2　重力と重力エネルギー　詳解

……………………………………………………………………………………

問 2.1　地球に働く太陽と月の重力の大きさの比を，式で表せ．またその値を求めよ．月が地球の軌道上にあるとき，月に働く太陽と地球の重力の比についても同様に求めよ．

地球の質量を $M_\oplus$，太陽の質量を $M_\odot$，月の質量を M_m，地球と太陽の距離を r_s，地球と月の距離を r_m，地球に働く太陽の重力を F_s，地球に働く月の重力を F_m，重力定数を G とする．

- 地球に働く太陽と月の重力の比：

$$\frac{F_\mathrm{s}}{F_\mathrm{m}} = \frac{\dfrac{GM_\oplus M_\odot}{r_\mathrm{s}^2}}{\dfrac{GM_\oplus M_\mathrm{m}}{r_\mathrm{m}^2}} = \frac{M_\odot r_\mathrm{m}^2}{M_\mathrm{m} r_\mathrm{s}^2} = \frac{1.99\times10^{30}\ \mathrm{kg}\times\left(3.84\times10^{8}\ \mathrm{m}\right)^2}{7.36\times10^{22}\ \mathrm{kg}\times(1.50\times10^{11}\ \mathrm{m})^2} \simeq 177$$

【答】　$\dfrac{M_\odot r_\mathrm{m}^2}{M_\mathrm{m} r_\mathrm{s}^2}$，　太陽の重力の方が 177 倍大きい

- 月に働く太陽と地球の重力の比：月は地球の軌道上にあるから月と太陽の距離は r_s に等しい．

$$\therefore\quad \frac{F_\mathrm{s}}{F_\mathrm{e}} = \frac{\dfrac{GM_\mathrm{m} M_\odot}{r_\mathrm{s}^2}}{\dfrac{GM_\mathrm{m} M_\oplus}{r_\mathrm{m}^2}} = \frac{M_\odot r_\mathrm{m}^2}{M_\oplus r_\mathrm{s}^2} = \frac{1.99\times10^{30}\ \mathrm{kg}\times\left(3.84\times10^{8}\ \mathrm{m}\right)^2}{5.97\times10^{24}\ \mathrm{kg}\times(1.50\times10^{11}\ \mathrm{m})^2} \simeq 2.20$$

【答】$\dfrac{M_\odot r_\mathrm{m}^2}{M_\oplus r_\mathrm{s}^2}$，　太陽の重力の方が 2.20 倍大きい

……………………………………………………………………………………

問 2.2　体重が 60 kg と 40 kg の恋人 2 人が 50 cm の距離にいるとき，2 人の間に働く重力を求めよ．また，この力と同じ大きさの地球の重力が働く物体の質量はどれくらいか？

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} = \frac{6.67\times10^{-11}\times60\times40}{(0.5)^2} \simeq 6.40\times10^{-7}\ \mathrm{N}$$

$$F = mg \quad \text{より} \quad m = \frac{F}{g} = \frac{6.40\times10^{7}}{9.81} \simeq 6.53\times10^{-8}\ \mathrm{kg}$$

【答】重力：6.40×10^{-7} N，　質量：6.53×10^{-8} kg

……………………………………………………………………………………

問 2.3　水素原子は，陽子の周りを電子がボーア半径で円運動していると考えてよい．陽子と電子間に働く重力とクーロン力の大きさを比較せよ．なぜ，宇宙では重力が重要なのか．

陽子の質量を m_p，電子の質量を m_e，素電荷を e，ボーア半径を a，真空の誘電率を ε_0 とする．

$$\begin{aligned}\frac{F_\mathrm{g}}{F_\mathrm{C}} &= \frac{\dfrac{Gm_\mathrm{p}m_\mathrm{e}}{a^2}}{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 G m_\mathrm{p} m_\mathrm{e}}{e^2} \\ &= \frac{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times6.67\times10^{-11}\times1.67\times10^{-27}\times9.11\times10^{-31}}{\left(1.60\times10^{-19}\right)^2} \\ &\simeq 4.41\times10^{-40}\end{aligned}$$

【答】重力はクーロン力の 4.41×10^{-40}倍しかない．なぜ重要かは各自で考察せよ．

……………………………………………………………………………………………………

問 2.4　質量 M の物体の周りを半径 r で円運動する質量 m の物体の位置エネルギーを Φ，運動エネルギーを T とするとき，$2T + \Phi = 0$ となることを示せ．

速度を v とすると 重力 $=$ 遠心力 より，

$$\frac{GmM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \therefore \quad mv^2 = \frac{mGM}{r} \quad \therefore \quad T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GmM}{r}.$$

$$\text{また，}\quad \phi = -\frac{GmM}{r}. \quad \therefore \quad 2T + \phi = \frac{GmM}{r} - \frac{GmM}{r} = 0 \quad \text{が成り立つ．}$$

……………………………………………………………………………………………………

問 2.5　（2.6），（2.7）式を r で微分することにより，（2.8）式が成り立つことを確かめよ．

（2.6）式を微分して，

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{d}{dr}\left(-\frac{GmM}{r}\right) = \frac{GmM}{r^2} \quad \therefore \quad F = -\frac{GmM}{r^2} = -\frac{d\Phi}{dr}$$

同様に（2.7）式を微分して，

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d}{dr}\left(-\frac{GM}{r}\right) = \frac{GM}{r^2} \quad \therefore \quad g = -\frac{GM}{r^2} = -\frac{d\phi}{dr}$$

ゆえに（2.8）式が成り立つ．

……………………………………………………………………………………………………

問 2.6　地表付近では重力加速度 g は一定であると考えてよい．鉛直上方向を z 方向，地表面を $z = 0$ とするとき，地表面から z の高さにある質量 m の物体の位置エネルギー $\Phi(z)$ を求めよ．なお，基準点は地表面とせよ．

地表面から z の高さにある質量 m の物体にに働く力 $F(z)$ は，$F(z) = -mg$ である．したがって，地表面から z の高さにある物体 m の位置エネルギー $\Phi(z)$ は，地表面（$z = 0$）を基準点とすると，

$$\Phi(z) = \int_0^z \{-F(z')\}\,dz' = \int_0^z (mg)\,dz' = [mgz']_0^z = mgz$$

【答】$\Phi(z) = mgz$

……………………………………………………………………………………………………

問 2.7　一方を壁に固定し，他方に質量 m の物体を取り付けたバネがある．バネの伸びを x，バネ定数を k とすると，物体 m には $F(x) = -kx$ の力が働く．$x = 0$ のときを基準点として，バネによる位置エネルギー $\Phi(x)$ を求めよ．

基準点から x だけバネが伸びた時に質量 m の物体に働く力 $F(x)$ は $F(x) = -kx$ であるから，ことのきのバネによる位置エネルギー $\Phi(x)$ は

$$\Phi(x) = \int_0^x \{-F(x')\}\,dx' = \int_0^x (kx')\,dx' = \left[\frac{1}{2}kx'^2\right]_0^x = \frac{1}{2}kx^2$$

【答】$\Phi(x) = \dfrac{1}{2}kx^2$

……………………………………………………………………………………………………

問 2.8　地球の質量を $M_\oplus$，半径を $R_\oplus$ として，地表での重力加速度 g を $M_\oplus$，$R_\oplus$ を用いて表せ．地表での g は質量 m の物体に働く地球の重力（地上での重さ）mg を測定して求めることができる．$g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$，$R_\oplus = 6.4\times 10^6$ m として地球の質量を求めよ．

質量 m の物体に働く地球の重力 F は $F = -mg$ であり，これは地球の質量を半径を用いて表せば，$F = -GmM_\oplus/R_\oplus^2$ となる．したがって，

$$-mg = -\frac{GmM_\oplus}{R_\oplus^2}. \quad \therefore \quad M_\oplus = \frac{gR_\oplus^2}{G}.$$

また，これらに数値を代入して，

$$M_\oplus = \frac{gR_\oplus^2}{G} = \frac{9.8\times\left(6.4\times 10^6\right)^2}{6.67\times 10^{-11}} \simeq 6.0\times 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

【答】$M_\oplus = \dfrac{gR_\oplus^2}{G}$，　$M_\oplus \simeq 6.0\times 10^{24}$ kg

……………………………………………………………………………………………

問 2.9　地表面からの高さ z が地球の半径 $R_\oplus$ に比べ十分小さいとき（$z \ll R_\oplus$ のとき），地表から z の高さでの重力加速度 $g'(z)$ は地表の重力加速度 $g \equiv g'(0)$ で近似できることを示し，このときの位置エネルギー $\Phi(z)$ を g を用いて表せ．ただし，地表（$z=0$）を基準点とせよ．また，この結果を問 2.6 の結果と比較せよ．

地球の半径を R，質量を M とし，質量 m の物体に働く力 F を考える．地用面の重力加速度を g とおけば，物体 m に働く力は $F = -mg = -\dfrac{GmM}{R^2}$ となるので，$g = \dfrac{GM}{R^2}$ となる．したがって地表面から z（$\ll R$）の高さにおける物体 m に働く力を F'，重力加速度を g' とすれば，

$$F' = -g'm = -\frac{GmM}{(R+z)^2} = -\frac{GmM}{R^2\left(1+\dfrac{z}{R}\right)^2} = -\frac{GmM}{R^2}\left(1+\frac{z}{R}\right)^{-2} = -gm\left(1-\frac{2z}{R}\right) \simeq -gm$$

ゆえに $g' \simeq g$ を得る．

また，中心からの距離 r における物体 m の位置エネルギー $\Phi'(r)$ は $\Phi'(r) = -\dfrac{GmM}{r}$ と表せるので，地表面（$r=R$）を基準点とする位置エネルギー $\Phi(z)$ は

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \Phi'(R+z) - \Phi'(R) = -\frac{GmM}{R+z} - \left\{-\frac{GmM}{R}\right\} \\ &= -\frac{GmM}{R}\left(1+\frac{z}{R}\right)^{-1} + \frac{GmM}{R} \simeq -\frac{GmM}{R}\left(1-\frac{z}{R}\right) + \frac{GmM}{R} = \frac{GmMz}{R^2} = mgz\end{aligned}$$

となり，問 2.6 の結果と一致する．

【答】$\Phi(z) = mgz$，　問 2.6 の結果と一致する．

……………………………………………………………………………………………

問 2.10　半径 R，全質量 M，一定密度 ρ_0 の球による重力 $F(r)$ および位置エネルギー $\Phi(r)$（r は球の中心からの距離）を求め，グラフに表せ．なお，基準点は $r=\infty$ とせよ．

- まず，重力 $F(r)$ を求める．

(1) $r \le R$ のとき

半径 r 内の球の全質量 M_r は $M_r = \dfrac{4}{3}\pi r^3\rho_0$．また，$\rho_0 = \dfrac{3M}{4\pi R^3}$ したがって，質量 m の物体に働く力 $F(r)$ は

$$F(r) = -\frac{GmM_r}{r^2} = -\frac{Gm}{r^2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0 = -\frac{4\pi Gm\rho_0 r}{3} = -\frac{GmM}{R^3}r$$

(2)　$r > R$ のとき

半径 r 内の球の全質量は M となるので，重力 $F(r)$ は

$$F(r) = -\frac{GmM}{r^2}$$

したがって，

【答】
$r \leq R$　のとき　$F(r) = -\dfrac{GmM}{R^3}r$
$r > R$　のとき　$F(r) = -\dfrac{GmM}{r^2}$

● 次に位置エネルギー $\Phi(r)$ を求める．基準点を無限遠とすれば，

$$\Phi(r) = \int_{\infty}^{r} \{-F(r')\} dr'$$

で与えられる．したがって，
（3）$r \leq R$ のとき，

$$\begin{aligned}
\Phi(r) &= \int_{\infty}^{r} \{-F(r')\} dr' = \int_{r}^{\infty} F(r') dr' \\
&= \int_{r}^{R} F(r') dr' + \int_{R}^{\infty} F(r') dr' \\
&= \int_{r}^{R} \left(-\frac{GmM}{R^3} r' \right) dr' + \int_{R}^{\infty} \left(-\frac{GmM}{r'^2} \right) dr' \\
&= -\frac{GmM}{R^3} \left[\frac{r'^2}{2} \right]_r^R + GmM \left[\frac{1}{r'} \right]_R^\infty \\
&= -\frac{GmM}{2R} + \frac{GmMr^2}{2R^3} + 0 - \frac{GmM}{R} \\
&= -\frac{GmM}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)
\end{aligned}$$

（4）$r > R$ のとき，

$$\begin{aligned}
\Phi(r) &= \int_{\infty}^{r} \{-F(r')\} dr' = \int_{r}^{\infty} F(r') dr' = \int_{r}^{\infty} \left(-\frac{GmM}{r'^2} \right) dr' \\
&= GmM \left[\frac{1}{r'} \right]_r^\infty = -\frac{GmM}{r}
\end{aligned}$$

したがって，

【答】
$r \leq R$　のとき　$\Phi(r) = -\dfrac{GmM}{2R}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$
$r > R$　のとき　$\Phi(r) = -\dfrac{GmM}{r}$

- 図 2.1 に力 $F(r)$ のグラフを，図 2.2 に位置エネルギー $\Phi(r)$ のグラフを赤の実線で示す．

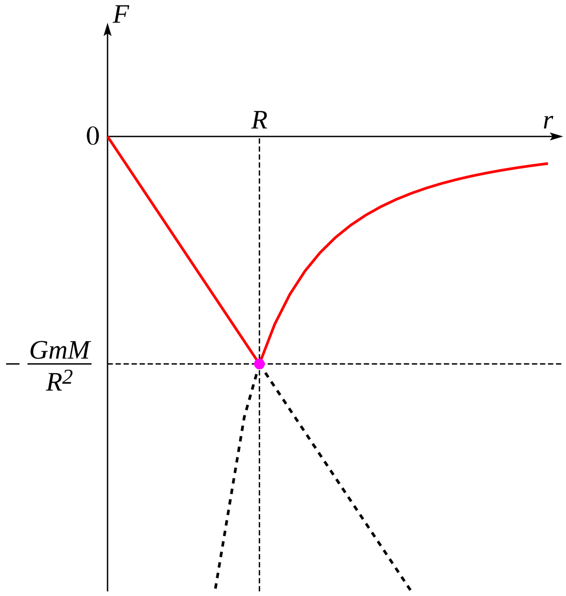

図 **2.1** 力の分布

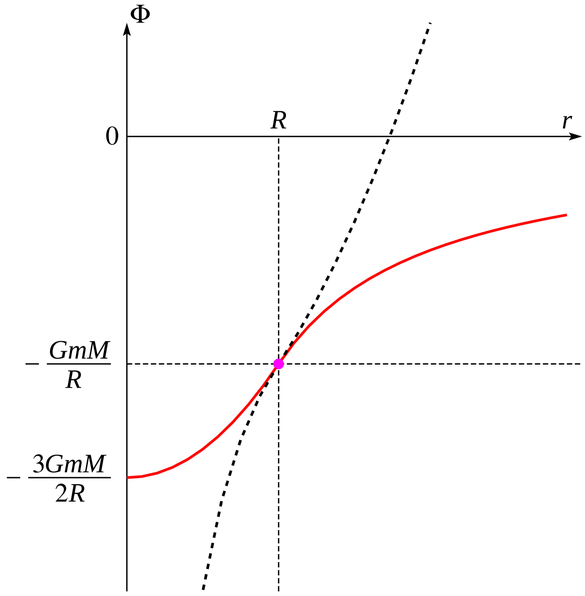

図 **2.2**　位置エネルギーの分布

…………………………………………………………………………………………………

問 2.11　（2.22）式の積分を実行し，$F(z)$ が z によらないことを確かめよ．

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[-\frac{Gm\sigma z r}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} \right] d\varphi dr \qquad (\varphi \text{ で積分を実行}) \\
&= -2\pi Gm\sigma z \int_0^\infty \frac{r}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} dr \qquad (r = z\tan\theta \text{で置換}) \\
&= -2\pi Gm\sigma z \int_0^{\pi/2} \frac{z\tan\theta}{\left\{z^2\left(\tan^2\theta+1\right)\right\}^{3/2}} z\sec^2\theta d\theta \\
&= -2\pi Gm\sigma z \int_0^{\pi/2} \frac{z^2\tan\theta\sec^2\theta d\theta}{z^3\sec^3\theta} \\
&= -2\pi Gm\sigma \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = -2\pi Gm\sigma \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi/2} = -2\pi Gm\sigma
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

…………………………………………………………………………………………………

問 2.12　一定密度 ρ，厚さ $2h$ の無限に広がったガス円盤の重力 $F(z)$ および位置エネルギー $\Phi(z)$ を求めよ．ただしガス円盤は $-h \leq z \leq h$ の範囲にあり，その外側では $\rho = 0$ とする．また，位置エネルギーの基準点は $z = 0$ とせよ．ヒント：（2.22）式で $\sigma = \rho dz$ とおき，力の向きに注意しながら z について $-h$ から h まで積分する．このとき，$z < -h$，$-h \leq z \leq h$，$h < z$ の 3 つの場合に分けて考えるとよい．

- まず重力 $F(z)$ を求める．

$z' \sim z' + dz'$ の厚さ dz' の薄い平面からの重力は,（2.21）式で $\sigma = \rho dz'$ と置き換えればよい．
（1） $h < z$ のとき，z=z' の厚さ dz' の薄い平面から受ける重力 dF(z) は，平面がすべて m の物体より下側にあるので $dF(z') = -2piGm\rho dz'$ となる．薄い平面は $-h \leq z' \leq h$ の間にあるから，力 $F(z)$ は

$$F(z) = \int_{-h}^{h} F(z')dz' = \int_{-h}^{h}(-2\pi Gm\rho dz') = -2\pi Gm\rho\Big[z'\Big]_{-h}^{h} = -4\pi Gm\rho h$$

（2） $-h \leq z \leq h$ のとき，$-h \sim z$ 内の平面は下側，$z \sim h$ 内の平面は上側にあるので，

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{-h}^{h} F(z')dz' = \int_{-h}^{z}(-2\pi Gm\rho dz') + \int_{z}^{h} 2\pi Gm\rho dz' \\ &= -2\pi Gm\rho\Big[z'\Big]_{-h}^{z} + 2\pi Gm\rho\Big[z'\Big]_{z}^{h} \\ &= -2\pi Gm\rho(z+h) + 2\pi Gm\rho(h-z) = -4\pi Gm\rho z \end{aligned}$$

（3） $z < -h$ のとき，z=z' の厚さ dz' の薄い平面から受ける重力 dF(z) は，平面がすべて m の物体より上側にあるので $dF(z') = 2piGm\rho dz'$ となる．薄い平面は $-h \leq z' \leq h$ の間にあるから，力 $F(z)$ は

$$F(z) = \int_{-h}^{h} F(z')dz' = \int_{-h}^{h} 2\pi Gm\rho dz' = 2\pi Gm\rho\Big[z'\Big]_{-h}^{h} = 4\pi Gm\rho h$$

したがって，

	$+h < z$	のとき	$F(z) = -4\pi Gm\rho h$
【答】	$-h \leq z \leq +h$	のとき	$F(z) = -4\pi Gm\rho z$
	$z < -h$	のとき	$F(z) = 4\pi Gm\rho h$

• 次にポテンシャル $\Phi(z)$ を求める．基準点を $z = 0$ にとるので，

$$\Phi(z) = \int_{0}^{z} \{-F(z')\}dz'$$

で与えられる．したがって
（4）$h < z$ のとき，

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \int_{0}^{z}\{-F(z')\}dz' = -\int_{0}^{z} F(z')dz' = -\left\{\int_{0}^{h} F(z')dz' + \int_{h}^{z} F(z')dz'\right\} \\ &= -\left\{\int_{0}^{h}(-4\pi Gm\rho z')\,dz' + \int_{h}^{z}(-4\pi Gm\rho h)\,dz'\right\} \\ &= -\left\{-4\pi Gm\rho\left[\frac{z'^2}{2}\right]_{0}^{h} - 4\pi Gm\rho h\Big[z'\Big]_{h}^{z}\right\} \\ &= 2\pi Gm\rho h^2 + 4\pi Gm\rho h(z-h) = 2\pi Gm\rho h(2z-h) \end{aligned} \tag{2.2}$$

（5）$-h \leq z \leq h$ のとき

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \int_{0}^{z}\{-F(z')\}\,dz' = -\int_{0}^{z} F(z')dz' \\ &= -\int_{0}^{z}(-4\pi Gm\rho z')\,dz' = 4\pi Gm\rho\left[\frac{z'^2}{2}\right]_{0}^{z} = 2\pi Gm\rho z^2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

（6）$z < -h$ のとき，

$$\Phi(z) = \int_{0}^{z}\{-F(z')\}\,dz' = \int_{z}^{0} F(z')dz' = \int_{z}^{-h} F(z')dz' + \int_{-h}^{0} F(z')dz'$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_z^{-h} 4\pi G m\rho h dz' + \int_{-h}^{0} (-4\pi G m\rho z') dz' \\
&= 4\pi G m\rho h \Big[z'\Big]_z^{-h} - 4\pi G m\rho \left[\frac{z'^2}{2}\right]_{-h}^{0} \\
&= 4\pi G m\rho h(-h-z) - 4\pi G m\rho \left(0 - \frac{h^2}{2}\right) \\
&= -2\pi G m\rho h(2z+h)
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

これらをまとめて，

【答】

$+h < z$	のとき	$\Phi(z) = 2\pi G m\rho h(2z-h)$
$-h \leq z \leq +h$	のとき	$\Phi(z) = 2\pi G m\rho z^2$
$-h < z$	のとき	$\Phi(z) = -2\pi G m\rho h(2z+h)$

- 参考までに，図 2.3 に力 $F(z)$ のグラフを，図 2.4 に位置エネルギー $\Phi(z)i$ のグラフを赤の実線で示す．

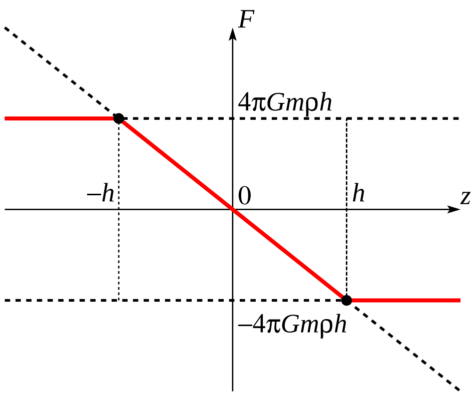

図 **2.3** 力の分布

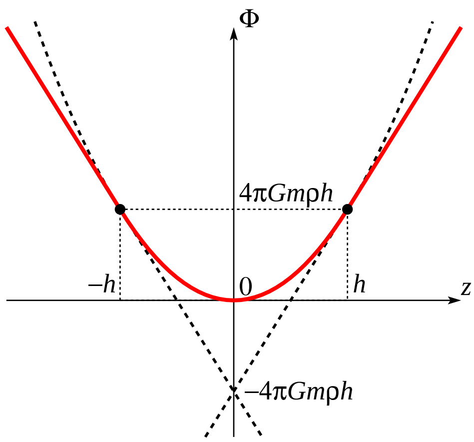

図 **2.4**　位置エネルギーの分布

【演習】

星間ガスが収縮し，半径 R，質量 M の星を形成するときにガスが解放する重力エネルギーを，以下の手順で求めよ．なお，簡単のため，星の密度 ρ は常に一定とする．

(1) 星の密度 ρ を求めよ．

$$
\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3} \tag{2.5}
$$

(2) 半径が r ($r < R$) になったときの星の全質量 M' を，M，R，r を用いて表せ．

$$
M' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{3M}{4\pi R^3} = M\left(\frac{r}{R}\right)^3 \tag{2.6}
$$

(3) 図 2.5 のように，無限遠で静止していたガスがこの星の表面に落下し，星の半径が dr だけ増加した．このとき，落下してきたガスの全質量 dm を求めよ．

$$
dm = 4\pi r^2 dr \cdot \rho = 4\pi r^2 dr \cdot \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3M}{R^3} r^2 dr \tag{2.7}
$$

(4) 質量 dm のガスが半径 r の星に落下したときに解放する重力エネルギー dE を求めよ．

$$dE = 0 - \left(-\frac{GM'dm}{r}\right) = \frac{G}{r}\cdot M' \cdot dm = \frac{G}{r}\cdot M\left(\frac{r}{R}\right)^3 \cdot \frac{3M}{R^3}r^2dr = \frac{3GM^2}{R^6}r^4dr \tag{2.8}$$

（5）星が形成されるとき，ガスが解放する重力エネルギー E は，dE を dr で表し，r を 0 から星の半径 R まで積分することによって求めることができる．積分を実行し，解放される重力エネルギー E を，R と M で表せ．

$$E = \int dE = \int_0^R \frac{3GM^2}{R^6}r^4dr = \frac{3GM^2}{R^6}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \tag{2.9}$$