

EAIiB	Piotr Morawiecki, Tymoteusz Paszun		Rok II	Grupa 3a	Zespół 6
Temat: Opracowanie danych pomiarowych			Numer ćwiczenia: 0		
Data wykonania: 11.10.2017r.	Data oddania: 18.10.2017r.	Zwrot do poprawki:	Data oddania:	Data zaliczenia:	Ocena:

## 1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z metodami opracowania danych pomiarowych oraz szacowania niepewności pomiarów. Cel jest realizowany podczas próby wyznaczenia przyspieszenia grawitacyjnego Ziemi przy pomocy wahadła matematycznego.

## 2 Wstęp teoretyczny - wahadło matematyczne

Wahadło matematyczne to masa punktowa  $m$  zawieszona na nierozciągliwej i nieważkiej nici o długości  $l$  poruszająca się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Podczas ćwiczenia użyjemy metalowego ciężarka zawieszonego na cienkiej lince, które stanowią dobre przybliżenie takiego układu.

Wprawiając wahadło w ruch poprzez wychylenie o niewielkie kąty  $\theta$  możemy zastosować przybliżenie  $\sin \theta \approx \theta$ . W takim przypadku z uproszczonego równania ruchu wahadła otrzymamy zależność:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

gdzie  $T$  to okres drgań wahadła,  $l$  to długość nici, a  $g$  jest przyspieszeniem grawitacyjnym. Po przekształceniu równania otrzymujemy wzór na przyspieszenie grawitacyjne:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

## 3 Opis doświadczenia

### 3.1 Stała długość wahadła

W pierwszej części doświadczenia zebrane zostały pomiary czasów okresów wahadła dla stałej długości  $l = 485\text{mm}$ . Wahadło zostało wprawione w ruch jednocześnie z uruchomieniem stopera. Co dwadzieścia okresów ze stopera był odczytywany pomiar czasu od startu. Koniec miał miejsce po uzyskaniu dziesięciu odczytów (i wykonaniu przez wahadło dwustu okresów). Czas kolejnych dwudziestu okresów został wyznaczony na podstawie różnicy pomiędzy kolejnymi odczytami wskazań stopera.

Pomiar dla stałej długości został powtórzony mierząc czas co trzydzieści okresów - dokonano pięciu odczytów, do wykonania przez wahadło stu pięćdziesięciu okresów.

### 3.2 Zmienna długość wahadła

W drugiej części doświadczenia zebrane zostały pomiary czasów okresów wahadła dla różnych długości. Wahadło było wprawiane w ruch jednocześnie z uruchomieniem stopera. Po wykonaniu przez wahadło dwudziestu okresów stoper był zatrzymywany, a wynik zapisywany. Po wykonaniu pomiaru długość wahadła została zwiększana i następował kolejny pomiar.

## 4 Wyniki pomiarów

Tablica 1: Pomiary dla wahadła o długości  $l = 485mm$ , czas mierzony co 20 okresów

Lp.	Liczba okresów $k$	Czas $t$ dla $k$ okresów [s]	Czas $t'$ dla 20 okresów [s]	Czas 1 okresu [s]
1	20	27,52	27,52	1,376
2	40	62,36	34,84	1,742
3	60	98,67	36,31	1,8155
4	80	133,45	34,78	1,739
5	100	168,08	34,63	1,7315
6	120	202,58	34,5	1,725
7	140	235,92	33,34	1,667
8	160	275,92	40	2
9	180	311,98	36,06	1,803
10	200	349,08	37,1	1,855

Tablica 2: Pomiary dla wahadła o długości  $l = 485mm$ , czas mierzony co 30 okresów

Lp.	Liczba okresów $k$	Czas $t$ dla $k$ okresów [s]	Czas $t'$ dla 30 okresów [s]	Czas 1 okresu [s]
1	30	40,11	40,11	1,337
2	60	90,39	50,28	1,676
3	90	144,45	54,06	1,802
4	120	193,17	48,72	1,624
5	150	245,76	52,59	1,753

Tablica 3: Pomiary dla zmiennej długości wahadła

Długość wahadła [mm]	Czas 20 okresów [s]	Czas 1 okresu [s]	Wartość $g$ [ $\frac{m}{s^2}$ ]
135	14,23	0,7115	10,52794716
175	16,1	0,805	10,66119838
215	18,4	0,92	10,02818973
255	19,09	0,9545	11,04963804
295	20,56	1,028	11,02035344
335	23	1,15	10,00020408
375	24,81	1,2405	9,620496086
415	25,59	1,2795	10,00753812
455	26,75	1,3375	10,04115225
485	27,73	1,3865	9,96005479

## 5 Opracowanie wyników

### 5.1 Zawartość błędów grubych

1. Pomiar dla stałej długości wahadła wskazują na poważne błędy podczas wykonania doświadczenia. O ile wartość przyspieszenia grawitacyjnego wyznaczona na podstawie pierwszego odczytu daje wynik zbliżony do spodziewanej wartości tabelarycznej, tak już kolejne różnią się od niej znacznie. Taką samą tendencję można zaobserwować dla powtórzonych pomiarów.

2. Wartości przyspieszenia grawitacyjnego dla pomiarów dla zmiennej długości wahadła wskazują, że dla wartości  $l = 255mm$  oraz  $l = 295mm$  mógł nastąpić błąd w liczeniu ilości okresów.

### 5.2 Niepewność pomiaru okresu

Niepewność pomiaru okresu obliczamy metodą typu A, czyli jako estymator odchylenia standardowego wartości średniej:

$$u(T) \equiv s_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{\sum (T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum (T_i - 1,65s)^2}{90}} = 0,31[s]$$

### 5.3 Niepewność pomiaru długości wahadła

Pomiar długości wahadła był wykonywany za pomocą linijki z działką o dokładności  $1mm$ , więc:

$$u(l) = 1[mm]$$

### 5.4 Obliczenie przyspieszenia grawitacyjnego Ziemi

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = 7,02 \frac{m}{s^2}$$

### 5.5 Niepewność złożona

$$u_c(g) = \sqrt{\frac{64\pi^4 l^2}{T^6} u(T)^2 + \frac{16\pi^4}{T^4} u(l)^2} = 0,37[\frac{m}{s^2}]$$

### 5.6 Niepewność rozszerzona

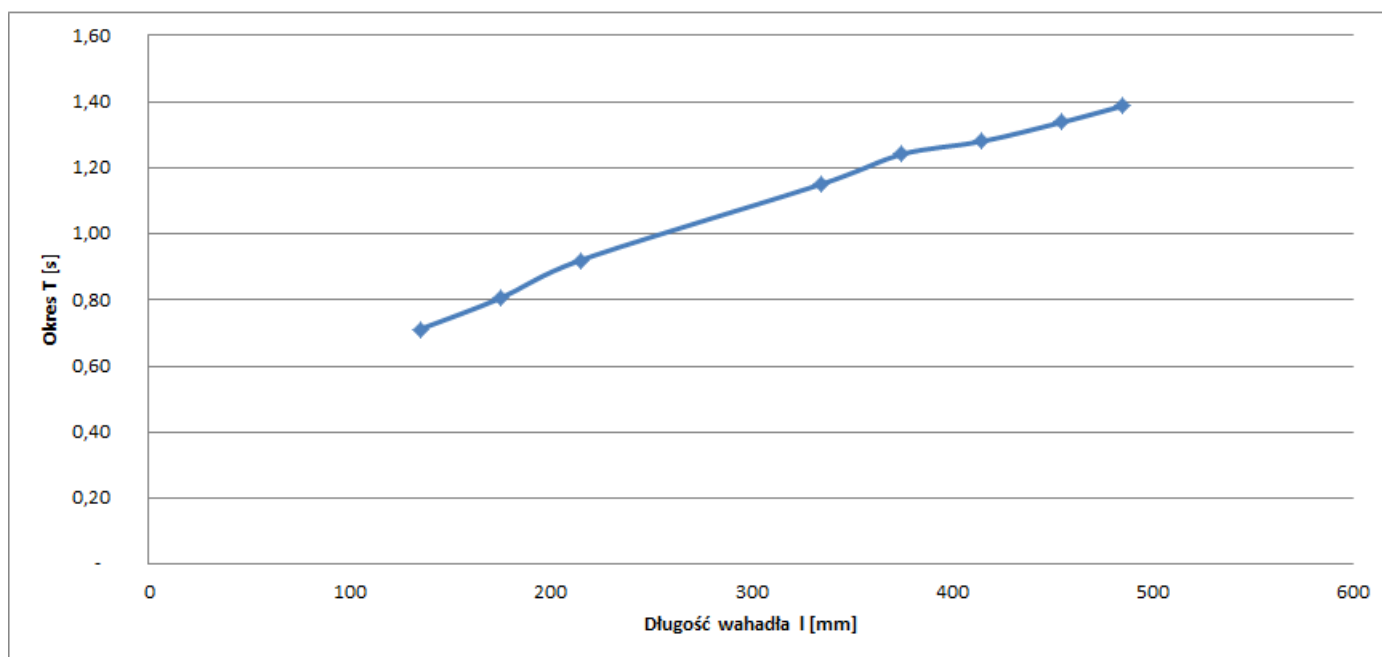
$$U_c(g) = k \cdot u_c(g) = 2 \cdot 0,37[\frac{m}{s^2}] = 0,74[\frac{m}{s^2}]$$

### 5.7 Zgodność z wartością tabelaryczną

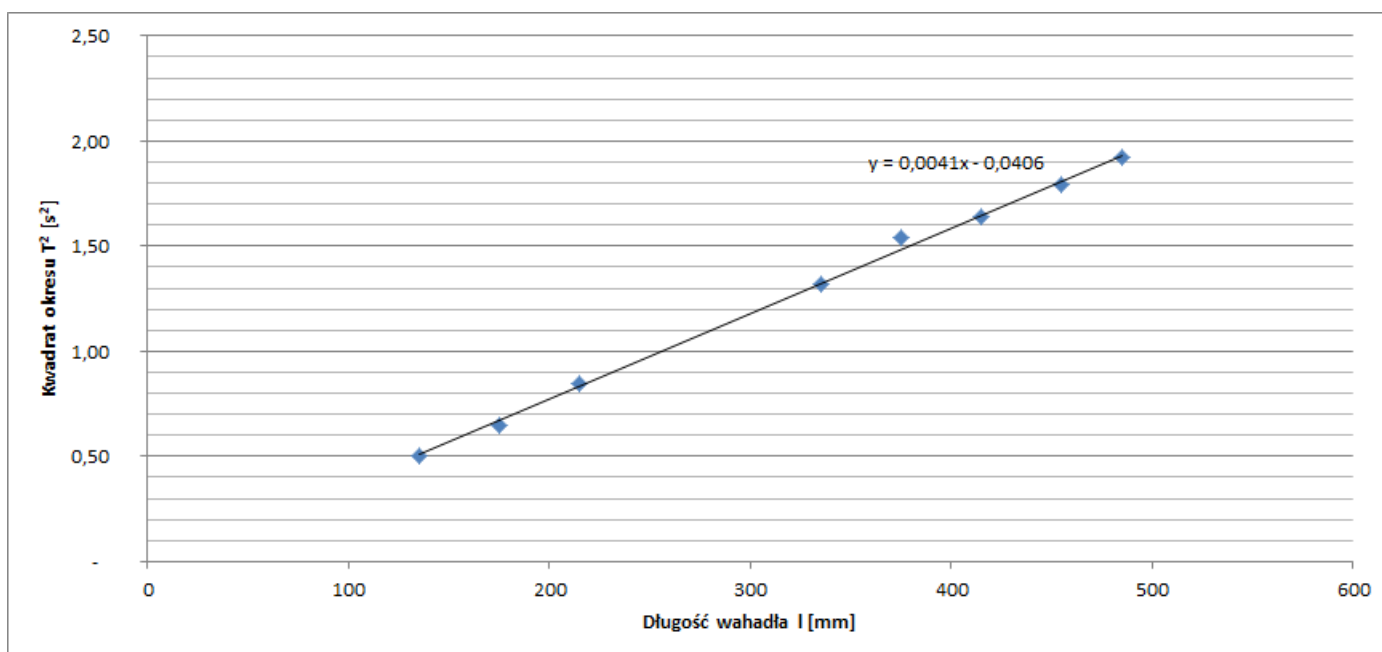
Uzyskana wartość przyspieszenia grawitacyjnego  $g = 7,02 \frac{m}{s^2}$  nie jest zgodna (w granicach wartości niepewności rozszerzonej) z wartością tabelaryczną  $g_{krk} = 9,811 \frac{m}{s^2}$ :

$$|g - g_{krk}| = 2,791$$

## 5.8 Wykresy



Rysunek 1: Wykres zależności długości okresu od długości wahadła



Rysunek 2: Wykres zależności kwadratu długości okresu od długości wahadła

## 5.9 Regresja liniowa metodą najmniejszych kwadratów

Do punktów doświadczalnych dopasowano prostą  $y = ax$  metodą najmniejszych kwadratów:

$$a = \frac{\sum l_i T_i}{\sum l_i^2} = 3,906510974$$

Wartość przyspieszenia grawitacyjnego jest określona wzorem:

$$g = \frac{4\pi^2}{a} = 10,10579974 \frac{m}{s^2}$$

Wartość niepewności współczynnika nachylenia  $a$ :

$$u(a) = \sqrt{\frac{S^2}{(n-1) \sum x_i^2}} = 0,05558272514 [\frac{s^2}{m}]$$

Wartość niepewności przyspieszenia grawitacyjnego  $g$ :

$$u(g) = | - \frac{4\pi^2}{a^2} u(a) | = 0,1437876134 [\frac{m}{s^2}]$$

$$U(g) = k \cdot u(g) = 0,2875752268 [\frac{m}{s^2}]$$

Uzyskana wartość nie mieści się w niepewności zwykłej, ani rozszerzonej:

$$|g - g_{krk}| = 10,10579974 \frac{m}{s^2} - 9,811 \frac{m}{s^2} = 0,29479974$$

## 6 Wnioski