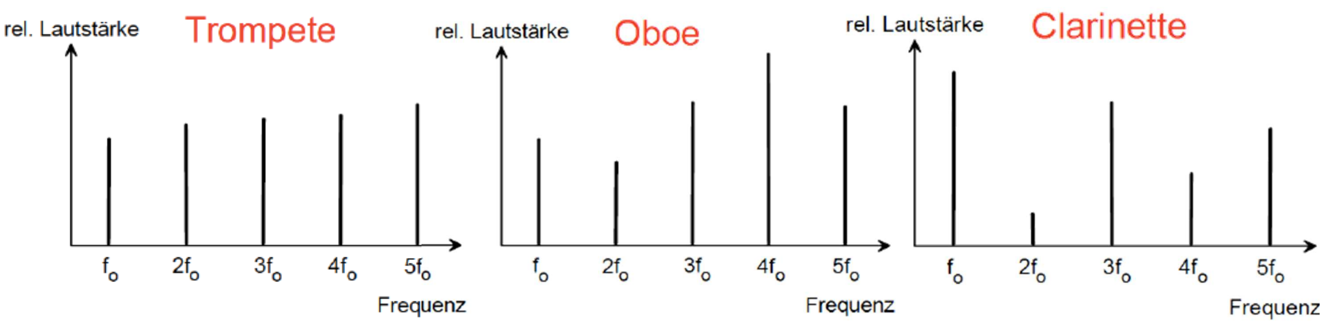
Obertonreihe

- Saiten schwingen gleichzeitig in den verschiedenen Harmonischen k mit unterschiedlicher Amplitude a_k:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2\pi \cdot k f_0 \cdot t)$$

➔Mischung von Schwingungen („verschiedenen Tonhöhen“)

- Klangfarbe des Instruments ergibt sich aus der relativen Amplitude der Harmonischen

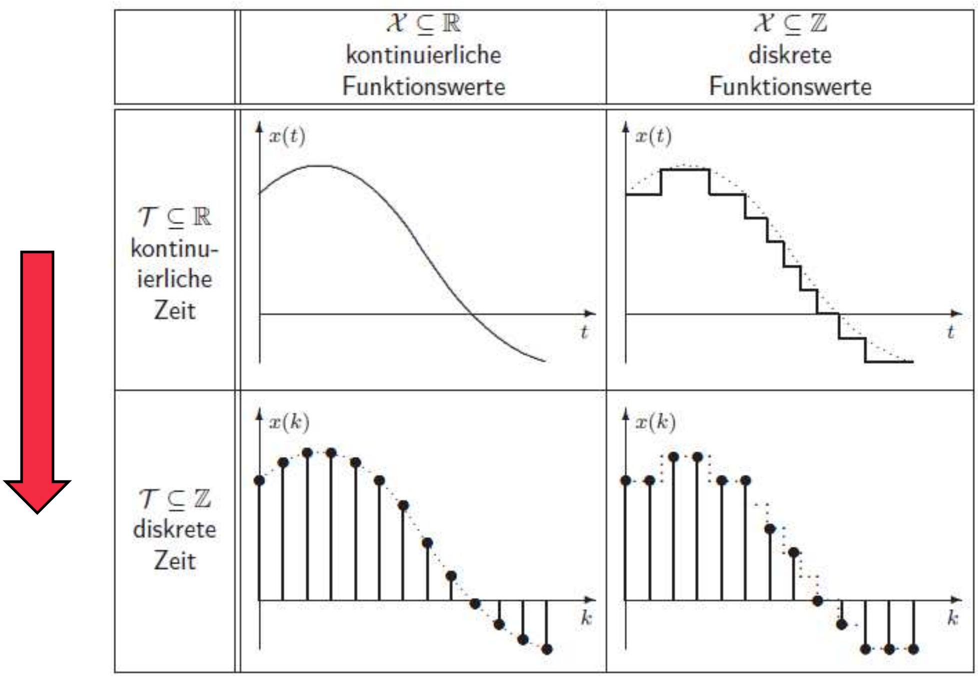


[Abb. nach Blankenbach Fourier_Trafo_kurz_Folien.pdf]

Signalverarbeitung

3. Abtastung

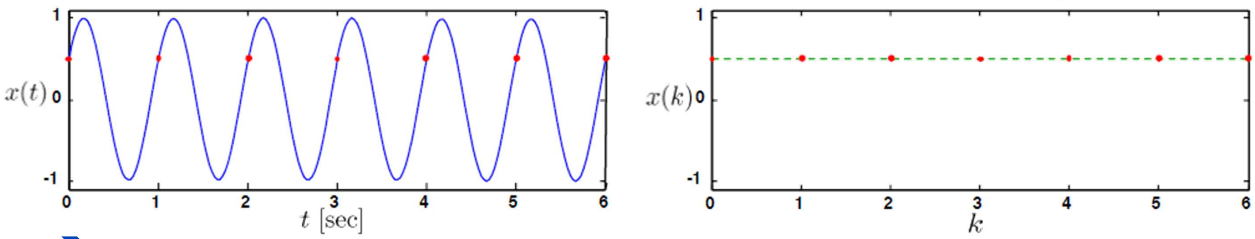
Abtastung: zeitliche Diskretisierung



[Hoffmann 1, S 5]

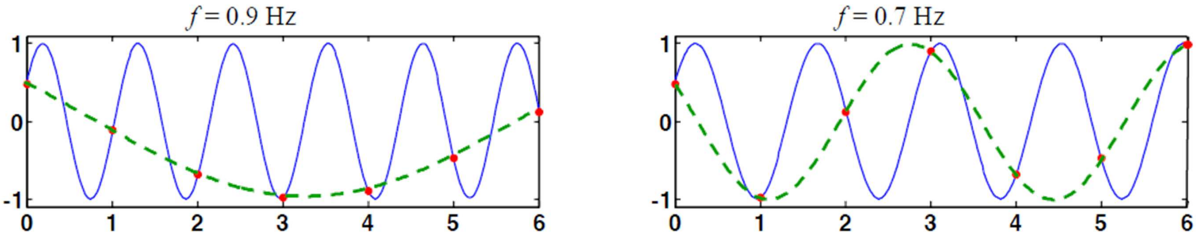
Abtastung

- Was passiert, wenn Signal der Frequenz $f = 1\ \mathrm{Hz}$ mit $f_a = 1\ \mathrm{Hz}$ abgetastet wird?



➔ Die Schwingung wird überhaupt nicht gemessen!

- Weitere Beispiele bei der gleichen Abtastung mit $f_a = 1\ \mathrm{Hz}$:

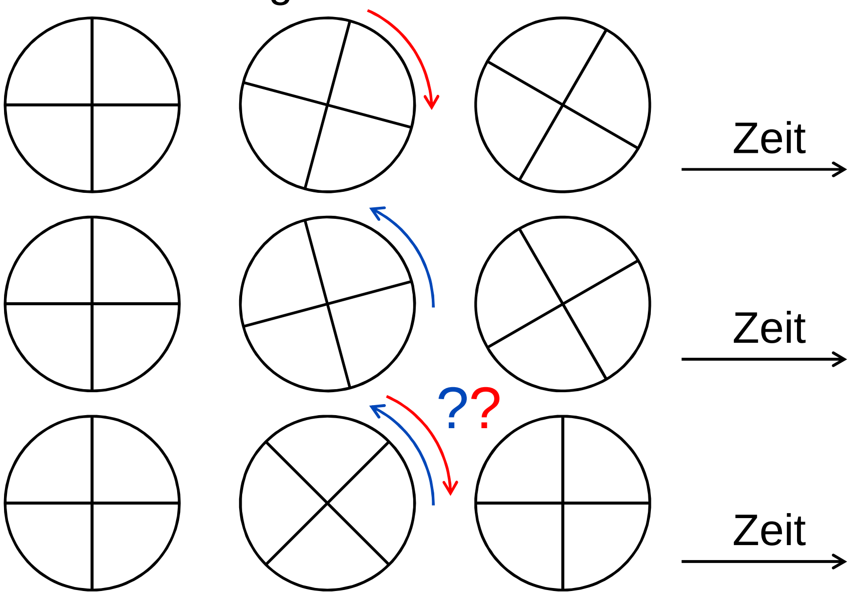


➔ Schwingungen mit anderen („falschen") Frequenzen!

[Abb. Nelles signalverarbeitung-skript.pdf]

Ein Rad dreht sich

- In welche Richtung drehen sich die Räder?



➔ 2x abtasten pro Zyklus ist zu wenig!
(Zyklus hier: Drehung um Segment zw. 2 Speichen)

Shannonsches Abtasttheorem

- Die Abtastfrequenz f_a muss größer sein als das Doppelte der höchsten im Signal vorkommenden Frequenz f_{max}:

$$f_a > 2 \cdot f_{max}$$

  - Ist die Abtastfrequenz f_a kleiner, kommt es zu „Aliasing“: Frequenzen $f > \frac{1}{2} f_a$ werden falsch als Frequenzen $f < \frac{1}{2} f_a$ wahrgenommen.
  - In der Praxis: $f_a = 5 \dots 10 \cdot f_{max}$

Bandbegrenzte Signale

Definition „bandbegrenztes Signal“:

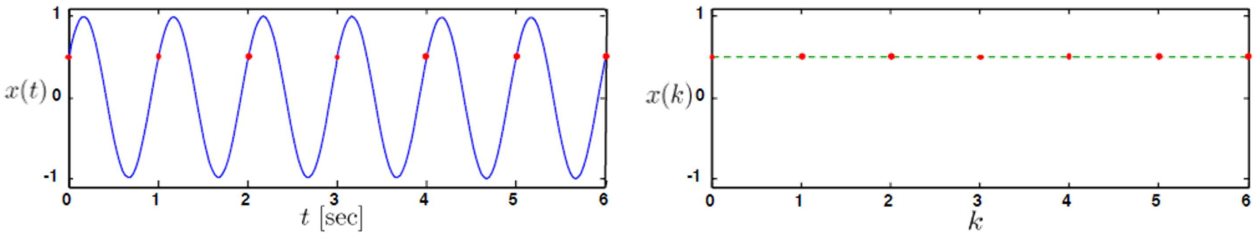
- Ein Signal heißt bandbegrenzt, wenn es keine Frequenzen oberhalb einer maximalen Frequenz f_{max} enthält.

Negative Frequenzen $-\omega$ (mit $\omega > 0$):

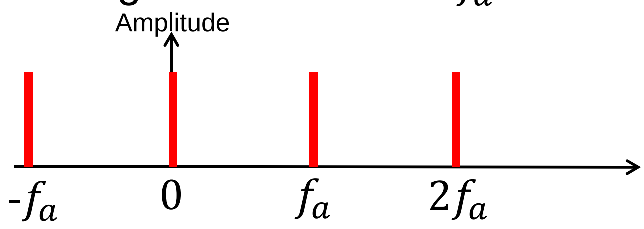
- Vorzeichen gibt Drehrichtung (z.B. des Rades) an.
- $\cos(-\omega t + \varphi_0)$ nicht unterscheidbar von $\cos(\omega t - \varphi_0)$
- $\sin(-\omega t + \varphi_0)$ nicht unterscheidbar von $\sin(\omega t - \varphi_0 + \pi)$
- Für Aussagen zur Bandbegrenzung ist daher immer der Betrag der Frequenz gemeint

Abtasttheorem und Aliasing

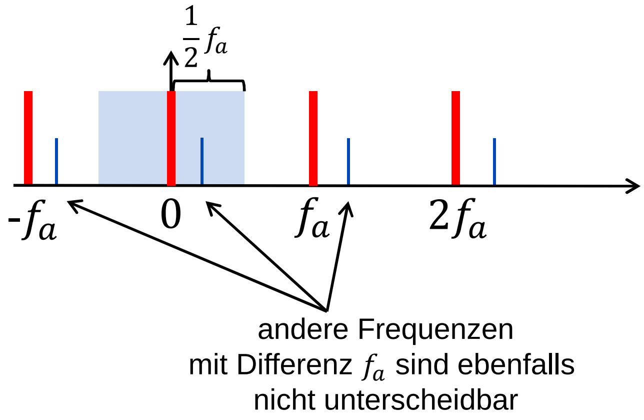
- Nochmals: Ist die Abtastfrequenz f_a gleich der Frequenz f des Signals, so ist das abgetastete Signal gleich einem Signal mit Frequenz $f = 0$.

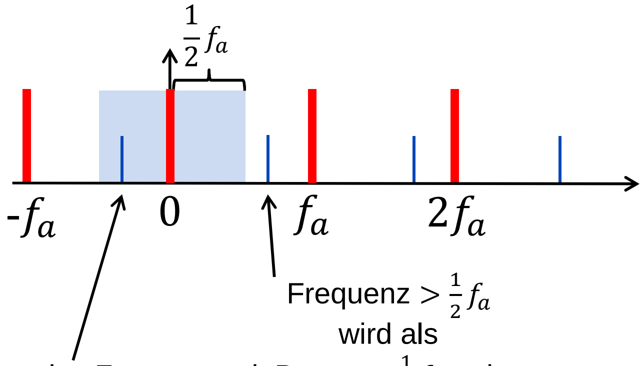


- Dasselbe gilt für andere ganzzahlige Vielfache von f_a:
  – Statt der Frequenz 0 könnte es in Wirklichkeit die Frequenz f_a oder $2 \cdot f_a$ oder $3 \cdot f_a$ oder (-1) · f_a oder … sein

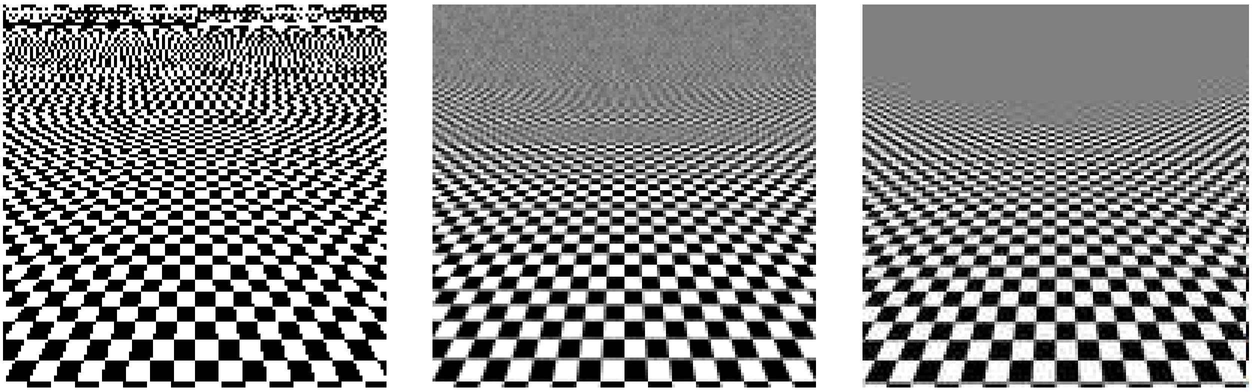


Abtasttheorem und Aliasing





Aliasing bei Bildern



Aliasing — Mit verschieden gutem Anti-Aliasing

[Abb. von https://people.cs.clemson.edu/~tadavis/cs809/aa.html]

Abtastung von Audio-Signalen

- Menschliches Gehör (Idealfall): 20–20.000 Hz
- Sprache: bis ca. 4.000 Hz
- Typische Abtastraten (sampling rates):
  - Telefon: 8 kHz (2 x 4 kHz! Bandbreite: 3,6 kHz)
  - Mobilfunk „HD Voice“ (AMR-WB): 16 kHz (6.4 kHz)
  - CD: 44,1 kHz (~2 x 20 kHz!)
  - DVD (Tonspur): 48 kHz
- Zu unterscheiden: Bitrate (bit rate), Einheit oft: kbps
  - Ergibt sich aus Abtastrate, Quantisierung, Anzahl Kanäle (mono, stereo) und ggf. Komprimierung
  - Z.B. CD: $2 \cdot 16\ \mathrm{Bit} \cdot 44{,}1\ \mathrm{kHz} = 1411{,}2\,\frac{\mathrm{kBit}}{\mathrm{s}} = 176{,}4\,\frac{\mathrm{kB}}{\mathrm{s}}$

WAV-Format

- **AudioFormat** PCM = 1 (linear quantization, integer); IEEE float = 3 (PCM, float); MS ADPCM = 2; A-law = 6
- **NumChannels** Mono = 1, Stereo = 2, etc.
- **SampleRate** 8000, 44100, …
- **ByteRate** = SampleRate * NumChannels * BitsPerSample/8
- **BitsPerSample** 8 bits = 8, 16 bits = 16, etc.

Signalverarbeitung

4. Systeme, LTI-Systeme, Impulsantwort und Faltung

Definition „System“

Definition „System“ (im Rahmen der Signalverarbeitung):

- Mathematische Modell, das einem Eingangssignal $x(t)$ ein Ausgangssignal $y(t)$ zuordnet.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{System } S} \longrightarrow y(t)$$

- Systeme können auch mehrere Eingänge/Ausgänge haben, im Folgenden aber nur ein Eingang/Ausgang
- Systeme lassen sich durch Operatoren $S\{\cdot\}$ beschreiben:

$$y(t) = S\{x\}(t)$$

  – Der Unterschied zu einer Funktion $y(t) = f\big(x(t)\big)$ ist, dass f (nur) den Wert $x(t)$ weiterverarbeiten würde, während $S\{x\}$ x an mehreren Stellen (meist relativ zu t) auswerten kann.

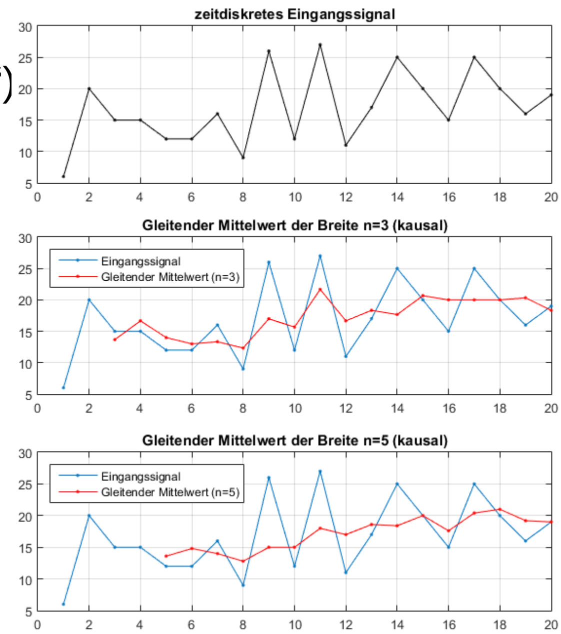
[s.a. Werner 2008, S 16; Meyer S5, 71f; Hoffmann 1 S32f – aber nicht präzise]

Beispiel: Gleitender Mittelwert

- Schreibweise für zeitdiskrete Signale: $x[t]$
  – eckige Klammern: „zeitdiskret“, also Integer-Indizes (→ „Arrays“)
  – nicht überall so verwendet.
- Für zeitdiskrete Signale $x[t]$ ist der gleitende Mittelwert (engl. moving average, MA) definiert als:

$$y[t] = MA\{x\}[t] := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x[t-i]$$

  – MA muss auf mehrere $x[t-i]$ zugreifen, lässt sich also nicht allein aus $x[t]$ berechnen und kann daher nicht als $MA(x[t])$ geschrieben werden.



[s.a. Werner 2008, S 17]

Definition „Dynamische Systeme“

Definition „Dynamisches System“
(im Rahmen der Signalverarbeitung):

- System, dessen Ausgangssignal auch von vergangenen Werten des Eingangssignales abhängt
- Auch als „System mit Gedächtnis“ bezeichnet.
- Bei „statischen (gedächtnislosen) Systemen“ hängt das Ausgangssignal nur vom momentanen Eingangssignal ab.
- Beispiel gleitender Mittelwert:
  - dynamisches System mit Gedächtnis der Länge $n-1$.

[s.a. Meyer S 75; Werner 2008, S 17]

Definition „Kausale Systeme“

Definition „Kausales System“
(im Rahmen der Signalverarbeitung):

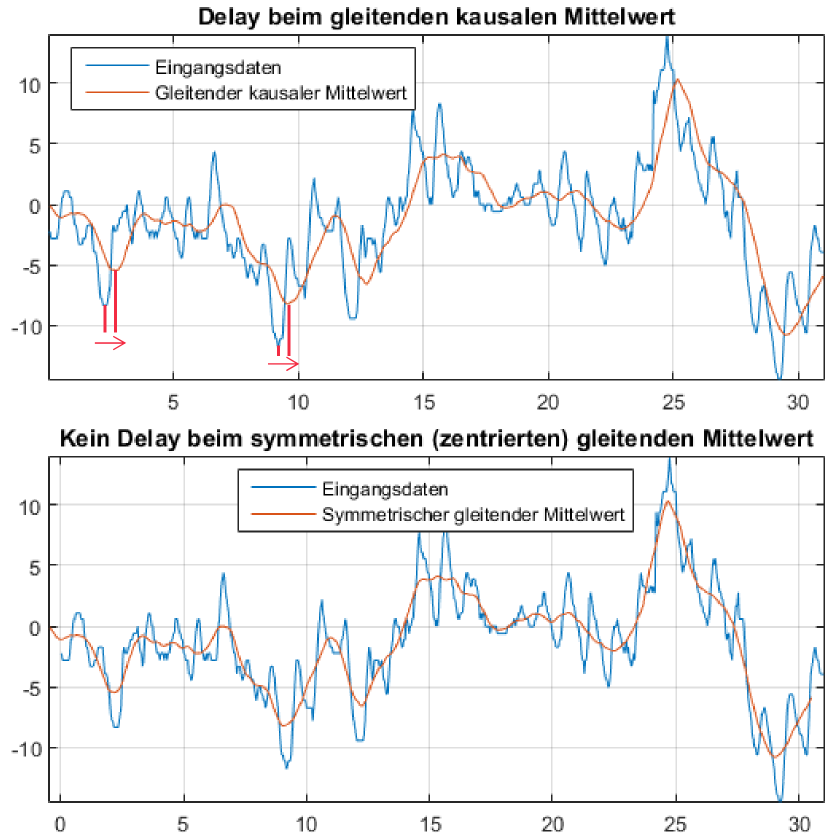
- Ausgangswert $y(t)$ des Signals hängt nur von Eingangswerten zu Zeitpunkten $t_i \leq t$ (also *nicht* von der Zukunft) ab.
- Definition also nur für zeitabhängige Signale anwendbar (und z.B. nicht für ortsabhängige Signale wie Helligkeiten in (Einzel-) Bildern)
- Beispiel gleitender Mittelwert:
  - Die verwendete Definition $y[t] = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x[t-i]$ ist kausal.
  - Es gibt auch den symmetrischen (zentrierten) gleitenden Mittelwert:

$$y[t] = MA_{sym}\{x\}[t] := \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} x[t-i]$$

    - Der symmetrische gleitende Mittelwert ist nicht kausal.

[s.a. Meyer S 74; Werner 2008, S 17]

Delay beim gleitenden Mittelwert



Definition „Lineare Systeme“

Definition „Lineares System“ :

- Ein System heißt linear, falls für alle Signale x, y und Zahlen k gilt:
  - $S\{x + y\}(t) = S\{x\}(t) + S\{y\}(t)$ und
  - $S\{k \cdot x\}(t) = k \cdot S\{x\}(t)$
- Vergleiche die Definition von linearer Abbildung in der linearen Algebra.
- Sehr häufig verwendet
- Aber oft idealisierende Annahme:
  - z.B. kann ein Verstärker übersteuert werden: Wenn er bei kleinem Signal x noch funktioniert, bei $10x$ aber übersteuert, ist $S\{10 \cdot x\}(t) \neq 10 \cdot S\{x\}(t)$.

[s.a. Meyer S 71f; Werner 2008, S 18; Hoffmann 1, S 32f]

Definition „zeitinvariante Systeme“, „LTI-Systeme“

Definition „Zeitinvariantes System“:

- Ein System S heißt zeitinvariant, wenn nur der Eingangssignalverlauf wichtig ist und nicht, wann das Eingangssignal (bzw. die Zeitmessung) beginnt.
  - Wird das Eingangssignal um t_0 verzögert, so ergibt sich ein gleiches, ebenfalls um t_0 verzögertes Ausgangssignal.
  - Also: S heißt zeitinvariant, wenn bei $z(t) \coloneqq x(t - t_0)$ mit beliebigem t_0 gilt:

$$S\{z\}(t) = S\{x\}(t - t_0)$$

- Beispiel: wird ein Signal abhängig von der Zeit verstärkt (z.B. „Fader“), so ist das System nicht zeitinvariant, z.B. bei $S\{x\}(t) \coloneqq \sin t \cdot x(t)$ ist:

$$S\{z\}(t) = \sin t \cdot \underbrace{z(t)}_{=x(t-t_0)} \neq S\{x\}(t - t_0) = \sin(t - t_0) \cdot x(t - t_0)$$

Definition „Lineares zeitinvariantes System“
(engl. linear time invariant, LTI):

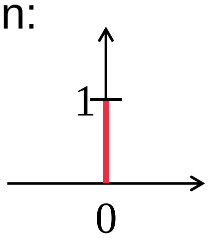
- Systeme, die sowohl linear als auch zeitinvariant sind
- Beispiel: gleitender Mittelwert

[s.a. Werner 2008, S 18; Meyer S 74f; Hoffmann 1, S 34]

Impulsfunktion im Diskreten

Definition „Impulsfunktion“ $\delta[t]$ im (Zeit-)Diskreten:

$$\delta[t] \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{falls } t = 0 \\ 0 & \text{falls } t \neq 0 \end{cases}$$

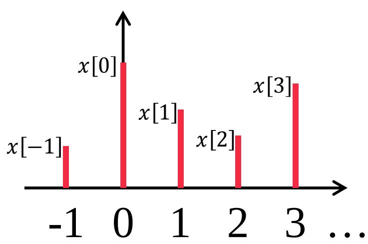


- Es gilt:

$$\delta[t - k] = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = t \\ 0 & \text{falls } k \neq t \end{cases}$$

- Damit lässt sich jedes diskrete Signal schreiben als:

$$x[t] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[t - k]$$



[s.a. Werner 2008, S 15]

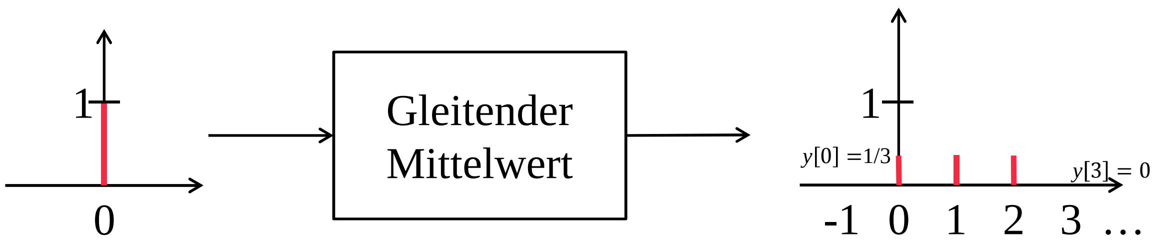
Impulsantwort im Diskreten

Definition „Impulsantwort“ $h[t]$ eines Systems S:

- Reaktion des Systems auf die Impulsfunktion:

$$h[t] \coloneqq S\{\delta\}[t]$$

- Beispiel: Impulsantwort eines gleitenden kausalen Mittelwerts mit $n = 3$



Impulsfunktion

Impulsantwort $h[t]$
gleitender Mittelwert

[s.a. Werner 2008, S 25]

Impulsantwort von LTI-Systemen

- Bei Anwendung eines (zeitdiskreten) LTI-Systems S auf das (allgemeine) Signal

$$x[t] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[t-k]$$

ergibt mit der Impulsfunktion $h[t] \coloneqq S\{\delta\}[t]$ wegen der Linearität und Zeitinvarianz:

$$S\{x\}[t] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[k]}_{\substack{\text{Konstante Zahlen} \\ \rightarrow \text{wg. Linearität können} \\ \text{sie vor } S \text{ gezogen werden}}} \cdot \underbrace{h[t-k]}_{\substack{\text{wg. Zeitinvarianz} \\ \text{reagiert } S \text{ auf Impuls zum} \\ \text{Zeitpunkt t−k auch mit h[t−k]}}}$$

- Also: Das Verhalten jedes LTI-Systems wird komplett durch seine Impulsantwort beschrieben!

[s.a. Werner 2008, S 26]

Faltung (engl. convolution)

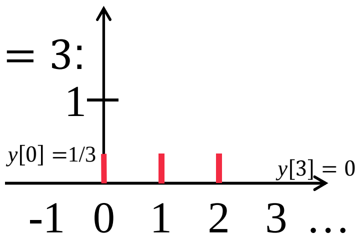
LTI-Systeme führen also sog. Faltungen (engl. convolution), abgekürzt mit „*“, durch:

$$(x * h)[t] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[t-k]$$

- Beispiel gleitender Mittelwert:

  $$h[t] = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } t = 0 \ldots n-1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

  für $n = 3$:

  Damit ist $h[t-k] = \frac{1}{n}$ für $(t-k) = 0 \ldots n-1$

  Also für $k = \big(t-(n-1)\big) \ldots t$ werden die $x[k]$ gemittelt.

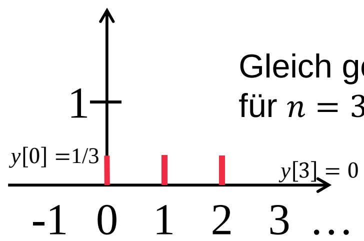
  Das entspricht der ursprünglichen Definition:

  $$y[t] = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x[t-i]$$

[s.a. Werner 2008, S 26]

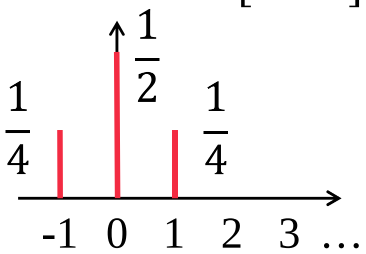
Faltungen als gewichtete Mittelwerte

- Beim gleitenden Mittelwert werden alle verwendeten Signalwerte $x[k]$ gleich behandelt, nämlich mit $\frac{1}{n}$ multipliziert:



Gleich gewichteter Mittelwert für $n = 3$

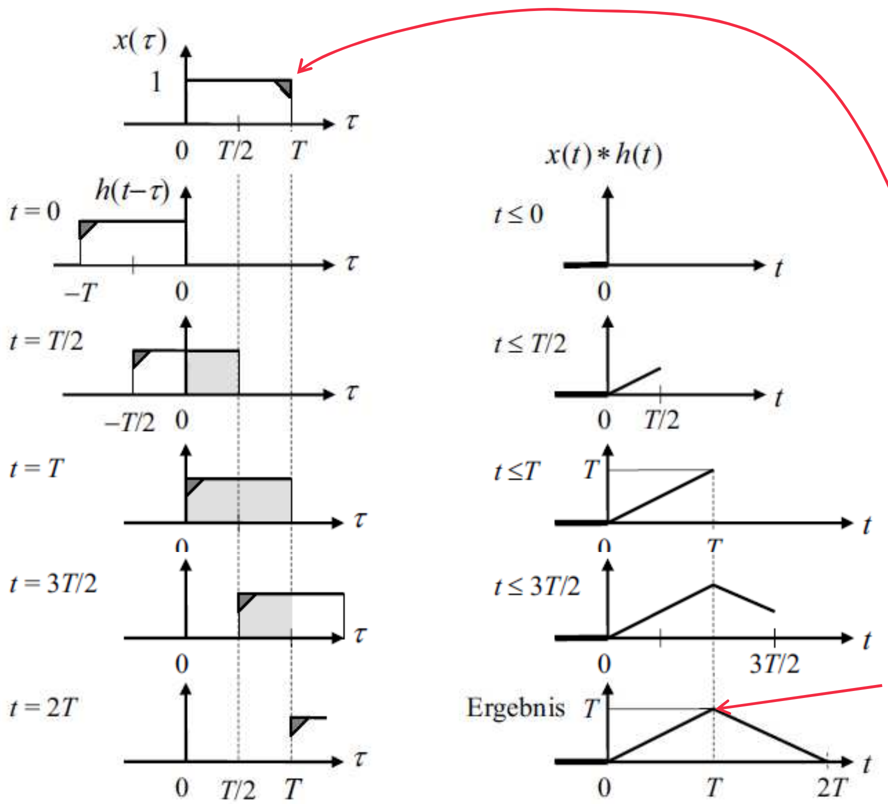
- Allgemeine Faltungen berechnen gewichtete Mittelwerte: die Signalwerte $x[k]$ werden mit $h[t-k]$ gewichtet (multipliziert)
- Beispiel: Binomialfilter der Größe 3



Eigenschaften der Faltung

- Die Operation „Faltung“ ist:
  – assoziativ: $(x * h) * g = x * (h * g)$
  – kommutativ: $x * h = h * x$
  – distributiv: $x * (h + g) = x * h + x * g$
  – und natürlich linear und zeitinvariant (wir haben sie ja aus LTI-Systemen hergeleitet)

Faltung zweier Rechteck-Signale



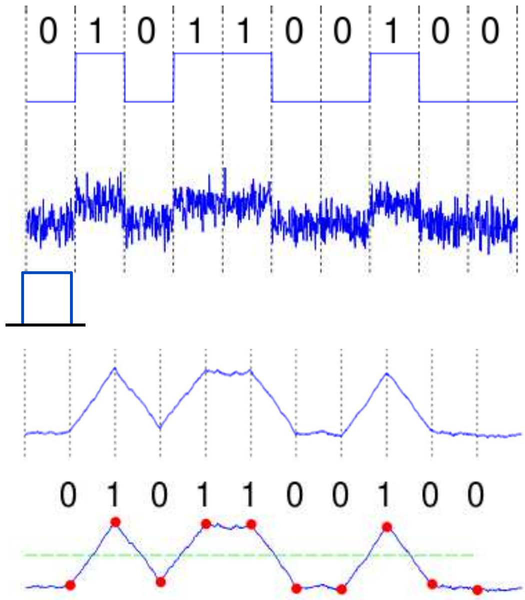
Maximum dort, wo Signal liegt

[Abb. Werner 2008, S 35]

Matched Filter (template matching): Detektion bekannter Signalform

Beispiel:

- Ursprüngliches Signal:
- Nach Übertragung verrauschtes Signal:
- Bekannte Signalform:
- Faltung mit zeit-invertierter Signalform:
- Auslesen:



- Auch für andere Signalformen, z.B. bei der Suche nach Gravitationswellen verwendet.

[Abb. https://en.wikipedia.org/wiki/Matched_filter, s. a Werner 2008, S 320ff]

FIR Filter / IIR Filter

- Finite impulse response (FIR) Filter:
  - Impulsantwort hat eine endliche Länge
  - ➔Faltungssumme ist endlich
- Infinite impulse response (IIR) Filter:
  - Impulsantwort hat eine unendliche Länge
  - in der Praxis nicht über Faltungssumme realisierbar
  - realisierbar über rekursive Filter
- Daher (nicht ganz korrekt) oft synonym gebraucht:
  - FIR-Filter ⇔ nicht-rekursive Filter
  - IIR-Filter ⇔ rekursive Filter

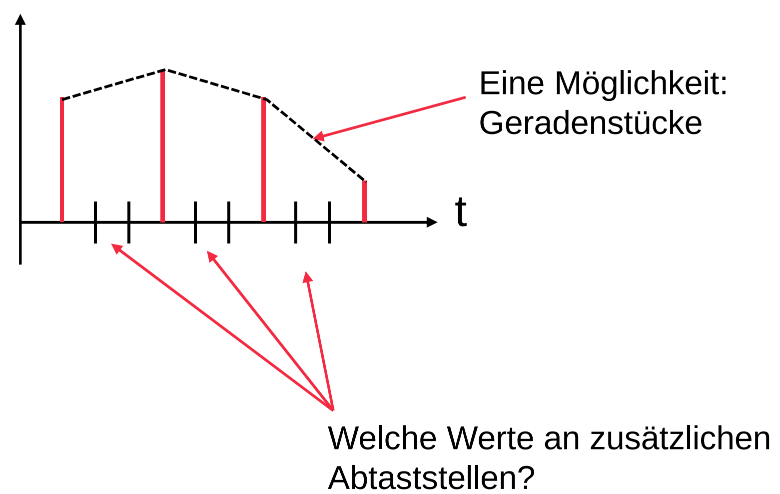
[s.a. Werner 2008, S 197ff]

Signalverarbeitung

5. Up- und Downsampling digitaler Signale

Upsampling

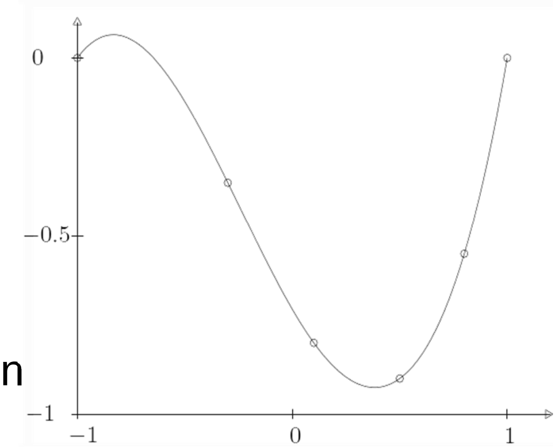
- Wie weitere Sampling-Punkte in ein digitales Signal mit gegebener Sampling Rate einfügen?



Definition „Interpolation“

Definition „Interpolation“ (lateinisch inter = dazwischen, polire = glätten, schleifen):

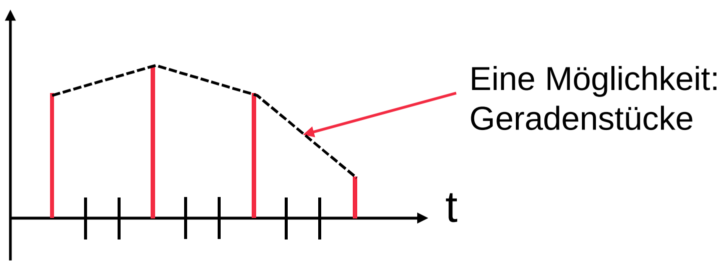
- Zu gegebenen diskreten Daten (x_i, y_i) (z.B. Messwerten) soll eine stetige Funktion $g(x)$ berechnet werden, sodass $y_i = g(x_i)$ (Interpolationsbedingung)
  - Die x_i heißen Stützstellen, die y_i heißen Stützwerte.
  - Mit den Bezeichnungen für zeitabhängige Signale:
    - $x[t] = g(t)$ (t ganzzahlig!)
    - Gesucht ist $g(t)$, sodass t eine reelle Zahl sein kann



Stückweise Interpolation

Stückweise Interpolation:

- Für jeden Abschnitt zwischen zwei Stützstellen eine eigene Funktion



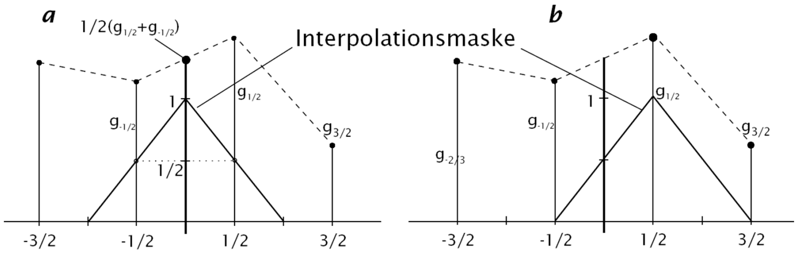
- Die einfachsten Funktionen sind Geraden, d.h. lineare Polynome $g(x) \coloneqq mx + c$

  → Stückweise lineare Interpolation

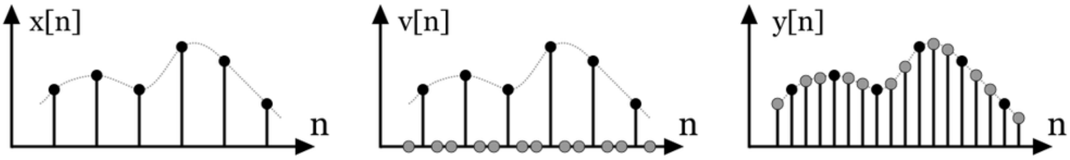
  → Stetig, aber „Knicke“ an Stützstellen

Interpolation durch Faltung

- Stückweise lineare Interpolation durch Faltung mit „Dreiecks-Maske“ (Impulsantwort des Filters)



- Praktische Umsetzung: neue Stellen hinzufügen, dann Faltung durchführen



  – Im Beispiel: $\mathrm{h} = \frac{1}{3}[1,2,3,2,1]$

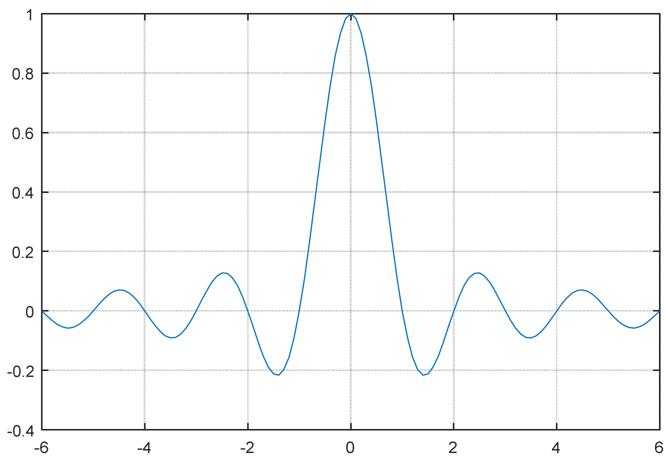
[Abb. Oben aus Jähne: Digitale Bildverarbeitung; Abb. unten: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Upsampling_Example.svg]

Theoretisch optimale Interpolation durch Faltung mit sinc-Funktion

- Die Faltung mit Funktion $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ erlaubt (theoretisch) perfekte Rekonstruktion, sofern Abtastbedingung erfüllt

  ➔Keine „Knicke“!

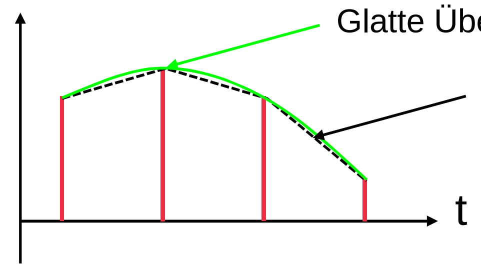
- Aber: sinc ist unendlich ausgedehnt
- Praktisch: Einschränkung auf endlichen Bereich (windowed sinc)
- Stützstellen müssen (wie immer bei Faltung) äquidistant sein



Rekonstruktion mit sinc-Funktion

- Perfekte Rekonstruktion, sofern Abtastbedingung erfüllt

➔ Keine „Knicke“!

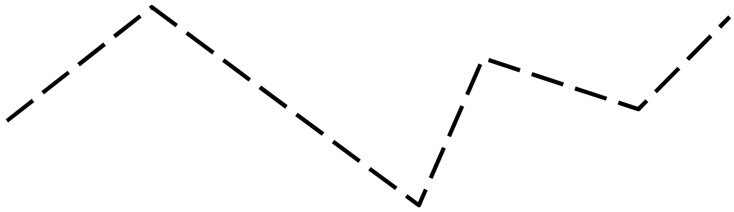


Downsampling

- Gefahr bei Downsampling:
  – Abtastbedingung wird nicht mehr erfüllt → Aliasing
- Abhilfe:
  – Vor dem Downsampling hohe Frequenzen reduzieren: Tiefpassfilterung
  – Realisierbar durch Faltung mit
    - sinc
    - Binomialfilter (auch Gaußfilter genannt)
    - speziell angepasste Filter

Nicht äquidistante Stützstellen

- Faltungsmethode funktioniert nicht bei nicht äquidistanten Stützstellen
- Idee der stückweisen Interpolation trotzdem möglich
  - Stückweise lineare Interpolation:



- Wie „Knicke“ vermeiden?
  - Statt linearer Polynome: Polynome (meist) 3. Grades

$$g(x) \coloneqq a + bx + cx^2 + dx^3$$

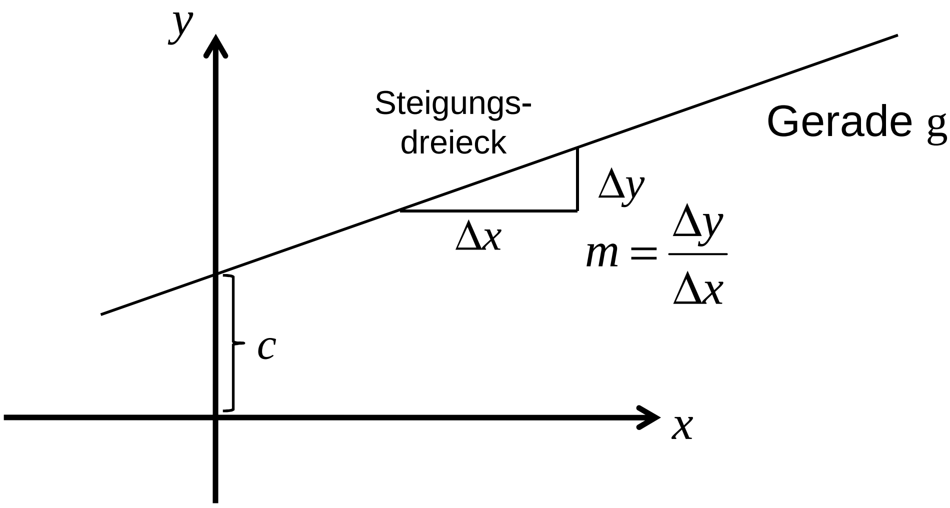
  - Bedingung an Stützstellen:
    - gleiche Steigung
    - und gleiche Änderung der Steigung

Signalverarbeitung

Einschub 2: Ableitung

Steigung einer Geraden

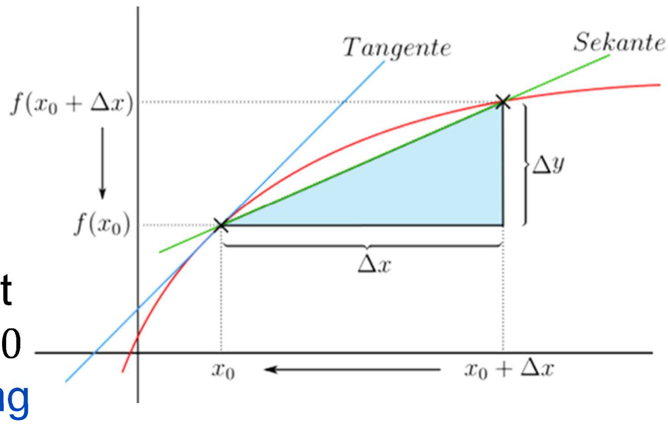
- Die Steigung einer Geraden $\mathrm{g}(x) := mx + c$ ist
  – durch das Steigungsdreieck gegeben: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
  – Die Steigung einer Geraden ist überall gleich.



Steigung einer Funktion: Ableitung

- Die Steigung einer Funktion $f(x)$ ist definiert als die Steigung der Tangenten an die Funktion
- Betrachte zunächst Gerade (=Sekante) durch 2 Punkte des Funktionsgraphs
- Sekantensteigung ist der Differenzenquotient:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$



- Tangentensteigung ergibt sich als Grenzwert $\Delta x \to 0$ und heißt (erste) Ableitung der Funktion f nach x:

$$f'(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

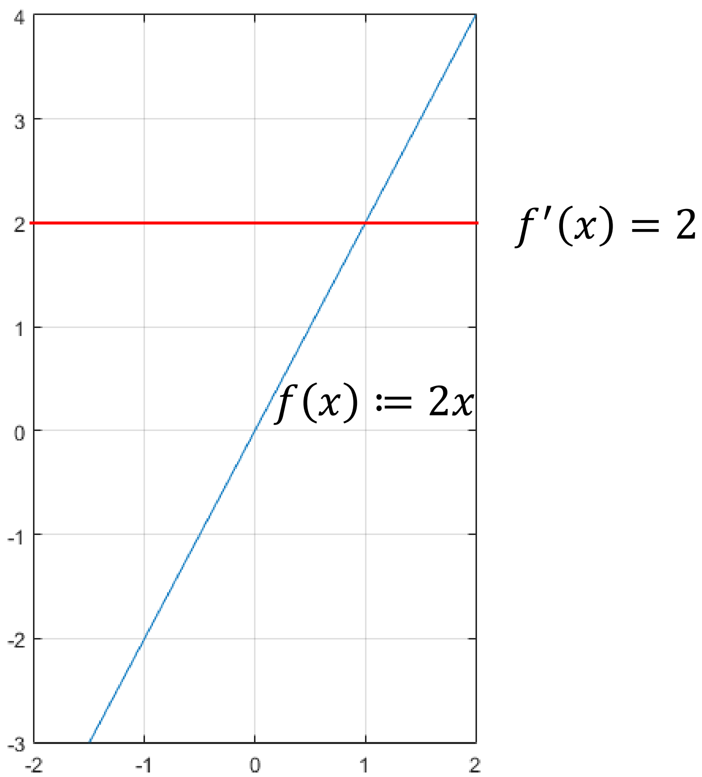
Ableitungsregeln (1)

- Ableitung des linearen Polynoms $\mathrm{g}(x) \coloneqq mx + c$ ist:
$$\mathrm{g}'(x) = m$$

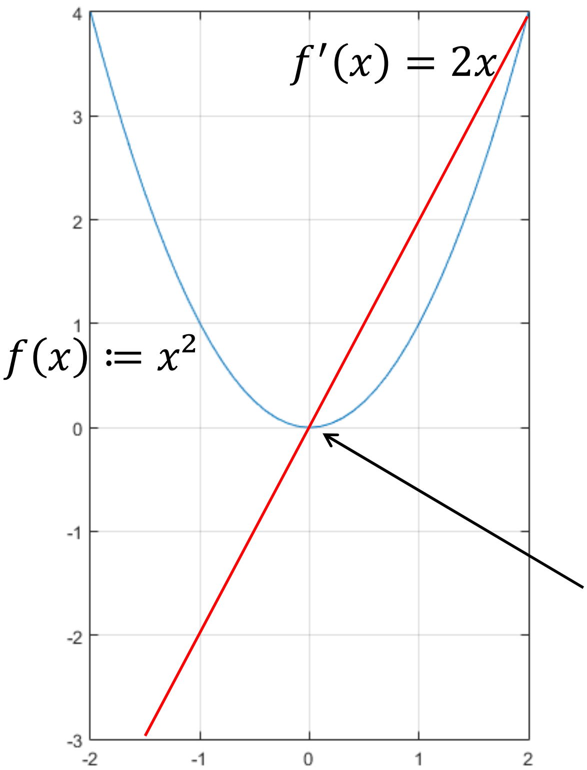
Ableitungsregeln:

- Konstante Summanden fallen beim Ableiten weg:
  - insbesondere ist von $f(x) = c$ die Ableitung $f'(x) = 0$
- Ableitung von $f(x) \coloneqq x^n$ ist $f'(x) \coloneqq n \cdot x^{n-1}$
  - die Ableitung von $f(x) = x$ ist $f'(x) = 1$
  - die Ableitung von $f(x) = x^2$ ist $f'(x) = 2x$
- Konstante Faktoren bleiben erhalten, d.h. die Ableitung von $f(x) \coloneqq m \cdot g(x)$ ist $f'(x) = m \cdot g'(x)$
- Die Ableitung von $f(x) \coloneqq \sin x$ ist $f'(x) = \cos x$.
- Die Ableitung von $f(x) \coloneqq \cos x$ ist $f'(x) = -\sin x$.
- Die Ableitung von $f(x) \coloneqq \cos x$ ist $f'(x) = -\sin x$.
- Die Ableitung von $f(x) \coloneqq \exp x$ ist $f'(x) = \exp x$.

Beispiele



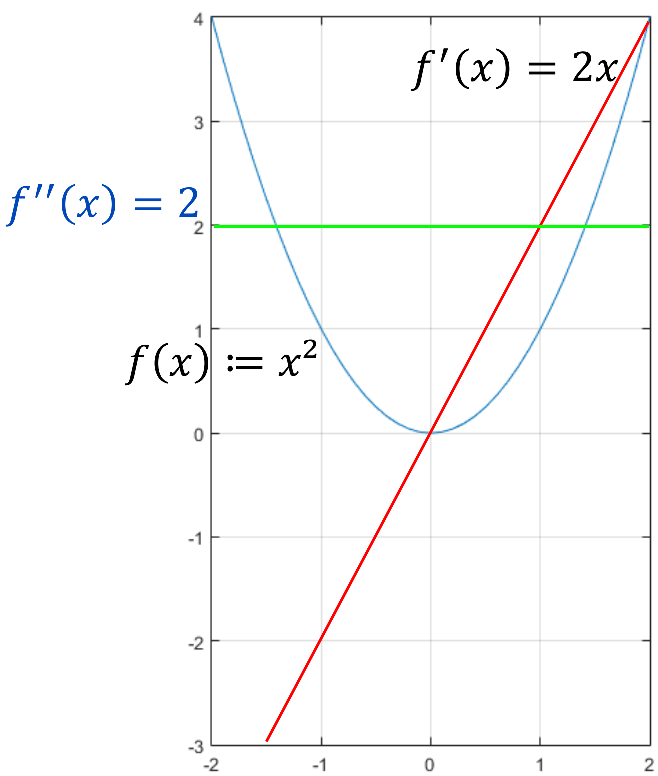
Beispiele



Tiefpunkt: $f'(x) = 0$

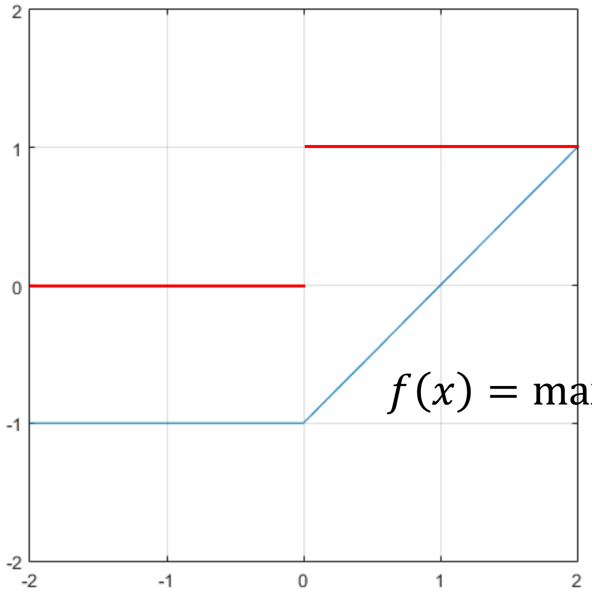
$f'(x) = 0$ gilt für alle Extrema (Tief- und Hoch-Punkte)

Beispiel: 2te Ableitung



- Die 2te Ableitung $f''(x)$ ist die Ableitung der Ableitung
  - Also die Änderung der Steigung der Funktion
- Im Beispiel:
  - Die Steigung der Funktion $f(x) := x^2$ nimmt überall gleichmäßig zu: Die Steigung hat die Steigung 2.

Beispiele



$$f'(x) = \begin{cases} 0 & für\ \mathrm{x} < 0 \\ 1 & für\ \mathrm{x} > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \max(0, x) - 1$$

Ableitungsregeln (2)

- Summenregel:
  - Die Ableitung von $f(x) := u(x) + v(x)$ ist $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.
- Produktregel:
  - Die Ableitung von $f(x) := u(x) \cdot v(x)$ ist $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.
- Kettenregel:
  - Die Ableitung von $f(x) := u\big(v(x)\big)$ ist
    $$f'(x) = u'\big(v(x)\big)v'(x)$$
  - Teilweise auch so geschrieben: $\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$

Beispiele

- Beispiel Summenregel:
  Anwendung auf Polynom 3. Grades:
  $$f(x) := a + bx + cx^2 + dx^3$$
  $$f'(x) = b + 2cx + 3dx^2$$
- Beispiel Produktregel:
  $$f(x) := \sqrt{x} \cdot \sin x$$
  $$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin x + \sqrt{x} \cdot \cos x$$
- Beispiel Kettenregel:
  $$f(x) := (\sin x)^2$$
  $$f'(x) = 2(\sin x) \cdot \cos x$$

Signalverarbeitung

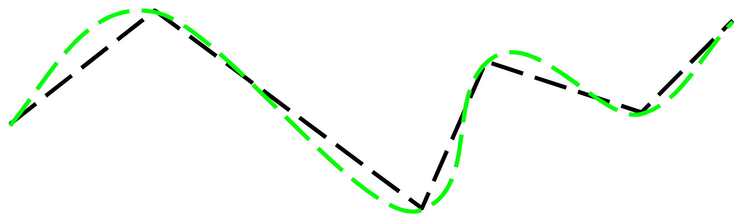
Ende Einschub 2: Ableitung
- zurück zur Interpolation

Nicht äquidistante Stützstellen

- Wie „Knicke“ bei stückweiser Interpolation vermeiden?
  - Statt linearer Polynome: Polynome (meist) 3. Grades

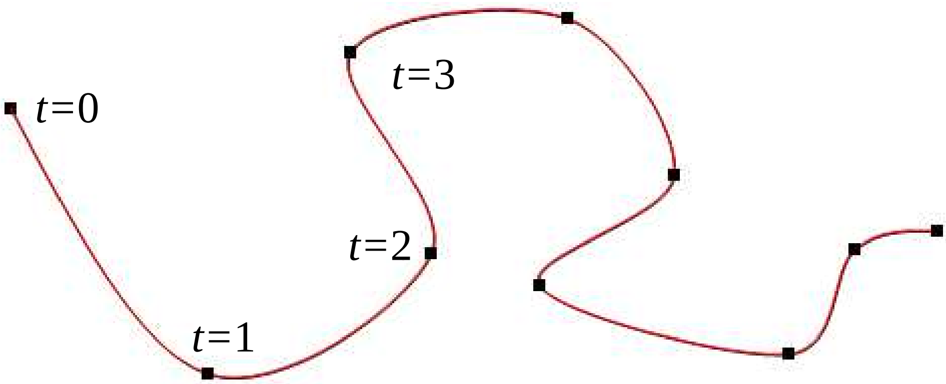
    $$g(x) \coloneqq a + bx + cx^2 + dx^3$$

  - Zwischen 2 Stützstellen jeweils ein Polynom
  - Bedingung für das Zusammenfügen der je 2 Polynome 3. Grades an den Stützstellen („kubischer Spline“):
    - gleiche Steigung
    - und gleiche Änderung der Steigung: Ableitung der Ableitung (= 2. Ableitung)



Interpolation von Kurven

- Was tun, wenn kein funktionaler Zusammenhang $y_i = f(x_i)$ für die Werte-Paare $(x_i, y_i \neq f(x_i))$ existiert?
- Oder gar in 3D: (x_i, y_i, z_i) ?



- Jede Komponente einzeln interpolieren:

  $(t, x_t), (t, y_t), (t, z_t)$