10. Euler, síkbarajzolhatóság

Euler

Def: A G gráf Euler-(kör)sétája a G egy olyan (kör)sétája, ami G minden élét tartalmazza.

1. **Ha a G irányított gráfnak van Euler-körsétája,**
   1.1. akkor G izolált pontoktól eltekintve gyengén összefüggő, és
      1.1.1. Ha G két különböző gyenge komponense is tartalmaz élt, akkor G-nek nem lehet Euler-körsétája, hisz egyetlen séta sem tartalmazhat élt két különböző gyenge komponensből.
   1.2. $\rho(v) = \delta(v)$ minden v csúcsára.
      1.2.1. Ha végighaladunk az Euler-körsétán, akkor pontosan annyiszor lépünk be a v csúcsba ill. ki a v csúcsból, ahányszor áthalad a körséta a v csúcson. Mivel a körséta G minden élét pontosan egyszer érinti, ezért $\rho(v) = \delta(v)$.
2. **Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája, akkor**
   2.1. G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
      2.1.1. Egy (kör)séta nem tartalmazhatja két különböző komponensnek is egy-egy élét
   2.2. G-ben minden fokszám páros.
      2.2.1. az Euler-körsétát követve tetszőleges v csúcsba ugyanannyiszor lépünk be, mint ahányszor kilépünk belőle. Ezért d(v) páros
3. **Ha a G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája, akkor**
   3.1. G izolált pontoktól eltekintve összefüggő, és
   3.2. G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.
      3.2.1. Tfh G Euler-sétája egy uv-séta. Ekkor minden w != u, v csúcsra d(w) kétszer annyi, mint ahányszor az Euler-séta w-n áthalad, vagyis d(w) páros. Ha u = v, akkor az Euler-séta körséta, így d(u) is páros (2b) miatt. Ha pedig u 6 = v, akkor u-ból 1-gyel többször lépünk ki, mint be, v-be 1-gyel többször lépünk be, mint ki, vagyis d(u) és d(v) páratlanok.

Lemma: Ha G Euler-gráf, akkor G élei kiszínezhetők úgy, hogy az egyszínű élek (ir) kört alkossanak minden színre.

> **Biz**: Induljunk el G egy éle mentén, és haladjunk tovább az (irányított) élek mentén. Mivel G Euler, ezért sosem akadunk el: előbb-utóbb ismétlődik egy csúcs, így találunk egy C_1 kört. C_1 éleit törölve $G-C_1$ Euler-gráf marad. Ismételjük meg ezt a $G-C_1$ gráfon. Így G minden éle előbb-utóbb sorra kerül és megkapjuk a $C_2, C_3, \ldots$ köröket. Ezért $E(G) = C_1 \cup C_2 \cup \ldots$ diszjunkt körök uniójára bomlik fel. Színezzük ki a C_i kör éleit az i-dik színnel. (Fent az irányítatlan esetet illusztráltuk,

irányított esetben az érvelés ugyanez, az ábrákon pedig irányított élek kellenének.)

Fordított bizonyítások

1. (G irányított gráfnak van Euler-körsétája) ⇐(G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve gyengén öf)
   1.1. A Lemma miatt E(G) felbontható körökre, tehát körsétákra is. Ha a körséták száma legalább 2, akkor választunk két körsétát, amiknek van közös csúcsa és ezen csúcs mentén az alábbi ábra szerint „összevarrjuk” azokat. Mindezt addig tudjuk végezni, míg végül csak egyetlen körséta marad.
2. (G irányítatlan gráfnak van Euler-körsétája) ⇐ (G Euler-gráf és G izolált pontoktól eltekintve öf)
   2.1. Ugyanez mint 1.1
3. (G irányítatlan gráfnak van Euler-sétája) ⇐(G izolált pontoktól eltekintve öf és 0 vagy 2 ptn fokú csúcsa van.)
   3.1. Ha G Euler-gráf, akkor (2) miatt van Euler-körsétája, ami Euler-séta is egyúttal. Ha G nem Euler-gráf, akkor legyenek u és v a G ptn fokú csúcsai. Ekkor G + uv Euler-gráf, és (2) miatt van Euler-körsétája. Feltehető, hogy ezen körséta utolsó éle uv. Ezt az uv élt elhagyva a körsétából, G Euler-sétáját kapjuk.

Síkbarajzolhatóság

Def: Síkbarajzolt (SRt) gráf alatt olyan gráf**diagram**ot értünk, amiben az élek nem keresztezik egymást.

- A SRt gráf nem csupán egy gráf, hanem egy konkrét diagram.
- Ugyanannak a SRható gráfnak nagyon sok lényegesen különböző síkbarajzolt diagramja (lerajzolása) lehet.

Állítás: (A G gráf SRható) ⟺ (G gömbre rajzolható)

Biz: A sztereografikus projekcióban az északi-sarkból történő vetítés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a sík pontjai és a síkot a déli-sarkon érintő gömbfelszín pontjai (mínusz északi-sark) között. A síkbarajzolt diagram vetülete gömbre rajzolt lesz (⇒ X), és az É-t nem tartalmazó gömbre rajzolt diagram pedig síkbarajzolttá válik. A ⇐ irány igazolásához csupán annyi kell, hogy úgy rajzoljuk G-t a gömbre, hogy az É-n ne menjen át él.

Megj: A kx poliéder élgráfjának tartományai a poliéder lapjainak felelnek meg.

Terminológia: SRt G gráf esetén n, e, t ill. k jelöli rendre a G csúcsai, élei, tartományai és komponensei számát.

Duális kézfogáslemma (DKFL): Ha G SRt gráf, akkor $\sum_{i=1}^{t} l_i = 2e$

ahol l_i az i-dik lapot határoló élek számát jelöli.

Biz: Minden él vagy két különböző lapot határol, vagy ugyanazt a lapot 2-szer. Így minden él 2-vel járul a BO-hoz és a JO-hoz is.

Megj: A DKFL akkor hasznos, ha a SRt gráf lapjairól, a KFL pedig akkor, ha egy SRható gráf fokszámairól van információnk.

Fáry-Wagner-tétel: Ha G egyszerű SRható gráf, akkor olyan síkbarajzolása is van, amiben minden él egyenes szakasz.

Tétel: Tetszőleges síkbarajzolt G gráf esetén n + t = e + k + 1

- **Biz**: Rajzoljuk meg G-t az n csúcsból kiindulva, az élek egyenkénti behúzásával. Kezdetben t = 1, e = 0 és k = n, így a bizonyítandó összefüggés fennáll. Tfh már néhány élt berajzoltunk, még mindig fennáll az összefüggés, és egy éppen az uv élt rajzoljuk meg.
    - 1. u és v különböző komponenshez tartoznak. Ekkor k értéke 1-gyel csökken, e-é pedig 1-gyel nő. Az ÉlHaL miatt nem keletkezik kör, tehát nem zárunk körül új tartományt, vagyis t nem változik. Az összefüggés fennmarad.
    - 2. u és v ugyanahhoz a komponenshez tartoznak. Ekkor k nem változik, e viszont 1-gyel nő. Az ÉlHaL miatt keletkezik kör, tehát kettévágjuk az uv élt tartalmazó korábbi tartományt. Ezért t is 1-gyel nő, az összefüggés ismét fennmarad.

Köv:

1. Ha G SRható, akkor t nem függ a síkbarajzolástól, azaz G minden síkbarajzolásának ugyanannyi tartománya van.
2. (2) (Euler-formula) Ha G öf SRt gráf, akkor n + t = e + 2.
3. (3) Ha G egyszerű, SRható és n ≥ 3, akkor e ≤ 3n − 6.
4. (4) G egyszerű, SRható, C3-mentes és n ≥ 3 ⇒ e ≤ 2n − 4.
5. (5) Ha G egyszerű, SRható, akkor δ(G) ≤ 5 (azaz ∃v : d(v) ≤ 5).
6. (6) A K5 és K3,3 gráfok egyike sem SRható.

BIZ:

Biz: (1): $t = e + k + 1 - n$, és a JO nem függ a síkbarajzolástól.
(2): Mivel G öf, ezért a fenti Tételben $k = 1$.
(3): Ilyenkor G minden lapját legalább 3 él határolja, így a DKFL miatt $2e = \sum_{i=1}^{t} \ell_i \geq 3t$. A Tétel alapján

$$3n + 2e \geq 3n + 3t = 3e + 3k + 3 \geq 3e + 3 + 3 = 3e + 6 ,$$

amit rendezve $e \leq 3n - 6$ adódik.
(4): Ilyenkor G minden lapját legalább 4 él határolja. A DKFL miatt $2e = \sum_{i=1}^{t} \ell_i \geq 4t$, így $e \geq 2t$. A Tétel miatt

$$2n + e \geq 2n + 2t = 2e + 2k + 2 \geq 2e + 2 + 2 = 2e + 4$$

Ezt rendezve $e \leq 2n - 4$ adódik.
(5): A KFL és (3) miatt $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e \leq 6n - 12$. Ezért van olyan csúcs, amire $d(v) \leq \frac{6n-12}{n} < 6$.
(6): A K_5 gráf egyszerű, de nem teljesül (3), hiszen $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10 \not\leq 9 = 3 \cdot 5 - 6$. Ezért K_5 nem SRható.
A $K_{3,3}$ gráf egyszerű és C_3-mentes, de nem teljesül rá (4), u.i. $|E(K_{3,3})| = 9 \not\leq 8 = 2 \cdot 6 - 4$. Ezért $K_{3,3}$ nem SRható. □

Def:

1. **Élfelosztás:** az él egy új, másodfokú csúccsal történő felosztása.
2. **Élösszehúzás**: az él törlése és két végpontjának azonosítása.
3. **Topologikus K3,3/K5** : K3,3/K5-ből élfelosztásokkal képzett gráf.

Megf: Az éltörlés, csúcstörlés, élfelosztás, élösszehúzás operációk mindegyike megőrzi a gráf SRható tulajdonságát.

Biz: Az éltörlés és csúcstörlés esetén ez világos: radír felhasználásával kapható a G lerajzolásából. Az élfelosztás során is csak egy csúcsot kell az élnek megfelelő görbén felvenni, a síkbarajzolt tulajdonság ettől megmarad. Az élösszehúzás kicsit ravasz. Az 0 vastagsággal lerajzolt e = uv élt egy pozitív szélességű sávvá hízlalhatjuk úgy, hogy a lerajzolás egyetlen éle sem metsz bele ebbe a sávba. A v-be csatlakozó éleket ezen a sávon belül tovább lehet vezetni u-ig, aminek az eredménye az lesz, hogy G síkbarajzolásából az e él összehúzásával kapott gráf síkbarajzolását konstruáljuk meg.

Köv:

1. Topologikus K5, topologikus K3,3 gráf nem lehet síkbarajzolható.
   a. Ha K3,3 vagy K5 topologikus változata síkbarajzolható volna, akkor K3,3 vagy K5 szintén síkbarajzolató lenne.
2. Ha G SRható, akkor G-nek nincs se topologikus K5, se topologikus K3,3 részgráfja.
   a. Ha G síkbarajzolható, akkor G minden részgráfja is síkbarajzolható, ezért (1) miatt a topologikus K3,3 és a topologikus K5 egyaránt tiltott részgráfok a síkbarajzolható gráfok körében.

Kuratowski tétele: (G SRható) ⇐⇒ (G-nek nincs se topologikus K5, se topologikus K3,3 részgráfja