

EAIIB	Piotr Morawiecki, Tymoteusz Paszun		Rok II	Grupa 3a	Zespół 6
Temat: Opracowanie danych pomiarowych			Numer ćwiczenia: 0		
Data wykonania: 11.10.2017r.	Data oddania: 18.10.2017r.	Zwrot do poprawki:	Data oddania:	Data zaliczenia:	Ocena:

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z metodami opracowania danych pomiarowych oraz szacowania niepewności pomiarów. Cel jest realizowany podczas próby wyznaczenia przyspieszenia grawitacyjnego Ziemi przy pomocy wahadła matematycznego.

2 Wstęp teoretyczny

2.1 Wahadło matematyczne

Wahadło matematyczne to masa punktowa m zawieszona na nierozciągliwej i nieważkiej nici o długości l poruszająca się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Podczas ćwiczenia użyjemy metalowego ciężarka zawieszonego na cienkiej lince, które stanowią dobre przybliżenie takiego układu.

Wprawiając wahadło w ruch poprzez wychylenie o niewielkie kąty θ możemy zastosować przybliżenie $\sin \theta \approx \theta$. W takim przypadku z uproszczonego równania ruchu wahadła otrzymamy zależność:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

gdzie T to okres drgań wahadła, l to długość nici, a g jest przyspieszeniem grawitacyjnym. Po przekształceniu równania otrzymujemy wzór na przyspieszenie grawitacyjne:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

2.2 Opracowanie danych pomiarowych, wyznaczanie niepewności pomiarów

Przy **błędzie przypadkowym** obserwujemy rozrzut wyników pomiaru wokół wartości rzeczywistej. Z **błędem systematycznym** mamy do czynienia, gdy przy powtarzaniu pomiaru występuje ta sama różnica między wartościami zmierzonymi a wartością rzeczywistą, natomiast rozrzut wyników poszczególnych pomiarów jest niewielki. O **błędzie grubym** mówimy, gdy różnica między wynikiem pomiaru i wartością rzeczywistą jest duża lub drastycznie duża. Błąd gruby pojawia się na skutek nieumiejętności użycia danego przyrządu, pomyłek przy odczytywaniu i zapisie wyników itp.

Niepewność pomiaru jest związana z rezultatem pomiaru parametrem, charakteryzującym rozrzut wyników, który można w uzasadniony sposób przypisać wartości mierzonej. W przypadku **niepewności granicznej** próbujemy ustalić przedział w którym mieszczą się wszystkie wyniki pomiaru. **Niepewność standardowa** jest oszacowaniem odchylenia standardowego. **Niepewnością względną** nazywamy stosunek niepewności (bezwzględnej) do wielkości mierzonej.

W przypadku pomiarów, w których występuje błąd przypadkowy jako wynik pomiaru przyjmujemy wartość średniej arytmetycznej:

$$x \equiv \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$$

Niepewność pomiaru (typu A) $u(x)$ utożsamiamy z estymatorem odchylenia standardowego średniej:

$$u(x) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Ocena typu B najczęściej dotyczy określenia niepewności wynikających ze skończonej dokładności przyrządów.

3 Opis doświadczenia

Doświadczenie składa się z dwóch części. W pierwszej mierzymy wielokrotnie czasy okresów wahadła dla stałej długości i na podstawie średniego okresu wyznaczamy przyspieszenie grawitacyjne. W drugiej mierzymy czasy okresów wahadła dla różnych długości i przyspieszenie grawitacyjne wyznaczamy metodą regresji liniowej.

3.1 Stała długość wahadła

W pierwszej części doświadczenia zebrane zostały pomiary czasów okresów wahadła dla stałej długości $l = 485 \text{ mm}$. Wahadło zostało wprawione w ruch jednocześnie z uruchomieniem stopera. Co dwadzieścia okresów ze stopera był odczytywany pomiar czasu od startu. Koniec miał miejsce po uzyskaniu dziesięciu odczytów (i wykonaniu przez wahadło dwustu okresów). Czas kolejnych dwudziestu okresów został wyznaczony na podstawie różnicy pomiędzy kolejnymi odczytami wskazań stopera.

Pomiar dla stałej długości został powtórzony mierząc czas co trzydzieści okresów - dokonano pięciu odczytów, do wykonania przez wahadło stu pięćdziesięciu okresów.

3.2 Zmienna długość wahadła

W drugiej części doświadczenia zebrane zostały pomiary czasów okresów wahadła dla różnych długości. Wahadło było wprawiane w ruch jednocześnie z uruchomieniem stopera. Po wykonaniu przez wahadło dwudziestu okresów stoper był zatrzymywany, a wynik zapisywany. Po wykonaniu pomiaru długość wahadła została zwiększana i następował kolejny pomiar.

4 Wyniki pomiarów

Tablica 1: Pomiary dla wahadła o długości $l = 485 \text{ mm}$, czas mierzony co 20 okresów

Lp.	Liczba okresów k	Czas t dla k okresów [s]	Czas t' dla 20 okresów [s]	Czas 1 okresu [s]
1	20	27,52	27,52	1,38
2	40	62,36	34,84	1,74
3	60	98,67	36,31	1,82
4	80	133,45	34,78	1,74
5	100	168,08	34,63	1,73
6	120	202,58	34,50	1,73
7	140	235,92	33,34	1,67
8	160	275,92	40,00	2,00
9	180	311,98	36,06	1,80
10	200	349,08	37,10	1,86

Tablica 2: Pomiary dla wahadła o długości $l = 485$ mm, czas mierzony co 30 okresów

Lp.	Liczba okresów k	Czas t dla k okresów [s]	Czas t' dla 30 okresów [s]	Czas 1 okresu [s]
1	30	40,11	40,11	1,34
2	60	90,39	50,28	1,68
3	90	144,45	54,06	1,80
4	120	193,17	48,72	1,62
5	150	245,76	52,59	1,75

Tablica 3: Pomiary dla zmiennej długości wahadła

Długość wahadła [mm]	Czas 20 okresów [s]	Czas 1 okresu [s]	Wartość g [$\frac{m}{s^2}$]
135	14,23	0,71	10,53
175	16,10	0,81	10,66
215	18,40	0,92	10,03
255	19,09	0,96	11,05
295	20,56	1,03	11,02
335	23,00	1,15	10,00
375	24,81	1,24	9,62
415	25,59	1,28	10,00
455	26,75	1,34	10,04
485	27,73	1,39	9,96

5 Opracowanie wyników

5.1 Zawartość błędów grubych

1. Pomiar dla stałej długości wahadła wskazują na poważne błędy podczas wykonania doświadczenia. O ile wartość przyspieszenia grawitacyjnego wyznaczona na podstawie pierwszego odczytu daje wynik zbliżony do spodziewanej wartości tabelarycznej, tak już kolejne różnią się od niej znacznie. Taką samą tendencję można zaobserwować dla powtórzonych pomiarów.

2. Wartości przyspieszenia grawitacyjnego dla pomiarów dla zmiennej długości wahadła wskazują, że dla wartości $l = 255 \text{ mm}$ oraz $l = 295 \text{ mm}$ mógł nastąpić błąd w liczeniu ilości okresów.

5.2 Niepewność pomiaru okresu

Niepewność pomiaru okresu obliczamy metodą typu A, czyli jako estymator odchylenia standardowego wartości średniej. Średnią długość okresu wahadła wyznaczamy za pomocą średniej arytmetycznej.

$$u(T) \equiv s_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{\sum (T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum (T_i - 1,65 \text{ s})^2}{90}} = 0,31 [\text{s}]$$

gdzie: n - ilość pomiarów, T - okres wahadła, \bar{T} - średni okres wahadła.

5.3 Niepewność pomiaru długości wahadła

Pomiar długości wahadła był wykonywany za pomocą linijki z działką o dokładności 1 mm, więc:

$$u(l) = 1 [\text{mm}]$$

5.4 Obliczenie przyspieszenia grawitacyjnego Ziemi

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = 7,02 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

5.5 Niepewność złożona

Niepewność złożoną obliczamy za pomocą prawa przenoszenia niepewności, ponieważ przyspieszenie ziemskie zostało wyznaczone pośrednio:

$$u_c(g) = \sqrt{\left(\frac{\delta g}{\delta T}\right)^2 u(T)^2 + \left(\frac{\delta g}{\delta l}\right)^2 u(l)^2} = \sqrt{\frac{64\pi^4 l^2}{T^6} u(T)^2 + \frac{16\pi^4}{T^4} u(l)^2} = 0,37 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$$

5.6 Niepewność rozszerzona

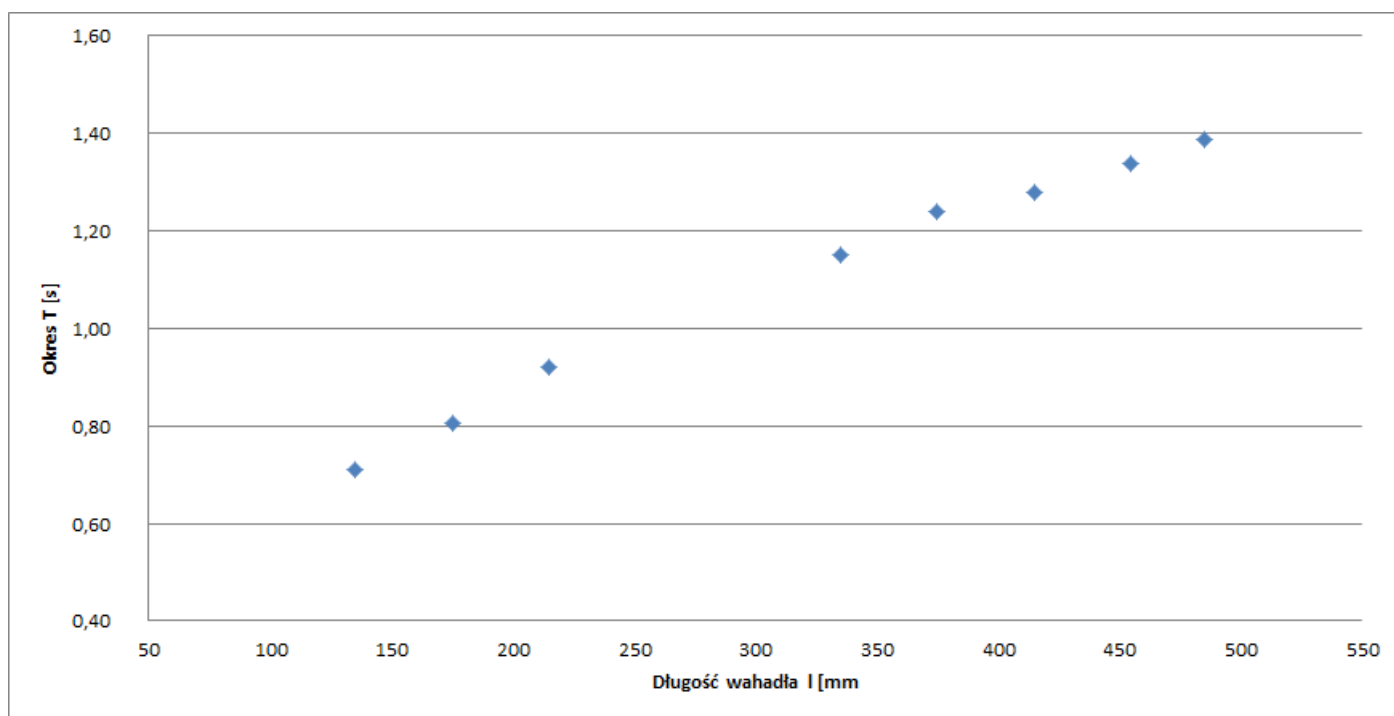
$$U_c(g) = k \cdot u_c(g) = 2 \cdot 0,37 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right] = 0,74 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$$

5.7 Zgodność z wartością tabelaryczną

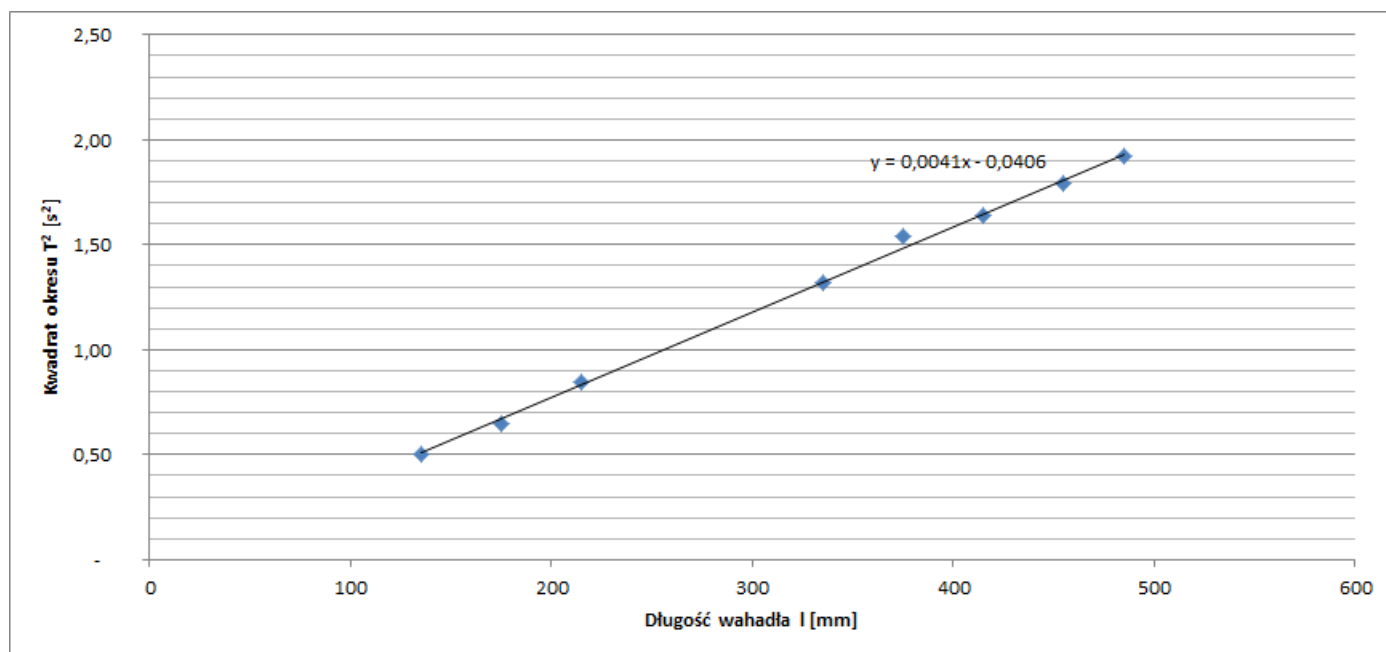
Uzyskana wartość przyspieszenia grawitacyjnego $g = 7,02 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ nie jest zgodna (w granicach wartości niepewności rozszerzonej) z wartością tabelaryczną $g_{krk} = 9,811 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$:

$$|g - g_{krk}| = 2,791 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

5.8 Wykresy



Rysunek 1: Wykres zależności długości okresu od długości wahadła



Rysunek 2: Wykres zależności kwadratu długości okresu od długości wahadła

5.9 Regresja liniowa metodą najmniejszych kwadratów

Do punktów doświadczalnych dopasowano prostą $y = ax$ metodą najmniejszych kwadratów:

$$a = \frac{\sum l_i T_i}{\sum l_i^2} = 3,91 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

Wartość przyspieszenia grawitacyjnego jest określona wzorem:

$$g = \frac{4\pi^2}{a} = 10,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Wartość niepewności współczynnika nachylenia a :

$$u(a) = \sqrt{\frac{S^2}{(n-1) \sum x_i^2}} = 0,056 \left[\frac{\text{s}^2}{\text{m}}\right]$$

Wartość niepewności przyspieszenia grawitacyjnego g :

$$u(g) = \left| -\frac{4\pi^2}{a^2} u(a) \right| = 0,14 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$$

$$U(g) = k \cdot u(g) = 0,28 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$$

Uzyskana wartość nie mieści się w niepewności zwykłej, ani rozszerzonej:

$$|g - g_{krk}| = 10,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 9,811 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,289 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

6 Wnioski

Dane zebrane podczas pierwszej części doświadczenia (okresy dla stałej długości wahadła) zawierają bardzo różne wartości co wskazuje na niedokładne bądź błędne przeprowadzenie badania. Zasadniczo tylko pierwszy pomiar z serii mieści się w spodziewanym zakresie.

Dane zebrane podczas drugiej części doświadczenia pozwoliły wyznaczyć wartość przyspieszenia grawitacyjnego dużo bliższą wartości tabelarycznej. Jednak i ta wartość (minimalnie) nie zmieściła się w przedziale niepewności rozszerzonej.

Podczas opracowania wyników dzięki poznanym typom błędów byliśmy w stanie wychwycić błędy grube w uzyskanych wynikach. Poznaliśmy również metody szacowania niepewności, dzięki którym (przy poprawnie wykonanym doświadczeniu) byłibyśmy w stanie określić jak daleko od uzyskanych wartości znajduje się wartość rzeczywista.