

Számítástudomány alapjai

1 Tétel, gráfelméleti alapfogalmak

Def. Gráf csúcsai, élei: egy G gráf ahol (V, E) rendezett párokat alkot

V egy nem üres halmaz, ezzel fogjuk a gráf csúcsait jelölni, így V -t fogjuk a csúcshalmaznak nevezni (\Rightarrow ennek elemei a gráfnak a csúcsai).

E egy halmaz, mely a csúcsok közti kapcsolatot reprezentálja, ezeket nevezzük majd éleknek, így E -t fogjuk az élhalmaznak nevezni, egy él legfeljebb 2 csúcsot köt össze.

Def. fokszám: egy csúcs fokszáma, irányítatlan gráf esetén, azon élvégződésének számával egyenlő amelyek ebben a csúcsban vannak. (\Rightarrow hurokél kétszer számít egy csúcs fokszámába)

Def. Gráf diagramja: A G gráf diagramja az G -nek egy olyan ábrázolása, melyben V -nek a sík különböző pontjait feleltetjük meg, és éleknek meg a V megfelelő csúcsait összekötő görbék felelnek meg.

Def. Hurokél: olyan él melynek kezdő és végpontja azonos.

Def. Többszörös él: többszörös élről akkor beszélünk, ha két csúcs között egynél több él van.

Def. Egyszerű gráf: olyan gráf ami nem tartalmaz többszörös élt, és hurokét.

Def. Irányított gráf: olyan gráf aminek minden éle irányított.

Def. Teljes gráf: olyan egyszerű gráf melynek minden csúcsa össze van kötve minden másik csúccsal.

Def. Komplementer gráf: G -nek G' a komplementer gráfja, ha csúcshalmazaik megegyeznek, G és G' élhalmazai diszjunktak, és uniójuk egy teljes gráfot ad.

Def. Izomorfia: G és G' izomorf, ha mindkét gráf csúcsai úgy számozhatóak 1-től n -ig teredő egész számokkal, hogy pontosan annyi él fut G -ben u és v között mint G' -ben. Jel: $G \sim G'$. (a hullámos szar az egyenőség jel fölött, csak a szar nem engedi)

Def. Éltörlés: G élhalmazából kiveszünk egy élt, így megkapjuk G' gráfot.

Def. feszítő részgráf: eltörléssel kapható gráf

Def. Csúcsörlés: G csúcshalmazából kiveszünk egy vagy több csúcsot

Def. Feszített részgráf: olyan gráf melyet csúcsörléssel kaphatunk meg.

Def. Részgráf: és és csúcsörléssel kapható gráf

Def. Élhozzáadás: G -nek az élhalmazát bővitem egy elemmel.

Def. Elérhetőség: G -ben két csúcs elérhető, ha a két csúcs között létezik út G -ben.

Def. Élsorozat: a gráf egyik csúcsából eljutok a másikba mindig élek mentén.

Def. séta: egy élsorozat amiben nincs ismétlődő él.

Def. Út: olyan séta amiben nincs ismétlődő csúcs.

Def. Kör: olyan (zárt) út melynek kezdő és végpontja azonos.

Def.: irányítatlan gráf összefüggő, ha bármely két csúcsa között létezik út

(/*nem kieg. anyag, de nem rossz tudni*/

Def: irányított gráf gyengén összefüggő, ha a gráfnak irányítatlan gráf összefüggő

Def.: irányított gráf erősen összefüggő, ha bármely két csúcsa között (bármilyen sorrendben) létezik irányított út.)

Def. Komponens: K a $V(G)$ részhalmaza, és K pontosan akkor komponense G nek ha, K -ból nem lép ki éle G -nek, de K -n belül bármely két csúcs elérhető.

Kézfogás-lemma:

Ha $G=(V, E)$ véges, de nem feltétlen egyszerű gráf, akkor a fokszámok összege az élek számának kétszeresével egyenlő.

BIZ: (mental gymnastics)

Általános kézfogáslemma: tetszőleges $G(V, E)$ irányított gráfra a csúcsokból kilépő élek száma egyenlő a csúcsokba belépő élek számával, ami egyenlő a gráf éleinek számával.

Biz: az egyes csúcsokból kilépő éleket megszámlálva minden élt pontosan egyszer számoltunk, tehát a kifokok összege az élszám. Ugyanez igaz a befokok összegére is.

KFL-re visszavezetve:

Csináljunk egy olyan G' gráfot, melyben minden élt egy oda-vissza irányított élpárral helyettesítünk.

Ekkor az általános KFL szerint a G' gráf éleinek számát meg tudjuk határozni.

De mivel minden élt 2 irányított éllel helyettesítettünk, ezért $|E(G')| = |2E(G)|$.

BIZ: (vaslogika)

Húzzuk be az éleket egyesével, és vegyük észre, hogy minden behúzott él a fokszámot 2 vel növeli

⇒ A fokszám az élek számának kétszeresével egyenlő.