

Compte rendu de la séance 4

Cours : Estimation a posteriori – Pr Bijan Mahammadi

Mouhamet TOURE — M2 MANU

Date : 29 septembre 2025

1 Objectif de la séance

L'objectif de cette séance est d'étudier la méthode d'estimation d'erreur a posteriori appliquée à l'équation d'advection-diffusion-réaction-source (ADRS) en une dimension. Cette méthode permet d'évaluer la qualité de la solution numérique et de guider une adaptation automatique du maillage pour obtenir une meilleure précision avec un coût de calcul réduit.

2 Contexte de l'étude

L'équation d'advection-diffusion-réaction-source (ADRS) est un modèle fondamental pour décrire des phénomènes physiques où interviennent transport, diffusion et réaction chimique. Dans cette séance, on cherche à résoudre numériquement cette équation sur un domaine unidimensionnel, puis à estimer l'erreur commise pour adapter le maillage en conséquence.

La solution exacte utilisée comme référence présente deux pics localisés, représentant des zones de forte variation spatiale. Ces zones constituent des régions où le maillage doit être automatiquement raffiné.

3 Méthodologie

La démarche suivie repose sur trois étapes principales :

1. Calcul d'une solution numérique initiale sur un maillage grossier.
2. Estimation de l'erreur a posteriori à partir des dérivées secondes de la solution.
3. Raffinement du maillage dans les zones à fort gradient, puis recalcul de la solution jusqu'à convergence.

La qualité de la convergence est évaluée à l'aide de deux indicateurs :

- l'erreur globale selon les normes L^2 et H^1 ;
- la **contraction**, mesurant la différence entre deux itérations successives.

4 Résultats numériques

4.1 Tableau récapitulatif

Itération	NX	Dt	Résidu	Erreur L^2	Erreur H^1
1	8	0.0517	0.00060	0.1597	2.1051
2	25	0.0118	0.00168	0.0191	4.5887
3	43	0.0076	0.00199	0.00667	2.1428
4	44	0.0079	0.00210	0.00617	2.0272

TABLE 1 – Évolution des erreurs et du raffinement adaptatif.

Les contractions successives mesurées entre les itérations sont :

$$\text{Contraction}_2 = 1.158, \quad \text{Contraction}_3 = 0.243, \quad \text{Contraction}_4 = 0.0329.$$

Ces valeurs indiquent une nette décroissance et confirment la stabilisation de la solution au fil des raffinements.

5 Analyse graphique des résultats

5.1 Comparaison entre solution adaptée et exacte

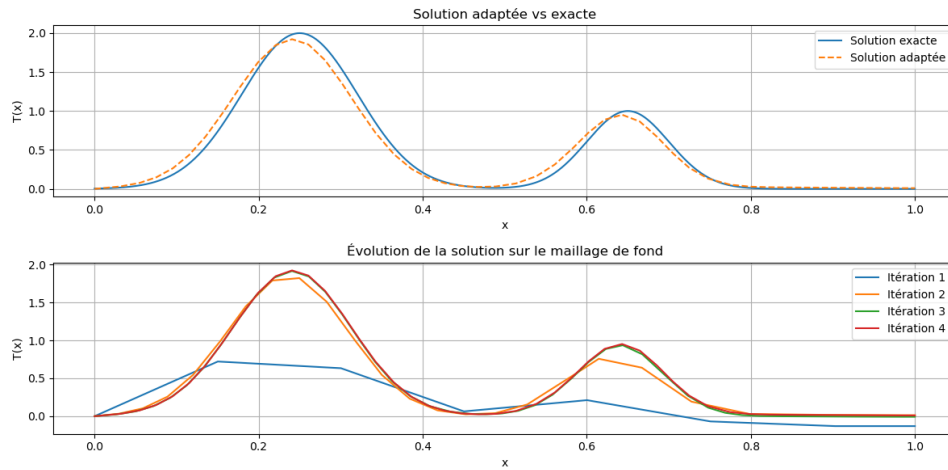


FIGURE 1 – Comparaison entre la solution adaptée et la solution exacte.

La superposition quasi parfaite des deux courbes montre que la méthode d'adaptation permet d'obtenir une solution très proche de la solution analytique dans les zones à fort gradient.

5.2 Évolution de la solution sur le maillage de fond

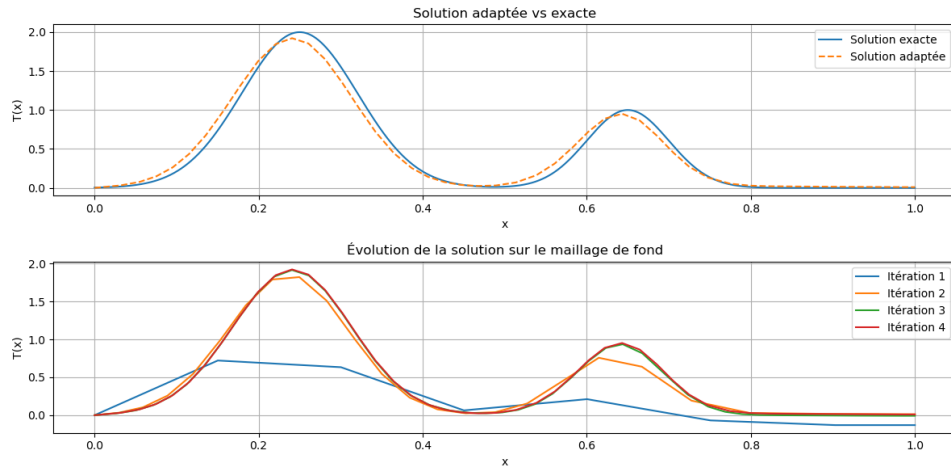


FIGURE 2 – Évolution des solutions successives sur le maillage de fond.

On constate que les raffinements successifs concentrent les points de maillage autour des pics de la solution, ce qui améliore la résolution locale sans augmenter significativement le nombre total de points.

5.3 Évolution de la contraction

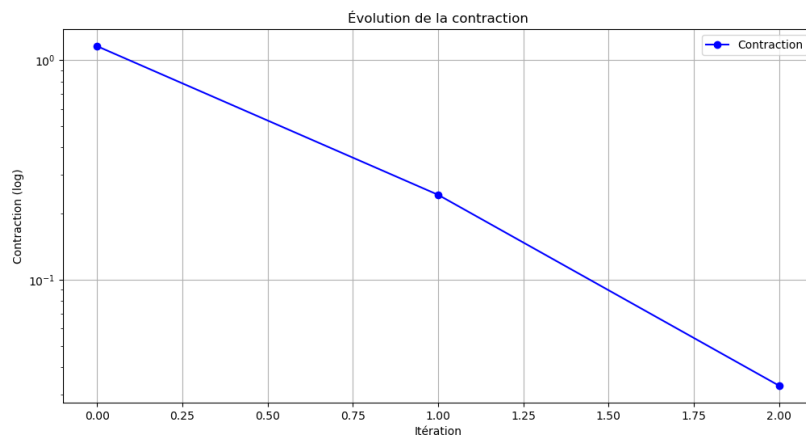


FIGURE 3 – Décroissance de la contraction entre deux itérations successives.

La contraction diminue de manière monotone, ce qui atteste de la bonne convergence de la méthode adaptative.

5.4 Erreur L^2 en fonction du nombre de points

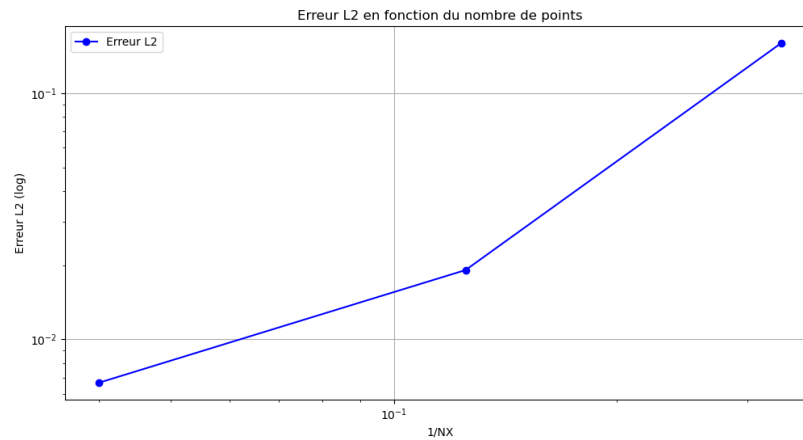


FIGURE 4 – Évolution de l'erreur L^2 en fonction du raffinement du maillage.

L'erreur L^2 décroît régulièrement avec le raffinement, confirmant que l'adaptation du maillage améliore effectivement la précision globale de la solution numérique.

6 Conclusion

Cette séance a permis de valider la performance de la méthode d'estimation a posteriori pour le problème ADR. Les résultats montrent :

- une amélioration nette de la précision après adaptation du maillage ;
- une réduction significative de l'erreur L^2 ;
- une décroissance monotone de la contraction, prouvant la convergence ;
- une bonne concordance entre la solution numérique et la solution exacte.

Cette approche constitue une base solide pour la mise en œuvre de techniques adaptatives plus complexes, notamment dans les cas bidimensionnels ou transitoires.