

## 11.11

1.  $\frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ ...将以上三个等式两边分别相加得:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

用你发现的规律解答下列问题:

(1) 猜想并写出:  $\frac{1}{n(n-1)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2) 直接写出下列各式的计算结果: ①  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2010 \times 2011} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

$$\textcircled{2} \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(3) 探究并计算:  $\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{6 \times 8} + \dots + \frac{1}{2010 \times 2012}$ .

(4) 探究并计算:  $\frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \frac{1}{10 \times 13} + \dots + \frac{1}{97 \times 100}$

动点问题:

例 1: 已知  $a$  是最大的负整数, 且  $b, c$  满足  $|b-1| + (c+4)^2 = 0$ .

(1) 填空:  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $c = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(2)  $a, b, c$  在数轴上所对应的点分别为  $A, B, C$ ,  $P$  是数轴上点  $A, B$  之间一动点 (不与点  $A, B$  重合), 其对应的数为  $x$ , 化简:  $|x+1| - 2|x-1|$ ;

(3) 在 (1)、(2) 的条件下, 点  $A, B, C$  开始在数轴上同时运动, 若点  $C$  和点  $A$  分别以每秒 4 个单位长度和 1 个单位长度的速度向左运动, 点  $B$  以每秒 2 个单位长度的速度向右运动, 假设  $t$  秒钟过后, 点  $A$  与点  $C$  之间的距离表示为  $AC$ , 点  $A$  与点  $B$  之间的距离表示为  $AB$ . 请问:  $AC - AB$  的值是否随着时间  $t$  的变化而改变? 若变化, 请说明理由; 若不变, 请求出其值.

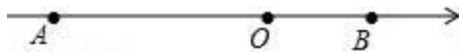


变式: 如图, 点  $O$  为原点,  $A, B$  为数轴上两点,  $AB=15$ , 且  $OA:OB=2$ .

(1)  $A, B$  对应的数分别为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 、 $\underline{\hspace{2cm}}$ ;

(2) 点  $A, B$  分别以 4 个单位/秒、3 个单位/秒速度相向而行, 则几秒后  $A, B$  相距 1 个单位长度?

(3) 点  $A, B$  以 (2) 中的速度同时向右运动, 点  $P$  从原点  $O$  以 7 个单位/秒的速度向右运动, 是否存在常数  $m$ , 使得  $4AP+3OB - mOP$  为定值, 若存在请求出  $m$  值以及这个定值; 若不存在, 请说明理由.



变式: 已知  $a, b$  满足  $(a-2)^2 + |ab+6| = 0$ ,  $c = 2a + 3b$

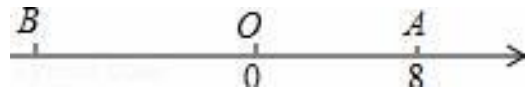
(1)  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $c = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2) 若有理数  $a, b, c$  在数轴上对应的点分别为  $A, B, C$ , 点  $A$  与点  $B$  之间的距离表示为  $AB$ , 点  $B$  与点  $C$  之间的距离表示为  $BC$ . 如果数轴上有一点  $N$  到点  $A$  的距离  $AN = AB - BC$ , 请直接写出点  $N$  所表示的数 (写简要过程)  $\underline{\hspace{2cm}}$

(3) 在 (2) 的条件下, 点  $A, B, C$  在数轴上运动, 若点  $C$  以每秒 1 个单位的速度向左运动, 同时点  $A$  和点  $B$  分别以每秒 3 个单位和每秒 2 个单位的速度向右运动. 试问: 是否存在一个常数  $m$  使得  $m \cdot AB - 2BC$  不随运动时间  $t$  的改变而改变. 若存在, 请求出  $m$  和这个不变化的值; 若不存在, 请说明理由.

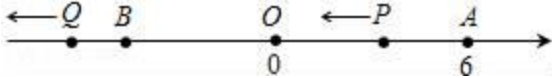
例 2：如图，已知数轴上 A 为 8，B 是 A 左侧一点，且  $AB=20$ ，  
 动点 P 从 A 点出发，以每秒 5 个单位长度的速度沿数轴向左匀速运动，  
 设运动时间为  $t$  ( $t>0$ ) 秒。

- (1) 写出数轴上点 B 表示的数\_\_\_\_\_，点 P 表示的数\_\_\_\_\_ (用含  $t$  的代数式表示)；
- (2) 动点 Q 从 B 出发，以每秒 3 个单位的速度沿数轴向右匀速运动，若 P、Q 同时出发，问①多少秒时 P、Q 之间的距离恰好等于 2？  
 ②多少秒时 P、Q 相遇
- (3) 动点 Q 从 B 出发，以每秒 3 个单位的速度沿数轴向左匀速运动，若点 P、Q 同时出发，问①多少秒时 P、Q 之间的距离恰好又等于 2？  
 ②多少秒时 P、Q 相遇
- (4) 若 M 为 AP 的中点，N 为 BP 的中点，在 P 运动的过程中，线段 MN 的长度是否发生变化？若变化，请说明理由；若不变，请你画出图形，并求出线段 MN 的长。



练习①：如图，已知数轴上点 A 表示的数为 6，B 是数轴上在 A 左侧的一点，且 A、B 两点间的距离为 10. 动点 P 从点 A 出发，以每秒 6 个单位长度的速度沿数轴向左匀速运动，设运动时间为  $t$  ( $t>0$ ) 秒。

- (1) 数轴上点 B 表示的数是\_\_\_\_\_，点 P 表示的数是\_\_\_\_\_ (用含  $t$  的代数式表示)；
- (2) 动点 Q 从点 B 出发，以每秒 4 个单位长度的速度沿数轴向左匀速运动，若点 P、Q 时出发. 求：①当点 P 运动多少秒时，点 P 与点 Q 相遇？  
 ②当点 P 运动多少秒时，点 P 与点 Q 间的距离为 8 个单位长度？



练习②：如图，已知 A、B、C 是数轴上三点，点 C 表示的数为 8， $BC=6$ ， $AB=14$ .



- (1) 写出数轴上点 A 表示的数\_\_\_\_\_，B 表示的数\_\_\_\_\_；
- (2) 动点 P、Q 分别从 A、C 同时出发，点 P 以每秒 4 个单位长度的速度沿数轴向右匀速运动，到达原点 0 立即掉头，按原来的速度运动，点 Q 以每秒 1 个单位长度的速度沿数轴向左匀速运动，P、Q 两点到点 A 停止运动，设运动时间为  $t$  秒。  
 ①当  $0<t\leq 3$  时，求数轴上点 P、Q 表示的数 (用含  $t$  的式子表示)；  
 ②  $t$  为何值时，点 O 为线段 PQ 的中点。

例 3：如图，在数轴上 A 点表示数  $a$ ，B 点示数  $b$ ， $a$ 、 $b$  满足  $|a+2|+|b-6|=0$

- (1) 点 A 表示的数为\_\_\_\_\_，点 B 表示的数为\_\_\_\_\_。
- (2) 若点 A 与点 C 之间的距离表示为 AC，点 B 与点 C 之间的距离表示为 BC，请在数轴上找一点 C，使  $AC=2BC$ ，则 C 点表示的为\_\_\_\_\_。
- (3) 若在原点 0 处放一挡板，一小球甲从点 A 处以 1 个单位/秒的速度向左运动；同时另一小球乙从点 B 处以 2 个单位/秒的速度也向左运动，在碰到挡板后 (忽略球的大小，可看作一点) 以原来的速度向相反的方向运动，设运动的时间为  $t$  (秒)，  
 ① 分别表示出甲、乙两小球到原点的距离 (用  $t$  表示)；  
 ② 求甲、乙两小球到原点的距离相等时经历的时间。



练习③：如图，在数轴上 A 点表示数  $a$ ，B 点表示数  $b$ ，C 点表示数  $c$ ，且  $a$ 、 $c$  满足  $|a+3|+(c-9)^2=0$ .

- (1)  $a=_____$ ， $c=_____$ ；
- (2) 如图所示，在 (1) 的条件下，若点 A 与点 B 之间的距离表示为  $AB=|a-b|$ ，点 B 与点 C 之间的距离表示为  $BC=|b-c|$ ，点 B 在点 A、C 之间，且满足  $BC=2AB$ ，则  $b=_____$ ；



- (3) 在 (1)(2) 的条件下，若点 P 为数轴上一动点，其对应的数为  $x$ ，当代数式  $|x-a|+|x-b|+|x-c|$  取得最小值时，此时  $x=_____$ ，最小值为\_\_\_\_\_；
- (4) 在 (1)(2) 的条件下，若在点 B 处放一挡板，一小球甲从点 A 处以 1 个单位/秒的速度向左运动；同时另一小球乙从点 C 处以 2 个单位/秒的速度也向左运动，在碰到挡板后 (忽略球的大小，可看作一点) 以原来的速度向相反的方向运动，设运动的时间为  $t$  (秒)，请表示出甲、乙两小球之间的距离  $d$  (用  $t$  的代数式表示)。

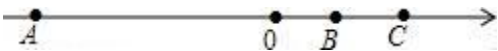


例 4：如图，已知 A、B、C 是数轴上的三点，点 C 表示的数为 7，BC=4，AB=16，动点 P、Q 分别从 A、C 同时出发，点 P 以每秒 5 个单位的速度沿数轴向右匀速运动，点 Q 以每秒 2 个单位的速度沿数轴向左匀速运动，M 为 AP 的中点，点 N 在线段 CQ 上，且 CQ=3CN。设运动的时间为 t (t>0) 秒。

(1) 点 A 表示的数为\_\_\_\_\_，点 B 表示的数为\_\_\_\_\_

(2) 当 t<6 时，求 MN 的长 (用含 t 的式子表示)；

(3) t 为何值时，原点 O 恰为线段 PQ 的中点。



例 5：如图1，在长方形 ABCD 中，AB=12 厘米，BC=6 厘米。点 P 沿 AB 边从点 A 开始向点 B 以 2 厘米/秒的速度移动；点 Q 沿 DA 边从点 D 开始向点 A 以 1 厘米/秒的速度移动。如果 P、Q 同时出发，用 t (秒) 表示移动的时间，那么：

(1) DQ=\_\_\_\_\_厘米，AP=\_\_\_\_\_厘米 (用含 t 的代数式表示)

(2) 如图1，当 t=\_\_\_\_\_秒时，线段 AQ 与线段 AP 相等？

(3) 如图 2，P、Q 到达 B、A 后继续运动，P 点到达 C 点后都停止运动。当 t 为何值时，线段 AQ 的长等于线段 CP 的长的一半。

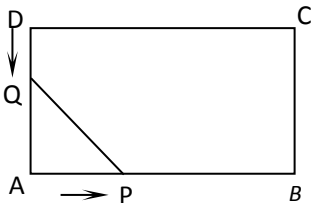


图 1

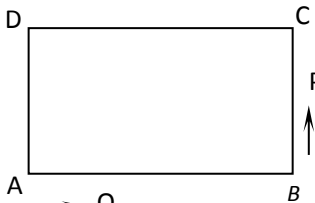


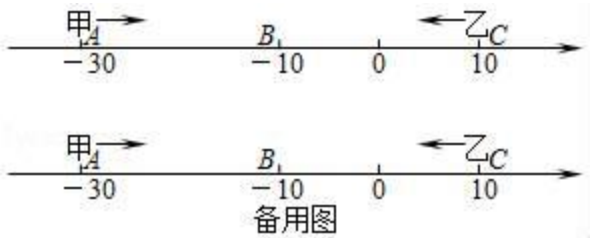
图 2

练习④：已知数轴上有 A、B、C 三点，分别代表 -30，-10，10，两只电子蚂蚁甲、乙分别从 A、C 两点同时相向而行，甲的速度为 4 个单位/秒，乙的速度为 6 个单位/秒。

(1) 甲、乙在数轴上的哪个点相遇？

(2) 多少秒后，甲到 A、B、C 的距离和为 48 个单位？

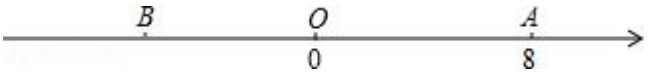
(3) 在甲到 A、B、C 的距离和为 48 个单位时，若甲调头并保持速度不变，则甲、乙还能在数轴上相遇吗？若能，求出相遇点；若不能，请说明理由。



练习⑤：如图，已知数轴上点 A 表示的数为 8，B 是数轴上的一点，AB=12，动点 P 从点 A 出发，以每秒 6 个单位长度的速度沿数轴向左匀速运动，设运动时间为 t (t>0) 秒。

(1) 写出数轴上点 B 表示的数\_\_\_\_\_，点 P 表示的数\_\_\_\_\_ (2) 动点 Q 从点 B 出发，以每秒 4 个单位长度的速度沿数轴向左匀速运动，若点 P、Q 同时出发，问点 P 运动多少秒时追上点 Q？

(3) 若 M 为 AP 的中点，N 为 PB 的中点。点 P 在运动的过程中，线段 MN 的长度是否发生变化？若变化，请说明理由；若不变，请你画出图形，并求出线段 MN 的长。



练习⑥：已知数轴上三点 M、O、N 对应的数分别为 -3，0，1，点 P 为数轴上任意一点，其对应的数为 x。

(1) 如果点 P 到点 M，点 N 的距离相等，那么 x 的值是\_\_\_\_\_；

(2) 数轴上是否存在点 P，使点 P 到点 M，点 N 的距离之和是 5？若存在，请直接写出 x 的值；若不存在，请说明理由。

(3) 如果点 P 以每分钟 3 个单位长度的速度从点 O 向左运动时，点 M 和点 N 分别以每分钟 1 个单位长度和每分钟 4 个单位长度的速度也向左运动，且三点同时出发，那么几分钟时点 P 到点 M，点 N 的距离相等？