11, tétel

Linalg alapjai

Lineáris egyenletrendszer, kibővített együtthatómátrix, elemi sorekvivalens átalakítás és kapcsolata a megoldásokkal. LA és RLA mátrix, vezéregyes, megoldás leolvasása RLA mátrixból. Tilos sor, kötött változó, szabad paraméter, ezek jelentése a megoldás/megoldhatóság szempontjából. Gauss-elimináció

Def. Lineáris egyenlet: Ismeretlenek konstansszorosainak összege konstans.

Def. Lineáris egyenletrendszer: Véges sok lineáris egyenlet.

Def. Lineáris egyenletrendszer kibővített együtthatómátrixa: a sorok az egyenleteknek, az oszlopok az ismeretleneknek ill. az egyenletek jobb oldalainak felelnek meg, az egyes mezőkben pedig a megfelelő együttható ill. jobb oldali konstans áll.

Az egyenletek megoldásához ekvivalens átalakításokat használunk, ezek egyenletek kicsrélése, összeadása, konstanssal való szorzása. Ezek használata során nem változik a megoldáshalmaz, ha volt.

Def. A kibővített együtthatómátrix elemi sorekvivalens átalakítása (ESÁ):

(1) sorcsere,

(2) sor nemnulla konstanssal végigszorzása,

(3) az i-dik sor helyettesítése az i-dik és j-dik sorok (koordinátánkénti) összegével

(Nem elemi, de sorekvivalens átalakítás:

ha az i-dik sort helyettesítjük az i-dik sor és a j-dik sor konstansszorosának összegével

ha egy csupa0 sort hozzáadunk vagy elhagyunk a kibővített együtthatómátrixból)

ÁLL: ESÁ nyomán nem változik a megoldáshalmaz.

BIZ: ESÁ előtti megoldás utána is az marad, Minden ESÁ fordítottja megkapható ESÁ-ok egymásutánjaként is. Ezért minden ESÁ utáni megoldás megoldja az ESÁ előtti rendszert is.

Def: Az M mátrix lépcsős alakú (LA), ha

(1) minden sor első nemnulla eleme 1-es ((def) ú.n. vezér1-es, avagy v1)

(2) minden v1 feletti sorban van ettől a v1-től balra eső másik v1

Az M mátrix redukált lépcsős alakú (RLA), ha

(3) M LA és

(4) M-ben minden v1 felett csak nullák állnak.

Def: Kib. egyhómx tilos sora: 0 . . . 0 x alakú sor, ha $x \neq 0$, azaz olyan sor, amiben minden együttható 0, de a kibővítő elem nemnulla.

Def: A RLA kib. egyhómx v1-hez tartozó változója kötött, a többi változó (amihez nem tartozik v1) **szabad** (vagy szabad paraméter).

RLA ból a megoldás kiolvasása: ha nincs tilos sor, az RLA-ból leolvassuk soronként az egyenleteket, megállapítjuk a szabadvátlozókat, majd a szabadváltozók segítségével kifejezzük a vezéregyesekhez tartozó változót. Innen a szabadparaméternek tetszőleges értékadásához egyértelmű megoldás tartozik.

Gauss-elimináció

Input: kibővített együtthatómátrix

Output: az inputból ESÁ műveletek sorával kapható LA mátrix

Működés: Az algoritmus fázisokból áll. Az i-dik fázisban keresünk egy nemulla elemet az (i−1)-dik sor alatt a lehető legkisebb sorszámú oszlopban.

(a) Ha nincs ilyen elem (mert elfogytak a sorok, vagy mert az i-edik sortól kezdődően csak 0-k állnak a mátrixban), akkor az algoritmus véget ér.

(b) Ha van, sorcserével ezt a nemnulla elemet az i-dik sorba visszük. Az i-dik sor konstanssal szorzásával ezt az elemet v1-sé alakítjuk. Az i-dik sor alatti sorokhoz az i-dik sor konstansszorosát hozzáadva kinullázzuk a kapott v1 alatti elemeket.

„Lépésszámanalízis”: Az $M \in R^{n\times k}$ Gauss-eliminációja során minden fázisában legfeljebb egy sorcserét, legfeljebb 2n sorszorzást és legfeljebb n sorösszeadást hajtunk végre. Ezért minden fázis legfeljebb konst · nk lépést igényel, az összlépésszám legfeljebb konst · n^2k. Mivel az input M mátrix n · k elemet tartalmaz, az eljárás hatékony.

Ha 1 megoldás van akkor legalább annyi egyenlet van ahány ismeretlen