

7. tétel

DAG, top.sor, PERT

Def dag: A $G=(V,E)$ irányított gráf aciklikus (tehát dag), ha G nem tartalmaz irányított kört.

Def. topologikus sorrend: irányított gráf csúcsainak topologikus sorrendje alatt a csúcsok olyan sorrendjét értjük, amire igaz, hogy minden irányított él a sorban előbb álló csúcsból a sorban később álló csúcsba vezet.

Tétel: G irányított gráfnak DAG $\Leftrightarrow V(G)$ nek létezik topologikus sorrendje

BIZ:

\Leftarrow tfh létezik topologikus sorrend, látjuk hogy ekkor G az DAG

\Rightarrow tfh G az DAG, majd futtassunk rajta egy DFS-t, ekkor látjuk, hogy a DFS-ben nincs visszaél, tehát $b(u) > b(v)$ teljesül minden G uv élére, tehát a befejezési sorrend megfordítása a topologikus sorrend.

Tehát, aciklikusság egy DFS futtatásával könnyen eldönthető. Amennyiben a DFS futtatása után van visszaél, G nek van irányított köre, tehát nem DAG.

Topologikus sorrendet „forrástörléses” módszerrel is lehet keresni

Leghosszabb út keresése DAG-ban: (dinamikus programozás)

Input: $G(V,E)$ ami DAG, és egy hosszf

Output: leghosszabb utak gráfja

1, topologikus sorrend megkeresése

2, topologikus sorrend mentén megkeressük az individuális csúcsokba vezető leghosszabb utat a gyökértől.

Dinamikus programozás helyessége:

Ha a v_i -be vezető leghosszabb út utolsó előtti csúcsa v_j , akkor $f(v_i) = f(v_j) + l(v_j v_i)$.

PERT probléma:

”bizonyos tevékenységekből álló projektet kell végrehajtani”

Precedencia feltételek: bizonyos (u,v) párok esetén előírás, hogy az u tevékenységet a v előtt kell elvégezni, ezért v az u kezdetét követően $c(uv)$ időkorlát elteltével kezdhető el csak. (ház építését nem kezdted a tetőszerkezettel)

Cél: minden tevékenységhez olyan $k(v) \geq 0$ kezdési időpontot meghatározni, ami nem sérti meg a precedencia feltételeket, és a projekt végrehajtási ideje (tehát a legnagyobb $k(v)$ érték) minimális.

G irányított gráf csúcsai a tevékenységek és élei a precedencia feltételek, az uv él hossza a $c(uv)$.

Tehát:

1, ha G nem dag akkor nem hajtható végre a projekt

2, ha G DAG a tevékenységek kezdési időpontja a tevékenységbe vezető leghosszabb út hossza.

PERT megoldása: minden csúcsba a leghosszabb út meghatározása

Kritikus út: G -nek a leghosszabb útja. (nem csak 1 lehet)

Kritikus tevékenység: a kritikus út csúcsai.

Miért kritikus? Tfh házépítés, ha az alap elkészítése nincs meg időben, akkor minden csúszik, mert alap nélkül nem építesz (jó) házat.