3. tétel

M.k.f.fák, és jellemzésük c feszítő segítségével

Kruskal-algoritmus, és helyessége

m.k.f.fa: adott G irányítatlan gráf, és éleire egy költségfüggvény, k(e) ez e él költsége, és egy élhalmaz költsége a benne levő élek költségének összege.

F (F részhalmaza E-nek) egy minimál költségű feszítőfája G-nek, ha F feszítőfa, és a feszítőfák halmazából F-nek van a legkisebb költsége.

F minimál költségű feszítőerdő, ha feszítőerdő, és a feszítőerdők halmazából neki van a legkisebb költsége.

C feszítő tulajdonság

Adott G=(V,E) gráf, és egy hozzátartozó költségfüggvény, legyen G_C a legfeljebb c súlyú élek által feszített részgráf.

G_C =(V, E_C) ahol E_C ={e eleme E: k(e) <= c}

Egy adott F gráf (F gráf G-nek egy feszítőfája) c feszítő tulajdonságú, ha akármilyen c re teljesül, hogy az F-beli élek E_C-vel való metszete, a G_C-ben is feszítőerdőt alkotnak.

Kruskal-algoritmus: adott egy gráf, és annak költségfüggvénye

Input: G=(V,E), és k ktgfv

Output: F ⊆ E mkffa.

Elkezdjük behúzni az éleket, mindig a legkisebb költségűt. Amennyiben az adott i-edik él és az eddig meglévő fa nem alkot kört, az élt belevesszük, ha kört alkot akkor nem. Ezt mindaddig csináljuk amíg az összes élt meg nem vizsgáltuk.

Kruskal-algoritmus tulajdonságai:

Mindig feszítő erdőt ad, ha a gráf összefüggő volt akkor feszítőfát.

C feszítő tulajdonságú

Kruskal algortimus helyességének bizonyítása:

Mkffák struktúrája:

Lemma: Thf G=(V,E) gráf, és hozzátartozó ktgfv

F={f1, f2.... fl} részhalmaza a E-nek, és c tulajdonságú minden c>=0 ra, továbbá k(f1)≤k(f2)≤...≤k(fl). Vegyük F'-t amire ugyanezek igazak. Ekkor k(fi)≤k(f' i) teljesül ∀1≤i≤l esetén, így k(F)≤k(F').

BIZ:

Indirekt: thf k(fi)>k(f'i)=c.

Ekkor az fi és az őt követő tagok már nem lehetnek benne az E_C és az F metszetében(mert az E_C ben csak a c-nél kisebbek szerepelnek)

Amiből következik, hogy az F és E_C metszete i nél kevesebb elemet tartalmaz. Az F c-feszítő tulajdonsága miatt ($E_C \cap F$) a G_c egy olyan feszítő erdeje, ami i-nél kevesebb élt tartalmaz.

Viszont az F' élei is E_C beliek, és többen vannak, ergó az F' ben valahol lenne egy kör, amiből ellentmondás következik, tehát az eredeti feltevés helyes.

1, A lemma bebizonyítsából következik, hogy a Kruskal-algoritmus outputja mindig egy minimális költségű feszítő erdőt ad, mert az algoritmus outputja C-feszítő tulajdonságú.

2, Az F' élhalmaz, minimális költségű feszítő erdeje G-nek <=> F' c-feszítő tulajdonságú minden c>= 0 ra.

BIZ:

<=: ha F' minden c re tartalmazza G_C egy feszítő erdejét, akkor a Lemma szerint F' a G minimális költségű feszítőerdeje.

= > indirekt: thf valamelyik c>0 ra F' nem feszítő erdeje G_C A lemma bizonyításából következik egy ellentmondás, tehát az eredeti feltevés igaz.

3, vaslogikával rájöttünk, hogy ha az input gráf egy összefüggő gráf, tehát a feszítőerdő egy komponens tehát az egy feszítőfa, ami minimális költségű.

lépésszám: tfh n=csúcsok száma m=élek száma

1,m szám sorba rendezéséhez a buborék rendezés legfeljebb (mNCR2) összehasonlítást használ.(megoldható konst*m* $\log_2 m$ lépésben is)

2, alkalmas adatstruktúrával az élekről konst*$\log_2 n$ lépéssben meghatározható, hogy benne van-e F-ben vagy nem.

A Kruskal-algoritmus lépésszáma ezért felülről becsülhető konst *(n + m)*log2(n +m)-mel