Számítástudomány alapjai
2. Élhozzáadási lemma, fák, erdők

Élhozzáadási lemma: G irányítatlan gráfhoz hozzáadunk 'e' élt = G' gráf. Pontosan 1 eset valósul meg a kettő közük:

1. G és G' komponensei megegyeznek, de G'-nek több köre van
2. G és G' körei megegyeznek, és G'-nek eggyel kevesebb komponense van

Def: A körmentes irányítatlan gráfot **erdő**nek nevezzük.

Def: Összefüggő erdő **fa**.

Def: Egy erdő minden komponense fa.

Lemma: G n csúcsú k komponensű erdő: E(G) = n-k

> **Biz:** Építsük fel G-t \(K_n) üresgráfból. ÉlHal miatt körmentes. K_n-nek n komponense van, G-nek K, ezért n-k élt kellet behúzni G felépítéséhez.

Lemma: Ha G fa, akkor élszáma = n-1. **Biz:** A fa egy 1 komponensű erdő.

Állítás: Tetsz. n-csúcsú G gráf esetén az alábbi három tulajdonság közül bármely

kettőből következik a harmadik.

(a) G körmentes. (b) G összefüggő. (c) $|E(G)| = n - 1$.

Állítás: Legyen F egy tetszőleges fa n csúcson. Ekkor

(1) (F − e)-nek pontosan két komponense van $\forall e \in E(F)$-re.
(2) F -nek pontosan egy uv-útja van $\forall u, v \in V(F)$-re.
(3) (F + e)-nek pontosan egy köre van ∀e 6 ∈ E(F)-re.
(4) Ha $n \geq 2$, akkor F -nek legalább két levele van.

> **Biz:** Induljunk el F egy tetsz. v csúcsából egy sé-
tán, és haladjunk, amíg tudunk. Ha sosem akadunk el, akkor előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, és kört találunk. Ezért elakadunk, és az csakis egy v-től különböző u levélben történhet. Ha $d(v) = 1$, akkor v egy u-tól különböző levél. Ha $d(v) \geq 2$, akkor sétát indulhatjuk v-ből egy másik él mentén. Ekkor egy u-tól különböző levélben akadunk el.

Feszítőfák: Építsük fel a G gráfot az élek egymás utáni behúzásával, és az ÉlHaL szerinti kiszínezésével! (A kompenensszámot csökkentő élt zöldre, a kört létrehozó élt pirosra színezzük.).
Legyen G' a G gráf piros élei törlésével keletkező feszítő részgráf!
G és G' komponensei megegyeznek.
A G gráf zöld élei olyan G' feszítő részgráfot alkotnak, ami erdő, és komponensei megegyeznek G komponenseivel.

Def: F a G gráf feszítőfája (ffája), ha F egy G-ből éltörlésekkel kapható fa.
Állítás: (G-nek van feszítőfája) ⇐⇒ (G öf.)

> **Biz**: ⇒: Legyen F a G ffája. F öf, és V (F) = V (G), tehát G bármely két csúcsa között vezet F -beli út.
> ⇐: Építsük fel G-t az élek egyenkénti behúzásával és kiszínezésével. Láttuk, hogy a zöld élek egy F erdőt alkotnak, aminek egyetlen kompnense van, hiszen G is egykomponensű. Ezek szerint F olyan fa, ami G-ből éltörlésekkel kapható.

Def: A G gráf F feszítőfájának f éléhez tartozó Qf alap vágást G azon élei alkotják, amik az F − f két komponense között futnak.
Def: Az e ∈ E(G)\E(F) éléhez tartozó Ce alapkör az F +e köre.