



TALLER DE PROYECTO II

2022

CINEMÁTICA DEL BRAZO ROBÓTICO

Explicación matemática

Resumen

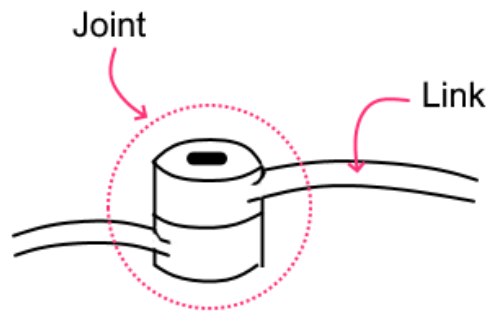
El presente trabajo busca explicar el origen de las fórmulas matemáticas y del algoritmo empleado en el brazo robótico. Adicionalmente, en el último apartado se estiman las limitaciones físicas del brazo.

Delekta Julian – 02132/6

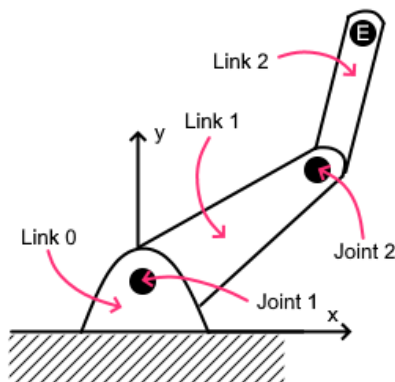
Contenido

Definición de la estructura.....	2
Transformaciones	3
Transformaciones de traslación.....	3
Transformaciones de rotación	3
Matriz Denavit-Hartenberg.....	3
Matriz de transformación homogénea	3
Notación DH.....	4
Definición del brazo robótico según DH	5
Cinemática Inversa.....	7
Matriz Jacobiana de Velocidad Lineal.....	7
Matriz Jacobiana de Velocidad Angular	8
Continuación.....	9
Damped Least Squares.....	10
Algoritmo	10
Límites del brazo y del dibujo	10
Ángulos	10
Distancia máxima.....	11
Distancia mínima	11
Límites del dibujo.....	12
Bibliografía	13

Definición de la estructura



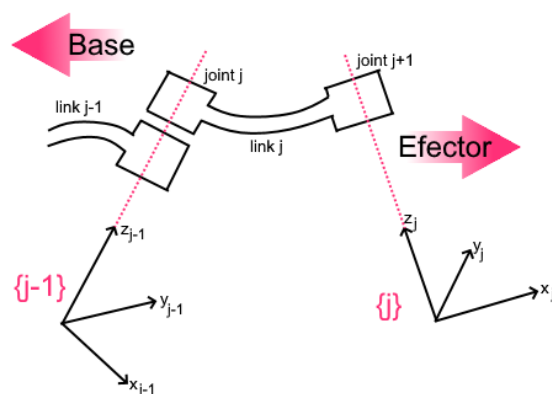
Todo brazo o manipulador robótico está conformado por articulaciones o *joints*. Cada joint está conectada a una joint previa por medio de un eslabón o *link*. Los links son rígidos, mientras que las joints pueden moverse. Existen dos tipos de joints: las prismáticas, que tiene movimiento lateral, y las de revolución o rotacionales que tienen movimiento angular.



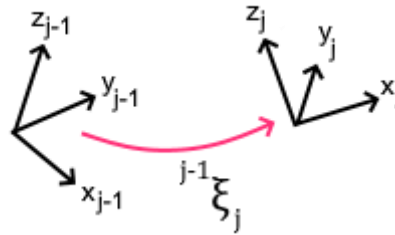
Un joint conecta 2 links. Un link conecta 2 joints, excepto el primer y el último link. Al primer link lo llamamos base y se enumera como **Link 0**. En el extremo del último link se ubica el **Efectador Final**. Un *grado de libertad* representa un par link y joint.

Un brazo con n joints tendrá $n+1$ links.

Al final de cada link, es decir, el extremo más cercano al efector, se le añade un *sistema de coordenadas o marco de referencia* (link frame):



Nos interesa describir la posición y orientación de un link frame con respecto al link frame anterior:



La posición relativa desde el marco de coordenadas $j-1$ al marco de coordenadas j , se denomina ${}^{j-1}\xi_j$ y se representa con una matriz de transformación homogénea. De esta forma, se puede describir cada joint por una matriz de transformación homogénea la cual indica las rotaciones y traslaciones necesarias para alinear la joint $j-1$ a la j .

De esta forma, el producto de todas las matrices de las joints nos da la posición del efector final.

Transformaciones

Las *transformaciones* son un tipo de operadores matriciales que puede realizar operaciones sobre vectores trasladándolos o rotándolos. Analizamos dos tipos de transformaciones: traslaciones y rotaciones.

Transformaciones de traslación

Se denota $\text{Trans}(a, b, c)$ y es una transformación que mueve un punto definido por \vec{v} a un nuevo punto definido por \vec{w} . Los parámetros a , b y c representan el desplazamiento en los ejes x , y y z .

Transformaciones de rotación

Se denota $\text{Rot}(\text{eje}, \theta)$ y es una transformación que mueve un punto definido por \vec{v} a una nueva posición por medio de una rotación de θ alrededor de un eje. El ángulo de rotación puede ser positivo o negativo y está definido mediante la regla de la mano derecha.

Matriz Denavit-Hartenberg

Es un tipo de matriz homogénea que nos permite transformar un vector de un marco de coordenadas a otro, por medio de rotaciones y traslaciones.

Matriz de transformación homogénea

Se expresa como:

Matriz de Rotación 3x3	Traslación 3x1
Perspectiva 1x3	Escala

$$\begin{matrix}
 n_x & o_x & a_x & p_x \\
 n_y & o_y & a_y & p_y \\
 n_z & o_z & a_z & p_z \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{matrix}$$

p: describe los vectores de dirección de los ejes x, y, z del frame 2 en términos de los vectores de dirección de los ejes x, y, z del frame 1

n: vector normal que representa al eje x

o: vector de orientación, representa al eje y

a: approach vector, representa al eje z

Notación DH

El símbolo: A_{mn} representa la matriz de transformación homogénea que relaciona los puntos del frame n en términos del frame m . Ej.: $A_{0n} = A_{01} \times A_{12} \times A_{23} \times \dots \times A_{(n-1)n}$

El método de Denavit-Hartenberg define la relación de dos marcos de referencia con solo cuatro parámetros: θ_j , grado de rotación de una articulación de revolución, d_j , la distancia lineal de una articulación prismática, a_j , la longitud del link, y α_j , ángulo de torsión del link.

Eje de rotación de una articulación: El eje de cada joint está definido/alineado con el eje z del marco de coordenados

Si bien la relación entre dos marcos de coordenadas tiene 6 parámetros (3 traslaciones y 3 rotaciones) este método lo logra con solo 4. Esto representa restricciones a Denavit-Hartenberg:

1. El eje z_{j-1} interseca al eje de rotación de la articulación j -ésima
2. El eje x_j es normal al eje z_{j-1} , con su dirección positiva hacia el eje z_j
3. El eje y_j se elige de forma tal que los tres ejes formen un sistema de mano-derecha. [1]

Cada uno de estos parámetros se definen respecto de las dos articulaciones anexionadas a los extremos de un link, de la siguiente forma:

- θ_j : ángulo de la articulación desde el eje x_{j-1} al eje x_j alrededor del eje z_{j-1} (eje de rotación de la articulación) empleando la regla de la mano derecha.
- d_j : es la distancia desde el origen del marco de coordenadas (j-1) hasta la intersección del eje z_{j-1} con el eje x_j a lo largo del eje z_{j-1}
- a_j : distancia desde la intersección del eje z_{j-1} con el eje x_j hasta el origen del i-ésimo frame a lo largo del eje x_j
- α_j : ángulo desde el eje z_{j-1} al eje z_j alrededor del eje x_j

Una vez que se definen los marcos de referencia, se completa la tabla de parámetros de DH y se arman las matrices de transformación que definen la relación entre marcos consecutivos. Cada una de estas matrices es una matriz de DH, una matriz de transformación homogénea que se define por los anteriores parámetros y se puede hallar mediante una serie de translaciones y rotaciones.

$Rot(axis, \theta_j)$: matriz de rotación alrededor del eje $axis$ un ángulo θ_j

$Trans(a, b, c)$: matriz de traslación que mueve un punto definido por un vector \vec{v} a lo largo de la diagonal (a, b, c) hacia un nuevo punto definido por el vector \vec{w} .

La multiplicación de esas matrices en el siguiente orden da la **matriz DH**:

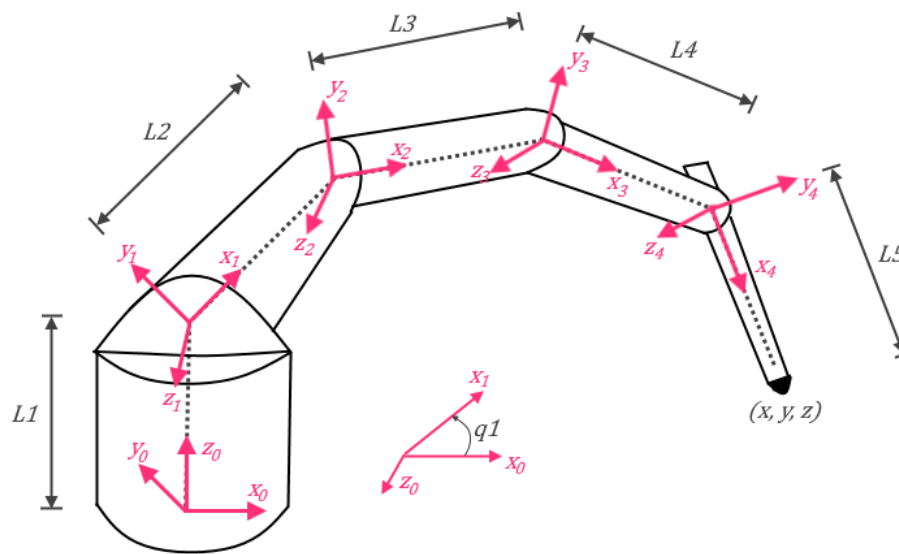
$$A_{(j-1)j} = Rot(x_j, \alpha_j) Trans(a_j, 0, 0) Trans(0, 0, d_j) Rot(z_{j-1}, \theta_j) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\cos\alpha_j \sin\theta_j & \sin\alpha_j \sin\theta_j & a_i \cos\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\alpha_j \cos\theta_j & -\sin\alpha_j \cos\theta_j & a_i \sin\theta_j \\ 0 & \sin\alpha_j & \cos\alpha_j & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para un manipulador de n grados de libertad. La posición del efector final, $P = A_{0n} = A_{01} \times A_{12} \times A_{23} \times \dots \times A_{(n-1)n}$

Definición del brazo robótico según DH

El siguiente apartado explica detalladamente cómo obtener la matriz DH que describe al brazo robótico del proyecto. En la siguiente figura se muestra un modelado del mismo donde se indican los marcos de referencia de cada articulación:



La siguiente tabla muestra los parámetros de DH:

Articulación	θ_j	d_j	a_j	α_j
1	q_1	L_1	0	90°
2	q_2	D	L_2	0
3	q_3	0	L_3	0
4	q_4	0	L_4	0
5	q_5	0	L_5	0

Las variables de esta tabla son los ángulos q_i . Ya que la longitud de cada link (L_i) es constante, al igual que el desfase D . Por medio de esta tabla y aplicando la matriz de DH obtenemos todas las transformaciones $A_{(i-1)i}$.

$$A_{0,1} = \begin{bmatrix} c1 & 0 & s1 & 0 \\ s1 & 0 & -c1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_{1,2} = \begin{bmatrix} c2 & -s2 & 0 & L2c2 \\ s2 & c2 & 0 & L2s2 \\ 0 & 0 & 1 & D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2,3} = \begin{bmatrix} c3 & -s3 & 0 & L3c3 \\ s3 & c3 & 0 & L3s3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_{3,4} = \begin{bmatrix} c4 & -s4 & 0 & L4c4 \\ s4 & c4 & 0 & L4s4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_{4,5} = \begin{bmatrix} c5 & -s5 & 0 & L5c5 \\ s5 & c5 & 0 & L5s5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para encontrar la matriz del robot tengo que multiplicarlas:

$$P = A_{0,5} = A_{0,1} \times A_{1,2} \times A_{2,3} \times A_{3,4} \times A_{4,5} = A_{0,2} \times A_{2,4} \times A_{4,5} = A_{0,4} \times A_{4,5}$$

$$A_{0,2} = \begin{bmatrix} c1c2 & -c1s2 & s1 & L2c1c2 + s1D \\ s1c2 & -s1s2 & -c1 & L2s1c2 - c1D \\ s2 & c2 & 0 & L1 + L2s2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2,4} = \begin{bmatrix} c3c4 - s3s4 & -c3s4 - s3c4 & 0 & L3c3 + L4(c4c3 - s4s3) \\ s3c4 + c3s4 & -s3c4 + c3c4 & 0 & L3s3 + L4(c4s3 + s4c3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{0,4} & & & \\ c1(c2(c3c4 - s3c4) - s2(s3c4 + c3s4)) & -c1(c2(c3s4 + s3c4) + s2(-s3s4 + c3c4)) & s1D & x_{0,4} \\ s1(c2(c3c4 - s3s4) - s2(s3c4 + c3s4)) & -s1(c2(c3s4 + s3c4) + s2(-s3s4 + c3c4)) & -c1D & y_{0,4} \\ s2(c3c4 - s3s4) + c2(s3c4 + c3s4) & s2(c3s4 + s3c4) + c2(-s3s4 + c3c4) & 0 & z_{0,4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$x_{0,4} = L2c1c2 + L3c1(c2c3 - s2s3) + L4c1(c2(c3c4 - s3s4) - s2(s3c4 + c3s4) + s1D$$

$$y_{0,4} = L2s1c2 + L3s1(c2c3 - s2s3) + L4s1(c2(c3c4 - s3s4) - s2(s3c4 + c3s4) - c1D$$

$$z_{0,4} = L1 + L2s2 + L3(s2c3 + c2s3) + L4(s2(c3c4 - s3s4) + c2(s3c4 + c3s4)$$

Se pueden simplificar los resultados hasta ahora, con las siguientes identidades trigonométricas:

$$\text{sen}(\theta \pm \beta) = \text{sen}\theta\cos\beta \pm \text{sen}\beta\cos\theta$$

$$\cos(\theta \pm \beta) = \cos\theta\cos\beta \mp \text{sen}\theta\text{sen}\beta$$

Ejemplos:

$$c3c4 - s3s4 = \cos(q3 + q4), s3c4 + c3s4 = \text{sen}(q3 + q4)$$

Entonces:

$$x_{0,4} = \cos(q1)(L2\cos(q2) + L3\cos(q2 + q3) + L4\cos(q2 + q3 + q4)) + \text{sen}(q1)D$$

$$y_{0,4} = \text{sen}(q1)(L2\cos(q2) + L3\cos(q2 + q3) + L4\cos(q2 + q3 + q4)) - \cos(q1)D$$

$$z_{0,4} = L1 + L2\text{sen}(q2) + L3\text{sen}(q2 + q3) + L4\text{sen}(q2 + q3 + q4)$$

$$A_{0,4} = \begin{bmatrix} \cos(q1)\cos(q2 + q3 + q4) & -\cos(q1)\text{sen}(q2 + q3 + q4) & \text{sen}(q1) & x_{0,4} \\ \text{sen}(q1)\cos(q2 + q3 + q4) & -\text{sen}(q1)\text{sen}(q2 + q3 + q4) & -\cos(q1) & y_{0,4} \\ \cos(q2 + q3 + q4) & \text{sen}(q2 + q3 + q4) & 0 & z_{0,4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir de estas ecuaciones se puede deducir fácilmente la posición del efector final:

$$x = x_{0,5} = \cos(q1)(L2\cos(q2) + L3\cos(q2 + q3) + L4\cos(q2 + q3 + q4) + L5\cos(q2 + q3 + q4 + q5)) + \text{sen}(q1)D$$

$$y = y_{0,5} = \text{sen}(q1)(L2\cos(q2) + L3\cos(q2 + q3) + L4\cos(q2 + q3 + q4) + L5\cos(q2 + q3 + q4 + q5)) - \cos(q1)D$$

$$z = z_{0,5} = L1 + L2\text{sen}(q2) + L3\text{sen}(q2 + q3) + L4\text{sen}(q2 + q3 + q4) + L5\text{sen}(q2 + q3 + q4 + q5)$$

$$P = A_{0,5} = \begin{bmatrix} \cos(q_1)\cos(q_2 + q_3 + q_4 + q_5) & -\cos(q_1)\sin(q_2 + q_3 + q_4 + q_5) & \sin(q_1) & x \\ \sin(q_1)\cos(q_2 + q_3 + q_4 + q_5) & -\sin(q_1)\sin(q_2 + q_3 + q_4 + q_5) & -\cos(q_1) & y \\ \cos(q_2 + q_3 + q_4 + q_5) & \sin(q_2 + q_3 + q_4 + q_5) & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática Inversa

En el apartado previo se encontró la matriz $A_{0,5}$, la cual nos indica la posición del efector final y su rotación a partir de los ángulos q_i de las articulaciones. A esto se lo conoce como cinemática directa.

Por otro lado, para conocer los ángulos de las articulaciones a partir de la posición del efector final se requiere la cinemática inversa. Existen varios métodos para resolver la cinemática inversa. Buss describe tres de ellos: *The Jacobian transpose*, *The pseudo inverse* y por último *Damped Least Squares* que se emplea en el presente trabajo [2].

Siguiendo el trabajo de Buss definimos:

Los ángulos de las articulaciones se escriben como el vector columna: $\theta = (q_1, \dots, q_5)^T$

Posición del efector final: $\vec{s} = \vec{s}(\theta)$, es función de θ

La posición objetivo del efector final (*target*): \vec{t}

El cambio en el efector final: $\vec{e} = \vec{t} - \vec{s}$

El problema de la cinemática inversa implica encontrar los valores q_i tal que:

$$\vec{t} = \vec{s}(\theta)$$

Debido a que no siempre se puede encontrar una solución a la ecuación anterior, se recurren a métodos iterativos que la aproximen. Para esto se aproxima linealmente \vec{s} empleando la matriz Jacobiana. La Matriz Jacobiana es una función de los valores de θ y se define como:

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} J_v \\ J_w \end{bmatrix}$$

Donde J_v es la matriz Jacobiana de velocidad lineal, y J_w es la matriz Jacobiana de velocidad angular. A continuación, se describe cómo obtener ambas matrices.

Matriz Jacobiana de Velocidad Lineal

$$J_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial x}{\partial q_5} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial z}{\partial q_5} \end{bmatrix}$$

Notación: $C_{1,2,3} = \cos(q_1 + q_2 + q_3)$ $S_{1,2,3} = \sin(q_1 + q_2 + q_3)$

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} = -S_1(L_2C_2 + L_3C_{2,3} + L_4C_{2,3,4} + L_5C_{2,3,4,5})$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_2} = -C_1(L_2S_2 + L_3S_{2,3} + L_4S_{2,3,4} + L_5S_{2,3,4,5})$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_3} = -C_1(L3S_{2,3} + L4S_{2,3,4} + L5S_{2,3,4,5})$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_4} = -C_1(L4S_{2,3,4} + L5S_{2,3,4,5})$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_5} = -C_1L5S_{2,3,4,5}$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_1} = C_1(L2C_2 + L3C_{2,3} + L4C_{2,3,4} + L5C_{2,3,4,5})$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_2} = -S_1(L2S_2 + L3S_{2,3} + L4S_{2,3,4} + L5S_{2,3,4,5})$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_3} = -S_1(L3S_{2,3} + L4S_{2,3,4} + L5S_{2,3,4,5})$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_4} = -S_1(L4S_{2,3,4} + L5S_{2,3,4,5})$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_5} = -S_1L5S_{2,3,4,5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_2} = L2C_2 + L3C_{2,3} + L4C_{2,3,4} + L5C_{2,3,4,5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_3} = L3C_{2,3} + L4C_{2,3,4} + L5C_{2,3,4,5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_4} = L4C_{2,3,4} + L5C_{2,3,4,5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_5} = L5C_{2,3,4,5}$$

Matriz Jacobiana de Velocidad Angular

Cada columna i de J_w con i e 1 a $n+1$, para las articulaciones de rotación se define:

$$J_{wi} = R_0^{i-1} \hat{k}$$

\hat{k} es el eje de rotación de cada articulación y está definido como el eje z : $[0 \ 0 \ 1]^T$

R_0^{i-1} es la matriz de rotación desde el *frame 0* al *frame i-1*.

Pero nuestras matrices homogéneas (A) van del frame $i-1$ al i : $A_{0,1}, A_{1,2}, \dots$

Hay que extraer la matriz de rotación de: $A_{0,1}, A_{0,2}, A_{0,3}, A_{0,4}, A_{0,5}$

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \cos q1 & 0 & \sin q1 \\ \sin q1 & 0 & -\cos q1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow J_{w2} = R_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin q1 \\ -\cos q1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

J_{w2} corresponde a \hat{k}

Y luego se puede ver: $J_{w2} = J_{w3} = J_{w4} = J_{w5}$ entonces:

$$J_w = \begin{bmatrix} 0 & s1 & s1 & s1 & s1 \\ 0 & -c1 & -c1 & -c1 & -c1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Continuación

El Jacobiano guía a un método iterativo para solucionar la cinemática inversa. Suponiendo que tenemos los valores actuales de θ , \vec{t} y \vec{s} . A partir de estos se computa el Jacobiano. Entonces buscamos el valor de actualización $\Delta\theta$ con el propósito de incrementar θ :

$$\theta := \theta + \Delta\theta$$

Damped Least Squares

El método empleado en el presente trabajo es el de *Damped Least Squares* descrito por Bauss y se basa en encontrar el valor de $\Delta\theta$ que minimice la ecuación:

$$\|J\Delta\theta - \vec{e}\|^2 + \lambda^2 \|\Delta\theta\|^2$$

Donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es una constante distinta de cero llamada *damping constant*. Su valor se elige lo suficientemente grande para que la solución se comporte bien cerca de las singularidades, pero no tan grande como para no converger a una tasa lenta.

Para obtener $\Delta\theta$ se emplea la siguiente ecuación: $\Delta\theta = J^T(JJ^T + \lambda^2 I)^{-1}\vec{e}$

Con $\vec{e} = \begin{bmatrix} x_{target} - x_{EE} \\ y_{target} - y_{EE} \\ z_{target} - z_{EE} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, donde las 3 últimas filas se dejan en 0 porque corresponden a la rotación

del efector final.

Algoritmo

La solución tras cada iteración queda en $\Delta\theta$. Tras cada iteración, el vector \vec{e} va disminuyendo. Si se establece un límite (por ejemplo, detener si el error es $< 1\text{cm}$) el algoritmo dejará de disminuir \vec{e} y le va a dar el ángulo a cada articulación para llegar a la posición deseada.

Límites del brazo y del dibujo

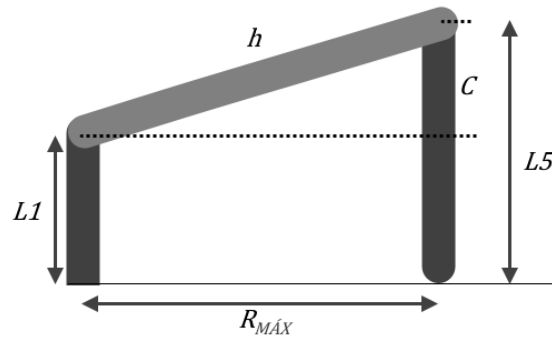
Ángulos

Según la estructura del brazo, nos interesa que el lápiz siempre este perpendicular a la hoja. Esto se logra imponiendo una restricción en la última articulación (q_5). Se tiene que los ángulos deben cumplir:

$$q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = -90^\circ \Rightarrow q_5 = -90^\circ - q_2 - q_3 - q_4$$

Distancia máxima

La distancia máxima que puede alcanzar el dibujo la denominamos $R_{M\acute{A}X}$, debido a que es el radio máximo al que se puede extender cumpliendo con la restricción descrita en el apartado anterior.

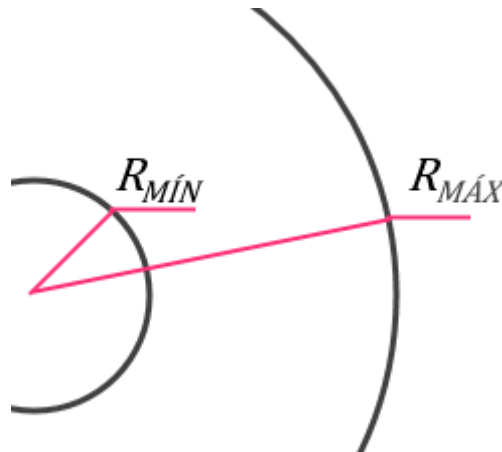


$$C = L5 - L1$$

$$R_{M\acute{A}X} = \sqrt{h^2 + C^2} = \sqrt{(L2 + L3 + L4)^2 + (L5 - L1)^2}$$

Distancia mínima

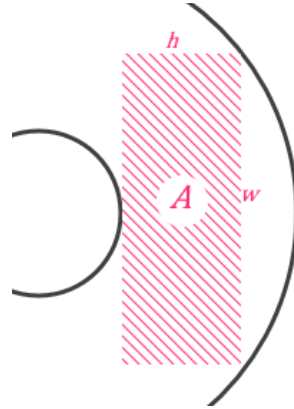
Debido a las dimensiones del brazo existe una distancia mínima hasta la que se puede acercar el lápiz a la base (limitación física). Está definida por $R_{M\acute{I}N}$:



Definimos la relación entre ambos radios como: $r = \frac{R_{M\acute{A}X}}{R_{M\acute{I}N}}$

Límites del dibujo

El lienzo donde el brazo robótico debe dibujar tiene dimensiones rectangulares. Se puede ver que el área de trabajo del brazo sigue una forma de dona. El problema consiste en encontrar las dimensiones del dibujo (w y h) que maximicen su área (A).



Definimos un ángulo α tal que: $w = 2\sin \alpha$ y $h = \cos \alpha$

$$A = wh = w(h_{M\acute{A}X} - R_{M\acute{I}N}) = 2 \sin \alpha R_{M\acute{A}X}(\cos \alpha R_{M\acute{A}X} - R_{M\acute{I}N})$$

“A” quedó definida en función de α . Puedo buscar su máximo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \alpha} = 0 &= 2 \cos \alpha R_{M\acute{A}X}(\cos \alpha R_{M\acute{A}X} - R_{M\acute{I}N}) + 2 \sin \alpha R_{M\acute{A}X}(-\sin \alpha R_{M\acute{A}X} - R_{M\acute{I}N}) \\ &= \cos^2 \alpha R_{M\acute{A}X} - \cos \alpha R_{M\acute{I}N} - \sin^2 \alpha R_{M\acute{A}X} - \sin \alpha R_{M\acute{I}N} \\ &= R_{M\acute{A}X}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - R_{M\acute{I}N}(\cos \alpha + \sin \alpha) \\ &= R_{M\acute{A}X} \cos(2\alpha) - R_{M\acute{I}N}(\cos \alpha + \sin \alpha) = 0 \end{aligned}$$

Sabiendo que $\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ y que $\cos \theta = \sin(\theta + \frac{\pi}{2})$

$$r \cos(2\alpha) = r \sin(2(\alpha + \frac{\pi}{4})) = \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

Renombrando: $\theta = \alpha + \frac{\pi}{4}$ y sabiendo la identidad trigonométrica: $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

$$r \sin(2\theta) = 2r \sin\theta \cos\theta = \sqrt{2} \sin\theta$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{r}\right) \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{r}\right) - \frac{\pi}{4}$$

Y de esta forma obtenemos las dimensiones del dibujo: $w = 2\sin \alpha$ y $h = \cos \alpha$

Bibliografía

- [1] C.S. George Lee, "*Robot Arm Kinematics, Dynamics, and Control*," Tutorial of Robotics, University of Michigan, Ann Arbor, 1982.
- [2] Samuel R. Buss, "*Introduction to Inverse Kinematics with Jacobian Transpose, Pseudoinverse and Damped Least Squares methods*" Department of Mathematics, University of California, San Diego. 2004