Langage et algorithmique
- Récursivité -

A. Malek TOUMI

toumiab@ensta-bretagne.fr

2015/2016

ENSTA Bretagne

Sommaire

Sommaire

Fonction fact

- Paramètres formels

```
def fact(nb):
     if(nb == 0):
     ...

def cnp(n, p):
     num = fact(n)
     ...
```

Fonction fact

- Paramètres formels
- Paramètres effectifs

```
def fact(nb):
    if(nb == 0):
    ...

def cnp(n, p):
    num = fact(n)
    ...
```

Sommaire

Variables globales/locales

Remarques

- Les variables globales sont visibles dans les fonctions appelées mais on ne peut les réaffectées

Variables globales/locales

Remarques

- Les variables globales sont visibles dans les fonctions appelées mais on ne peut les réaffectées
- Le contenu d'une variable globale est modifiable si elle est mutable (modifiable).

Variables globales/locales

Remarques

- Les variables globales sont visibles dans les fonctions appelées mais on ne peut les réaffectées
- Le contenu d'une variable globale est modifiable si elle est mutable (modifiable).
- Les variables locales d'une fonction ne sont pas visibles dans les niveaux supérieurs

Variables globales/locales

Remarques

- Les variables globales sont visibles dans les fonctions appelées mais on ne peut les réaffectées
- Le contenu d'une variable globale est modifiable si elle est mutable (modifiable).
- Les variables locales d'une fonction ne sont pas visibles dans les niveaux supérieurs
- Les fonctions peuvent modifier des variables globales avec l'instruction **global**

Variables globales/locales

Remarques

- Les variables globales sont visibles dans les fonctions appelées mais on ne peut les réaffectées
- Le contenu d'une variable globale est modifiable si elle est mutable (modifiable).
- Les variables locales d'une fonction ne sont pas visibles dans les niveaux supérieurs
- Les fonctions peuvent modifier des variables globales avec l'instruction **global**
- La fonction **globals()** retourne le dictionnaire des objets globaux.

Variables globales/locales

Remarques

- Les variables globales sont visibles dans les fonctions appelées mais on ne peut les réaffectées
- Le contenu d'une variable globale est modifiable si elle est mutable (modifiable).
- Les variables locales d'une fonction ne sont pas visibles dans les niveaux supérieurs
- Les fonctions peuvent modifier des variables globales avec l'instruction **global**
- La fonction **globals()** retourne le dictionnaire des objets globaux.
- La fonction **locals()** retourne la liste des objets l'espace local en cours

Variables globales/locales

Exemple (Modification d'une variable globale en local)

```
def incremCompt():   # fonction sans param. d'entrée
    global compteur  # définition var. globale
    compteur += 1
    print('Appelé', compteur, 'fois')

compteur = 0 # initialisation du compteur
incremCompt() # => affiche: Appelé 1 fois
incremCompt() # => affiche: Appelé 2 fois
incremCompt() # => affiche: Appelé 3 fois
```

Sommaire

Sommaire

Définition

Définition (Fonction récursive)

Une fonction ou une méthode est dite récursive si elle se définit à partir d'elle même, c'est-à-dire si elle comporte un appel à elle même dans son corps.

Définition

Définition (Fonction récursive)

Une fonction ou une méthode est dite récursive si elle se définit à partir d'elle même, c'est-à-dire si elle comporte un appel à elle même dans son corps.

Attention

Éviter les boucles infinies (appel systématique à la fonction).

Définition

Définition (Fonction récursive)

Une fonction ou une méthode est dite récursive si elle se définit à partir d'elle même, c'est-à-dire si elle comporte un appel à elle même dans son corps.

Attention

Éviter les boucles infinies (appel systématique à la fonction).

Exemple (Fonction infinie)

```
def sansFin(n):
     return n+sansFin(n-1)
```

Exemple

Traduction immédiate des fonctions définies par récurrence.

Exemple (Factorielle)

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)! \end{cases}$$

Exemple

Traduction immédiate des fonctions définies par récurrence.

Exemple (Factorielle)

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)! \end{cases}$$

```
def fact(n):
```

Exemple

Traduction immédiate des fonctions définies par récurrence.

Exemple (Factorielle)

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)! \end{cases}$$

```
def fact(n):
    if n==0 :
        return 1
```

Exemple

Traduction immédiate des fonctions définies par récurrence.

Exemple (Factorielle)

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)! \end{cases}$$

```
def fact(n):
    if n==0 :
        return 1
    else:
        return n * fact(n-1)
```

Exemple

Traduction immédiate des fonctions définies par récurrence.

Exemple (Factorielle)

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n(n-1)! \end{cases}$$

```
def fact(n):
     if n==0 : # Condition d'arrêt
          return 1
     else:
          return n * fact(n-1)
```

Condition d'arrêt

Définition (Condition d'arrêt)

Condition pour laquelle il n'y a pas d'appel récursif.

Condition d'arrêt

Définition (Condition d'arrêt)

Condition pour laquelle il n'y a pas d'appel récursif.

Important

Toute fonction récursive doit comporter au moins une condition d'arrêt. Sinon : boucle infinie.

Condition d'arrêt

Définition (Condition d'arrêt)

Condition pour laquelle il n'y a pas d'appel récursif.

Important

Toute fonction récursive doit comporter au moins une condition d'arrêt. Sinon : boucle infinie.

Remarque

Une fonction peut comporter plusieurs conditions d'arrêt.

Condition d'arrêt

Exemple (Plusieurs conditions d'arrêt)

```
def fact(n):
      if (n==0):
            return 1
      elif (n==1):
            return 1
      else :
            return n * fact(n-1)
```

Condition d'arrêt

Exemple (Plusieurs conditions d'arrêt)

```
def fact(n):
    if (n==0):
        return 1
    elif (n==1):
        return 1
    else :
        return n * fact(n-1)
```

Sommaire

Pile et récursivité

- Pile d'appel : notion fondamentale pour la récursivité.
- Principe : tous les appels sont empilés, traités, puis dépilés.

```
def fact(n) {
     if n==0:
          return 1
     else:
          return n*fact(n-1)
}
```

fact(2)

Pile et récursivité

- Pile d'appel : notion fondamentale pour la récursivité.
- Principe : tous les appels sont empilés, traités, puis dépilés.

```
def fact(n) {
    if n==0:
        return 1
    else:
        return n*fact(n-1)
}
```

fact(2)	=2*fact(1)

Pile et récursivité

- Pile d'appel : notion fondamentale pour la récursivité.
- Principe : tous les appels sont empilés, traités, puis dépilés.

```
def fact(n) {
     if n==0:
          return 1
     else:
          return n*fact(n-1)
}
```

fact(1)	
fact(2)	=2*fact(1)

Pile et récursivité

- Pile d'appel : notion fondamentale pour la récursivité.
- Principe : tous les appels sont empilés, traités, puis dépilés.

```
def fact(n) {
     if n==0:
          return 1
     else:
          return n*fact(n-1)
}
```

fact(1)	=1*fact(0)
fact(2)	=2*fact(1)

Pile et récursivité

- Pile d'appel : notion fondamentale pour la récursivité.
- Principe : tous les appels sont empilés, traités, puis dépilés.

```
def fact(n) {
    if n==0:
        return 1
    else:
        return n*fact(n-1)
}
```

fact(0)	
fact(1)	=1*fact(0)
fact(2)	=2*fact(1)

Pile et récursivité

- Pile d'appel : notion fondamentale pour la récursivité.
- Principe : tous les appels sont empilés, traités, puis dépilés.

```
def fact(n) {
    if n==0:
        return 1
    else:
        return n*fact(n-1)
}
```

fact(0)	=1
fact(1)	=1*fact(0)
fact(2)	=2*fact(1)

Pile et récursivité

- Pile d'appel : notion fondamentale pour la récursivité.
- Principe : tous les appels sont empilés, traités, puis dépilés.

```
def fact(n) {
    if n==0:
        return 1
    else:
        return n*fact(n-1)
}
```

fact(1)	=1
fact(2)	=2*fact(1)

Pile et récursivité

- Pile d'appel : notion fondamentale pour la récursivité.
- Principe : tous les appels sont empilés, traités, puis dépilés.

```
def fact(n) {
     if n==0:
          return 1
     else:
          return n*fact(n-1)
}
```

fact(2)	=2

Sommaire

Post et pré-traitement

Exemple (Puissance d'entier : x**n)

```
def puissance(x,n):
    if n == 0:

        return 1
    else:

        return x* puissance (x, n-1)


puissance(2,5)
# sortie
```

Post et pré-traitement

Exemple (Puissance d'entier : x**n)

```
def puissance(x,n):
    if n == 0:
        print("cas de base n :", n)
        return 1 # cas de base
    else:

        return x* puissance (x, n-1)


puissance(2,5)
# sortie
```

Post et pré-traitement

Exemple (Puissance d'entier : x**n)

```
def puissance(x,n):
    if n == 0:
        print("cas de base n :", n)
        return 1 # cas de base
    else:
        print("prétraitement pour n :", n)
        return x* puissance (x, n-1)


puissance(2,5)
# sortie
pretraitement de n :  5
pretraitement de n :  4
pretraitement de n :  3
pretraitement de n :  2
pretraitement de n :  1
cas de base n : 0
```

Post et pré-traitement

Exemple (Puissance d'entier : x**n)

```
def puissance(x,n):
    if n == 0:
        print("cas de base n :", n)
        return 1 # cas de base
    else:

        y = x* puissance (x, n-1)
        print("post-traitement n :", n)
        return y
puissance(2,5)
# sortie

cas de base n : 0
post-traitement de n: 1
post-traitement de n : 2
post-traitement de n : 3
post-traitement de n : 4
post-traitement de n : 5
```

Post et pré-traitement

Exemple (Puissance d'entier : x**n)

```
def puissance(x,n):
    if n == 0:
        print("cas de base n :", n)
        return 1 # cas de base
    else:
        print("prétraitement pour n :", n)
        y = x* puissance (x, n-1)
        print("post-traitement n :", n)
        return y
puissance(2,5)
# sortie
pretraitement de n :  5
pretraitement de n :  4
pretraitement de n :  3
pretraitement de n :  2
pretraitement de n :  1
cas de base n : 0
post-traitement de n: 1
post-traitement de n : 2
post-traitement de n : 3
post-traitement de n : 4
post-traitement de n : 5
```

Sommaire

Suite de Fibonacci

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

Suite de Fibonacci

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

- Deux conditions d'arrêt

Suite de Fibonacci

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

- Deux conditions d'arrêt
- Une condition de récurrence

Suite de Fibonacci

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

```
def fibo(n):
    if n==0:
        return 0
    elif n==1:
        return 1
    else
        return fibo(n-1) + fibo(n-2)
```

Explosion de la pile d'appel

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(3)

Explosion de la pile d'appel

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(3) $=$ f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appel

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(2)	
f(3)	= f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appel

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(2)	= f(1)+f(0)
f(3)	= f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appel

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(1)	
f(2)	= f(1)+f(0)
f(3)	= f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appel

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(1)	$=1$
f(2)	$=$ f(1)+f(0)
f(3)	$=$ f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appel

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(0)	
f(1)	$= 1$
f(2)	$=$ f(1)+f(0)
f(3)	$=$ f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appel

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(0)	= 0
f(1)	= 1
f(2)	= f(1)+f(0)
f(3)	= f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appel

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(2)	$= 1$
f(3)	$=$ f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appel

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(1)
f(2) $= 1$
f(3) $=$ f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appel

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(1)	$=1$
f(2)	$=1$
f(3)	$=$ f(2)+f(1)

Explosion de la pile d'appel

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(3)	= 2

Explosion de la pile d'appel

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(3)	=	2

- Traduction immédiate de la formule de récurrence

Explosion de la pile d'appel

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(3) $=$ 2

- Traduction immédiate de la formule de récurrence

$\Rightarrow$ peu efficace dans ce cas

Explosion de la pile d'appel

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(3)	=	2

- Traduction immédiate de la formule de récurrence

$\Rightarrow$ peu efficace dans ce cas

- Nombre d'appel à F en $\Theta(2^n)$

Explosion de la pile d'appel

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(3) = 2

- Traduction immédiate de la formule de récurrence

$\Rightarrow$ peu efficace dans ce cas

- Nombre d'appel à F en $\Theta(2^n)$

Important

- Le nombre d'appels est limité par défaut, à 1000 appels.
  $\Rightarrow$ **RuntimeError : maximum recursion depth exceeded ...**

Explosion de la pile d'appel

Évolution de la pile lors du calcul de F(3) :

f(3) = 2

- Traduction immédiate de la formule de récurrence

$\Rightarrow$ peu efficace dans ce cas

- Nombre d'appel à F en $\Theta(2^n)$

Important

- Le nombre d'appels est limité par défaut, à 1000 appels.
  $\Rightarrow$ **RuntimeError : maximum recursion depth exceeded ...**
- Exemple : Augmenter la taille à 1500 :
  `sys.setrecursionlimit(1500)`

Sommaire

Conception d'algorithme récursif

- Découper l'algorithme en étapes

Conception d'algorithme récursif

- Découper l'algorithme en étapes
- Déterminer les règles de passage d'une étape à l'autre

Conception d'algorithme récursif

- Découper l'algorithme en étapes
- Déterminer les règles de passage d'une étape à l'autre

$\Rightarrow$ l'étape n dépend de l'étape $n-1$ (éventuellement $n-2$)

Conception d'algorithme récursif

- Découper l'algorithme en étapes
- Déterminer les règles de passage d'une étape à l'autre

$\Rightarrow$ l'étape n dépend de l'étape $n-1$ (éventuellement $n-2$)

- Déterminer les conditions d'arrêt

Conception d'algorithme récursif

- Découper l'algorithme en étapes
- Déterminer les règles de passage d'une étape à l'autre

$\Rightarrow$ l'étape n dépend de l'étape $n-1$ (éventuellement $n-2$)

- Déterminer les conditions d'arrêt

Conception d'algorithme récursif

- Découper l'algorithme en étapes
- Déterminer les règles de passage d'une étape à l'autre

$\Rightarrow$ l'étape n dépend de l'étape $n-1$ (éventuellement $n-2$)

- Déterminer les conditions d'arrêt

Remarque

Tout algorithme récursif peut s'écrire de manière itérative, et réciproquement.

Sommaire

Recherche par dichotomie

- Recherche d'un élément dans un tableau trié

Recherche par dichotomie

- Recherche d'un élément dans un tableau trié
- Principe :

Recherche par dichotomie

- Recherche d'un élément dans un tableau trié
- Principe :
    - comparer l'élément recherché avec le milieu du tableau

Recherche par dichotomie

- Recherche d'un élément dans un tableau trié
- Principe :
  - comparer l'élément recherché avec le milieu du tableau
  - si $>$: recherche dans le tableau $\Leftrightarrow$ recherche dans la partie droite

Recherche par dichotomie

- Recherche d'un élément dans un tableau trié
- Principe :
  - comparer l'élément recherché avec le milieu du tableau
  - si $>$: recherche dans le tableau $\Leftrightarrow$ recherche dans la partie droite
  - si $<$: recherche dans le tableau $\Leftrightarrow$ recherche dans la partie gauche

Recherche par dichotomie

- Recherche d'un élément dans un tableau trié
- Principe :
  - comparer l'élément recherché avec le milieu du tableau
  - si $>$: recherche dans le tableau $\Leftrightarrow$ recherche dans la partie droite
  - si $<$: recherche dans le tableau $\Leftrightarrow$ recherche dans la partie gauche
  - si $=$: élément trouvé (condition d'arrêt)

Recherche par dichotomie

- Recherche d'un élément dans un tableau trié
- Principe :
  - comparer l'élément recherché avec le milieu du tableau
  - si $>$: recherche dans le tableau $\Leftrightarrow$ recherche dans la partie droite
  - si $<$: recherche dans le tableau $\Leftrightarrow$ recherche dans la partie gauche
  - si $=$: élément trouvé (condition d'arrêt)
  - autre condition d'arrêt : taille du tableau $\leqslant 1$

Recherche par dichotomie

```
def rech(tab, val, deb, fin):
    n = (deb + fin)//2
```

Recherche par dichotomie

```
def rech(tab, val, deb, fin):
    n = (deb + fin)//2
    if tab[n] == val:
        return True
```

Recherche par dichotomie

```
def rech(tab, val, deb, fin):
     n = (deb + fin)//2
     if tab[n] == val:
          return True
     elif deb >= fin :
          return False
```

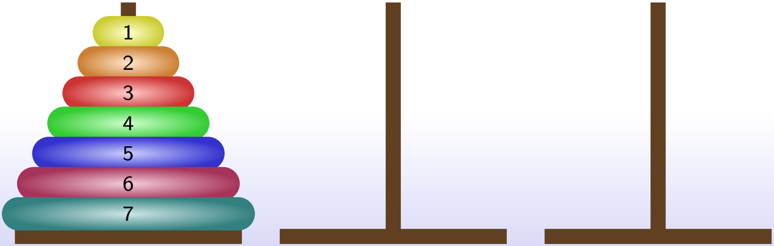
Recherche par dichotomie

```
def rech(tab, val, deb, fin):
     n = (deb + fin)//2
     if tab[n] == val:
          return True
     elif deb >= fin :
          return False
     elif tab[n] > val:
          return rech(tab, val, deb, n-1)
     else:
          return rech(tab, val, n+1, fin)
```

Tours de Hanoï

Principe :

- Disques empilés : tour
- Ne jamais empiler un disque sur un disque plus petit
- Déplacer un seul disque à la fois



Tours de Hanoï : résolution

- Résolution par une fonction récursive
- Étapes de l'algorithme : hauteur de la tour
- Hauteur 0 : évident
- Récurrence :
  - on suppose savoir déplacer une tour de hauteur $h-1$
  - on veut déplacer une tour de hauteur h de A vers B
  - déplacer les $h-1$ premiers éléments de A vers C
  - déplacer l'élément restant de A vers B
  - déplacer les $h-1$ premiers éléments de C vers B

Tours de Hanoï : algorithme

Procédure hanoi(entier n, entier source, entier dest, entier tmp)

```
/* n : hauteur de la tour                                        */
/* source, dest, tmp : position d'origine, finale et
   intermédiaire de la tour à déplacer                           */
```

si $n > 0$ **alors**

  hanoi (n-1, source, tmp, dest) ;

  déplacer(source, dest) ;

  hanoi (n-1, tmp, dest, source) ;

fin

Étude de l'algorithme tours de Hanoï

$C(n)$: nombre d'opération pour déplacer une tour de hauteur n

Étude de l'algorithme tours de Hanoï

$C(n)$: nombre d'opération pour déplacer une tour de hauteur n

$$\begin{cases} C(n+1) = 2C(n) + 1 \\ C(0) = 0 \end{cases}$$

Étude de l'algorithme tours de Hanoï

$C(n)$: nombre d'opération pour déplacer une tour de hauteur n

$$\left\{ \begin{array}{l} C(n+1) = 2C(n) + 1 \\ C(0) = 0 \end{array} \right.$$

Résolution : $C(n) = 2^n - 1$

Étude de l'algorithme tours de Hanoï

$C(n)$: nombre d'opération pour déplacer une tour de hauteur n

$$\begin{cases} C(n+1) = 2C(n) + 1 \\ C(0) = 0 \end{cases}$$

Résolution : $C(n) = 2^n - 1$

Légende des tours de Hanoï : dans un temple Bouddhiste, des moines ont reçu pour mission de déplacer une tour de Hanoï de 64 disques. Lorsqu'ils l'auront déplacée, le monde tombera en poussière.

Étude de l'algorithme tours de Hanoï

$C(n)$: nombre d'opération pour déplacer une tour de hauteur n

$$\begin{cases} C(n+1) = 2C(n) + 1 \\ C(0) = 0 \end{cases}$$

Résolution : $C(n) = 2^n - 1$

Légende des tours de Hanoï : dans un temple Bouddhiste, des moines ont reçu pour mission de déplacer une tour de Hanoï de 64 disques. Lorsqu'ils l'auront déplacée, le monde tombera en poussière.
$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$
Un déplacement par seconde $\leadsto$ 580 milliards d'années

Quicksort

Procédure triSeg(tableau_entier tab, entier debut, entier fin)

si *debut* $<$ *fin* **alors**

Quicksort

Procédure triSeg(tableau_entier tab, entier debut, entier fin)

si *debut* $<$ *fin* **alors**

choisir élément pivot p entre debut et fin ;

Quicksort

Procédure triSeg(tableau_entier tab, entier debut, entier fin)

si *debut* $<$ *fin* **alors**

  choisir élément pivot p entre debut et fin ;
  placer pivot en i, $\leqslant$ pivot avant, $\geqslant$ pivot après ;

Quicksort

Procédure triSeg(tableau_entier tab, entier debut, entier fin)

si $debut < fin$ **alors**

  choisir élément pivot p entre debut et fin ;
  placer pivot en i, $\leqslant$ pivot avant, $\geqslant$ pivot après ;
  `triSeg` (tab, deb, i-1) ;
  `triSeg` (tab, i+1, fin) ;

fin

Quicksort

Procédure triSeg(tableau_entier tab, entier debut, entier fin)

```
si debut < fin alors
    si fin − debut ⩽ 1 // cas particulier : 2 éléments à trier
    alors
        si tab[debut] > tab[fin] alors
            permuter tab[debut], tab[fin] ;
        fin
    sinon
        choisir élément pivot p entre debut et fin ;
        placer pivot en i, ⩽ pivot avant, ⩾ pivot après ;
        triSeg (tab, deb, i-1) ;
        triSeg (tab, i+1, fin) ;
    fin
fin
```

Sommaire

Récursivité terminale

- A chaque appel récursif : empilement de données

Récursivité terminale

- A chaque appel récursif : empilement de données

$\Rightarrow$ limite au nombre d'appels possibles

Récursivité terminale

- A chaque appel récursif : empilement de données

$\Rightarrow$ limite au nombre d'appels possibles

- Solution : récursivité terminale

Récursivité terminale

- A chaque appel récursif : empilement de données

⇒ limite au nombre d'appels possibles

- Solution : récursivité terminale

Définition (Récursivité terminale)

Une fonction est dite récursive terminale s'il n'y a aucune opération sur ses appels récursifs.

Récursivité terminale

- A chaque appel récursif : empilement de données

$\Rightarrow$ limite au nombre d'appels possibles

- Solution : récursivité terminale

Définition (Récursivité terminale)

Une fonction est dite récursive terminale s'il n'y a aucune opération sur ses appels récursifs.

Exemple (Fonction récursive non terminale)

Factorielle :

```
return n*fact(n-1);
```

Écriture de fonction récursive terminale

- Idée générale : utiliser un accumulateur
- Paramètre qui contient le résultat intermédiaire

Exemple (Factorielle récursive terminale)

```
def fact(int n, int acc):
    if n==0 :
        return acc
    else:
        return fact(n-1, n*acc)
```

Fonctionnement :

Appel :

```
fact(4, 1)
```

Si le langage sait optimiser la récursivité terminale, pas d'empilement d'appels ⇒ Modification des valeurs dans la pile.

```
fact(4, 1);
```

acc	1
n	4

Fonctionnement :

Appel :

```
fact(4, 1)
```

Si le langage sait optimiser la récursivité terminale, pas d'empilement d'appels ⇒ Modification des valeurs dans la pile.

```
fact(3, 4);
```

acc	4
n	3

Fonctionnement :

Appel :

```
fact(4, 1)
```

Si le langage sait optimiser la récursivité terminale, pas d'empilement d'appels ⇒ Modification des valeurs dans la pile.

```
fact(2, 12);
```

acc	12
n	2

Fonctionnement :

Appel :

```
fact(4, 1)
```

Si le langage sait optimiser la récursivité terminale, pas d'empilement d'appels ⇒ Modification des valeurs dans la pile.

```
fact(1, 24);
```

acc	24
n	1

Fonctionnement :

Appel :

```
fact(4, 1)
```

Si le langage sait optimiser la récursivité terminale, pas d'empilement d'appels $\Rightarrow$ Modification des valeurs dans la pile.

```
fact(0, 24);
```

acc	24
n	0

Fonctionnement :

Appel :

```
fact(4, 1)
```

Si le langage sait optimiser la récursivité terminale, pas d'empilement d'appels $\Rightarrow$ Modification des valeurs dans la pile.

```
fact(0, 24);
```

acc	24
n	0

Remarque

Python n'optimise pas la récursivité terminale