Compte rendu - Séance 1
Prise en main : discrétisation, erreurs et adaptation

Mouhamet Toure - Master 2 MANU

08 septembre 2025

Introduction

La séance 1 visait à se familiariser avec un environnement Python (Spyder / Jupyter), implémenter et étudier un schéma d'Euler explicite pour l'EDO $u'(t) = -\lambda u(t)$ et comparer à la solution exacte, quantifier l'erreur en norme L^2 (et erreur sur la dérivée) en fonction du pas temporel, produire et interpréter des visualisations pour un problème d'advection-diffusion (2D) avec source gaussienne, puis étudier la version 1D et les conditions aux limites (Dirichlet/Neumann).

1 Partie 1 : EDO simple – Euler explicite vs solution exacte

1.1 Problème

Résoudre

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u, \qquad u(0) = 1, \qquad \lambda = 1,$$

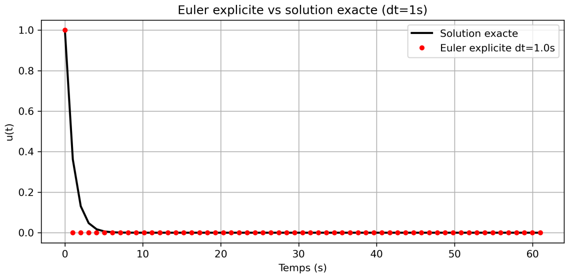
sur une durée $T = 60$ s (1 minute). La solution exacte est

$$u_{\text{ex}}(t) = \exp(-\lambda t).$$

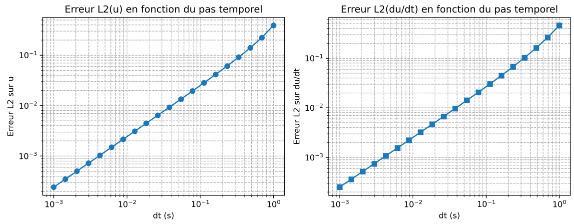
On implémente le schéma d'Euler explicite :

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t\,(-\lambda u^n).$$

1.2 Résultats des simulations



(a) Solution exacte (ligne) et solution numérique Euler (marqueurs), $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$, $T = 60$ s.



(b) Erreur en norme L^2 de la fonction et de sa dérivée en fonction du pas temporel Δt (20 valeurs, décroissant de 1 à 0.001).

FIGURE 1 – Comparaison solution exacte / Euler explicite et étude de convergence temporelle.

Pour $\Delta t = 1$ (très grossier) la solution numérique diverge rapidement de la solution exacte en amplitude : l'erreur instantanée augmente mais le schéma reste stable ici car $\lambda = 1$ (condition de stabilité pour Euler explicite : $\Delta t < 1/\lambda$ pour ce problème linéaire simple).
La courbe $\text{Erreur}_{L^2}(\Delta t)$ montre une décroissance approximativement proportionnelle à Δt (ordre 1 en temps pour Euler explicite) : en log-log la pente attendue est proche de 1.

L'erreur sur la dérivée temporelle u_t (approchée par différence) décroît aussi linéairement avec Δt mais est en général plus sensible : la dérivée amplifie l'erreur numérique.

En resumé pour obtenir une erreur faible il faut réduire Δt — mais le coût CPU augmente ; il convient d'équilibrer précision et coût.

2 Partie 2 : advection–diffusion–réaction 2D avec source gaussienne

2.1 Formulation

Equation 2D :

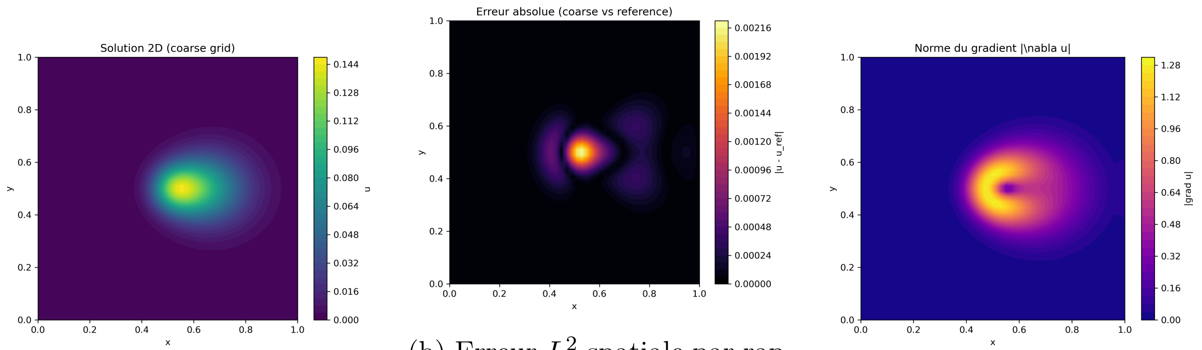
$$u_t + \mathbf{V} \cdot \nabla u - \nu \Delta u = -\lambda u + f(t, \mathbf{s}),$$

avec la source gaussienne centrée en $\mathbf{s}_c$:

$$f(t, \mathbf{s}) = T_c \exp\big(-k\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_c\|^2\big).$$

Conditions aux limites : Dirichlet sur les bords entrants, Neumann sur les autres bords.

2.2 Résultats des simulations



(a) Solution numérique $u(\mathbf{s}, t^*)$ à un instant représentatif.

(b) Erreur L^2 spatiale par rapport à une référence (maillage fin).

(c) Norme spatiale du gradient $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$.

FIGURE 2 – Solution 2D, erreur spatiale et norme du gradient.

La solution montre un pic localisé autour de $\mathbf{s}_c$ dû à la source gaussienne ; l'advection déplace et étire ce pic dans la direction de $\mathbf{V}$, la diffusion le lisse.

L'erreur L^2 calculée par rapport à une solution de référence sur un maillage plus fin indique les zones où le maillage grossier est insuffisant (typiquement près du pic ou des couches d'advection).

La norme du gradient met en évidence les régions à forte variation (fronts, bords du pic) et peut servir de critère pour l'adaptation de maillage (raffiner où $|\nabla u|$ est grand).

3 Partie 3 : Passage en 1D et conditions aux limites

3.1 Réduction

En 1D, l'équation devient :

$$u_t + v_1 u_x - \nu u_{xx} = -\lambda u + f(t, x),$$

avec condition initiale $u(0, x) = u_0(x)$.

Compatible avec :

$$u(t, 0) = u_\ell \quad \text{(Dirichlet non homogène à gauche)}$$

$$u_x(t, L) = g \quad \text{(Neumann non homogène à droite)}$$

3.2 Choix d'une condition initiale admissible

On choisit une $u_0(x)$ telle que $u_0(0) = u_\ell$ et $u_0'(L) = g$. Par exemple, une gaussienne ajustée pour vérifier ces conditions ou une fonction polynômiale construite sur l'intervalle. Il est conseillé de vérifier analytiquement la compatibilité (remplacer $x = 0$ et calculer la dérivée en $x = L$).

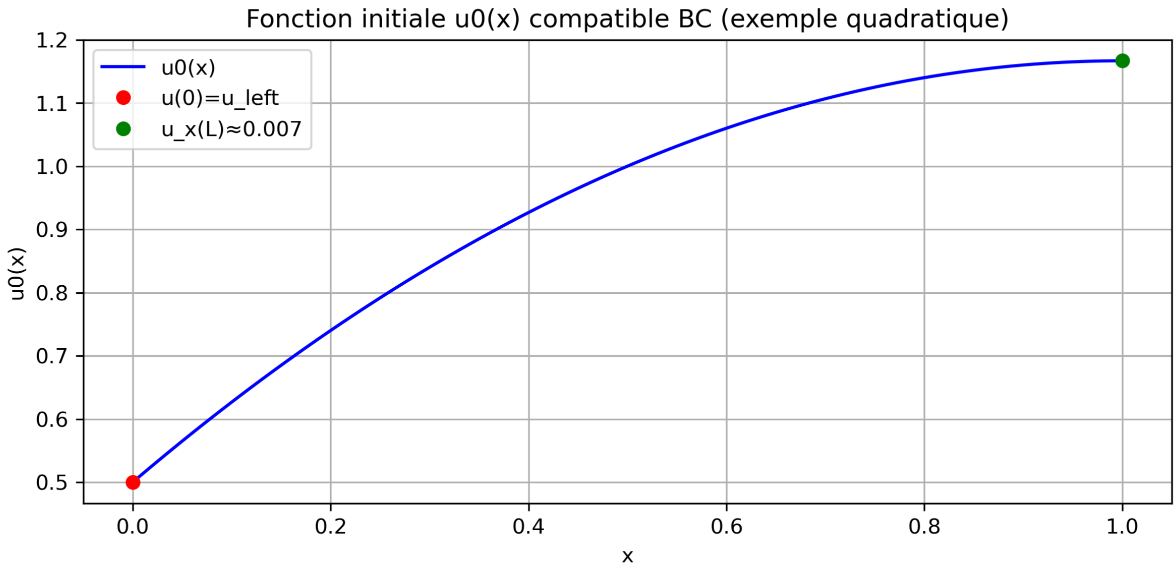


FIGURE 3 – Solution adrs 1D

3.3 Interprétation

L'ordre de précision des différences finies est de second ordre à l'intérieur du domaine pour les dérivées centrées, mais aux bords l'ordre décroît (schéma à une face).
En pratique, la mise en œuvre numérique nécessite d'imposer soigneusement la condition de Neumann (extrapolation ou différence finie d'ordre 1/2 selon le schéma).

Conclusion et travaux à poursuivre

— Comparer les schémas d'Euler implicite / Crank–Nicolson pour le même problème afin d'étudier la stabilité à grands pas de temps.
— Introduire un critère d'adaptation de maillage basé sur $|\nabla u|$ ou $|u_{xx}|$.
— Vérifier la robustesse des conditions aux limites (Dirichlet/Neumann) sur des cas tests analytiques.