19 Tétel

Mátrixrangok

Sor- oszlop- és determinánsrang, ezek viszonya és kiszámítása. Összeg és szorzat rangja

Def mátrix rangja: Legyen $A \in R$ $n \times k$ mátrix. Az A sorrangja s(A) = k ha az A sorvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de k + 1 nem.

Az A oszloprangja o(A) = k ha az A oszlopvektoraiból kiválasztható k lin.ftn de k + 1 nem.

Az A determinánsrangja A legnagyobb nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixának mérete, jele: d(A).

(Megj: Az A mátrix $m \times m$ méretű négyzetes részmátrixa alatt olyan mátrixot értünk, amit úgy kapunk, hogy kiválasztjuk A m sorát és m oszlopát. A részmátrixot a kiválasztott sorok-oszlopok metszéspontjában álló elemek alkotják. Nem kell tehát a kiválasztott soroknak vagy oszlopoknak szomszédosaknak lenniük.)

Egy $n \times k$ mátrixnak nem lehet a rangja nagyobb n nél (amennyiben n<k, ha n>k akkor k nál).

(1) $o(A) = s(A^T)$.

(2) Ha $A_1, A_2, \dots$ ill. $A^1, A^2, \dots$ jelöli rendre A sorait és oszlopait, akkor $s(A) = \dim\langle A_1, A_2, \dots\rangle$ és $o(A) = \dim\langle A^1, A^2, \dots\rangle$.

1, triviális, transzponálásnál sorokból oszlopokat csinálunk, vice versa

2, Legyen B az $\langle A_1, A_2, \dots\rangle$ altér egy sorvektorokból álló bázisa. Ekkor egyrészt $|B| = \dim\langle A_1, A_2, \dots\rangle$, másrészt B a sorok egy maximális méretű lin.ftn részhalmaza, ezért $|B| = s(A)$. Tehát $s(A) = |B| = \dim\langle A_1, A_2, \dots\rangle$.

ESÁ során a sorrang és oszloprang sem változik, mert

Sorrang: Minden ESÁ után keletkező sort generálnak A sorai. Ezért ESÁ után a sorok által generált altér nem bővülhet.

BIZ: (rövid: volt egy olyan állítás hogy ESÁ után nem változik a megoldáshalmaz, amit igazoltunk)

Sorrang: Minden ESÁ után keletkező sort generálnak A sorai. Ezért ESÁ után a sorok által generált altér nem bővülhet. Láttuk, hogy minden ESÁ visszaalakítható legfeljebb 3 ESÁ-sal. Ezért ESÁ után a sorok által generált altér nem is szűkülhet, u.i. a visszaalakításkor nem tudna visszabővülni. Tehát ESÁ után a sorok által generált altér nem változik. Ekkor a dimenziója sem változik, ami pedig az előző megfigyelés miatt épp a szóban forgó sorrang.

Oszloprang: Ha A egy oszlopa előáll néhány másik oszlop lineáris kombinációjaként, akkor ugyanez az oszlop ugyanilyen együtthatókkal szintén előáll egy ESÁ után is. Ezért ha néhány oszlop az oszlopok által generált altér bázisát alkotja, akkor ugyanezek az oszlopok ESÁ után is generátorrendszert alkotnak, és tartalmaznak egy bázist. Az ESÁ visszaalakíthatósága miatt ez a bázis nem szűkülhet, így az oszlopok generálta altér dimenziója (vagyis az oszloprang) sem változik ESÁ után.

Ha A RLA mátrix, akkor s(A) = o(A) = v1-ek száma.

Biz: A v1-ekhez tartozó oszlopok az oszlopok által generált altér bázisát alkotják, így o(A) a v1-ek száma. RLA mátrix csupa 0 sorait elhagyva a maradék (v1-t tartalmazó) sorok lin.ftn-ek, hisz egyik se áll elő a többi lin.komb-jaként. Ezért s(A) is a v1-ek száma, tehát s(A) = o(A).

Tetsz. A mátrix esetén s(A) = o(A).

Biz: Legyen A' az A-ból ESÁ-okkal kapott RLA mátrix. Ekkor s(A) = s(A') = o(A') = o(A).

(s(A) ≥ k) ⇐⇒ (d(A) ≥ k)

Biz: ⇒: Tfh van k lin.ftn sor, ezek alkossák az A' mátrixot. Ekkor k = s(A') = o(A'): A' -nek van k lin.ftn oszlopa. Alkossák ezek az A''mátrixot. Mivel o(A'') = k = s(A''), A'' az A egy k × k méretű nemnulla determinánsú négyzetes részmátrixa. Tehát d(A) ≥ k.

⇐: Tfh A'' egy k ×k-as nemnulla determinánsú négyzetes részmátrix. Az inverzről tanultaknál láttuk, hogy A'' sorai lin.ftn-ek. Ezért az A'' sorainak megfelelő A-beli sorok is lin.ftn-ek, vagyis s(A) ≥ k.

BOTTOM LINE: Tetsz. A mátrixra s(A) = o(A) = d(A).

Biz: Ha s(A) = k, akkor az előző állítás miatt d(A) ≥ k. Ha pedig d(A) = k, akkor s(A) ≥ k. Ezért s(A) = d(A). Korábban láttuk, hogy s(A) = o(A).

Kiszámítása:

Gauss eliminációval redukált lépcsős alakra hozom, ezáltal megkapom a vezéregyeseket, amik meghatározzák a bázisvektorokat és azoknak a számát ami megadja a lineárisan független sorvektorok számát, így megkapom a lineárisan független oszlopvektorok számát is, mert 1 oszlopban csak 1 vezéregyes lehet.

Ha itt kiválasztom a vezéregyeseket tartalmazó sorokat és oszlopokat, akkor megkapom a legbővebb n × n es részmátrixot aminek nem nulla a determinánsa.

Ha $A, B \in R^{n\times k}$, akkor $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

Biz: Tfh $a_1, \ldots, a_{r(A)}$ az A lin.ftn sorai és $b_1, \ldots, b_{r(B)}$ a B lin.ftn sorai. Ekkor az $a_1, \ldots, a_{r(A)}$ sorvektorok generálják A minden sorát, és a $b_1, \ldots, b_{r(B)}$ sorok generálják B minden sorát. Mivel A+B minden sorát generálják A sorai és B sorai, ezért A+B sorait generálják az $a_1, \ldots, a_{r(A)}, b_1, \ldots, b_{r(B)}$ vektorok is. Az A + B sorvektorai által generált altér dimenziójára tehát $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$ teljesül

$A \in R^{n\times k}$, $B \in R^{k\times \ell} \Rightarrow r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$.

Biz: Láttuk, hogy AB minden sora a B sorainak lin.komb-ja, ezért AB sorvektorai által generált altér része a B sorvektorai által generált altérnek. Így az első altér dimenziója nem lehet nagyobb a másodikénál, vagyis $r(AB) = s(AB) \leq s(B) = r(B)$.

Hasonlóan, AB minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja, tehát az AB oszlopai által generált altér dimenziója nem nagyobb az A oszlopai által generáltnál: $r(AB) = o(AB) \leq o(A) = r(A)$. Innen a tétel állítása közvetlenül adódik.