18. Tétel

Mátrixok inverzei, reguláris mátrixok

Mátrix jobb- és balinverze, ezek viszonya. Balinverz kiszámítása ESÁ-okkal és előjeles aldeterminánsokkal, reguláris mátrixok jellemzése determinánssal, sorokkal, oszkopokal ill. RLA mátrix segítségével.

Def inverzmátrix: Az $A \in R_{n\times n}$ mátrix balinverze az A_B mátrix, ha $A_B A = I_n$. Az AJ mátrix az A jobbinverze, ha $AA_J = I_n$.

Állítás: Ha A-nak van bal- és jobbinverze is, akkor azok egyenlők.

BIZ:

A mátrixszorzás asszociativitása (átzárójelezhetősége) miatt $A_B = A_B I_n = A_B(AA_J) = (A_B A)A_J = I_n A_J = A_J$.

Tétel: Tetsz. $A \in R^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy

(A-nak van balinverze) ⇐⇒ (A-nak van jobbinverze)

(A-nak van balinverze) ⇐⇒ (A sorai lin.ftn-ek) ⇐⇒ ($|A|$ 6= 0) ⇐⇒ ($|A^T|$ 6= 0) ⇐⇒ (A^T sorai lin.ftn-ek) ⇐⇒ (A oszlopai lin.ftn-ek) ⇐⇒ (A-nak van jobbinverze)

Röviden A-nak vagy van vagy nincs inverse, jele: A^{-1}

Balinverz kiszámítása:

ESÁ mód:

Felveszed a mátrixot, majd mellé az n×n es egységmátrixot. ESÁ műveletek alkalmazásával az eredeti mátrixból egy RLA mátrixot csinálok. Ami műveleteket végzek az eredeti mátrixon azokat végezni kell az egységmátrixon is. Ha kijött az eredeti mátrixból egy egységmátrix, akkor az egységmátrixból megkapjuk az inverzet.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \underset{\boxed{\text{I}} \mapsto \boxed{\text{I}} - \boxed{\text{II}}}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \underset{\boxed{\text{III}} \mapsto \boxed{\text{III}} - 2\boxed{\text{II}}}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)} \sim$$

$$\sim \underset{\boxed{\text{II}} \mapsto \boxed{\text{II}} - 3\boxed{\text{III}}}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 3 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 & -8 \end{array}\right)$$

Aldeterminánsos mód(DO NOT):

Tfh $A \in R^{n \times n}$ és legyen a $B \in R^{n \times n}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme az $A_{j,i}$ előjeles aldetermináns. Ekkor $AB = |A| \cdot I_n$.

BIZ:

Az AB i-dik sorának j-dik eleme az A i-dik sorának és B j-dik oszlopának skaláris szorzata, azaz $a_{i,1}A_{j,1} + a_{i,2}A_{j,2} + . . . + a_{i,n}A_{j,n}$, ahol $a_{i,k}$ az A mátrix i-dik sorának j-dik elemét jelenti. Ha i = j, akkor ez az összeg épp az A i-dik sor szerinti kifejtése, vagyis |A|. Ha i != j, akkor ez az összeg egy ú.n. ferde kifejtés: annak az A' mátrixnak az i-dik sor szerinti kifejtése, amit A-ból úgy kapunk, hogy a j-dik sor helyére az i-ediket írjuk. Mivel A' két sora egyforma, ezért |A' | = 0.

TEHÁT a módszer:

A fenti tétel jelöléseivel: ha |A| != 0, akkor A^{-1} =(1/|A|)B

BIZ: $B=|A|I_n$

Reguláris mátrixok

Def. Reguláris mátrix: Az $A \in R$ n×n mátrix reguláris (avagy invertálható), ha A-nak van inverze, és szinguláris ha nincs.

Tfh A négyzetes mátrix. Ekkor (A reguláris) ⇐⇒ (|A| != 0) ⇐⇒ (A sorai lin.ftn-ek) ⇐⇒ (A oszlopai lin.ftn-ek) ⇐⇒ (az A-ból kapott RLA mátrix minden sorában van v1)