

1 宇宙のスケール 詳解

問 1.1 表 1.1 でわからない用語について調べよ。また他の例を調べよ。

例：C60

60 個の炭素原子が内部が空洞の球殻状に結合した結晶分子（同類の分子の総称にも使われる）。ダイヤモンドと同じく炭素の同素体。球殻状の建築物ジオデシックドームで有名なバックミンスターフラーに因んで、フラーレン（Fullerene）とかバッキー（Bucky）ボールなどと呼ばれる。1970 年に最初の理論が公表され、1985 年に実験で発見されたが、その後、隕石や地球の岩石などでも見つかり、2010 年ついにスピッツァー宇宙望遠鏡によって宇宙でも確認された。C60 の直径はわずか 10 億分の 1m ほどで、強度が高く計量なカーボンナノチューブの開発の切っ掛けとなった。

問 1.2 表 1.2 でわからない用語について調べよ。また他の例を調べよ。

例：バリオン、ハドロン、（表にはないが）レプトンとは？

原子は、正の電荷を持った陽子と電荷のない中性子からなる原子核と、その周辺に捕らわれた負の電荷を持つ電子からできている（陽子と中性子を合わせて核子と呼ぶ）。これら核子や電子、そして核子を結びつける中間子など、物質を構成する粒子を総称して素粒子（subatomic particle）と呼んでいる。素粒子のうち、強い力（核力）を感じる粒子をハドロン（強粒子）と総称し、感じない粒子をレプトン（軽粒子）と呼ぶ。またハドロンは、陽子や中性子のように比較的重いバリオン（重粒子）とパイ中間子のようなメソン（中間子）に分けられる。

さらに現在の描像では、陽子や中性子や中間子などは“素”粒子ではなく、下位構造があると考えられている。すなわち、陽子や中性子は、クォークと呼ばれる基本粒子が 3 つ集まってできている、中間子はクォークが 2 つ集まってできている。一方で、電子やニュートリノなどは、それ自体が、レプトン（軽粒子）と呼ばれる基本粒子である。

問 1.3 水素原子（陽子+電子）の質量を m_H とすると、中性水素ガスの質量密度 ρ と個数密度 N の関係はどうなるか？ また完全電離したプラズマではどうなるか？

【答】 $\rho = m_H N$, $\rho = m_H N/2$

問 1.4 星間空間では平均的には、 1 cm^3 あたりに 1 個の水素原子がある。星間空間での平均的な個数密度はいくらか？ また質量密度はどれくらいか？

【答】 $N = 1 \text{ 個 cm}^{-3}$, $\rho = 1.67 \times 10^{-24} \text{ g cm}^{-3}$

問 1.5 自分の平熱（体温）は摂氏で何度か？ また絶対温度で何度か？

【答】 平熱が 36.5°C なら、絶対温度では約 310K

問 1.6 1 秒角は何ラジアンになるか？

【答】 4.8×10^{-6} ラジアン

【演習】2

プランク時間とプランク長さを導出せよ。またそれらの値を具体的に求めてみよ。

【答】 $t_P \sim 10^{-43}$ s, $\ell_P \sim 4 \times 10^{-33}$ cm

宇宙（時空）の構造を考える際に知って欲しいことの一つが、時空という織物の基本尺度であるプランクスケール（Planck scale）だ^{*1}。自然が本来有している時間の基本単位は、秒や年ではなく、プランク時間（Planck time）と呼ばれる時間であり、空間の基本単位は m やマイルなどではなく、プランク長さ（Planck length）と呼ばれる長さなのだ。

われわれがふだん使っているメートル（m）という単位は、18 世紀末のフランスで考案されたもので、もともとは地球一周の 4 千万分の 1 の長さとして定められた（したがって、地球一周はほぼ 4 万 km になる）^{*2}。また、時間の単位の秒（s）は、60 進法を使っていた古代バビロニアで考えられたもので、一日の 24 分の 1（時）の 60 分の 1（分）の 60 分の 1 だ^{*3}。いずれも、地球を基準にして、人間が扱いやすい値になるように決められてきた人為的な単位なのだ。質量のキログラム（kg）その他も同様である。

これらの人間が作った単位を用いると、光速 c や重力の強さを表す万有引力定数 G やミクロな世界での基本定数であるプランク定数 h など、基本的な物理定数は、

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \quad (1.1)$$

$$G = 6.6726 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \quad (1.2)$$

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s} \quad (1.3)$$

などのように、非常に大きな数や小さな数になる。

このような人為的な単位に対し、宇宙が内在している単位を調べるすべはないだろうか。そのような問題で力を発揮するのが次元解析である。

物理量の単位と似ているが、単位よりも広い概念として、物理量の次元という言い方をすることがある（3 次元空間の次元とは意味合いが違う）。物理量の次元には、長さ（length）の次元 L（単位は m や cm）、質量（mass）の次元 M（単位は kg や g）、時間（time）の次元 T（単位は s や年）、電流の次元、温度の次元などがある。たいていは最初の 3 つだけで済むので、ここでも、次元 L・M・T だけ考えよう^{*4}。

この次元という考え方をすると、たとえば、太陽の質量は、SI 単位系の kg で表すのと、cgs 単位系の g で表すのとでは、桁が異なるが、次元としては、いずれにせよ、質量の次元 M をもつ。物理量の次元を表す記号として [] を使うと、以下のようになる：

$$[\text{太陽質量}] = M \quad (1.4)$$

同様に、さきほどの基本定数の次元は、それぞれ、以下となる：

$$[c] = LT^{-1} \quad (1.5)$$

$$[G] = L^3 M^{-1} T^{-2} \quad (1.6)$$

$$[h] = L^2 M T^{-1} \quad (1.7)$$

さて、これら 3 つの定数の組み合わせを考えたときに、いろいろな組み合わせを調べて右辺の次元を求めてみると、万有引力定数とプランク定数を掛けて、光速の 5 乗で割り、さらにルートを取って、

$$\sqrt{\frac{Gh}{c^5}}$$

^{*1}プランク（Max Planck ; 1858～1947）。ドイツの物理学者で、量子という概念を提案したり、黒体放射を表すプランク分布を導いたり、量子力学の草創期に多くの重要な仕事をした。量子力学の創設者の一人である。1918 年のノーベル物理学賞を受賞している。

^{*2}現在の国際単位系では、光速の方を基準として、真空中で光が 299792458 分の 1 秒の時間に伝わる距離と定義されている。

^{*3}現在の国際単位系では、セシウム 133 原子を使い、その基底状態の 2 つの超微細準位間の遷移によって放射される電磁波の、振動周期の 9192631770 倍に等しい時間として定義されている。

^{*4}定数や変数はイタリック（斜字体）で表記するが、単位や次元はローマン（立体）で表記する。

とした量のみが、唯一、時間の次元をもつことがわかる。他には時間の次元をもつ量は作れない。具体的な値を計算してみると、

$$\text{プランク時間 } t_P \equiv (Gh/c^5)^{1/2} = 1.4 \times 10^{-43} \text{秒} \sim 10^{-43} \text{秒} \quad (1.8)$$

となる^{*5}。また同様にして、基本定数の組み合わせから

$$\text{プランク長さ } \ell_P \equiv (Gh/c^3)^{1/2} = 4 \times 10^{-33} \text{ cm} \sim 10^{-33} \text{ cm} \quad (1.9)$$

が導かれる。他にも、プランク質量なども導ける。

これらのスケールこそが、自然（宇宙）が本来的に有しているスケールであり、人間が人為的に作った単位で表すと、上のような数値になるというわけなのだ。逆に、これらのプランクスケールを単位として使えば（自然単位と呼ぶ）、

$$\text{光速 } c = 1 \text{ プランク長さ/プランク時間} \quad (1.10)$$

のように、上記で出てきた物理定数の値はどれも 1 になる！

宇宙（時空）は連続的なものではなく、時空という織物において、時間の間隔は 1 プランク時間で区切られており、空間は 1 プランク長さで区切られており、それより短いスケールは意味をなさない。そして、光は、1 プランク時間で 1 プランク長さだけ進むのだ。プランク長さぐらいの非常にミクロなスケールでは、時空の量子的ゆらぎが無視できなくなる。プランクスケールで時空はデジタル化されているといってもいいだろう。

^{*5}プランク定数を 2π で割った値を使うことも多く、その場合は 10^{-44} 秒ぐらいになる。ぞろ目で覚えやすいので、こちらを使うことも多い。