第 29 卷　第 3 期
2007 年 3 月

系统工程与电子技术
Systems Engineering and Electronics

Vol. 29　No. 3
Mar. 2007

文章编号: 1001-506X(2007)03-0464-03

背景值和初始条件同时优化的 GM(1,1)模型

董奋义，田　军
（郑州航空工业管理学院经贸系，河南 郑州 450015）

摘　要: GM(1,1)模型是有偏差的灰指数模型，其精度取决于背景值的构造形式和初始条件的选取。已有的研究文献均是从一个侧面单独改进 GM(1,1)模型，单独采用优化背景值方法或优化初始条件方法可以在一定程度上提高模型精度，因为两种改进方法完全独立。这里提出一种同时优化背景值和初始条件的新 GM(1,1)模型，通过模拟数据的比较表明，新优化 GM(1,1)模型有更高的精度。

关键词: 灰色系统理论；GM(1,1)模型；综合优化；背景值；初始条件
中图分类号: O159；C931　　　**文献标识码:** A

Optimization integrated background value with original condition for GM(1,1)

DONG Fen-yi, TIAN Jun
(*Dept. of Economics & Trade, Zhengzhou Inst. of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China*)

Abstract: As a gray exponential model with distortions, the precision of GM(1,1) depends on the conformation of background value and the selection of original condition. Existent literatures separately optimized GM(1,1) models just from one side. Independent adoptions of optimizing background values or original conditions of GM(1,1) can only improve the precision of the model in a certain extent. Based on the idea reasoned above, a new GM(1,1) model of integrated optimizing its background value and original condition is presented. Through comparisons of simulation datum, it is found that the new GM(1,1) model has a higher simulation precision.

Keywords: gray system theory; GM (1, 1) model; integrated optimization; background value; original condition

0　引　言

灰色系统理论自创立以来，在经济管理和工程技术领域取得了广泛的应用。GM(1,1)模型是灰色系统理论的核心内容之一，由于其建模过程简单，模型表达式简洁，便于求解，能较好地对系统行为特征值大小的发展变化进行预测，其应用价值在越来越多的领域得到体现。但是 GM(1,1)模型在应用过程中也遇到了预测结果不高的情况。文献[1-2,5]分别从不同的角度对 GM(1,1)模型的适用范围进行了研究。对 GM(1,1)模型改进方法的研究是灰色系统理论领域中的热点问题之一，本文在综合分析已有研究文献的基础上，提出了一种同时优化背景值和初始条件的新 GM(1,1)模型。通过对模拟数据的比较分析发现，新 GM(1,1)模型有更高的模拟精度。

1　背景值和初始条件同时优化的 GM(1,1)模型

GM(1,1)建模的一般过程是：设原始非负序列为 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\cdots,x^{(0)}(n))$，则 $X^{(0)}$ 的 1-AGO 序列为 $X^{(1)}=(x^{(1)}(1),\cdots,x^{(1)}(n))$，其中，$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)$ $(k=1,\cdots,n)$。由 $X^{(1)}$ 构造背景值序列 $Z^{(1)}=(z^{(1)}(2),\cdots,z^{(1)}(n))$，其中 $z^{(1)}(k)=\alpha x^{(1)}(k)+(1-\alpha)x^{(1)}(k-1)(k=2,3,\cdots,n)$，一般取 $\alpha=0.5$，作紧邻均值生成 $z^{(1)}(k)=0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1)(k=2,3,\cdots,n)$。假定 $X^{(1)}$ 具有近似指数变化规律，则白化微分方程为 $\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}=b$。将上式离散化，微分变差分，得到 GM(1,1)灰微分方程 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$。用最小二乘法，可以解得参

收稿日期: 2006-02-16；**修回日期:** 2006-08-02。
基金项目: 国家自然科学基金(70572001)；河南省科技攻关项目(0496480016)资助课题
作者简介: 董奋义(1972-)，男，副教授，博士研究生，主要研究方向为决策分析、金融市场与企业融资。E-mail: dfenyi@163.com

数 a,b，其中，a 称为发展系数，其大小反映了序列 $X^{(0)}$ 的增长速度；b 称为灰作用量。$\hat{a}=[a,b]^{T}=(B^{T}B)^{-1}B^{T}Y$，其中

$$B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -z^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\ \vdots\\ x^{(0)}(n)\end{bmatrix}$$

$X^{(1)}$ 的预测公式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak}+\frac{b}{a}$$

$X^{(0)}$ 的预测公式为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k)=$$
$$(1-e^{a})\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak}$$

上述建模过程可以看出，GM(1,1)模型作为灰色微分方程模型，实质就是对原始数据作指数拟合，因而是有偏差的指数模型。事实上，GM(1,1)模型的预测精度取决于：(1)a 和 b 的值，而 a 和 b 的值依赖于原始序列和背景值 $Z^{(1)}$ 的构造形式；(2)灰色微分方程模型初始条件的选取，原 GM(1,1)模型以 $\hat{x}^{(1)}(1)=x^{(1)}(1)$ 为初始条件。

关于背景值 $Z^{(1)}$ 的构造形式的改进。$z^{(1)}(k+1)$ 是 $[k,k+1]$ 这段时间内 $dx^{(1)}/dt$ 的背景值，$Z^{(1)}$ 的紧邻均值生成是一种平滑，当时间间隔很小，序列数据变化平缓时，这样构造的背景值是合适的，模型偏差较小。但当序列数据变化急剧时，这样构造出来的背景值往往产生较大的滞后误差，模型偏差较大，因而在一定程度上影响了预测精度。文献[3]，文献[6]，文献[13]等，从不同的方面通过对背景值的改进来提高 GM 模型建模精度；文献[7]，文献[8]通过对 GM 模型改进参数估计的方法来提高 GM 模型建模精度；文献[9]，文献[10]通过优化灰导数白化值的方法改进了 GM 模型的建模精度；文献[11]通过把数据序列分成两组适当的数据序列，并对两组数据序列分别进行灰色建模，然后利用平移算子求出预测值。其中，文献[3]利用在区间内 $[k,k+1]$ 插值的方法，令 $z^{(1)}(k+1)=\frac{1}{2n}[(n+1)x^{(1)}(k)+(n-1)x^{(1)}(k+1)]$ $(n=2,3,\cdots)$ 来优化背景值，具体 n 的取值可以通过试探法和经验公式法来确定；文献[13]利用在区间内 $[k,k+1]$ 积分的方法，令 $z^{(1)}(k)=\frac{x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)}{\ln x^{(1)}(k)-\ln x^{(1)}(k-1)}$ $(k=2,3,\cdots,n)$ 优化了背景值。

关于 GM(1,1)模型初始条件的优化。GM(1,1)模型是利用最小二乘法得到的拟合曲线，并不一定通过第一个数据点，以 $\hat{x}^{(1)}(1)=x^{(1)}(1)$ 为初始条件的理论依据并不存在。另外 $x^{(1)}(1)$ 是一个最旧的数据，与未来关系不密切，而且不是通过累加生成得到，规律性不强。因此，抛弃以 $\hat{x}^{(1)}(1)=x^{(1)}(1)$ 为已知条件，选用其他数据作为已知条件，理论上可以得到预测精度更高的公式。文献[4]提出以 $\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(x^{(1)}(m)-\frac{b}{a}\right)e^{-a(k-m+1)}+\frac{b}{a}$ 为预测公式，这里的 m 可以根据实际情况从 $1,2,\cdots,n$ 中选择。显然如果取 $m=1$，则变为原 GM(1,1)模型。文献[14]根据新信息优先原理提出了以 $x^{(1)}(n)$ 为初始条件的 GM(1,1)模型：$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(x^{(1)}(n)-\frac{b}{a}\right)e^{-a(k-n+1)}+\frac{b}{a}$。

显然，上述两类改进方法各自独立地提高了 GM(1,1)模型的精度，这里，笔者把两类改进方法同时运用，提出一种同时优化背景值和初始条件的 GM(1,1)模型，称之为新 GM(1,1)模型。由于两种改进方法完全独立互不影响，新 GM(1,1)模型从逻辑上应该比单独一种改进方法得到的 GM(1,1)模型精度更高。本文综合上述两类改进方法以 $x^{(1)}(n)$ 为优化初始条件，以 $z^{(1)}(k+1)=\frac{1}{2n}[(n+1)x^{(1)}(k)+(n-1)x^{(1)}(k+1)]$ 为优化背景值，来建立新 GM(1,1)模型。

2　数据模拟及精度比较

我们分别比较原 GM(1,1)模型、背景值优化 GM(1,1)模型、初始条件优化 GM(1,1)模型和新 GM(1,1)模型的模拟精度。这里用企业债券融资未清偿余额代表企业债券融资的系统行为特征，取 1997 年到 2003 年的数据为原始特征数据序列(表 1)，来建立各 GM(1,1)模型，以便进行模拟精度比较。

表 1　1997-2003 年企业债券未清偿余额(单位：亿元)

年份	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
企业债券余额	521.02	676.93	778.63	861.63	1 008.63	1 333.63	1 691.63

资料来源：《中国金融统计年鉴》、《中国统计年鉴》。

原 GM(1,1)模型的时间响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak}+\frac{b}{a}=$$
$$2\,744.315e^{0.198k}-2\,223.295 \tag{1}$$

以 $x^{(1)}$ 为初始条件的 GM(1,1)模型时间响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(x^{(1)}(7)-\frac{b}{a}\right)e^{-a(k-6)}+\frac{b}{a}=$$
$$2\,772.555e^{0.198k}-2\,223.295 \tag{2}$$

依据文献[3]的背景值优化方法，我们首先要确定背景值序列 $Z^{(1)}=(z^{(1)}(1),z^{(1)}(2),\cdots,z^{(1)}(7))$。其中 $z^{(1)}(k+1)=\frac{1}{2n}[(n+1)x^{(1)}(k)+(n-1)x^{(1)}(k+1)]$。关于 n 的取值，这里采用文献[3]给出的经验公式法确定：$n=\left(\sum_{i=2}^{N}R_i\right)^{\frac{1}{N-1}}+(N-1)$，$N$ 为原始建模数据个数，这里 $N=7$，$R_i=x^{(1)}(i)/x^{(1)}(i-1)(i=2,3,\cdots,7)$。经计算 $n=7.453$。所以有

$$z^{(1)}(k+1)=\frac{1}{14.906}[8.453x^{(1)}(k)+6.453x^{(1)}(k+1)]$$

进而 $Z^{(1)}=(521.02,814.07,1\,535.03,2\,349.59,3\,274.86,4\,424.19,5\,912.80)$。

由此可得优化背景值 GM(1,1)模型时间响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak}+\frac{b}{a}=$$
$$2\ 747.847\ 3e^{0.200\ 47k}-2\ 226.817\ 3 \tag{3}$$

依据上述初始条件优化和背景值优化结果，我们可得新 GM(1,1)模型的时间响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(x^{(1)}(7)-\frac{b}{a}\right)e^{-a(k-6)}+\frac{b}{a}=$$
$$2\ 732.837e^{0.200\ 47k}-2\ 226.817\ 3 \tag{4}$$

利用上面建立的 4 个 GM(1,1)模型，我们分别计算各 GM(1,1)模型的模拟数据，并把相应的实际数据 $x^{(0)}(k)$、模拟数据 $\hat{x}^{(0)}(k)$、残差 $\varepsilon(k)=x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)$ 和相对误差 $\Delta_k=\frac{|\varepsilon(k)|}{x^{(0)}(k)}$ 列于表 2—表 5。由表 2—表 5 可以看出，新优化 GM(1,1)模型的平均相对误差最小，是 2.19%；原 GM(1,1)模型的平均相对误差最大，是 4.80%；初始条件优化 GM(1,1)模型和背景值优化 GM(1,1)模型的平均相对误差居中，分别是 4.06%和 3.34%。

表 2　原 GM(1,1)模拟精度表

序号	实际数据	模拟数据	残差	相对误差
1	521.02	521.02	0	0
2	676.93	601.01	75.92	11.22%
3	778.63	732.37	46.26	5.94%
4	861.63	892.81	−31.18	3.62%
5	1 008.63	1 088.36	−79.73	7.90%
6	1 333.63	1 326.68	6.95	0.52%
7	1 691.63	1 617.14	74.49	4.40%
平均相对误差				4.80%

表 3　初始条件优化 GM(1,1)模拟精度表

序号	实际数据	模拟数据	残差	相对误差
1	521.02	542.26	−21.24	4.08%
2	676.93	637.08	39.85	5.89%
3	778.63	740.02	38.61	4.96%
4	861.63	902.05	−40.42	4.69%
5	1 008.63	1 069.55	−60.92	6.04%
6	1 333.63	1 340.34	−6.71	0.50%
7	1 691.63	1 653.80	37.83	2.24%
平均相对误差				4.06%

表 4　背景值优化 GM(1,1)模拟精度表

序号	实际数据	模拟数据	残差	相对误差
1	521.02	521.03	−0.01	0
2	676.93	642.02	34.91	5.16%
3	778.63	735.29	43.34	5.56%
4	861.63	891.81	−30.18	3.50%
5	1 008.63	1 062.91	−54.28	5.38%
6	1 333.63	1 360.18	−26.55	1.99%
7	1 691.63	1 661.90	29.73	1.76%
平均相对误差				3.34%

表 5　新 GM(1,1)模拟精度表

序号	实际数据	模拟数据	残差	相对误差
1	521.02	506.02	15	2.88%
2	676.93	656.69	20.24	2.99%
3	778.63	761.22	17.41	2.24%
4	861.63	875.83	−14.2	1.65%
5	1 008.63	1 046.83	−38.2	3.79%
6	1 333.63	1 342.75	−9.12	0.68%
7	1 691.63	1 672.82	18.81	1.11%
平均相对误差				2.19%

3　结　论

传统 GM(1,1)模型是有偏差的灰指数模型，存在着模型精度不高的问题，而 GM(1,1)模型的精度取决于背景值 $Z^{(1)}$ 的构造形式和初始条件的选取。单独采用优化背景值方式和优化初始条件方式均可以在一定程度上提高模型精度。在此基础上，把两类改进方法同时运用，提出一种同时优化背景值和初始条件的新 GM(1,1)模型。通过模拟数据的比较，发现新优化 GM(1,1)模型比单独优化初始条件 GM(1,1)模型和单独优化背景值 GM(1,1)模型有更高的精度。

参考文献：

[1] 刘思峰，邓聚龙．GM(1,1)模型的适用范围[J]．系统工程理论与实践，2000(5)：121－124.

[2] 郑照宁，武玉英，包涵龄．GM 模型的病态问题[J]．中国管理科学，2001 (5)：38－44.

[3] 谭冠军．GM(1,1)模型的背景值构造方法和应用(I)[J]．系统工程理论与实践，2000(4)：98－103.

[4] 张大海，江世芳，史开泉．灰色预测公式的理论缺陷及改进[J]．系统工程理论与实践，2002(8)：140－142.

[5] 吉培荣，黄巍松，胡翔勇．灰色预测模型特性的研究[J]．系统工程理论与实践，2001 (9)：105－108.

[6] 宋中民，同小军，肖新平．中心逼近式灰色 GM(1,1)模型[J]．系统工程理论与实践，2001 (5)：110－113.

[7] 刘斌，刘思峰，翟振杰，等．GM(1,1)时间响应函数的最优化[J]．中国管理科学，2003 (4)：54－57.

[8] 沈继红，赵希人．利用最小二乘估计改进 GM(2,1)模型[J]．哈尔滨工程大学学报，2001 (4)：64－66.

[9] 穆勇．优化灰导数白化值的无偏灰色 GM(1,1)模型[J]．数学的实践与认识，2003 (3)：13－16.

[10] 王义闹，刘开第，李应川．优化灰导数白化值的 GM(1,1)建模法[J]．系统工程理论与实践，2001 (5)：124－128.

[11] 宋中民，张署红．灰色系统的分离建模方法[J]．系统工程理论与实践，2002 (5)：103－107.

[13] 罗党，刘思峰，党耀国．灰色模型 GM(1,1)优化[J]．中国工程科学，2003(8)：50－53.

[14] 党耀国，刘思峰，刘斌．以 $x(1)(n)$ 为初始条件的 GM 模型[J]．中国管理科学，2005(2)：132－135.