4. tétel

Elméleti javítás, dijsktra algoritmus

Def. Gráfút hossza: adott G irányított gráf és l hosszfüggvény esetén egy P út hossza a P éleinek összhossza: $l(P)= \sum_{e \in E(P)} l(e)$.

Def. Csúcsok távolsága: az u és v csúcsok távolsága a legrövidebb uv út hossza.

$Dist_l(u,v) := \min\{l(P): P \text{ uv-út}\}$

Def. konzervatív hosszfv: egy adott hosszfüggvény konzervatív ha C bármely irányított körének hossza nem negatív.

Elméleti javítás:

Def. rl felsőbecslés: adott G irányított gráf, és E(G) re egy hosszfüggvény. Az rl felsőbecslés olyan függvény, ami felülről becsli minden csúcs r-től mért távolságát: $dist_l(r,v)<=f(v)$ minden v re ami eleme V(G)-nek. (a gráf csúcsaira magyarul)

Triviális rl felsőbecslés: ha v==r akkor 0, ha v!=r akkor végtelen.

Pontos rl felsőbecslés: $f(v)=dist_l(r,v)$ a gráf minden csúcsára.

Def. elméleti javítás: tfh f egy r,l fb és uv az élhalmaz eleme. Az f uv-elméleti javítása az az f', amire f'(z)={ha z!=v akkor f(z), ha z==v akkor min{f(v), f(u)+l(uv)}}

(a dijsktra algoritmusnak a működése…)(élmenti javítás helyességének bizonyítása)

1,

Tfh a hosszfv nem negatív, és f(r)=0.

Ilyenkor a az (r,l)-felső becslés élmenti javítása mindig (r,l)-felső becslést ad.

BIZ:

Meg kell mutatni, hogy van olyan rv út melynek hossza legfeljebb f(u)+ l(uv).

Egészítsünk ki egy legrövidebb ru-utat az uv éllel, így megkapunk egy rv élsorozatot, aminek a hossza legfeljebb $dist_l(r,u)+l(u,v) \leq f(u)+l(uv)$. A hosszfv konzervativitása miatt belátható, hogy ha van x összhosszú rv élsorozat akkor van maximum x összhosszú rv út is. Tehát létezik lefgeljebb f(u)+l(uv) hosszú uv-út, tehát az élmenti-javítással valóban egy (r,l)-felső becslést kaptunk.

2,

F (r,l)-felsőbecslés pontos <==>f-en nincs érdemi élmenti javítás

BIZ:

=>ha f pontos akkor biztosan nincs rajta érdemi javítás, ha lenne, akkor az fb a pontos érték alá esne így az elméleti javítás eredménye nem lenne (r,l)-fb.

<=Legyen v ∈ V(G) tetsz, és legyen P egy másik legrövidebb rv-út. P egyik éle mentén sincs érdemi javítás, tehát P összes csúcsára pontos az (r,l)-fb, ebbe beletartozik az utolsó csúcsa is P-nek.

Dijkstra algoritmus:

Inputja: G=(V,E), l hosszfüggvény az élekre.

Output: $dist_l(r,v)$ ∀v ∈ V (legrövidebb utak fája)

Működés: U_0: nincs semmi, triv. (r,l)-felsőbecslés

i-edik fázis:

1 eset, legyen U_i: $U_{i-1} \cup \{u_i\}$ ahol u_i olyan csúcs a $V \setminus U_{i-1}$ halmazból, amelyre $f_{i-1}(v)$ minimális

2 eset, f_i:f_{i-1} élmenti javítása minden U_i-ből kivezető élen.

Output: $f_{|V|}$. Megjelöljük a végső $f_{|V|}(v)$ értékeket beállító éleket

Dijsktra algoritmus helyességének bizonyítása

Tfh van egy u1, u2, u3….un a G csúcsainak a sorrendje a Dijkstra algoritmus végrehajtása után.

1, minden $1 \leq i \leq n$ esetén $f_{|V|}(ui) \leq f_{|V|}(ui+1)$

BIZ: az i edik fázisban $f_i(u_i) \leq f_i(u_{i+1})$ teljesült az u_i választása miatt.

Ezek után az $f_i(u_i)$ nem változott.

Az $f_i(u_{i+1})$ még csökkenhet, de az az is csak az $u_i u_{i+1}$ él mentén történt javítás miatt, hiszen az (i+1)-edik fázisban bekerül a készhalmazba , és a hozzátartozó (r,l)-felsőbecslés nem tud csökkenni.

Mivel $l(u_i u_{i+1}) > 0$ ezért valóban, $f_i(u_i) \leq f_{i+1}(u_{i+1})$

2, nagyobb ”befejezési számú” csúcsba vezető út nem lehet rövidebb a kisebb ”befejezési számú” csúcsba vezető útnál .

3, Dijkstra algoritmus outputjaként kapott élhalmazon nem lehet élmenti javítással változtatni.

BIZ:

Az algoritmus alatt minden lehetséges élmenti javítást elvégeztünk, tehát nem lehetséges érdemi javítás.

Tétel:

A dijkstra algoritmus helyesen működik, tehát g minden csúcsára igaz, hogy $dist_l(r,v)=f_{|V|}(v)$.

Lépésszám analízis:

Ha G nek n csúcsa van, és m éle, akkor az algoritmus n-szer keresi meg egy legfeljebb n elemől álló halmazból a min. értéket. Ez maximum konst*n^(2) lépést igényel. Ezen kívül m elméleti javítst végez, ami konst’*m, így tehát legfeljebb konst’’*(n^(2)+m) lépésre van szükség, tehát az algoritmus hatékony.