Chapitre 3

Algorithme du Simplexe-Techniques avancées et Applications A. Pénalités et Variables Artificielles

1 Méthode des Pénalités et Variables Artificielles

1 Construction d'une Base Réalisable

Exemple 3.1. *Le problème des mines d'or (voir T.P.2) :*
On a le problème (P.1)

$$x \Leftrightarrow \text{j.mine A}$$
$$y \Leftrightarrow \text{j.mine B}$$

$$(\mathbf{P.1}) \quad \left\{ \begin{array}{c} \min(Z = 200x + 200y) \\ x + 2y \geq 80 \\ 3x + 2y \geq 160 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \qquad \begin{array}{c} \underline{\textit{Solution}} \\ x^* = 40 \\ y^* = 20 \\ z^* = 12000 \\ \textit{(voir méthode géometrique)} \end{array}$$

$\Rightarrow$ ***Premier tableau***

x	y	x_3	x_4	x_5	Z	*sec. m.*
200	*200*	*0*	*0*	*0*	*-1*	*0*
-1	*-2*	*1*	*0*	*0*	*0*	*-80*
-3	*-2*	*0*	*1*	*0*	*0*	*-160*
-5	*-2*	*0*	*0*	*1*	*0*	*-200*

Base $B_0(x_3, x_4, x_5)$ *non réalisable*

Remarque importante
Le problème d'une base non réalisable peut se présenter plus généralement quand certaines contraintes sont des égalités.

2 Méthode

(i) On utilise de nouvelles variables $\{x_a\}_{i\in I_a}$ appelées : Variables Artificielles.

Pour chaque contrainte où la solution de base est négative ou la variable de base n'existe pas.

(ii) On affecte un coefficient $M \in \mathbb{R}^+$ (Pénalité) et $M \gg 1$ (très grand) à chacune des variables artificielles dans la fonction objectif.

Pour l'exemple des mines d'or, on aura donc le "nouveau problème" :

$$\min(\tilde{Z}_M = 200x + 200y + M[x_1^a + x_2^a + x_3^a)]$$

$$(\mathbf{P.2}) \qquad \text{avec} \left\{ \begin{array}{c} x + 2y - x_3 + x_1^a = 80 \\ 3x + 2y - x_4 + x_2^a = 160 \\ 5x + 2y - x_5 + x_3^a = 200 \\ x, y, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \quad \text{et } x_i^a(i = 1, 2, 3 \geq 0 \\ M \gg 1 \end{array} \right\}$$

(iii) On remplace ensuite dans la fonction objectif chacune des variables artificielles par son expression obtenue par la contrainte correspondante, comme fonction des variables initiales et les variables d'écart.

On résoud ensuite le nouveau problème $(P.2)'$ par la méthode habituelle des tableaux du simplexe.

Et voici par le résultat suivant, la justification de la méthode présentée ci-dessus.

Théorème 3.1.
Si l'ensemble des solutions (P.1) est non vide alors il existe un nombre réel positif $M \gg 1$ *(suffisamment grand) tel que les problèmes (P.1) et (P.2) sont équivalents.*

2 Exemple-Application

Exemple 3.2.
Résoudre : (P.3)

$$\min(Z = x_1 - x_2) \qquad (1)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 & (2) \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 & (3) \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 3 & (4) \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 & \end{array} \right\}$$

Variables artificielles x_1^a, x_2^a et $M \gg 1$ et construction d'une base réalisable :

(P.3)'

Soit $M \gg 1$

$$\min(W_M = x_1 - x_2 + M(x_1^a + x_2^a))$$

avec $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_1^a = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_2^a = 3 \\ x_i \geq 0;\ \forall\, i = 1 \cdots 4 \quad x_j^a \geq 0; \quad \forall j = 1,2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1^a &= -x_1 + 2x_2 - x_4 + 1 \\ x_2^a &= 3 - 2x_1 - x_2 - x_4 \end{cases}$

$$\Rightarrow x_1^a + x_2^a = -3x_1 + x_2 - 2x_4 + 4$$

et

$$\Rightarrow \tilde{W}_M = -(3M-1)x_1 + (M-1)x_2 - 2Mx_4 + 4M$$

$\Rightarrow$ (P.2)'

$$\min(\tilde{W}_M = -(3M-1)x_1 + (M-1)x_2 - 2Mx_4 + 4M_4)$$

avec

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_1^a = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_2^a = 3 \\ x_i \geq 0 \quad \forall\, i = 1 \cdots 4; \quad x_j^a \geq 0 \quad \forall\, j = 1,2 \quad M \gg 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow 1^{er}$ tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	W	s.m.
-(3M-1)	M-1	0	-2M	0	0	-1	-4M
-2	1	1	0	0	0	0	2
$\boxed{1}$	-2	0	1	1	0	0	1
2	1	0	1	0	1	0	3

Base réalisable:

$$B_1 = (x_3,\ x_1^a,\ x_2^a)$$

Mais ! cette solution de la base n'est pas optimale car les coûts réduits:

$$\bar{C}_1 < 0; \ \bar{C}_4 < 0$$

Il faut changer la base :

var. “entrante” x_1 $(M \gg 1)$
var. "sortante " x_1^a $(\min(1; \frac{3}{2})) = 1)$

$2^{\text{ème}}$ tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	W	s.m.
0	-5M+1	0	M-1	3M-1	0	-1	-M-1
0	-3	1	2	2	0	0	4
1	-2	0	1	1	0	0	1
0	$\boxed{5}$	0	-1	-2	1	0	1

Nouvelle base:

$$B_2 = (x_1,\ x_3,\ x_2^a)$$

Mais encore la solution correspondante n'est pas optimale car le coût réduit:

$$\bar{C}_2 < 0.$$

Il faut changer la base :

var. "entrante" x_2
var."sortante" x_2^a

3$^{\text{ème}}$ tableau du simplexe:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	$\tilde{W}$	s.m.
0	0	0	-4/5	M-(3/5)	M-(1/5)	-1	-6/5
0	0	1	7/5	4/5	3/5	0	23/5
1	0	0	3/5	1/5	2/5	0	7/5
0	1	0	-1/5	-2/5	1/5	0	1/5

Nouvelle base:

$$B_3 = (x_1,\ x_2,\ x_3)$$

Mais encore la solution correspondante n'est pas optimale car le coût réduit:

$$\bar{C}_4 < 0.$$

Il faut changer la base :

var."entrante"x_4 var. "sortante " x_1

4$^{\text{ème}}$ tableau du simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4	x_1^a	x_2^a	W	s.m.
4/3	0	0	0	M-(1/3)	M+(1/3)	-1	2/3
-7/3	0	1	0	1/3	-1/3	0	4/3
5/3	0	0	1	1/3	2/3	0	7/3
1/3	1	0	0	1/3	1/3	0	2/3

$$\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x_1^* = 0 \quad x_2^* = 2/3 \quad x_3^* = 4/3 \quad x_4^* = 7/3}$$

Solution optimale car : $\boxed{\bar{C}_i \geq 0\ \forall i}$

Fin de l'algorithme.

Chapitre 4

Algorithme du Simplexe. Techniques avancées et Applications B La Dualité

1 La Dualité

1 Importance

(a) **Point de vue pratique:** Souvent le problème présenté dans l'espace dual est beaucoup plus simple à résoudre, et grâce aux deux théorèmes ci-dessous on trouve la solution correspondante du problème initial.

(b) **Etude de sensibilité**

2 Dual d'un programme linéaire sous forme standard

Primal

$$(P) \quad \left.\begin{array}{l} \text{Min}(z = c \cdot x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (P.1)$$

Dual

$$(D) \quad \left.\begin{array}{l} \text{Max}(w = u \cdot b) \\ \text{avec } (u \cdot A)^T \leq C^T \end{array}\right\} \qquad (D.1)$$

* On associe à chaque contrainte $i (i = 1 \cdots m)$ une variable $u_i > 0$ ou $u_i < 0$ ou $u_i \lesseqgtr 0$

appelée : variable duale

* $u = (u_1,\ u_2, \cdots,\ u_m)$ est un vecteur ligne.

* A^T est la matrice transposée de A (matrice des contraintes du primal).

Remarque 4.1. *On remarque que l'application linéaire qui définit le problème de programmation linéaire dans l'espace dual est exactement la transposée de l'application correspondante qui exprime le problème initial d'optimisation dans l'espace primal.*

3 La transposition

Tableau des correspondances

Primal (P)	**Dual (D)**
Fonction Obj. (min)	Second membre
Second membre	Fonction Obj. (max)
A= matrice des contraintes	A^T matrice des contraintes
Contrainte $i : \leq$ $(i : \geq)$	Variable $u_i \leq 0$ $(u_i : \geq 0)$
Contrainte $i : =$	Variable $u_i \gtrless 0$
Variable $x_j \geq 0$	Contrainte $j : \leq$
Variable $x_j \gtrless 0$	Contrainte $j : =$

4 Exemple de "transposition"

Exemple 4.1.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{min}\ (2x_1 - 3x_2) \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \gtrless 0 \end{array}\right\} \qquad \underline{\textit{Primal}}$$

$$\underline{\textit{Dual}}\left\{\begin{array}{l} \textit{max}\ (u_1 + 4u_2 + 3u_3) \\ u_1 + 2u_2 + u_3 \leq 2 \\ -u_1 + 3u_2 + u_3 = -3 \\ u_1 \leq 0\ ;\ u_2 \geq 0\ ;\ u_3 \gtrless 0 \end{array}\right.$$

2 Les Théorèmes

Théorème 4.1. *DUALITE*
Soient : un programme lin. (P) et le programme (D) associé $\Rightarrow$

(a) Si (P) et (D) ont des solutions, alors $\exists$ *une solution optimale pour chacun d'eux et :*

$$z^* = \mathit{min}\ (P) = \mathit{max}\ (D) = W^*$$

(b) Si l'un d'eux a un optimum non borné l'autre n'a pas de solution.

Théorème 4.2. *COMPLEMENTARITE*
Deux solutions (x^*, u^*) *du primal et du dual respectivement sont optimales ssi*

$$(u^* \cdot A_j - C_j)x_j^* = 0 \qquad \forall\, j = 1, \cdots, n$$

$$(A_j = j^{\text{ème}} \text{colonne de } A) \text{ où } j^{\text{ème}} \text{ligne de } A^T.$$

* Une autre expression du théorème 2 $\Rightarrow$

Théorème 4.3. *(Théorème de complémentarité ou "Principe d'Exclusion")*
Si un programme linéaire a des contraintes d'inégalités (le (D) ou (P)) alors :

* *Une variable duale correspondant à une contrainte non saturée (de (P)) est **nécessairement** nulle.*

* *A une variable duale strictement positive correspond nécessairement une contrainte saturée.*

* *Sur le dernier tableau de (P) les coûts réduits des variables d'écart correspondent aux solutions* u_i^* *de (D).*

3 Utilité de la Dualité- Etude de sensibilité

$(u_i \Leftrightarrow$ coûts marginaux$)$

On considère le problème du primal (P) comme une famille de problèmes paramétrée par le second membre b.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min}(z = c \cdot x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(P(b))}$$

On étudie donc les variations de la valeur optimale $z^*(b)$ de $P(b)$ en fonction de b. Soit B une base optimale pour le primal $P(b)$ (à b fixé) et soit ,

$$u^* = c_B \dot{B}^{-1}$$

le vecteur des variables duales optimales.

Si $b' = b + \Delta b$ (variation des sec. membres du primal), on aura:

u^* qui sera toujours la solution optimale du dual(indépendante de b, et, b') qui vérifie:

$$B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$$

et pour $\|\Delta b\|$ suffisamment petit :

$$z((b + \Delta b) \overset{\text{dualité}}{=} u \cdot (b + \Delta b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial b_i} = u_i$$

d'où:

L'interprétation de la variable duale u_i comme:
variation unitaire $\Delta b_i = 1$ du second membre de la i-ème contrainte.
(coûts marginaux)

4 Solution avec la dualité

Exemple: "LE JARDINIER" Simplexe - Dualité (corrigé)

Le problème dual s'écrit :

$$\max(F = 10u_1 + 12u_2 + 12u_3)$$

$$\text{(P) avec } \left\{ \begin{array}{l} 5u_1 + 2u_2 + u_3 \leq 3 \\ u_1 + 2u_2 + 4u_3 \leq 2 \\ u_i \geq 0 \; \forall \, i = 1, 2, 3 \end{array} \right\}$$

Forme standard :

$$\min(W = -10u_1 - 12u_2 - 12u_3)$$

$$\text{(P.1) avec } \left\{ \begin{array}{l} 5u_1 + 2u_2 + u_3 + u_4 = 3 \\ u_1 + 2u_2 + 4u_3 + u_5 = 2 \\ u_i \geq 0 \; \forall \, i = 1, 2, \cdots, 5 \end{array} \right\}$$

1^{er} Tableau : Base $B_1 = \{u_4, u_5\}$

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	W	s.m.
-10	-12	-12	0	0	-1	0
5	2	1	1	0	0	3
1	2	4	0	1	0	2

Base non optimale $\Rightarrow$ Changement de Base
Variable entrante u_2
Variable sortante u_5 (car : min=2/2)
$\Rightarrow$ 2$^{\text{ème}}$ Tableau : Base $B_2 = \{u_4, u_2\}$

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	W	s.m.
-4	0	12	0	6	-1	12
4	0	-3	1	-1	0	1
1/2	1	2	0	1/2	0	1

Base non optimale $\Rightarrow$ Changement de Base
Variable entrante u_1
Variable sortante u_4 (car : min=1/4)
$\Rightarrow$ 3$^{\text{ème}}$ Tableau : Base $B_3 = \{u_1, u_2\}$

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	W	s.m.
0	0	9	1	5	-1	13
1	0	-3/4	1/4	-1/4	0	1/4
0	1	19/8	-1/8	5/8	0	7/8

Base optimale $\Rightarrow$ Solution de Base

$$\{u_1^* = 1/4;\ u_2^* = 7/8\}$$

et $u_3^* = 0, u_4^* = 0$ (car var. hors base).

Complément (sur l'exemple)

(a) Trouver le dual du dual (primal)

(b) Par application du principe de complémentarité (direct), trouver la solution de ce dernier problème.

Réponse

(a)

$$\min(z = 3x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{array}{l} 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

(b) Sur le dernier tableau du simplexe, on lit :

$$\begin{array}{rl} & x_1^* = \bar{c}_4 = 1 \\ & x_2^* = \bar{c}_5 = 5 \\ \text{et} & z^* = -w = 13 \end{array}$$