Tér, altér generátorrendszer, lin. komb.

Az R^n tér

Def: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ az A és B-beli elemekből álló rendezett párok halmaza.

Def: Hasonlóan $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \forall_i\}$ a rendezett n-esek halmaza.

Def: Végül $A^n := A \times A \times \ldots \times A$ az n-szeres Descartes-szorzat jelölése.

Megj:

1. A továbbiakban R^n elemeivel fogunk dolgozni. Ezeket n magasságú vektoroknak fogjuk hívni, jelezve, hogy (általában) oszlopvektorként gondolunk rájuk.
2. Ha n világos a szövegkörnyezetből, akkor R^n elemeit vektoroknak, R elemeit pedig skalároknak fogjuk nevezni.
3. A vektorok tehát itt és most nem „irányított szakaszok”, hanem ennél általánosabb fogalmat takarnak. Az irányított szakaszok is tekinthetők vektornak, de a mi tárgyalásunkban egy „vektor” általában nem irányított szakasz.

Vektorműveletek azonosságai

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (az összeadás kommutatív)
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (az összeadás asszociatív)
3. $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ (egyik disztributivitás)
4. $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$ (másik disztributivitás)
5. $(\lambda\mu)\mathbf{u} = \lambda(\mu\mathbf{u})$ (skalárral szorzás asszociativitása)

Biz: A műveletek koordinátánként történnek, itt valós számokkal dolgozunk, amikre igazak ezek az azonosságok.

Def: $\emptyset \ != V \subseteq R^n$ az R^n tér altere (jel: $V \leq R^n$), ha V zárt a műveletekre:

$x + y, \lambda x \in V$ teljesül $\forall x, y \in V$ és $\forall \lambda \in R$ esetén.

Def: A ∑(i=1-k) λixi kifejezés az x1, . . . , xk lineáris kombinációja.

Def: ($V \leq R^n$) ⇐⇒ (V zárt a lineáris kombinációra), azaz az altér def.ható az R^n lineáris kombinációra zárt részhalmazaként.

Biz: ⇒: $\lambda_i x_i \in V$ $\forall i$ esetén, így a $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ összegük is V -beli.

⇐: Ha $x, y \in V$ és $\lambda \in R$, akkor $x + y$ ill. λx lineáris kombinációk. Mivel V zárt a lináris kombinációra, ezért $x + y, \lambda x \in V$. Ez tetszőleges x, y, λ esetén fennáll, tehát V zárt a műveletekre, vagyis altér.

Def: $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ az $x_1, \dots, x_k \in R^n$ lin. kombinációinak halmaza.

Def: Az $x_1, \dots, x_k$ által generált altér az $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ halmaz. Ez a legszűkebb olyan altér, ami mindezen vektorokat tartalmazza.

Alterek metszete altér: $V_i \leq R^n\ \forall_i \Rightarrow \bigcap_i V_i \leq R^n$ $\{0\} \leq R^n$ $R^n \leq R^n$

Biz: (1): Műveletzártság: $\underline{x}, y \in V_i\ \forall i, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{x} + y, \lambda\underline{x} \in V_i\ \forall i.$ ✓

Def: Az $x_1, \dots, x_k \in R^n$ vektorok a $V \leq R^n$ altér generátorrendszerét alkotják, ha $\langle x_1, \dots, x_k \rangle = V$.

Def: Az $x_1, \dots, x_k \in R^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a nullvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő: $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

Lemma: Az $\{x_1, \dots, x_k\}$ vektorrendszer lineárisan független ⇐⇒ egyik x_i sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

- A $\{0\}$ nem lineárisan független: $\mathbf{1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- Két nemnulla vektor akkor lin.ftn, ha nem egymás skalárszorosai.
- Bármely két nem párhuzamos R^2-beli vektor generálja R^2-t.
- Ha $\langle G \rangle = V$ és $G \subseteq G' \subseteq V \leq R^n$, akkor $\langle G' \rangle = V$, azaz generátorrendszert (V -n belül) hízlalva generátorrendszer marad.
- $F \subseteq R^n$ lin.ftn és $F' \subseteq F$, akkor F' is lin.ftn, azaz lin.ftn rendszert ritkítva lin.ftn marad.

Def: V altér generátorrendszeréből pontosan akkor tudunk egy elemet elvenni úgy, hogy a maradék vektorok továbbra is a V altér generátorrendszerét alkossák, ha a kihagyott elem előáll a maradék elemek lineáris kombinációjaként.

Biz: ⇒: Ekkor $\langle G \rangle = V = \langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle$, ezért $\underline{v} \in V = \langle G \rangle$.

⇐: Tetsz. $\underline{u} \in V$ elemről azt kell megmutatni, hogy $\underline{u} \in \langle G \rangle$. Mivel $\underline{v} \in \langle G \rangle$, feltehető, hogy $\underline{v} = \sum_{g \in G} \lambda_{\underline{g}} \underline{g}$. Tudjuk, hogy $\underline{u} \in V = \langle G \cup \{\underline{v}\} \rangle$, ezért $\underline{u} = \lambda \underline{v} + \sum_{g \in G} \mu_{\underline{g}} \underline{g}$. Ebbe $\underline{v}$ helyére behelyettesítve a fenti kifejezést $\underline{u} = \sum_{g \in G} (\mu_{\underline{g}} + \lambda \cdot \lambda_{\underline{g}}) \underline{g}$ adódik, azaz $\underline{u} \in \langle G \rangle$. Ez bármely $\underline{u} \in V$-re elmondható, így $\langle G \rangle = V$. □

Kicserélési lemma: bárhogy is törlünk a V altér egy ftn rendszeréből egy vektort, az pótolható V generátorrendszerének egy alkalmas elemével úgy, hogy a kapott rendszer lin.ftn marad.

Biz: Legyen $F' := F \setminus \{\underline{f}\}$. Indirekt bizonyítunk.

Tfh $F' \cup \{\underline{g}\}$ egyetlen $\underline{g} \in G$-re sem lin. ftn. Ekkor az előző lemma miatt $\underline{g} \in \langle F' \rangle$ teljesül minden $\underline{g} \in G$-re. Ezért $G \subseteq \langle F' \rangle$, ahonnan $\langle G \rangle \subseteq \langle F' \rangle$ következik. Ebből pedig $\underline{f} \in V = \langle G \rangle \subseteq \langle F' \rangle$, azaz $\underline{f} \in \langle F' \rangle$ adódik. A fenti lemma miatt $\{\underline{f}\} \cup F' = F$ nem lin. ftn, ami ellentmondás.

Az indirekt feltevés hamis, így $\exists\, \underline{g} \in G$, amire $F' \cup \{\underline{g}\}$ lin.ftn. □

FG-egyenlőtlenség: altérben egy ftn. rendszer mérete nem lehet nagyobb egy generátorrendszer méreténél.

Ha F ⊆ Rn lin.ftn, akkor |F | ≤ n.

Tfh F = {f 1, . . . , f k} ⊆ Rn lin.ftn. és f ∈ 〈F 〉. Ekkor f egyértelműen áll elő F -beli vektorok lin.komb.-jaként.