

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
КАФЕДРА ФІЗИКИ ЕНЕРГЕТИЧНИХ СИСТЕМ

«До захисту допущено»

В. о. завідувача кафедри

Г. Є. Монастирський

(підпис)

(ініціали, прізвище)

Дипломна робота
на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 105 Прикладна фізика та наноматеріали

(код і назва)

на тему:

Виконав: студент 6 курсу, групи ФФ-11мн

Поляцко Антоній Костянтинович

(прізвище, ім'я, по батькові)

(підпис)

Науковий керівник доцент, к.ф.-м.н. Гільчук А. В.

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

(підпис)

Консультант 2, 3

(номер розділу)

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

(підпис)

Рецензент

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

(підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі
немає запозичень з праць інших авторів
без відповідних посилань.

Студент

(підпис)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка дипломної роботи за обсягом становить 13 сторінки, містить 0 таблиці та 0 рисунки. Для дослідження було використано 0 бібліографічних найменувань.

Ключові слова:.

SUMMARY

The diploma work explanatory message includes 13 pages of the text, 0 table and 0 illustrations. At the problem modern state analysis, overall 0 references were used.

Key words:.

ЗМІСТ

СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАКИ.	4
ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1. Огляд літератури	6
1.1. qq	6
РОЗДІЛ 2. Матеріали та методи	7
2.1. Розсіювання плоскої хвилі на сфері.	7
2.1.1. Кутова частина рівняння	8
2.1.2. Радіальна частина рівняння	9
2.1.3. Граничні умови	10
2.1.4. Результати моделювання	11
РОЗДІЛ 3. Результати досліджень	12
3.1. qq	12
ВИСНОВКИ.	13

СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАКИ

qqq

ВСТУП

qqq

РОЗДІЛ 1.

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. qq

РОЗДІЛ 2.

МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ

2.1. Розсіювання плоскої хвилі на сфері

....

Рівняння Гельмгольца

$$\Delta U - \varepsilon_2 k^2 U = 0, r > a \quad (2.1)$$

$$\Delta U - \varepsilon_1 k^2 U = 0, 0 < r < a \quad (2.2)$$

Тут U відповідає або E_z або H_z , $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ - оператор Лапласа.

Підставимо оператор Лапласа в рівняння 2.2:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \varepsilon k^2 U = 0 \quad (2.3)$$

Виконаємо розділення змінних

$$U(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \quad (2.4)$$

З 2.4 та 2.3 помножимо на $\frac{r^2}{R\Theta\Phi}$ маємо:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \varepsilon k^2 r^2 = 0 \quad (2.5)$$

2.1.1. Кутова частина рівняння

Якщо домножити 2.5 на $\sin^2 \theta$, то останній доданок буде залежати тільки від φ , а решта від r та θ .

Тому цей доданок є константою, яку позначимо через $-m^2$. Отримуємо рівняння:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \quad (2.6)$$

Причому має відбуватись $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$, звідки слідує:

$$\Phi(\varphi) = e^{in\varphi} \quad (2.7)$$

Підставимо 2.7 в 2.5:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + \varepsilon k^2 r^2 = 0 \quad (2.8)$$

В рівнянні 2.8 другий та третій доданки є функціями тільки від θ , а тому є константою яку позначимо $l(l+1)$.

$$\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -l(l+1) \quad (2.9)$$

Звідки

$$\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0 \quad (2.10)$$

Зробимо заміну $x = \cos \theta$, тоді з 2.10:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\Theta(x)}{dx} \right] + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \Theta(x) = 0 \quad (2.11)$$

Рівняння 2.11 задає приєднані поліноми Лежандра

$$\Theta(x) = P_l^m(x) \quad (2.12)$$

Де $l = 0, 1, 2, \dots$, $m \in [-l, l]$. Добуток функцій Φ та Θ є сферичними гармоніками:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = C_l^m P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (2.13)$$

Константу C_l^m можна отримати з умови нормування:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta (Y_l^m(\theta, \varphi)^*) Y_{l'}^{m'}(\theta, \varphi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \quad (2.14)$$

2.1.2. Радіальна частина рівняння

З рівнянь 2.8 та 2.10 маємо:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [\varepsilon k^2 r^2 - l(l-1)] R = 0 \quad (2.15)$$

або

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [\varepsilon k^2 r^2 - l(l-1)] R = 0 \quad (2.16)$$

Введемо функцію $Z(r)$ для якої:

$$R(r) = \frac{Z(r)}{(kr)^{1/2} \varepsilon^{1/4}} \quad (2.17)$$

З 2.16 та 2.17 маємо:

$$r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + r \frac{dZ}{dr} + \left[\varepsilon k^2 r^2 - l(l + \frac{1}{2})^2 \right] Z = 0 \quad (2.18)$$

Це рівняння Бесселя порядку $l + \frac{1}{2}$, розв'язками якого є функції Бесселя та Неймана: $J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon kr)$ і $N_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon kr)$.

Остаточний розв'язок рівняння Гейльмгольца:

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{(kr)^{1/2} \varepsilon^{1/4}} \left(a_{klm} J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon kr) + b_{klm} N_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon kr) \right) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (2.19)$$

При $r \rightarrow \infty \Rightarrow N_{l+\frac{1}{2}} \rightarrow \infty$ тому в області $r > a : b_{klm} = 0$.

Отже:

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{(kr)^{1/2} \varepsilon_2^{1/4}} a_{klm}^{(2)} J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_2 kr) Y_l^m(\theta, \varphi), \text{ якщо } r > a \quad (2.20)$$

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{(kr)^{1/2} \varepsilon_1^{1/4}} \left(a_{klm}^{(1)} J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 kr) + b_{klm}^{(1)} N_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 kr) \right) Y_l^m(\theta, \varphi), \text{ якщо } r < a \quad (2.21)$$

2.1.3. Граничні умови

$$\begin{aligned} U|_{r \rightarrow a-0} &= U|_{r \rightarrow a+0} \\ n_2 \frac{\partial U}{\partial r}|_{r \rightarrow a-0} &= n_1 \frac{\partial U}{\partial r}|_{r \rightarrow a+0} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_2^{\frac{1}{4}}} a_{klm}^{(2)} J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_2 ka) &= \frac{1}{\varepsilon_1^{\frac{1}{4}}} a_{klm}^{(1)} J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) + b_{klm}^{(1)} N_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) \\ \frac{n_2}{\varepsilon_2^{\frac{1}{4}}} a_{klm}^{(2)} J'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_2 ka) &= \frac{n_1}{\varepsilon_1^{\frac{1}{4}}} \left[a_{klm}^{(1)} J'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) + b_{klm}^{(1)} N'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

Приймемо амплітуду падаючої хвилі за 1 та поділимо 2 рівняння на $a_{klm}^{(2)}$.

Тоді:

$$\begin{aligned} J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_2 ka) &= \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \left[A_{klm} J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) + B_{klm} N_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) \right] \\ J'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_2 ka) &= \frac{n_1}{n_2} \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \left[A_{klm} J'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) + B_{klm} N'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Звідки знаходимо A_{klm} та B_{klm} :

$$A_{klm} = \frac{\frac{n_1}{n_2} N'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_2 ka) - N_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) J'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_2 ka)}{\sqrt[4]{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{n_1}{n_2}} \left(N'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) - N_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) J'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) \right)} \quad (2.25)$$

$$B_{klm} = \frac{\frac{n_1}{n_2} J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) J'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_2 ka) - J'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_2 ka)}{\sqrt[4]{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{n_1}{n_2}} \left(N'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) J_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) - N_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) J'_{l+\frac{1}{2}}(\varepsilon_1 ka) \right)}$$

2.1.4. Результати моделювання

РОЗДІЛ 3.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

3.1. qq

ВИСНОВКИ

1. qq