НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
КАФЕДРА ФІЗИКИ ЕНЕРГЕТИЧНИХ СИСТЕМ

«До захисту допущено»
В. о. завідувача кафедри
_______ Г. Є. Монастирський
(підпис) (ініціали, прізвище)

Дипломна робота

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 105 Прикладна фізика та наноматеріали
(код і назва)

на тему:

Виконав: студент 6 курсу, групи ФФ-11мн

Поляцко Антоній Костянтинович _______
(прізвище, ім'я, по батькові) (підпис)

Науковий керівник доцент, к.ф.-м.н. Гільчук А. В. _______
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Консультант 2, 3 _______ _______
(номер розділу) (посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Рецензент _______ _______
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент _______
(підпис)

Київ – 2022

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка дипломної роботи за обсягом становить 13 сторінки, містить 0 таблиці та 0 рисунки. Для дослідження було використано 0 бібліографічних найменувань.

Ключові слова:.

SUMMARY

The diploma work explanatory message includes 13 pages of the text, 0 table and 0 illustrations. At the problem modern state analysis, overall 0 references were used.

Key words:.

ЗМІСТ

СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАКИ . . . 4

ВСТУП . . . 5

РОЗДІЛ 1. Огляд літератури . . . 6

1.1. qqq . . . 6

РОЗДІЛ 2. Матеріали та методи . . . 7

2.1. Розсіювання плоскої хвилі на сфері . . . 7

2.1.1. Кутова частина рівняння . . . 8

2.1.2. Радіальна частина рівняння . . . 9

2.1.3. Граничні умови . . . 10

2.1.4. Результати моделювання . . . 11

РОЗДІЛ 3. Результати досліджень . . . 12

3.1. qqq . . . 12

ВИСНОВКИ . . . 13

СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАКИ

qqq

ВСТУП

qqq

РОЗДІЛ 1.

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. qqq

РОЗДІЛ 2.

МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ

2.1. Розсіювання плоскої хвилі на сфері

....

Рівняння Гельмгольца

$$\Delta U - \varepsilon_2 k^2 U = 0, r > a \tag{2.1}$$

$$\Delta U - \varepsilon_1 k^2 U = 0, 0 < r < a \tag{2.2}$$

Тут U відповідає або E_z або H_z, $\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ - оператор Лапласа.

Підставимо оператор Лапласа в рівняння 2.2:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \varepsilon k^2 U = 0 \tag{2.3}$$

Виконаємо розділення змінних

$$U(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\mathit{\Phi}(\varphi) \tag{2.4}$$

З 2.4 та 2.3 помножимо на $\frac{r^2}{R\Theta\mathit{\Phi}}$ маємо:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\mathit{\Phi}\sin^2\theta}\frac{d^2\mathit{\Phi}}{d\varphi^2} + \varepsilon k^2 r^2 = 0 \tag{2.5}$$

2.1.1. Кутова частина рівняння

Якщо домножити 2.5 на $\sin^2\theta$, то останній доданок буде залежати тільки від φ, а решта від r та θ.

Тому цей доданок є константою, яку позначимо через $-m^2$. Отримуємо рівняння:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} \tag{2.6}$$

Причому має відбуватись $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$, звідки слідує:

$$\Phi(\varphi) = e^{in\varphi} \tag{2.7}$$

Підставимо 2.7 в 2.5:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + \varepsilon k^2 r^2 = 0 \tag{2.8}$$

В рівнянні 2.8 другий та третій доданки є функціями тільки від θ, а тому є константою яку позначимо $l(l+1)$.

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = -l(l+1) \tag{2.9}$$

Звідки

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0 \tag{2.10}$$

Зробимо заміну $x = \cos\theta$, тоді з 2.10:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta(x)}{dx}\right] + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta(x) = 0 \tag{2.11}$$

Рівняння 2.11 задає приєднані поліноми Лежандра

$$\Theta(x) = P_l^m(x) \tag{2.12}$$

Де $l = 0, 1, 2...$, $m \in [-l, l]$. Добуток функцій Φ та Θ є сферичними гармоніками:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = C_l^m P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \tag{2.13}$$

Константу C_l^m можна отримати з умови нормування:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \left(Y_l^m(\theta, \varphi)^*\right) Y_{l'}^{m'}(\theta, \varphi) = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'} \tag{2.14}$$

2.1.2. Радіальна частина рівняння

З рівнянь 2.8 та 2.10 маємо:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \left[\varepsilon k^2 r^2 - l(l-1)\right] R = 0 \tag{2.15}$$

або

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + \left[\varepsilon k^2 r^2 - l(l-1)\right] R = 0 \tag{2.16}$$

Введемо функцію $Z(r)$ для якої:

$$R(r) = \frac{Z(r)}{(kr)^{1/2} \varepsilon^{1/4}} \tag{2.17}$$

З 2.16 та 2.17 маємо:

$$r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + r \frac{dZ}{dr} + \left[\varepsilon k^2 r^2 - l(l + \frac{1}{2})^2\right] Z = 0 \tag{2.18}$$

Це рівняння Бесселя порядку $l + \frac{1}{2}$, розв'язками якого є функції Бесселя та Неймана: $J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon kr)$ і $N_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon kr)$.

Остаточний розв'язок рівняння Гейльмгольца:

$$U(r,\theta,\varphi)=\sum_k\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{(kr)^{1/2}\varepsilon^{1/4}}\left(a_{klm}J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon kr)+b_{klm}N_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon kr)\right)Y_l^m(\theta,\varphi) \tag{2.19}$$

При $r\to\infty\Rightarrow N_{l+\frac{1}{2}}\to\infty$ тому в області $r>a: b_{klm}=0$.

Отже:

$$U(r,\theta,\varphi)=\sum_k\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{(kr)^{1/2}\varepsilon_2^{1/4}}a_{klm}^{(2)}J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_2 kr)Y_l^m(\theta,\varphi),\ \text{якщо}\ r>a \tag{2.20}$$

$$U(r,\theta,\varphi)=\sum_k\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{(kr)^{1/2}\varepsilon_1^{1/4}}\left(a_{klm}^{(1)}J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 kr)+b_{klm}^{(1)}N_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 kr)\right) \\ Y_l^m(\theta,\varphi),\ \text{якщо}\ r<a \tag{2.21}$$

2.1.3. Граничні умови

$$\begin{gathered} U|_{r\to a-0}=U|_{r\to a+0} \\ n_2\frac{\partial U}{\partial r}|_{r\to a-0}=n_1\frac{\partial U}{\partial r}|_{r\to a+0} \end{gathered} \tag{2.22}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{\varepsilon_2^{\frac{1}{4}}}a_{klm}^{(2)}J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_2 ka)=\frac{1}{\varepsilon_1^{\frac{1}{4}}}a_{klm}^{(1)}J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka)+b_{klm}^{(1)}N_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) \\ \frac{n_2}{\varepsilon_2^{\frac{1}{4}}}a_{klm}^{(2)}J'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_2 ka)=\frac{n_1}{\varepsilon_1^{\frac{1}{4}}}\left[a_{klm}^{(1)}J'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka)+b_{klm}^{(1)}N'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka)\right] \end{gathered} \tag{2.23}$$

Приймемо амплітуду падаючої хвилі за 1 та поділимо 2 рівняння на $a_{klm}^{(2)}$. Тоді:

$$\begin{gathered} J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_2 ka)=\sqrt[4]{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\left[A_{klm}J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka)+B_{klm}N_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka)\right] \\ J'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_2 ka)=\frac{n_1}{n_2}\sqrt[4]{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\left[A_{klm}J'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka)+B_{klm}N'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka)\right] \end{gathered} \tag{2.24}$$

Звідки знаходимо A_{klm} та B_{klm}:

$$B_{klm} = \frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_2 ka) - \dfrac{n_1}{n_2} J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_2 ka) \dfrac{J'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka)}}{N'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) - \sqrt[4]{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} N_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) \dfrac{J'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka)}{J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka)}}$$
$$A_{klm} = \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_2 ka) - N_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) B_{klm}}{\sqrt[4]{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka)} \qquad (2.25)$$

2.1.4. Результати моделювання

РОЗДІЛ 3.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

3.1. qqq

ВИСНОВКИ

1. qqq