CM. Récursivité

A. Malek TOUMI

toumiab@ensta-bretagne.fr

2018/2019

ENSTA Bretagne

Sommaire

Sommaire

Fonction fact

toggle : : reset

- Paramètres formels

```
def fact(nb):
     if(nb == 0):
     ...

def cnp(n, p):
     num = fact(n)
     ...
```

Fonction fact

toggle : : reset

- Paramètres formels
- Paramètres effectifs

```
def fact(nb):
    if(nb == 0):
    ...

def cnp(n, p):
    num = fact(n)
    ...
```

Sommaire

Variables globales/locales

toggle : : reset

Remarques

- Les variables globales sont visibles dans les fonctions appelées mais on ne peut les réaffectées

Variables globales/locales

toggle : : reset

Remarques

- Les variables globales sont visibles dans les fonctions appelées mais on ne peut les réaffectées
- Le contenu d'une variable globale est modifiable si elle est mutable (modifiable).

Variables globales/locales

toggle : : reset

Remarques

- Les variables globales sont visibles dans les fonctions appelées mais on ne peut les réaffectées
- Le contenu d'une variable globale est modifiable si elle est mutable (modifiable).
- Les variables locales d'une fonction ne sont pas visibles dans les niveaux supérieurs

Variables globales/locales

toggle : : reset

Remarques

- Les variables globales sont visibles dans les fonctions appelées mais on ne peut les réaffectées
- Le contenu d'une variable globale est modifiable si elle est mutable (modifiable).
- Les variables locales d'une fonction ne sont pas visibles dans les niveaux supérieurs
- Les fonctions peuvent modifier des variables globales (les types non modifiables) avec l'instruction **global**

Variables globales/locales

toggle : : reset

Remarques

- Les variables globales sont visibles dans les fonctions appelées mais on ne peut les réaffectées
- Le contenu d'une variable globale est modifiable si elle est mutable (modifiable).
- Les variables locales d'une fonction ne sont pas visibles dans les niveaux supérieurs
- Les fonctions peuvent modifier des variables globales (les types non modifiables) avec l'instruction **global**
- La fonction **globals()** retourne le dictionnaire des objets globaux.

Variables globales/locales

toggle : : reset

Remarques

- Les variables globales sont visibles dans les fonctions appelées mais on ne peut les réaffectées
- Le contenu d'une variable globale est modifiable si elle est mutable (modifiable).
- Les variables locales d'une fonction ne sont pas visibles dans les niveaux supérieurs
- Les fonctions peuvent modifier des variables globales (les types non modifiables) avec l'instruction **global**
- La fonction **globals()** retourne le dictionnaire des objets globaux.
- La fonction **locals()** retourne la liste des objets l'espace local en cours

Variables globales/locales

toggle : : reset

Exemple (Modification d'une variable globale en local)

```
def incremCompt():   # fonction sans param. d'entrée
    global compteur  # définition var. globale
    compteur += 1
    print('Appelé', compteur, 'fois')

compteur = 0 # initialisation du compteur
incremCompt() # => affiche: Appelé 1 fois
incremCompt() # => affiche: Appelé 2 fois
incremCompt() # => affiche: Appelé 3 fois
```

Variables globales/locales

toggle : : reset

Exemple (Modification d'une variable globale en local)

```
def maville(lm):
    ville = 'Brest' # variable locale
    print (ville, cp,lm)




# cp=29200 variable globale vue par la fct
cp = 29200 # variable globale
maville('France') # => affiche 'Brest 29200 France'
```

Variables globales/locales

toggle : : reset

Exemple (Modification d'une variable globale en local)

```
def maville(lm):
    ville = 'Brest' # variable locale
    print (ville, cp,lm)
    test()
def test():
    print('test',ville)


# cp=29200 variable globale vue par la fct
cp = 29200 # variable globale
maville('France') # => affiche 'Brest 29200 France'
```

Variables globales/locales

toggle : : reset

Exemple (Modification d'une variable globale en local)

```
def maville(lm):
    ville = 'Brest' # variable locale
    print (ville, cp,lm)
    test()
def test():
    print('test',ville)


# cp=29200 variable globale vue par la fct
cp = 29200 # variable globale
maville('France') # => affiche 'Brest 29200 France'
# => affiche 'test, Brest'?
```

Sommaire

Sommaire

Définition

toggle : : reset

Définition (Fonction récursive)

Une fonction ou une méthode est dite récursive si elle se définit à partir d'elle même, c'est-à-dire si elle comporte un appel à elle même dans son corps.

Définition

toggle : : reset

Définition (Fonction récursive)

Une fonction ou une méthode est dite récursive si elle se définit à partir d'elle même, c'est-à-dire si elle comporte un appel à elle même dans son corps.

Attention

Éviter les boucles infinies (appel systématique à la fonction).

Définition

toggle : : reset

Définition (Fonction récursive)

Une fonction ou une méthode est dite récursive si elle se définit à partir d'elle même, c'est-à-dire si elle comporte un appel à elle même dans son corps.

Attention

Éviter les boucles infinies (appel systématique à la fonction).

Exemple (Fonction infinie)

```
def sansFin(n):
    return n+sansFin(n-1)
```

Exemple

toggle : : reset

Traduction immédiate des fonctions définies par récurrence.

Exemple (Factorielle)

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)! \end{cases}$$

Exemple

toggle : : reset

Traduction immédiate des fonctions définies par récurrence.

Exemple (Factorielle)

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)! \end{cases}$$

```
def fact(n):
```

Exemple

Traduction immédiate des fonctions définies par récurrence.

Exemple (Factorielle)

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)! \end{cases}$$

```
def fact(n):
    if n==0 :
        return 1
```

Exemple

toggle : : reset

Traduction immédiate des fonctions définies par récurrence.

Exemple (Factorielle)

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)! \end{cases}$$

```
def fact(n):
    if n==0 :
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)
```

Exemple

toggle : : reset

Traduction immédiate des fonctions définies par récurrence.

Exemple (Factorielle)

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)! \end{cases}$$

```
def fact(n):
    if n==0 : # Condition d'arrêt
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)
```

Condition d'arrêt

toggle : : reset

Définition (Condition d'arrêt)

Condition pour laquelle il n'y a pas d'appel récursif.

Condition d'arrêt

toggle : : reset

Définition (Condition d'arrêt)

Condition pour laquelle il n'y a pas d'appel récursif.

Important

Toute fonction récursive doit comporter au moins une condition d'arrêt. Sinon : boucle infinie.

Condition d'arrêt

toggle : : reset

Définition (Condition d'arrêt)

Condition pour laquelle il n'y a pas d'appel récursif.

Important

Toute fonction récursive doit comporter au moins une condition d'arrêt. Sinon : boucle infinie.

Remarque

Une fonction peut comporter plusieurs conditions d'arrêt.

Condition d'arrêt

toggle : : reset

Exemple (Plusieurs conditions d'arrêt)

```
def fact(n):
    if (n==0):
        return 1
    elif (n==1):
        return 1
    else :
        return n * fact(n-1)
```

Condition d'arrêt

toggle : : reset

Exemple (Plusieurs conditions d'arrêt)

```
def fact(n):
    if (n==0):
        return 1
    elif (n==1):
        return 1
    else :
        return n * fact(n-1)
```

Sommaire

Pile et récursivité

- Pile d'appel : notion fondamentale pour la récursivité.
- Principe : tous les appels sont empilés, traités, puis dépilés.

```
def fact(n) :
    if n==0:
        return 1
    else:
        return n*fact(n-1)
```

fact(2)

```
>>>res = fact(2)
```

Pile et récursivité

toggle reset

- Pile d'appel : notion fondamentale pour la récursivité.
- Principe : tous les appels sont empilés, traités, puis dépilés.

```
def fact(n) :
    if n==0:
        return 1
    else:
        return n*fact(n-1)
```

fact(2) =2*fact(1)

```
>>>res = fact(2)
```

Pile et récursivité

toggle reset

- Pile d'appel : notion fondamentale pour la récursivité.
- Principe : tous les appels sont empilés, traités, puis dépilés.

```
def fact(n) :
    if n==0:
        return 1
    else:
        return n*fact(n-1)
```

fact(1)	
fact(2)	=2*fact(1)

```
>>>res = fact(2)
```

Pile et récursivité

toggle reset

- Pile d'appel : notion fondamentale pour la récursivité.
- Principe : tous les appels sont empilés, traités, puis dépilés.

```
def fact(n) :
    if n==0:
        return 1
    else:
        return n*fact(n-1)
```

fact(1)	=1*fact(0)
fact(2)	=2*fact(1)

```
>>>res = fact(2)
```

Pile et récursivité

toggle : : reset

- Pile d'appel : notion fondamentale pour la récursivité.
- Principe : tous les appels sont empilés, traités, puis dépilés.

```
def fact(n) :
    if n==0:
        return 1
    else:
        return n*fact(n-1)

>>>res = fact(2)
```

fact(0)	
fact(1)	=1*fact(0)
fact(2)	=2*fact(1)

Pile et récursivité

toggle : : reset

- Pile d'appel : notion fondamentale pour la récursivité.
- Principe : tous les appels sont empilés, traités, puis dépilés.

```
def fact(n) :
    if n==0:
        return 1
    else:
        return n*fact(n-1)

>>>res = fact(2)
```

fact(0)	=1
fact(1)	=1*fact(0)
fact(2)	=2*fact(1)

Pile et récursivité

toggle : : reset

- Pile d'appel : notion fondamentale pour la récursivité.
- Principe : tous les appels sont empilés, traités, puis dépilés.

```
def fact(n) :
    if n==0:
        return 1
    else:
        return n*fact(n-1)

>>>res = fact(2)
```

fact(1)	=1
fact(2)	=2*fact(1)

Pile et récursivité

- Pile d'appel : notion fondamentale pour la récursivité.
- Principe : tous les appels sont empilés, traités, puis dépilés.

```
def fact(n) :
    if n==0:
        return 1
    else:
        return n*fact(n-1)
```

fact(2) =2

```
>>>res = fact(2)
```

Sommaire

Post et pré-traitement

toggle : : reset

Exemple (Puissance d'entier : x**n)

```
def puissance(x,n):
    if n == 0:

        return 1
    else:

        return x* puissance (x, n-1)


puissance(2,5)
# sortie
```

Post et pré-traitement

toggle : : reset

Exemple (Puissance d'entier : x**n)

```
def puissance(x,n):
    if n == 0:
        print("cas de base n :", n)
        return 1 # cas de base
    else:
        print("prétraitement pour n :", n)
        return x* puissance (x, n-1)


puissance(2,5)
# sortie
```

Post et pré-traitement

toggle : : reset

Exemple (Puissance d'entier : x**n)

```
def puissance(x,n):
    if n == 0:
        print("cas de base n :", n)
        return 1 # cas de base
    else:
        print("prétraitement pour n :", n)
        return x* puissance (x, n-1)


puissance(2,5)
# sortie
pretraitement de n :  5
pretraitement de n :  4
pretraitement de n :  3
pretraitement de n :  2
pretraitement de n :  1
cas de base n : 0
```

Post et pré-traitement

toggle : : reset

Exemple (Puissance d'entier : x**n)

```
def puissance(x,n):
    if n == 0:
        print("cas de base n :", n)
        return 1 # cas de base
    else:

        y = x* puissance (x, n-1)
        print("post-traitement n :", n)
        return y
puissance(2,5)
# sortie
```

```
cas de base n : 0
post-traitement de n: 1
post-traitement de n : 2
post-traitement de n : 3
post-traitement de n : 4
post-traitement de n : 5
```

Post et pré-traitement

toggle reset

Exemple (Puissance d'entier : x**n)

```
def puissance(x,n):
    if n == 0:
        print("cas de base n :", n)
        return 1 # cas de base
    else:
        print("prétraitement pour n :", n)
        y = x* puissance (x, n-1)
        print("post-traitement n :", n)
        return y
puissance(2,5)
# sortie
pretraitement de n :  5
pretraitement de n :  4
pretraitement de n :  3
pretraitement de n :  2
pretraitement de n :  1
cas de base n : 0
post-traitement de n: 1
post-traitement de n : 2
post-traitement de n : 3
post-traitement de n : 4
post-traitement de n : 5
```

Sommaire

Suite de Fibonacci

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

Suite de Fibonacci

toggle : : reset

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

- Deux conditions d'arrêt

Suite de Fibonacci

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

- Deux conditions d'arrêt
- Une condition de récurrence

Suite de Fibonacci

toggle : : reset

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

```
def fibo(n):
    if n==0:
        return 0
    elif n==1:
        return 1
    else
        return fibo(n-1) + fibo(n-2)
```

Explosion de la pile d'appels

toggle reset

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(3)

Explosion de la pile d'appels

toggle : : reset

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(3) $=$ f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appels

toggle reset

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(2)
f(3) $=$ f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appels

toggle : : reset

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(2)	= f(1)+f(0)
f(3)	= f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appels

toggle reset

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(1)
f(2) $=$ f(1)+f(0)
f(3) $=$ f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appels

toggle : : reset

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(1)	$= 1$
f(2)	$=$ f(1)+f(0)
f(3)	$=$ f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appels

toggle : : reset

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(0)	
f(1)	$= 1$
f(2)	$=$ f(1)+f(0)
f(3)	$=$ f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appels

toggle : : reset

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(0)	$=$ 0
f(1)	$=$ 1
f(2)	$=$ f(1)+f(0)
f(3)	$=$ f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appels

toggle : : reset

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(2) $=1$
f(3) $=$ f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appels

toggle : : reset

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(1)	
f(2)	$= 1$
f(3)	$=$ f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appels

toggle : : reset

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(1)	=	1
f(2)	=	1
f(3)	=	f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appels

toggle reset

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(3) = 2

Explosion de la pile d'appels

toggle : : reset

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

$f(3) \quad = \quad 2$

- Traduction immédiate de la formule de récurrence

Explosion de la pile d'appels

toggle : : reset

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(3) = 2

- Traduction immédiate de la formule de récurrence

$\Rightarrow$ peu efficace dans ce cas

Explosion de la pile d'appels

toggle reset

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

$f(3) = 2$

- Traduction immédiate de la formule de récurrence

$\Rightarrow$ peu efficace dans ce cas

- Nombre d'appels à F en $\Theta(2^n)$

Explosion de la pile d'appels

toggle : : reset

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(3) = 2

- Traduction immédiate de la formule de récurrence

$\Rightarrow$ peu efficace dans ce cas

- Nombre d'appels à F en $\Theta(2^n)$

Important

- Le nombre d'appels est limité par défaut, à 1000 appels.
  $\Rightarrow$ **RuntimeError : maximum recursion depth exceeded ...**

Explosion de la pile d'appels

toggle reset

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(3) $=$ 2

- Traduction immédiate de la formule de récurrence

$\Rightarrow$ peu efficace dans ce cas

- Nombre d'appels à F en $\Theta(2^n)$

Important

- Le nombre d'appels est limité par défaut, à 1000 appels.
  $\Rightarrow$ **RuntimeError : maximum recursion depth exceeded ...**
- Exemple : Augmenter la taille à 1500 :
  `sys.setrecursionlimit(1500)`

Sommaire

Conception d'algorithme récursif

toggle : : reset

- Découper l'algorithme en étapes

Conception d'algorithme récursif

toggle : : reset

- Découper l'algorithme en étapes
- Déterminer les règles de passage d'une étape à l'autre

Conception d'algorithme récursif

toggle : : reset

- Découper l'algorithme en étapes
- Déterminer les règles de passage d'une étape à l'autre

$\Rightarrow$ l'étape n dépend de l'étape $n-1$ (éventuellement $n-2$)

Conception d'algorithme récursif

toggle reset

- Découper l'algorithme en étapes
- Déterminer les règles de passage d'une étape à l'autre

$\Rightarrow$ l'étape n dépend de l'étape $n-1$ (éventuellement $n-2$)

- Déterminer les conditions d'arrêt

Conception d'algorithme récursif

toggle : : reset

- Découper l'algorithme en étapes
- Déterminer les règles de passage d'une étape à l'autre

$\Rightarrow$ l'étape n dépend de l'étape $n-1$ (éventuellement $n-2$)

- Déterminer les conditions d'arrêt

Conception d'algorithme récursif

toggle : : reset

- Découper l'algorithme en étapes
- Déterminer les règles de passage d'une étape à l'autre

$\Rightarrow$ l'étape n dépend de l'étape $n-1$ (éventuellement $n-2$)

- Déterminer les conditions d'arrêt

Remarque

Tout algorithme récursif peut s'écrire de manière itérative, et réciproquement.

Sommaire

Recherche par dichotomie

toggle reset

- Recherche d'un élément dans un tableau trié

Recherche par dichotomie

toggle : : reset

- Recherche d'un élément dans un tableau trié
- Principe :

Recherche par dichotomie

toggle : : reset

- Recherche d'un élément dans un tableau trié
- Principe :
  - comparer l'élément recherché avec le milieu du tableau

Recherche par dichotomie

toggle : : reset

- Recherche d'un élément dans un tableau trié
- Principe :
  - comparer l'élément recherché avec le milieu du tableau
  - si $>$: recherche dans le tableau $\Leftrightarrow$ recherche dans la partie droite

Recherche par dichotomie

toggle : : reset

- Recherche d'un élément dans un tableau trié
- Principe :
  - comparer l'élément recherché avec le milieu du tableau
  - si $>$: recherche dans le tableau $\Leftrightarrow$ recherche dans la partie droite
  - si $<$: recherche dans le tableau $\Leftrightarrow$ recherche dans la partie gauche

Recherche par dichotomie

toggle : : reset

- Recherche d'un élément dans un tableau trié
- Principe :
  - comparer l'élément recherché avec le milieu du tableau
  - si $>$: recherche dans le tableau $\Leftrightarrow$ recherche dans la partie droite
  - si $<$: recherche dans le tableau $\Leftrightarrow$ recherche dans la partie gauche
  - si $=$: élément trouvé (condition d'arrêt)

Recherche par dichotomie

toggle : : reset

- Recherche d'un élément dans un tableau trié
- Principe :
  - comparer l'élément recherché avec le milieu du tableau
  - si $>$: recherche dans le tableau $\Leftrightarrow$ recherche dans la partie droite
  - si $<$: recherche dans le tableau $\Leftrightarrow$ recherche dans la partie gauche
  - si $=$: élément trouvé (condition d'arrêt)
  - autre condition d'arrêt : taille du tableau $\leqslant 1$

Recherche par dichotomie

toggle reset

```
def rech(tab, val, deb, fin):
     n = (deb + fin)//2
```

Recherche par dichotomie

toggle : : reset

```
def rech(tab, val, deb, fin):
    n = (deb + fin)//2
    if tab[n] == val:
        return True
```

Recherche par dichotomie

toggle : : reset

```
def rech(tab, val, deb, fin):
     n = (deb + fin)//2
     if tab[n] == val:
          return True
     elif deb >= fin :
          return False
```

Recherche par dichotomie

toggle : : reset

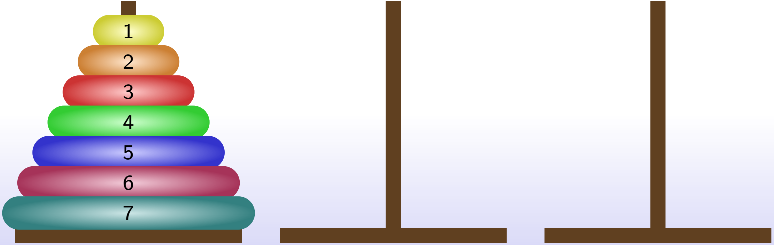
```
def rech(tab, val, deb, fin):
     n = (deb + fin)//2
     if tab[n] == val:
          return True
     elif deb >= fin :
          return False
     elif tab[n] > val:
          return rech(tab, val, deb, n-1)
     else:
          return rech(tab, val, n+1, fin)
```

Tours de Hanoï

toggle : : reset

Principe :

- Disques empilés : tour
- Ne jamais empiler un disque sur un disque plus petit
- Déplacer un seul disque à la fois



Tours de Hanoï : résolution

toggle : : reset

- Résolution par une fonction récursive
- Étapes de l'algorithme : hauteur de la tour
- Hauteur 0 : évident
- Récurrence :
  - on suppose savoir déplacer une tour de hauteur $h - 1$
  - on veut déplacer une tour de hauteur h de A vers B
  - déplacer les $h - 1$ premiers éléments de A vers C
  - déplacer l'élément restant de A vers B
  - déplacer les $h - 1$ premiers éléments de C vers B

Tours de Hanoï : algorithme

toggle : : reset

Procédure hanoi(entier n, entier source, entier dest, entier tmp)

```
/* n : hauteur de la tour                                          */
/* source, dest, tmp : position d'origine, finale et
   intermédiaire de la tour à déplacer                             */
```

si $n > 0$ **alors**

    hanoi (n-1, source, tmp, dest) ;
    déplacer(source, dest) ;
    hanoi (n-1, tmp, dest, source) ;

fin

Étude de l'algorithme tours de Hanoï

toggle : : reset

$C(n)$: nombre d'opération pour déplacer une tour de hauteur n

Étude de l'algorithme tours de Hanoï

toggle : : reset

$C(n)$: nombre d'opération pour déplacer une tour de hauteur n

$$\begin{cases} C(n+1) = 2C(n) + 1 \\ C(0) = 0 \end{cases}$$

Étude de l'algorithme tours de Hanoï

toggle : : reset

$C(n)$: nombre d'opération pour déplacer une tour de hauteur n

$$\begin{cases} C(n+1) = 2C(n) + 1 \\ C(0) = 0 \end{cases}$$

Résolution : $C(n) = 2^n - 1$

Étude de l'algorithme tours de Hanoï

toggle : : reset

$C(n)$: nombre d'opération pour déplacer une tour de hauteur n

$$\begin{cases} C(n+1) = 2C(n) + 1 \\ C(0) = 0 \end{cases}$$

Résolution : $C(n) = 2^n - 1$

Légende des tours de Hanoï : dans un temple Bouddhiste, des moines ont reçu pour mission de déplacer une tour de Hanoï de 64 disques. Lorsqu'ils l'auront déplacée, le monde tombera en poussière.

Étude de l'algorithme tours de Hanoï

toggle : : reset

$C(n)$: nombre d'opération pour déplacer une tour de hauteur n

$$\begin{cases} C(n+1) = 2C(n) + 1 \\ C(0) = 0 \end{cases}$$

Résolution : $C(n) = 2^n - 1$

Légende des tours de Hanoï : dans un temple Bouddhiste, des moines ont reçu pour mission de déplacer une tour de Hanoï de 64 disques. Lorsqu'ils l'auront déplacée, le monde tombera en poussière.

$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$

Un déplacement par seconde $\rightsquigarrow$ 580 milliards d'années

Quicksort

toggle : : reset

Procédure triSeg(tableau_entier tab, entier debut, entier fin)

si *debut* $<$ *fin* **alors**

Quicksort

toggle : : reset

Procédure triSeg(tableau_entier tab, entier debut, entier fin)

si *debut* $<$ *fin* **alors**

choisir élément pivot p entre debut et fin ;

Quicksort

toggle : : reset

Procédure triSeg(tableau_entier tab, entier debut, entier fin)

si *debut* $<$ *fin* **alors**

choisir élément pivot p entre debut et fin ;

placer pivot en i, $\leqslant$ pivot avant, $\geqslant$ pivot après ;

Quicksort

toggle : : reset

Procédure triSeg(tableau_entier tab, entier debut, entier fin)

si *debut* $<$ *fin* **alors**
  choisir élément pivot p entre debut et fin ;
  placer pivot en i, $\leqslant$ pivot avant, $\geqslant$ pivot après ;
  `triSeg` (tab, deb, i-1) ;
  `triSeg` (tab, i+1, fin) ;
fin

Quicksort

toggle reset

Procédure triSeg(tableau_entier tab, entier debut, entier fin)

si $debut < fin$ **alors**
  si $fin - debut \leqslant 1$ // cas particulier : 2 éléments à trier
  alors
    si $tab[debut] > tab[fin]$ **alors**
      permuter tab[debut], tab[fin] ;
    fin
  sinon
    choisir élément pivot p entre debut et fin ;
    placer pivot en i, $\leqslant$ pivot avant, $\geqslant$ pivot après ;
    triSeg (tab, deb, i-1) ;
    triSeg (tab, i+1, fin) ;
  fin
fin

Sommaire

Récursivité terminale

toggle : : reset

- A chaque appel récursif : empilement de données

Récursivité terminale

toggle : : reset

- A chaque appel récursif : empilement de données

$\Rightarrow$ limite au nombre d'appels possibles

Récursivité terminale

toggle : : reset

- A chaque appel récursif : empilement de données

⇒ limite au nombre d'appels possibles

- Solution : récursivité terminale

Récursivité terminale

toggle : : reset

- A chaque appel récursif : empilement de données

⇒ limite au nombre d'appels possibles

- Solution : récursivité terminale

Définition (Récursivité terminale)

Une fonction est dite récursive terminale s'il n'y a aucune opération sur ses appels récursifs.

Récursivité terminale

toggle : : reset

- A chaque appel récursif : empilement de données

⇒ limite au nombre d'appels possibles

- Solution : récursivité terminale

Définition (Récursivité terminale)

Une fonction est dite récursive terminale s'il n'y a aucune opération sur ses appels récursifs.

Exemple (Fonction récursive non terminale)

Factorielle :

```
return n*fact(n-1);
```

Écriture de fonction récursive terminale

toggle : : reset

- Idée générale : utiliser un accumulateur
- Paramètre qui contient le résultat intermédiaire

Exemple (Factorielle récursive terminale)

```
def fact(int n, int acc):
    if n==0 :
        return acc
    else:
        return fact(n-1, n*acc)
```

Fonctionnement

toggle : : reset

Appel :

```
fact(4, 1)
```

Si le langage sait optimiser la récursivité terminale, pas d'empilement d'appels ⇒ Modification des valeurs dans la pile.

```
fact(4, 1);
```

acc	1
n	4

Fonctionnement

toggle : : reset

Appel :

```
fact(4, 1)
```

Si le langage sait optimiser la récursivité terminale, pas d'empilement d'appels ⇒ Modification des valeurs dans la pile.

```
fact(3, 4);
```

acc	4
n	3

Fonctionnement

toggle reset

Appel :

```
fact(4, 1)
```

Si le langage sait optimiser la récursivité terminale, pas d'empilement d'appels ⇒ Modification des valeurs dans la pile.

```
fact(2, 12);
```

acc	12
n	2

Fonctionnement

toggle reset

Appel :

```
fact(4, 1)
```

Si le langage sait optimiser la récursivité terminale, pas d'empilement d'appels ⇒ Modification des valeurs dans la pile.

```
fact(1, 24);
```

acc	24
n	1

Fonctionnement

toggle : : reset

Appel :

```
fact(4, 1)
```

Si le langage sait optimiser la récursivité terminale, pas d'empilement d'appels ⇒ Modification des valeurs dans la pile.

```
fact(0, 24);
```

acc	24
n	0

Fonctionnement

toggle : : reset

Appel :

```
fact(4, 1)
```

Si le langage sait optimiser la récursivité terminale, pas d'empilement d'appels ⇒ Modification des valeurs dans la pile.

```
fact(0, 24);
```

acc	24
n	0

Remarque

Python n'optimise pas la récursivité terminale