16. Tétel
Determinánssal töcskölés

Mátrix transzponáltja, transzponált determinánsa, ESÁ hatása a determinánsra, determinánsszámítás felső háromszögmátrixra transzformálással, előjeles aldetermináns, kifejtési tétel.

Def transzponált: Az $A \in R^{n\times k}$ mátrix transzponáltja az az A> $\in R^{k\times n}$ mátrix, amelyben az i-dik sor j-dik eleme az A mátrix j-dik sorának i-dik eleme $\forall i, j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^T|$.

Biz: Az A mátrix bármely bástyaelhelyezését meghatározó elemek A^T- ban is bástyaelhelyezést alkotnak. Két bástya pontosan akkor alkot ÉK-DNy párt A-ban, ha A^T-ban is ÉK-DNy-i párt alkotnak. Ezért det(A)-ban ugyanazokat a szorzatokat kell összeadni ugyazzal az előjellel, mint det(A^T)- ban.

Állítás: Ha A = (u1 , u2 , . . . , un) ∈ R n×n és u 0 i ∈ R n , akkor

(1) $|u_1, \ldots, u_i+u_i, \ldots, u_n| = |u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n| + |u_1, \ldots, u'_i, \ldots, u_n|$, azaz ha az i edik oszlop felbomlik két vektor összegére, akkor a determináns annak a két determinánsnak az összege, amelyikekben az i-edik oszlopot az egyes vektorokkal helyettesítjük.

BIZ: A bal oldali determináns minden kifejtési tagjában az i-dik oszlopbeli tényező a ui és u 0 i egy koordinátaösszege. Ha felbontjuk a zárójelet, a kifejtési tagból két szorzat lesz. Ezek a szorzatok pedig épp a jobb oldali determinánsok kifejtési tagjai.

(2): $|u1, \ldots, \lambda ui, \ldots, un| = \lambda|u1, \ldots, ui, \ldots, un|$ $\forall\lambda \in R$: az i-edik oszlopot λ-val végigszorozva a determináns is λ-szoros lesz.

BIZ: no brainer

(3): $u_i = 0 \Rightarrow |A| = 0$, azaz ha az i-edik oszlopban csak 0-k állnak, akkor a determináns is 0.

BIZ: no brainer ez is (minden szorzatban lesz 0)

(4): $|u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n| = -|u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n|$. Az i-edik és jedik oszlop cseréjekor a determináns előjelet vált.

BIZ: permutációban inverziójuk változik, tehát az előjel is.

(5) Ha A-nak van két egyforma oszlopa, akkor |A| = 0.

BIZ: A két egyforma oszlopot felcserélve a mátrix nem változik, így a determimáns sem. (4) miatt viszont a determináns (−1)-szeres lesz, azaz |A| = −|A|, ahonnan |A| = 0 adódik.

Okosabb bizonyítás: felső háromszög mátrixra alaktás közben belefutunk egy csupanulla sorba, ami megkönnyíti majd a számolásunkat (akármi*0=0)

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ-val szorozva a determináns λ-szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j-dik sort kicserélve az i-dik és j-dik sor összegére a determináns nem változik.

BIZ:

(1): Az előző állítás (2) részét alkalmazzuk az A> transzponáltra.

(2): Az előző állítás (4) részét alkalmazzuk az A> transzponáltra.

(3): Az előző állítás (1) részét alkalmazva a transzponáltra a lecserélt sorú determináns megkapható |A|+|A0 | összegként, ahol A0 -nek két egyforma sora van. A korábban látottak és az előző állítás (3) része miatt |A0 | = |(A0) >| = 0.

Def főátló: Az A négyzetes mátrix főátlója az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik

Def felsőháromszög mátrix: Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A felső háromszögmátrix

Felsőháromszög mátrixra alakítással determináns kiszámolása:

A mátrixot lépcsős alakra hozzuk ESÁ-k alkalmazásával, az előbb bebizonyított állítások szerint.

2 eset lesz: 1, lett felsőháromszögmátrix, főátlót összeszorozzuk, van determináns

2, lett csupanullasor, tehát a determináns nulla

Def előjeles aldetermináns: Az A mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i-dik sor és j-dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$ -szerese.

Kifejtési tétel:

A mátrix determinánsának soronkénti és oszloponkénti kiszámítására használjuk. Kiválasztjuk a mátrix egy sorát ami szerint ki szeretnénk fejteni a determinánsát a mátrixnak. Majd az oszlop összes „koordinátája” szerint beszorozzuk a különböző aldeterminánsokat a különböző koordinátákkal, és megfelelő előjellel, amit a sakktábla szabály ad meg. Az aldeterminánsokat úgy kapjuk, hogy a sorát és az oszlopát „töröljük” a koordinátának, és „összecsukjuk a mátrixot”. Ezt az oszlop összes sorával meg kell csinálni.

Röviden: kiválasztasz egy számot a mátrixból, sakktáblával megnézed mi a helyes előjele, azt kiteszed elé, kiveszed a számot, majd a mátrixot összecsukod. Ezt az oszlop összes sorával megcsinálod.