

EAIIB	Piotr Morawiecki, Tymoteusz Paszun		Rok II	Grupa 3a	Zespół 6
Temat: Wahadła fizyczne			Numer ćwiczenia: 1		
Data wykonania: 26.10.2017r.	Data oddania: 8.11.2017r.	Zwrot do poprawki:	Data oddania:	Data zaliczenia:	Ocena:

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie momentu bezwładności brył sztywnych przez pomiar okresu drgań wahadła oraz na podstawie wymiarów geometrycznych. Badane bryły to pręt oraz pierścień.

2 Wstęp teoretyczny

2.1 Wahadło fizyczne

Wahadłem fizycznym nazywamy bryłę sztywną mogącą obracać się wokół osi obrotu O nie przechodzącej przez środek masy S . Wahadło odchylone od pionu o kąt θ , a następnie puszczone swobodnie będzie wykonywać drgania zwane ruchem wahadłowym. W ruchu tym mamy do czynienia z obrotem bryły sztywnej wokół osi O , opisuje go zatem druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego. Zasada dynamiki dla ruchu obrotowego wyrażona jest wzorem

$$I\varepsilon = M$$

gdzie I - moment bezwładności, ε - przyspieszenie kątowe, M - moment siły. Wartość przyspieszenia kąowego opisuje wzór

$$\varepsilon = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

2.2 Moment bezwładności na podstawie okresu drgań

Dla wahadła fizycznego moment siły powstaje pod wpływem siły ciężkości. Dla wychylenia θ jest równy

$$M = mga \sin \theta$$

gdzie a - odległość środka masy S od osi obrotu O . Zatem równanie ruchu wahadła można zapisać jako

$$I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mga \sin \theta$$

gdzie I_0 - moment bezwładności względem osi obrotu przechodzącej przez punkt zawieszenia O . Jeżeli ograniczyć ruch do małych kątów wychylenia, to sinus kąta można zastąpić samym kątem w mierze łukowej, czyli $\sin \theta \approx \theta$. Przyjmując częstość określoną wzorem $\omega_0^2 = \frac{mga}{I_0}$ równanie ruchu przyjmuje postać równania oscylatora harmonicznego

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta(t) = 0$$

. Okres drgań związany z częstością wynosi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mga}}$$

. Przekształcając wzór otrzymujemy wzór na moment bezwładności

$$I_0 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 mga = \frac{mgaT^2}{4\pi^2}$$

2.3 Moment bezwładności na podstawie prawa Steinera

Dla wyznaczenia momentu bezwładności I_S względem równoległej osi przechodzącej przez środek masy możemy posłużyć się związkiem między I_0 i I_S znanym jako twierdzenie Steinera:

$$I_0 = I_S + ma^2$$

Po przekształceniu wzór na moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek ciężkości ma postać:

$$I_S = I_0 - ma^2$$

Wzór na moment bezwładności cienkiego pręta względem osi obrotu umieszczonej na końcu pręta to

$$I = \frac{1}{3}mL^2$$

gdzie L - długość pręta.

Wzór na moment bezwładności pierścienia względem osi obrotu przechodzącej przez jego środek to

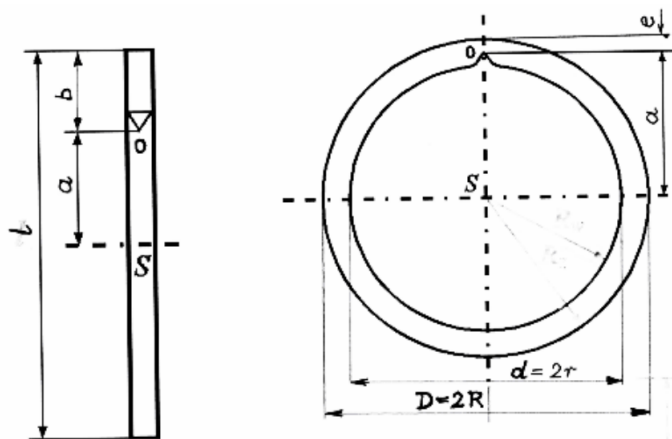
$$I = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$$

gdzie R - zewnętrzny promień, r - wewnętrzny promień.

3 Opis doświadczenia

Doświadczenie składa się z dwóch części: pomiaru masy i wymiarów badanych ciał oraz pomiarów okresów drgań ciał wprowadzonych w ruch wahadłowy. Badane bryły to cienki metalowy pręt z dodatkową poprzeczką stanowiącą punkt zawieszenia (w odległości b od końca pręta) oraz metalowy pierścień zawieszony na wycięciu znajdującym się na jego krawędzi. Punkty zawieszenia ciał stanowiły oś obrotu brył.

Do pomiarów masy użyto wagi o dokładności 1g. Wymiary zostały zmierzone linijką z podziałką o dokładności 1mm. Schemat badanych brył prezentuje rysunek 1



Rysunek 1: Bryły (pręt i pierścień) użyte w ćwiczeniu

Pomiary okresu drgań brył wprowadzonych w ruch wahadłowy o niewielkim wychyleniu zostały dokonane stoperem o dokładności 0,01 s.

4 Wyniki pomiarów

4.1 Pomiary masy i długości

Tablica 1: Pomiary masy i długości dla pretu

	Wartość	Niepewność
m [g]	658	1
l [mm]	738	1
b [mm]	99	1
a [mm]	270	1

Tablica 2: Pomiary masy i długości dla pierścienia

	Wartość	Niepewność
m [g]	1360	1
D_w [mm]	249	1
D_z [mm]	279	1
R_w [mm]	124,5	1
R_z [mm]	139,5	1
e [mm]	9,7	0,05
a [mm]	129,8	0,05

4.2 Pomiary okresu drgań

Tablica 3: Pomiary okresu drgań dla pretu

Lp.	Liczba okresów k	Czas t dla k okresów [s]	Czas 1 okresu [s]
1	30	39,72	1,324
2	30	39,61	1,320
3	30	39,58	1,319
4	30	39,66	1,322
5	30	39,48	1,316
6	30	39,60	1,320
7	30	39,46	1,315
8	30	39,33	1,311
9	50	65,68	1,314
10	50	65,75	1,315
Wartość średnia okresu T : 1,318			
Niepewność $u(T)$: 0,000015			

Tablica 4: Pomiary okresu drgań dla pierścienia

Lp.	Liczba okresów k	Czas t dla k okresów [s]	Czas 1 okresu [s]
1	30	31,04	1,035
2	30	30,83	1,028
3	30	31,01	1,034
4	30	31,05	1,035
5	30	31,12	1,037
6	30	30,96	1,032
7	30	30,91	1,030
8	30	31,16	1,039
9	30	31,17	1,039
10	30	30,86	1,029
Wartość średnia okresu T : 1,034			
Niepewność $u(T)$: 0,000014			

5 Opracowanie wyników dla pręta

5.1 Moment bezwładności I_0

Wartość momentu bezwładności względem osi obrotu O :

$$I_0 = \frac{mgaT^2}{4\pi^2} = 0,07665 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2\text{]}$$

5.2 Moment bezwładności I_S

Wartość momentu bezwładności względem środka masy:

$$I_S = I_0 - ma^2 = 0,0287 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2\text{]}$$

5.3 Moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy

Wartość momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy wyliczona z wartości geometrycznych:

$$I_S^{(geom)} = \frac{1}{12}ml^2 = 0,02987 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2\text{]}$$

5.4 Niepewności pomiaru

Niepewność pomiaru masy (ważonej na wadze o dokładności 1 g):

$$u(m) = 0,001 \text{ kg}$$

Niepewność pomiaru długości pręta (mierzonych linijką o dokładności 1 mm):

$$u(l) = 0,001 \text{ m}$$

Niepewność pomiaru odległości $a = l/2 - b$:

$$u(a) = 0,0005 \text{ m}$$

Niepewność typu A pomiaru okresu T :

$$\bar{T} = \frac{\sum T_i}{n} = 1,318 \text{ [s]}$$

$$u(T) = \sqrt{\frac{\sum (T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}} = 0,00000167 \text{ [s]}$$

gdzie: n - ilość pomiarów, \bar{T} - średni okres drgań.

5.5 Niepewność złożona

Niepewność złożona momentu bezwładności I_0 :

$$\frac{u(I_0)}{I_0} = \sqrt{\left[\frac{u(m)}{m}\right]^2 + \left[\frac{u(a)}{a}\right]^2 + \left[2\frac{u(T_0)}{T_0}\right]^2}$$

$$u(I_0) = 0,000306 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Niepewność złożona momentu bezwładności I_S :

$$u(I_S) = \sqrt{[u(I_0)]^2 + [a^2 \cdot u(m)]^2 + [-2am \cdot u(m)]^2}$$

$$u(I_S) = 0,000475 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Niepewność złożona momentu bezwładności obliczonego geometrycznie $I_S^{(geom)}$:

$$\frac{u(I_S^{(geom)})}{I_S^{(geom)}} = \sqrt{\left[\frac{u(m)}{m}\right]^2 + \left[2\frac{u(l)}{l}\right]^2}$$

$$u(I_S^{(geom)}) = 0,000012 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

5.6 Sprawdzenie zgodności wyników

Wyniki nie są zgodne, gdyż wartość:

$$\frac{|I_S - I_S^{(geom)}|}{\sqrt{u^2(I_S) + u^2(I_S^{(geom)})}} = 2,49$$

jest większa od $k = 2$.

6 Opracowanie wyników dla pierścienia

6.1 Moment bezwładności I_0

Wartość momentu bezwładności względem osi obrotu O :

$$I_0 = \frac{mgaT^2}{4\pi^2} = 0,0469 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2]$$

6.2 Moment bezwładności I_S

Wartość momentu bezwładności względem środka masy:

$$I_S = I_0 - ma^2 = 0,024 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2]$$

6.3 Moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy

Wartość momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy wyliczona z wartości geometrycznych:

$$I_S^{(geom)} = \frac{1}{12}ml^2 = 0,0238 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2]$$

6.4 Niepewności pomiaru

Niepewność pomiaru masy (ważonej na wadze o dokładności 1 g):

$$u(m) = 0,001 \text{ kg}$$

Niepewność pomiaru promienia $R = \frac{D_z}{2}$ (mierzonego linijką o dokładności 1 mm):

$$u(R) = 0,0005 \text{ m}$$

Niepewność pomiaru promienia $r = \frac{D_w}{2}$ (mierzonego linijką o dokładności 1 mm):

$$u(r) = 0,0005 \text{ m}$$

Niepewność pomiaru odległości a (mierzonej suwmiarką o dokładności 0,05 mm):

$$u(a) = 0,000005 \text{ m}$$

Niepewność typu A pomiaru okresu T :

$$\bar{T} = \frac{\sum T_i}{n} = 1,0337 \text{ [s]}$$

$$u(T) = \sqrt{\frac{\sum (T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}} = 0,00000016 \text{ [s]}$$

gdzie: n - ilość pomiarów, \bar{T} - średni okres drgań.

6.5 Niepewność złożona

Niepewność złożona momentu bezwładności I_0 :

$$\frac{u(I_0)}{I_0} = \sqrt{\left[\frac{u(m)}{m}\right]^2 + \left[\frac{u(a)}{a}\right]^2 + \left[2\frac{u(T_0)}{T_0}\right]^2}$$

$$u(I_0) = 0,0000389 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Niepewność złożona momentu bezwładności I_S :

$$u(I_S) = \sqrt{[u(I_0)]^2 + [a^2 \cdot u(m)]^2 + [-2am \cdot u(m)]^2}$$

$$u(I_S) = 0,000356 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Niepewność złożona momentu bezwładności obliczonego geometrycznie $I_S^{(geom)}$:

$$u(I_S^{(geom)}) = \sqrt{\left[\frac{R^2 + r^2}{2}u(m)\right]^2 + [mRu(R)]^2 + [mru(r)]^2}$$

$$u(I_S^{(geom)}) = 0,000128 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

6.6 Sprawdzenie zgodności wyników

Wyniki są zgodne, gdyż wartość:

$$\frac{|I_S - I_S^{(geom)}|}{\sqrt{u^2(I_S) + u^2(I_S^{(geom)})}} = 0,49$$

jest większa od $k = 2$.

7 Wnioski

W przypadku obu brył niepewności momentu bezwładności liczone na podstawie wzorów geometrycznych są mniejsze niż niepewności momentu bezwładności wyznaczanego na podstawie okresu drgań. Wnioskujemy zatem, że metoda ta jest dokładniejsza. W przypadku pierścienia udało nam się przeprowadzić pomiary na tyle dokładnie, że wartości są zgodne. Natomiast w przypadku pręta wyniki są poza granicami niepewności rozszerzonej. Być może jest to związane z błędem systematycznym pomiaru okresu T powodowanym przez tłumienie drgań przez ośrodek oraz tarcie na punkcie styku pręta ze statywem.