# 17. Tétel

# Skaláris szorzat tul, mátrix összeadás, szorzás

Vektorok skaláris szorzásának tulajdonságai. Mátrixok összeadása és szorzásai, e műveletek tulajdonságai, determinánsok szorzástétele. A szorzatmátrix sorainak és oszlopainak különös tulajdonsága, ESÁ és mátrixszorzás kapcsolata.

**Def skaláris szorzás:** az $\underline{u}(u_1.....u_n)^T$ és a $\underline{v}(v_1....v_n)^T$ skaláris szorzata $\underline{u}*\underline{v}=u_1v_1+......+u_nv_n$

Skaláris szorzat tulajdonságai:

(1) $u \cdot v = v \cdot u$,

(2) $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ ill.

(3) $(\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v)$

**Mátrixok összeadása:** csak azonos méretű mátrixokat tudunk összeadni, mégpedig úgy, hogy megfelelő koordinátákat egyenként. Skalárral szorzás hasonló a normális vektor skalárszorzásához.

(1) $A + B = B + A$, (2) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

(3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, (4) $(\lambda + \kappa)A = \lambda A + \kappa A$,

(5) $\lambda(\kappa A) = (\lambda\kappa)A$, továbbá (6) $(A + B)^T = A^T + B^T$, (7) $\lambda \cdot A^T = (\lambda A)^T$.

**Mátrixok szorzása egymással:** (szivárványszorzás)

Tfh az $A \in R^{n\times k}$ mátrix sorvektorai $a^1, \ldots a^n$ és a $B \in R^{k\times \ell}$ mátrix oszlopvektorai $b^1, \ldots b^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in R^{n\times \ell}$ szorzatmátrix i-dik sorának j-dik eleme az $a^i \cdot b^j$ skaláris szorzat.

**A mártix szorzás:**

Asszociatív, összeadásra disztributív, transzponálás disztributív rá nézve

(1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot B)$.

(2) $A(B + C) = AB + AC$ ill. $(A + B)C = AC + BC$.

(3) $(AB)^T = B^TA^T$.

**Determinánsok szorzástétele:** $A, B \in R^{n \times n} \Rightarrow |AB| = |A||B|$. (a mátrix szorzat determinánsa egyenlő a mátrixok determinánsainak szorzatával)

**A szorzatmátrix sorainak és oszlopainak különös tulajdonsága**

Visszatekintés a skaláris szorzatra:

Legyen $A \in R^{n \times k}$ tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) Ha egy tetszőleges $e_j$ egység oszlopvektorral (k magas vektor) jobbról megszorzom az A mátrixot, akkor essentially a mátrix j-edik oszlopát kapom(duh). Ugyanez igaz a egy $e_i$ (n magas vektor) transzponáltjával szorzom meg balról az A mátrixot, akkor a mátrix i-edik sora az eredmény.
(2) Ha az A mátrixot jobbról megszorzom a $k \times k$ méretű egységmátrixxal, vagy ha (az A mátrixot) balról megszorzom az $n \times n$ egységmátrixxal akkor ugyanúgy mindkét esetben az A mátrixot kapom vissza (duh)
(3) Ha $\underline{u} \in R^k$ és $\underline{v} \in R^n$ , akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak, $\underline{v}^T \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja(duh)

**Tfh A oszlopai $\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_k}$ és B sorai $\underline{b_1}, \ldots, \underline{b_k}$ . Ekkor**

(1) az AB szorzat j-dik oszlopa az $\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_k}$ oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat pedig a $\underline{b_j}$ oszlop tartamazza.

(2) Hasonlóan, az i-dik sor a $\underline{b_1}, \ldots, \underline{b_k}$ sorok lineáris kombinációja, mégpedig az $\underline{a_i}$ sorban szereplő együtthatókkal.

Példa:
$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

BIZ: a matrix szorzás definíciójából egyből következik, hogy az AB-nek a j-edik oszlopa az $Ab^j$, és hogy az i-edik sora az $a_iB$, tehát annyira nem különleges, de érdekes.

**ESÁ és mátrixszorzás kapcsolata.**

Lemma: ha C mátrix oszlopai előállnak A mátrix lineáris kombinációjaként akkor AB=C, és ha C mátrix sorai előállnak A mátrix lineáris kombinációjaként, akkor BA=C.(A mátrixszorzás nem kommutatív!!!)

BIZ: A különleges tulajdonsából következik.

Ha A' ESÁ-okkal kapható A-ból, akkor, akkor A'=BA alakú.

BIZ: A lemma miatt elég annyit bizonyítani, hogy A' sorai előállnak A sorai lin.kombjaiként. Ez a tulajdonság természetesen teljesül a kiindulási A mátrixra, és könnyen látható, hogy ha egy mátrix ilyen tulajdonságú, akkor a belőle egyetlen ESÁ elvégzésével kapott mátrix szintén ilyen tulajdonságú marad. Ezért az ESÁ-ok sorozatával kapott A′ mátrixra is fennáll ez a tulajdonság, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk.