TALLER DE PROYECTO II

2022

CASO DE USO

Posicionamiento del Brazo Robótico

Resumen

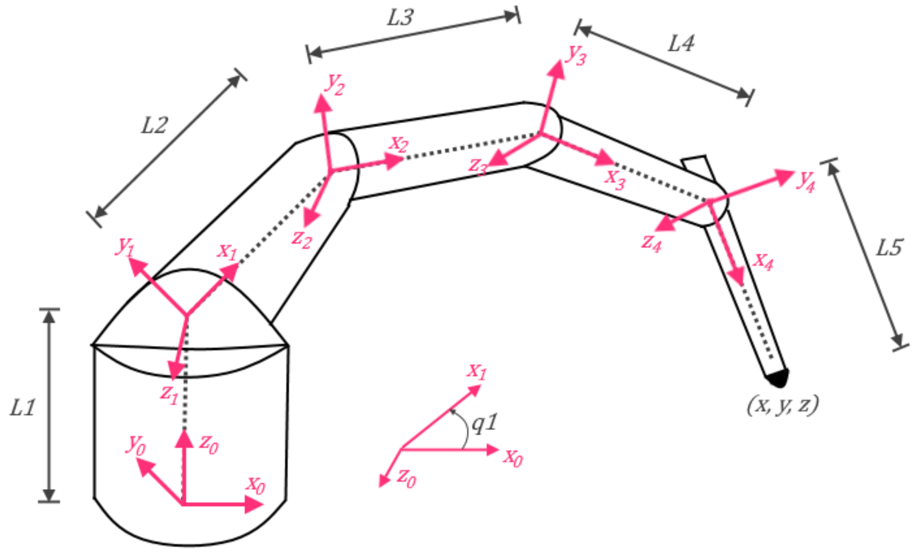
En el presente trabajo se aplica la teoría matemática de la cinemática del brazo en un ejemplo de un caso de uso concreto

Delekta, Julian – 02132/6

Definición del Problema

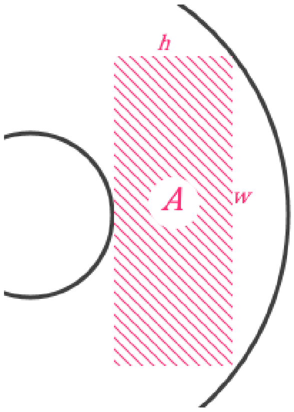
En el presente trabajo se explica numéricamente cómo el brazo robótico parte de su posición final, realiza los cálculos de cinemática y encuentra la posición angular de las articulaciones para llegar a un objetivo.

El modelo del brazo robótico es:



Para este ejemplo, las longitudes de todos los links (Li) van a ser igual a 5cm.

Dimensiones del dibujo



Reemplazando en:

$$R_{MÁX} = \sqrt{h^2 + C^2} = \sqrt{(L2 + L3 + L4)^2 + (L5 - L1)^2}$$
$$= L2 + L3 + L4 = 15cm$$

Y el radio mínimo se establece en 3.3cm. Entonces *r* = *4.5454*

Calculamos α: $\alpha = cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{r}\right) - \frac{\pi}{4} \approx 0.47 \approx 26.87°$. Con el que podemos obtener las dimensiones del dibujo: $w = 2sen\,\alpha$ y $h = \cos\alpha$. Lo que nos da un tamaño de lienzo de ***13.6cm x 10cm***

Posición inicial

Las articulaciones comenzarán con los siguientes ángulos: $q_1 = 0°, q_2 = 60°, q_3 = -40°, q_4 = -50°, q_5 = -60°$

Reemplazando en:

$$P = A_{0,5} = \begin{bmatrix} \cos(q1)\cos(q2+q3+q4+q5) & -\cos(q1)\mathrm{sen}(q2+q3+q4+q5) & sen(q1) & x \\ sen(q1)\cos(q2+q3+q4+q5) & -\mathrm{sen}(q1)\mathrm{sen}(q2+q3+q4+q5) & -\cos(q1) & y \\ \cos(q2+q3+q4+q5) & \mathrm{sen}(q2+q3+q4+q5) & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con:

$$\boldsymbol{x} = \cos(q1)\,(L2\cos(q2) + L3\cos(q2+q3) + L4\cos(q2+q3+q4) + L5\cos(q2+q3+q4+q5)) = \mathbf{11.5286cm}$$

$$\boldsymbol{y} = sen(q1)(L2\cos(q2) + L3\cos(q2+q3) + L4\cos(q2+q3+q4) + L5\cos(q2+q3+q4+q5)) = \mathbf{0cm}$$

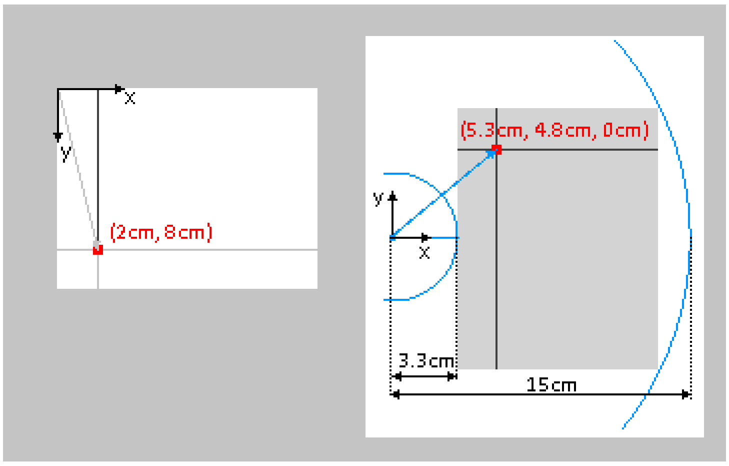
$$\boldsymbol{z} = L1 + L2sen(q2) + L3sen(q2+q3) + L4sen(q2+q3+q4) + L5sen(q2+q3+q4+q5) = \mathbf{3.5402cm}$$

Obtenemos la matriz de transformación que define al efector final en esta posición:

$$P = A_{0,5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 11.5286cm \\ 0 & 0 & -1 & 0cm \\ 0 & 1 & 0 & 3.5402cm \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Objetivo

El objetivo es posicionar el efector final en las coordenadas X=2cm, Y=8cm del lienzo. Esta posición en coordenadas del brazo corresponde a ***x* = *5.3cm*, *y* = *4.78cm*, *z* = *0cm***.



Algoritmo

Inicializamos las variables:

$$t_x = 5.3cm,\ t_y = 4.78cm \text{ y } t_z = 0$$

Vamos a querer que el error en el plano XY no supere los ±0.5cm. Mientras que el error en el eje Z no debe superar los 0.1cm.

Arbitrariamente se elige un $\lambda^2 = 50$ que da buenos resultados en convergencia. Mientras más grande sea, más iteraciones necesita el algoritmo para converger.

El algoritmo va aplicando iterativamente *Damped Least Squares* hasta que se satisfaga la restricción del error. Los pasos de este algoritmo son:

$$\vec{e} = \vec{t} - \vec{s}$$

$$Si\ \|\vec{e}_{XY}\| < 0.5cm\ \wedge |\vec{e}_Z| < 0.1cm \Longrightarrow Algoritmo\ Convergió$$

$$Iniciar\ Jacobiano\ (J)$$

Calculo de la pseudo inversa del Jacobiano:

$$J^{INV} = J^T(JJ^T + \lambda^2 I)^{-1}$$

Obtener el cambio en los ángulos:

$$\Delta\theta = J^{INV}\vec{e}$$

Resultado numérico

En este apartado se describe en detalle los cálculos realizados en la primera iteración del algoritmo. Para las demás iteraciones se simplifica la descripción y se muestran los resultados más relevantes.

Iteración 0

$$\vec{e} = \vec{t} - \vec{s} = \begin{bmatrix} 5.3cm \\ 4.78cm \\ 0cm \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11.5286cm \\ 0cm \\ 3.5402cm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.2286cm \\ 4.78cm \\ -3.5402cm \end{bmatrix}$$

Como $\|\vec{e}_{XY}\| = 7.8514cm > 0.5cm\ \wedge |\vec{e}_Z| = 3.5402cm > 0.1cm$ el algoritmo todavía no converge.

Calculo las componentes del Jacobiano:

Notación: $C_{1,2,3} = \cos(q1 + q2 + q3)\ S_{1,2,3} = sen(q1 + q2 + q3)$

$S_1 = 0$, $C_1 = 1$, $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$, $C_{2,3} = 0.9397$, $S_{2,3} = 0.3420$, $C_{2,3,4} = 0.866$ $S_{2,3,4} = -0.5, C_{2,3,4,5} = 0, S_{2,3,4,5} = -1$

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} = -S_1(L2C_2 + L3C_{2,3} + L4C_{2,3,4} + L5C_{2,3,4,5}) = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_2} = -C_1(L2S_2 + L3S_{2,3} + L4S_{2,3,4} + L5S_{2,3,4,5}) = 1.4598cm$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_3} = -C_1(L3S_{2,3} + L4S_{2,3,4} + L5S_{2,3,4,5}) = 5.7899cm$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_4} = -C_1(L4S_{2,3,4} + L5S_{2,3,4,5}) = 7.5cm$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_5} = -C_1 L5S_{2,3,4,5} = 5cm$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_1} = C_1\left(L2C_2 + L3C_{2,3} + L4C_{2,3,4} + L5C_{2,3,4,5}\right) = 11.5286cm$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_2} = -S_1\left(L2S_2 + L3S_{2,3} + L4S_{2,3,4} + L5S_{2,3,4,5}\right) = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_3} = -S_1\left(L3S_{2,3} + L4S_{2,3,4} + L5S_{2,3,4,5}\right) = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_4} = -S_1\left(L4S_{2,3,4} + L5S_{2,3,4,5}\right) = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_5} = -S_1 L5S_{2,3,4,5} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_2} = L2C_2 + L3C_{2,3} + L4C_{2,3,4} + L5C_{2,3,4,5} = 11.5286cm$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_3} = L3C_{2,3} + L4C_{2,3,4} + L5C_{2,3,4,5} = 9.0286cm$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_4} = L4C_{2,3,4} + L5C_{2,3,4,5} = 4.3301cm$$

$$\frac{\partial z}{\partial q_5} = L5C_{2,3,4,5} = 0$$

$$J_w = \begin{bmatrix} 0 & s1 & s1 & s1 & s1 \\ 0 & -c1 & -c1 & -c1 & -c1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces el Jacobiano es:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1.4598cm & 5.7899cm & 7.5cm & 5cm \\ 11.5286cm & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11.5286cm & 9.0286cm & 4.3301cm & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtengo la traspuesta:

$$J^T = \begin{bmatrix} 0 & 11.5286cm & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.4598cm & 0 & 11.5286cm & 0 & -1 & 0 \\ 5.7899cm & 0 & 9.0286cm & 0 & -1 & 0 \\ 7.5cm & 0 & 4.3301cm & 0 & -1 & 0 \\ 5cm & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hago la multiplicación:

$$J \times J^T = \begin{bmatrix} 116.9039 & 0 & 101.5797 & 0 & -19.7497 & 0 \\ 0 & 132.9084 & 0 & 0 & 0 & 11.5286 \\ 101.5797 & 0 & 233.1738 & 0 & -24.8873 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -19.7497 & 0 & -24.8873 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 11.5286 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sumo λ^2 por la matriz identidad:

$$J \times J^T + \lambda^2 I = \begin{bmatrix} 166.9039 & 0 & 101.5797 & 0 & -19.7497 & 0 \\ 0 & 182.9084 & 0 & 0 & 0 & 11.5286 \\ 101.5797 & 0 & 283.1738 & 0 & -24.8873 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ -19.7497 & 0 & -24.8873 & 0 & 54 & 0 \\ 0 & 11.5286 & 0 & 0 & 0 & 51 \end{bmatrix}$$

Obtengo la matriz inversa:

$$(J \times J^T + \lambda^2 I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0078 & 0 & -0.0027 & 0 & 0.0016 & 0 \\ 0 & 0.0055 & 0 & 0 & 0 & -0.0013 \\ -0.0027 & 0 & 0.0046 & 0 & 0.0011 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0 \\ 0.0016 & 0 & 0.0011 & 0 & 0.0196 & 0 \\ 0 & -0.0013 & 0 & 0 & 0 & 0.0199 \end{bmatrix}$$

Multiplico por la traspuesta:

$$J^T(J \times J^T + \lambda^2 I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0627 & 0 & 0 & 0 & 0.0054 \\ -0.0208 & 0 & 0.0478 & 0 & -0.0041 & 0 \\ 0.0196 & 0 & 0.0249 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0.0454 & 0 & -0.0012 & 0 & -0.0025 & 0 \\ 0.0374 & 0 & -0.0144 & 0 & -0.0115 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtengo $\Delta\theta$:

17.1682°, -2.2615°, -12.0270°, -15.9491°, -10.4125°

$$\Delta\theta = J^T(J \times J^T + \lambda^2 I)^{-1}\vec{e} = \begin{bmatrix} 17.1682° \\ -2.2615° \\ -12.0270° \\ -15.9491° \\ -10.4125° \end{bmatrix}$$

Aplico este cambio a los ángulos de las articulaciones:

$$\boldsymbol{\theta} := \boldsymbol{\theta} + \Delta\theta = \begin{bmatrix} 0° \\ 60° \\ -40° \\ -50° \\ -60° \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17.1682° \\ -2.2615° \\ -12.0270° \\ -15.9491° \\ -10.4125° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.1682° \\ 57.7385° \\ -52.0270° \\ -65.9491° \\ -70.4125° \end{bmatrix}$$

Aplicando la restricción sobre q5,

$$q5 := -90° - q2 - q3 - q4 = -90° - 57.7385° + 52.0270° + 65.9491° = -29.7625°$$

Demás Iteraciones

I	$\boldsymbol{\theta}$	$\vec{\boldsymbol{s}}$	$\vec{\boldsymbol{e}}$	$\lVert\vec{e}_{XY}\rVert$	$\lvert\vec{e}_Z\rvert$	$\Delta\theta$
1	$\begin{bmatrix} 17.1682° \\ 57.7385° \\ -52.0270° \\ -65.9491° \\ -20.7625° \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.6749cm \\ 2.9890\text{cm} \\ 0.3852\text{cm} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4.3749cm \\ 1.7910\text{cm} \\ -0.3852\text{cm} \end{bmatrix}$	4.7273cm	0.3852cm	$\begin{bmatrix} 11.3460° \\ 1.0395° \\ -5.3620° \\ -8.8522° \\ -5.3466° \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 28.5132° \\ 58.7780° \\ -57.3891° \\ -74.8012° \\ -16.5877° \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.9239cm \\ 4.3048\text{cm} \\ -0.3949\text{cm} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.6239cm \\ 0.4752\text{cm} \\ 0.3949\text{cm} \end{bmatrix}$	2.6665cm	0.3949cm	$\begin{bmatrix} 11.3460° \\ 1.0395° \\ -5.3620° \\ -8.8522° \\ -5.3466° \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 35.0355° \\ 60.6811° \\ -59.9308° \\ -80.4039° \\ -10.3464° \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.8336\text{cm} \\ 4.7913\text{cm} \\ -0.4937\text{cm} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.5336\text{cm} \\ -0.0113\text{cm} \\ 0.4937\text{cm} \end{bmatrix}$	1.5336cm	0.4937cm	$\begin{bmatrix} 3.4528° \\ 1.7899° \\ -1.2973° \\ -3.7633° \\ -2.0649° \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 38.4883° \\ 62.4710° \\ -61.2281° \\ -84.1672° \\ -7.0757° \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.2037\text{cm} \\ 4.9326\text{cm} \\ -0.4196\text{cm} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.9037\text{cm} \\ -0.1526\text{cm} \\ 0.4196\text{cm} \end{bmatrix}$	0.9165cm	0.4196cm	$\begin{bmatrix} 1.7675° \\ 1.4167° \\ -0.7017° \\ -2.5655° \\ -1.3689° \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 40.2558° \\ 63.8877° \\ -61.9298° \\ -86.7327° \\ -5.2251° \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.8406\text{cm} \\ 4.9454\text{cm} \\ -0.3187\text{cm} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.5406\text{cm} \\ -0.1654\text{cm} \\ 0.3187\text{cm} \end{bmatrix}$	0.5653cm	0.3187cm	$\begin{bmatrix} 0.8927° \\ 1.0451° \\ -0.3913° \\ -1.7422° \\ -0.9131° \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} 41.1485° \\ 64.9328° \\ -62.3211° \\ -88.4750° \\ -4.1367° \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.6279\text{cm} \\ 4.9179\text{cm} \\ -0.2301\text{cm} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.3279\text{cm} \\ -0.1379\text{cm} \\ 0.2301\text{cm} \end{bmatrix}$	0.3557cm	0.2301cm	$\begin{bmatrix} 0.4484° \\ 0.7434° \\ -0.2211° \\ -1.1724° \\ -0.6077° \end{bmatrix}$

7	$\begin{bmatrix} 41.5969° \\ 65.6762° \\ -62.5422° \\ -89.6474° \\ -3.4866° \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.5011cm \\ 4.8836cm \\ -0.1612cm \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.2011cm \\ -0.1036cm \\ 0.1612cm \end{bmatrix}$	0.2262cm	0.1612cm	$\begin{bmatrix} 0.2247° \\ 0.5167° \\ -0.1256° \\ -0.7815° \\ -0.4025° \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} 41.8217° \\ 66.1929° \\ -62.6678° \\ -90.4289° \\ -3.0962° \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.4244cm \\ 4.8537cm \\ -0.1107cm \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.1244cm \\ -0.0737cm \\ 0.1107cm \end{bmatrix}$	0.1446cm	0.1107cm	$\begin{bmatrix} 0.1125° \\ 0.3532° \\ -0.0716° \\ -0.5166° \\ -0.2651° \end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix} 41.9342° \\ 66.5461° \\ -62.7394° \\ -90.9455° \\ -2.8612° \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.3775cm \\ 4.8307cm \\ -0.0749cm \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0775cm \\ -0.0507cm \\ 0.0749cm \end{bmatrix}$	0.0926cm	0.0749cm	

Como 0.0926cm < 0.5cm y 0.0749cm < 0.1cm, el algoritmo converge a la 9° iteración.

La siguiente figura muestra cómo converge iterativamente el algoritmo hasta hallar la solución: