Számítástudomány alapjai
4. Általános gráfbejárás, BFS

Általános gráfbejárás

A gráfbejárási algoritmus az inputgráf csúcsait és éleit fedezi fel.

Input: G = (V, E) (ir/ir.tatlan) gráf, (esetleg $r \in V$ gyökér1).

Minden csúcs az elératlen → elért → befejezett állapotokat veszi fel. A bejárás akkor ér véget, amint minden csúcs befejezetté vált. A bejárás során mindig az alábbi esetszétválasztás szerint bekövetkező esetnek megfelelően történik a következő lépés.

A bejárás menete:

1. Van elért csúcs. Választunk egyet, mondjuk u-t.
   1.1. Ha van olyan uv él, amire v eléretlen, akkor v elértté válik (az uv él mentén).
   1.2. Ha nincs ilyen uv él, akkor u befejezetté válik.
2. Nincs elért csúcs.
   2.1. Ha van eléretlen u csúcs, akkor u-t elértté tesszük.
   2.2. Ha nincs eléretlen csúcs (azaz ∀ csúcs befejezett): END.

Output:

1. A csúcsok elérési és befejezési sorrendje.
2. Az élek osztályozása:
   2.1. uv faél: a v csúcs az uv él mentén vált a bejárás során.
   2.2. uv előreél: nem faél, de u-ból v-be faélekből irányított út vezet.
   2.3. uv visszaél: v-ből u-ba faélekből irányított út vezet
   2.4. keresztél: minden más él (u és v közt nincs leszármazási viszony).
   2.5. Irányítatlan esetben az előreél és a visszaél ugyanazt jelenti.
3. A bejárás fája: a faélek alkotta részgráf. (A bejárás fája valójában egy gyökereiből kifelé irányított erdő.)

Terminológia: Ha a bejárás fájában u-ból v-be irányított út vezet, akkor u a v **őse** és v az u **leszármazottja**. A faél és az előreél tehát ősből leszármazottba, a visszaél pedig leszármazottból ősbe vezet.

BFS (Szélességi bejárás):

Szélességi bejárás (BFS): Olyan bejárás, ahol az 1. esetben mindig a legkorábban elért u csúcsot választjuk.

BFS tulajdonságai:

1. Ha $i < j$, akkor v_i-t hamarabb fejezzük be, mint v_j -t, továbbá v_i gyerekei az elérési sorrendben megelőzik v_j gyerekeit.
2. **Az elérési és befejezési sorrend megegyezik.**
3. **Gráfél nem ugorhat át faélt.**
4. Ha P a BFS-fa uv-útja, akkor P legrövidebb uv-út G-ben is.
   4.1. Ha P ' egy G-beli uv-út, akkor P ' egyetlen éle sem ugorhat át P -beliélt. Ezért P ' utolsó éle nem kezdődhet korábban P utolsó élénél. Hasonlóigaz P ' utolsó előtti, stb éleire. Így v-ből nem lehet u-ba visszajutni Pélszámánál kevesebb élen.
5. **A BFS-fa egy legrövidebb utak fája**
6. Minden él legfeljebb egy szintet lép lefelé a BFS-fában, így **nincs előreél**. (Irányítatlan esetben **csak** faél és keresztél van.)
   6.1. Ellentmod (5)-nek

Legrövidebb utak:

Def: Adott G (ir) gráf és $l : E(G) \to R$ hosszfüggvény esetén egy P út hossza a P éleinek összhossza.

Def: Az u és v csúcsok távolsága a legrövidebb uv-út hossza.

Def: Az l hosszfüggvény nemnegatív, ha $l(e) \geq 0$ teljesül minden e élre.

Megf: Ha $l(e) = 1$ a G minden e élére, akkor $\tilde{l}(P)$ a P élszáma. Ezért
a BFS-fa minden gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat
a gyökérből, azaz a szélességi bejárás tekinthető egy legrövidebb utat kereső
algoritmusnak is.