

EAlIIB	Piotr Morawiecki, Tymoteusz Paszun		Rok II	Grupa 3a	Zespół 6
Temat: Moduł Younga			Numer ćwiczenia: 11		
Data wykonania: 8.11.2017r.	Data oddania: 15.11.2017r.	Zwrot do poprawki:	Data oddania:	Data zaliczenia:	Ocena:

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie modułu Younga metodą statyczną przy pomocy pomiaru wydłużenia drutu wykonanego ze stali lub mosiądzu, obciążonego stałą siłą.

2 Wstęp teoretyczny

Prawo Hooke'a określa zależność odkształcenia od naprężenia. Według tego prawa odkształcenie ciała pod wpływem działającej na nie siły jest proporcjonalne do tej siły. Zależność ta pozostaje prawdziwa tylko dla niezbyt dużych odkształceń, nie przekraczających granicy Hooke'a, czyli maksymalnego naprężenia, przy którym zachodzące odkształcenie jest proporcjonalne do wywołującego je naprężenia. Odkształcenie opisane jest wzorem:

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES}$$

gdzie F - naprężenie, l - długość ciała, E - moduł Younga, S - pole przekroju poprzecznego ciała.

Moduł Younga (E) to współczynnik sprężystości podłużnej. Określa on własności sprężyste ciała stałego, charakteryzując podatność materiału na odkształcenia podłużne: rozciąganie, ściskanie, zginięcie. Jego jednostką jest pascal (Pa). Możemy go obliczyć znając naprężenie σ występujące w danym obszarze ciała oraz względne odkształcenie liniowe ε , co opisuje wzór:

$$\sigma = E\varepsilon$$

gdzie:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{l}$$

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Wartość modułu Younga mówi nam jak duże naprężenie należałoby przyłożyć, aby zwiększyć dwukrotnie długość drutu. Taka zależność nie ma jednak odzwierciedlenia w praktyce, ponieważ już przy mniejszych naprężeniach ciało ulega nieodwracalnym zmianom.

Zgodnie z prawem Hooke'a zależność $\Delta l(F)$ jest liniowa, dlatego można ją opisać jako: $\Delta l(F) = aF + b$. Współczynnik kierunkowy to tangens kąta nachylenia prostej do osi OX, co opisujemy jako $a = \frac{\Delta l}{mg}$. Jest to równoznaczne z $a = \frac{l}{ES}$ (na podstawie Prawa Hooke'a), więc $E = \frac{l}{aS}$. Podstawiając do równania $S = \frac{\pi d^2}{4}$ otrzymujemy wzór roboczy na moduł Younga:

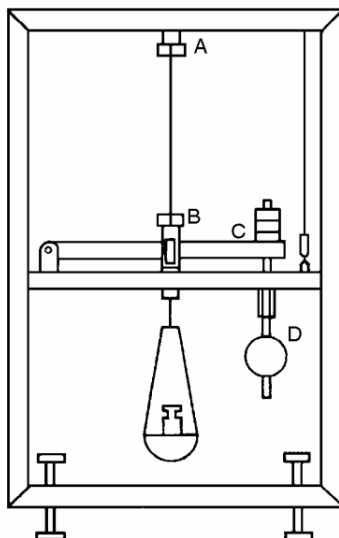
$$E = \frac{4l}{\pi d^2 a}$$

Wartość współczynnika a oraz jego niepewność $u(a)$ wyznaczymy korzystając z regresji liniowej.

3 Wykonanie ćwiczenia

1. Zmierzenie długości drutu, który zostanie użyty w doświadczeniu, za pomocą przymiaru przymocowanego do statywu.
2. Zamontowanie drutu w statywie i obciążenie szalki odważnikami, w celu naciągnięcia drutu. Pomiar średnicy drutu za pomocą śruby mikrometrycznej.
3. Opróżnienie szalki z odważników, zwolnienie blokady belki pomiarowej. Regulacja naprężenia drutu, tak aby czujnik mikrometryczny został wyzerowany.

4. Obciążanie szalki przez dokładanie kolejnych odważników, które zostały kolejno zważone. Notowanie w tabeli sumarycznej masy odważników i wydłużenia drutu. Dla lepszej dokładności pomiary zostały wykonane przy dokładaniu odważników i przy ich zdejmowaniu.
5. Ponowne wykonanie poprzednich kroków dla drutu wykonanego z innego metalu.



Rysunek 1: Przyrząd pomiarowy

4 Wyniki pomiarów

4.1 Drut stalowy

Zmierzona długość drutu: $l = 1065 \text{ mm}$. Średnica drutu: $d = \frac{0,715 \text{ mm} + 0,705 \text{ mm} + 0,71 \text{ mm}}{3} = 0,71 \text{ mm}$.

Tablica 1: Pomiary wydłużenia dla drutu wykonanego ze stali

Masa odważników [kg]	Siła F [N]	Wskazanie czujnika przy dodawaniu obciążenia	Wskazanie czujnika przy odejmowaniu obciążenia	Δl [mm]
0,957	9,38817	0,290	0,38	0,16750
1,968	19,30608	0,780	0,83	0,40250
2,956	28,99836	1,110	1,17	0,57000
3,951	38,75931	1,425	1,48	0,72625
4,918	48,24558	1,780	1,78	0,89000
5,946	58,33026	2,070	2,07	1,03500
6,928	67,96368	2,320	2,38	1,17500
7,961	78,09741	2,630	2,65	1,32000
8,989	88,18209	2,915	2,92	1,45875
9,972	97,82532	3,230		1,61500

4.2 Drut mosiężny

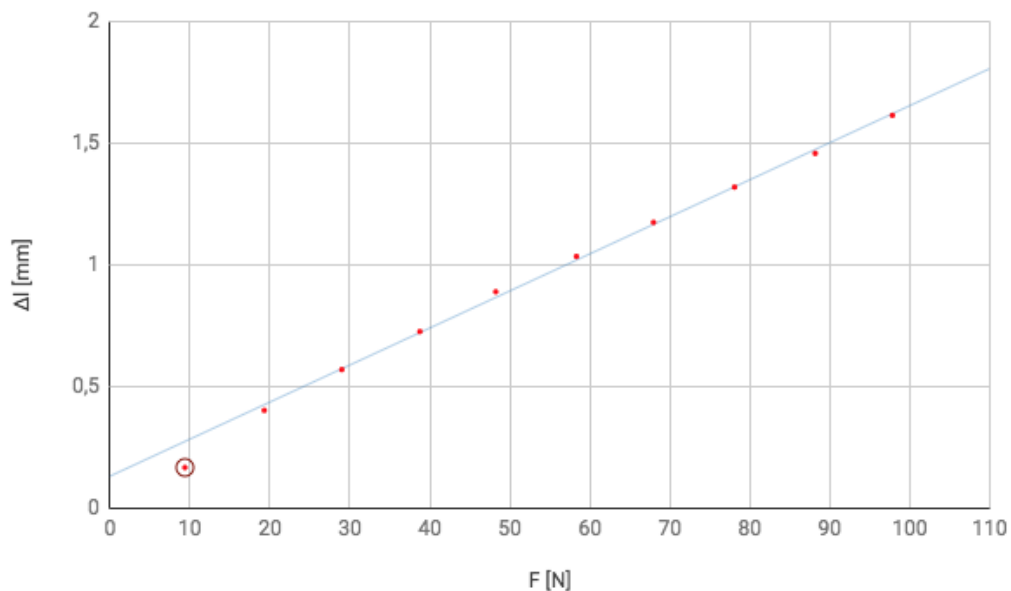
Zmierzona długość drutu: $l = 1070,5 \text{ mm}$. Średnica drutu: $d = \frac{0,79 \text{ mm} + 0,79 \text{ mm} + 0,795 \text{ mm}}{3} = 0,7917 \text{ mm}$.

Tablica 2: Pomiary wydłużenia dla drutu wykonanego z mosiądzu

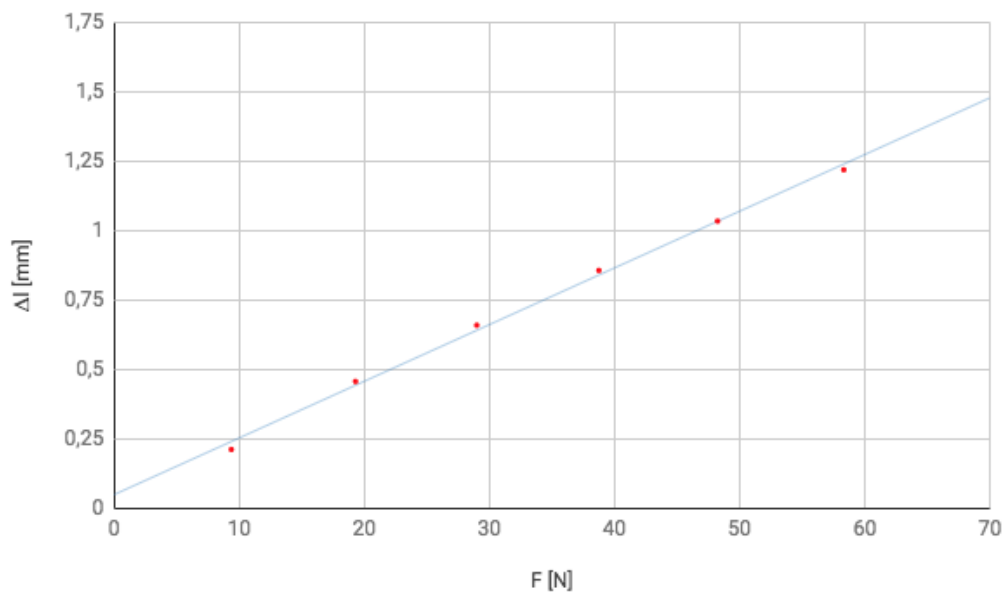
Masa odważników [kg]	Siła F [N]	Wskazanie czujnika przy dodawaniu obciążenia	Wskazanie czujnika przy odejmowaniu obciążenia	Δl [mm]
0,957	9,38817	0,42	0,43	0,2125
1,968	19,30608	0,91	0,92	0,4575
2,956	28,99836	1,31	1,33	0,6600
3,951	38,75931	1,70	1,73	0,8575
4,918	48,24558	2,06	2,08	1,0350
5,946	58,33026	2,44		1,2200

5 Wykresy

Na wykresach czerwonymi punktami oznaczone zostały uzyskane wyniki pomiarów. Niebieska linia to prosta regresji liniowej. Pomiar odstający od prostej regresji liniowej został oznaczony ciemniejszym okręgiem.



Rysunek 2: Wykres zależności wydłużenia drutu od przyłożonej siły dla stali



Rysunek 3: Wykres zależności wydłużenia drutu od przyłożonej siły dla mosiądzu

6 Opracowanie wyników

6.1 Analiza błędów

W wynikach pomiarów dla drutu stalowego zauważyliśmy odstawanie pierwszego punktu pomiarowego od prostej wyznaczonej metodą regresji liniowej. W dalszych obliczeniach odrzuciliśmy ten pomiar. Dla drutu wykonanego z mosiądzu nie zauważyliśmy odstawania żadnych punktów pomiarowych.

6.2 Niepewności pomiarów

Niepewność pomiaru długości drutu (typu B) - wynika z zastosowania przymiaru o podziałce o dokładności 1 mm:

$$u(l) = \frac{1 \text{ mm}}{\sqrt{3}} = 0,577 \text{ mm}$$

Niepewność pomiaru wydłużenia drutu (typu B) wynika z zastosowania miernika mikrometrycznego o dokładności 1 mm:

$$u(\Delta l) = \frac{0,01 \text{ mm}}{\sqrt{3}} = 0,00577 \text{ mm}$$

Niepewność pomiaru średnicy drutu (typu B) - wynika z zastosowania śruby mikrometrycznej o dokładności 0,01 mm:

$$u(d) = \frac{0,01 \text{ mm}}{\sqrt{3}} = 0,00577 \text{ mm}$$

Niepewność współczynnika kierunkowego $a = 1,523 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{N}}$ dla prostej dopasowanej metodą najmniejszych kwadratów dla pomiarów drutu stalowego:

$$u(a) = 4,275 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{N}}$$

Niepewność współczynnika kierunkowego $a = 2,04 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{N}}$ dla prostej dopasowanej metodą najmniejszych kwadratów dla pomiarów drutu wykonanego z mosiądzu:

$$u(a) = 1,36 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{N}}$$

6.3 Moduł Younga dla drutu stalowego

Wartość modułu Younga:

$$E = \frac{4l}{\pi d^2 a} = 176,61 \text{ GPa}$$

Niepewność złożona wyznaczonej wartości modułu Younga:

$$\frac{u_c(E)}{E} = \sqrt{\left(\frac{u(l)}{l}\right)^2 + \left(-2\frac{u(d)}{d}\right)^2 + \left(-\frac{u(a)}{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,577}{1065}\right)^2 + \left(-2\frac{0,00577}{0,71}\right)^2 + \left(-\frac{4,275 \cdot 10^8}{0,00001582471518}\right)^2} = 0,016$$

$$u_c(E) = E \cdot 0,016 = 2,826 \text{ [GPa]}$$

Niepewność rozszerzona:

$$U(E) = k \cdot u_c(E) = 2 \cdot 2,826 \text{ [GPa]} = 5,652 \text{ [GPa]}$$

6.4 Moduł Younga dla drutu z mosiądzu

Wartość modułu Younga:

$$E = \frac{4l}{\pi d^2 a} = 106,52 \text{ GPa}$$

Niepewność złożona wyznaczonej wartości modułu Younga:

$$\frac{u_c(E)}{E} = \sqrt{\left(\frac{u(l)}{l}\right)^2 + \left(-2\frac{u(d)}{d}\right)^2 + \left(-\frac{u(a)}{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,577}{1065}\right)^2 + \left(-2\frac{0,00577}{0,71}\right)^2 + \left(-\frac{1,36 \cdot 10^7}{0,00002}\right)^2} = 0,0146$$

$$u_c(E) = E \cdot 0,0146 = 1,556 \text{ [GPa]}$$

Niepewność rozszerzona:

$$U(E) = k \cdot u_c(E) = 2 \cdot 1,556 \text{ [GPa]} = 3,112 \text{ [GPa]}$$

6.5 Ocena zgodności uzyskanych wyników

Różnica między obliczoną wartością modułu Younga dla stali ($E = 176,61 \text{ GPa}$), a wartością tabelaryczną ($E_0 = 200 \text{ GPa}$) wynosi:

$$|E - E_0| = |176,61 \text{ GPa} - 200 \text{ GPa}| = 23,39 \text{ GPa}$$

Uzyskany wynik nie mieści się w niepewności rozszerzonej ($U(E) = 5,652 \text{ [GPa]}$).

Różnica między obliczoną wartością modułu Younga dla mosiądzu ($E = 106,52 \text{ GPa}$), a wartością tabelaryczną ($E_0 = 100 \text{ GPa}$) wynosi:

$$|E - E_0| = |106,52 \text{ GPa} - 100 \text{ GPa}| = 6,52 \text{ GPa}$$

Uzyskany wynik nie mieści się w niepewności rozszerzonej ($U(E) = 3,112 \text{ [GPa]}$).

7 Wnioski

Określenie poprawności wyników doświadczeń jest trudne ze względu na duży rozrzut wartości tabelarycznych modułu Younga wg różnych źródeł. Wynika to z zależności modułu Younga od składu stopu danego materiału.

Wyliczony moduł Younga dla stali ($E = 176,61 \text{ GPa}$) znacznie odbiega od znalezionych wartości tabelarycznych ($E_0 = 190 - 220 \text{ GPa}$). Może być to spowodowane zużyciem badanego drutu.

Moduł Younga wyznaczony dla mosiądzu ($E = 106,52 \text{ GPa}$) odbiega od wartości tabelarycznej podanej w opisie ćwiczenia, jednak mieści się w zakresie wartości tabelarycznych podanych w innych źródłach ($E_0 = 103 - 124 \text{ GPa}$).