14. Bázis előállítása, dimenziók, koordinátavektor

Bázis előállítása generátorrendszerből

1. Generátorrendszert ritkítunk
2. PL A „lineáris függetlenség eldöntéséhez” hasonlóan felírjuk a $\lambda u + \mu v + \kappa w + \nu x + \tau y = 0$ egyenletet.
3. RLA megoldása
4. Addig csinájuk újra amíg csak a triviális lin. komb. állítja elő a mátrixot

Bázis előállítása egyenletrendszer megoldásával

1. Az altér egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaiból áll. (Homogén: a jobboldalon 0-k állnak, amiket a kib.egyhómx-ból elhagyunk.) Megoldjuk az egyenletrendszert, és a megoldásokra nyert képlet segítségével találunk bázist.
2. A bázis elkészítéséhez a szp-ek olyan értékadásait keressük, amelyek lin.kombjaként szp-ek tetsz. értékadása előáll. Például ha minden lehetséges módon egy szp-nek 1, a többinek 0 értéket adunk, ilyet kapunk.

Tétel: Ha B1 és B2 a V ≤ Rn bázisai, akkor |B1| = |B2|.

Biz: Mivel B1 lin.ftn és B2 generátorrendszer V -ben, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt |B1| ≤ |B2|. Az is igaz, hogy B2 lin.ftn és B1 generátorrendszer V -ben, ezért az FG-egyenlőtlenség miatt |B2| ≤ |B1| is teljesül.

Def: A $V \le R^n$ altér dimenziója dim V = k, ha V -nek van k vektorból álló bázisa.

Állítás: Ha $U \le V \le R^n$, akkor dim U ≤ dim V .

Biz: Legyen B az U bázisa. Ekkor B ⊆ V lin.ftn, ezért a korábban látott 2. módszerrel B-ki lehet egészíteni V egy B' bázisává, így dim U = |B| ≤ |B'| = dim V .

Állítás: Ha V ≤ Rn és V1, V2 a V alterei, akkor dim(V1 ∩ V2) + dim V ≥ dim V1 + dim V2.

Biz: Egészítsük ki az $U \cap V$ egy B bázisát a V_1 egy $B \cup B_1$ ill. a V_2 egy $B \cup B_2$ bázisává. Igazoljuk, hogy $B \cup B_1 \cup B_2$ lin.ftn. Tfh $\sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b} + \sum_{\underline{b}_1 \in B_1} \lambda_{\underline{b}_1} \underline{b}_1 + \sum_{\underline{b}_2 \in B_2} \lambda_{\underline{b}_2} \underline{b}_2 = \underline{0}$. Ezt átrendezve: $V_1 \ni \underline{x} = \sum_{\underline{b} \in B} \lambda_{\underline{b}} \underline{b} + \sum_{\underline{b}_1 \in B_1} \lambda_{\underline{b}_1} \underline{b}_1 = -\sum_{\underline{b}_2 \in B_2} \lambda_{\underline{b}_2} \underline{b}_2 \in V_2$ adódik, ezért $\underline{x} \in V_1 \cap V_2$. Ekkor $\underline{x} = \sum_{\underline{b} \in B} \mu_{\underline{b}} \underline{b}$, hisz B a $V_1 \cap V_2$ bázisa. Innen $\sum_{\underline{b} \in B} \mu_{\underline{b}} \underline{b} + \sum_{\underline{b}_2 \in B_2} \lambda_{\underline{b}_2} \underline{b}_2 = \underline{x} - \underline{x} = \underline{0}$. A $B \cup B_2$ lin.ftn-sége miatt $\lambda_{\underline{b}_2} = 0 \ \forall \underline{b}_2 \in B_2$. Hasonlóan $\lambda_{\underline{b}_1} = 0 \ \forall \underline{b}_1 \in B_1$, és $\lambda_{\underline{b}} = 0 \ \forall \underline{b} \in B$, azaz $B \cup B_1 \cup B_2$ lin.ftn. Ebből adódik, hogy $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim V \ge |B| + |B_1| + |B_2| + |B| = \dim V_1 + \dim V_2$. $\square$

Köv: R3-ban bármely két origón áthaladó sík (más szóval: kétdimenziós altér) tartalmaz közös egyenest.

Def: Ha B = {b_1, b_2, . . . , b_k} a V ≤ R_n altér bázisa és v = ∑(i=1-k) $\lambda_i b_i$,

akkor a v vektor B bázis szerinti koordinátavektora

Állítás: Ha B = {b1, b2, . . . , bk} a V altér bázisa, u, v ∈ V és λ ∈ R, akkor (1) [u + v]B = [u]B + [v]B ill. (2) [λu]B = λ[u]B .

Biz: (1): Tfh $[\underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$ és $[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}$.

Ekkor $\underline{u} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i$ és $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{b}_i$, tehát $\underline{u} + \underline{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i + \sum_{i=1}^k \mu_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \mu_i)\underline{b}_i$, ezért $[\underline{u} + \underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_k + \mu_k \end{pmatrix} = [\underline{u}]_B + [\underline{v}]_B$.

(2): Tfh $[\underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$. Ekkor $\lambda \underline{u} = \lambda \cdot \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^k \lambda \lambda_i \underline{b}_i \Rightarrow [\lambda \underline{u}]_B = \begin{pmatrix} \lambda\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda\lambda_k \end{pmatrix} = \lambda [\underline{u}]_B$ $\square$

Megj: A fenti állítás azt mutatja meg, hogy Rn bármely V altere lényegében ugyanúgy viselkedik, mint az Rk tér, ahol k = dim V .

Koordinátavektor kiszámítása

Módszer: A generált vektor számítására tanult eljárást követjük: megoldjuk a (pl) $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$ = v egyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert.