

9, tétel

Síkba-, gömbberajzolhatóság, euler-féle poliéder tétel

Síkbarajzolható és síkbarajzolt gráfok, tartomány. Gráfok gömbre rajzolhatósága, sztereografikus projekció, és ezek következményei. Duális kézfogáslemma, (általánosított) Euler-féle poliédertétel.

Def. sr: síkbarajzolt gráf alatt olyan gráfdiagramot értünk, amelynek élei nem keresztezik egymást. A G gráf síkbarajzolható ha van síkbarajzolt diagramja.

Def. tartományok: Egy síkbarajzolható gráf tartományai a gráf egy adott síkbeli ábrázolásában azok a síkbeli, összefüggő, nyílt részek (régiók), amelyeket a gráf élei határolnak. Ezek tartalmazhatnak:

- 1, belső tartományokat, amit a gráf élei teljesen körülzárnak
- 2, külső tartományt, ami a végtelen sík felé nyitott, és nem teljesen zárják körbe a gráf élei.

Nem csak egyszerű gráf lehet SR, az SR gráf egy konkrét diagram, de több fajta ábrázolása lehet

Gömbre rajzolhatóság definíciója is hasonlóan definiálható, mint a síkbarajzolhatóság.

Áll: G gráf síkbarajzolható $\iff G$ gömbre rajzolható

Sztereografikus projekció: a gömb "északi sarkáról" történő vetítés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a sík pontjai és a síkot "déli sarkon" érintő gömbfelszín pontjai között (északi sark kivétel).

BIZ:

A síkba rajzolt diagram vetülete gömbre rajzolt lesz, és az északi sarkot nem tartalmazó gömbre rajzolt diagram pedig síkbarajzolttá válik, viszont az északi sarkot szigorúan nem vesszük a gömb „rajzolható felületéhez”.

Ebből következik:

az SR gráf külső tartományának nincs külön szerepe.

BIZ: rajzoljunk gömbre egy gráfot, majd az északi sarkot jelöljük ki más és más tartományok belsejében, majd síkravetítésnél ekkor más és más tartomány lesz a külső tartomány, pontosan az amelyikbe tettük az északi sarkot.

Bármely konvex poliéder élhálójá síkbarajzolható.

BIZ: Bármely konvex poliéder élhálójá a poliéder belső pontjából gömbre vetíthető, tehát gömbről meg síkbarajzolható. (a test lapjai a tartományoknak felelnek meg.)

n =csúcsok száma, e = élek száma, t =tartományok száma, k =komponensek száma

Duális kézfogáslemma:

Ha G gráf síkbarajzolható, akkor a lapokat határoló élek számának az összege, az élek számának a kétszeresével egyenlő

$$\sum_{i=1}^t = 2e$$

Biz: minden él vagy két különböző lapot határol, vagy ugyanazt a lapot kétszer. Így minden élt 2 ször számolunk meg amikor laponként a lapok oldalainak számát számoljuk.

Ha G gráf SR akkor: $n+t=e+k+1$

BIZ:

Tfh G -nek n csúcsa van, az éleket még nem húztuk be. Ekkor 1 tartománya van, és n komponense, tehát az egyenlet áll.

Ha elkezdjük behúzni az éleket akkor az élhozzáadási lemma szerint 2 dolog történhet:

1, 2 olyan csúcsot kötünk össze amik nem voltak 1 komponensen belül, tehát 1 komponenssel kevesebb lesz, de 1 éllel több, az egyenlet nem változik.

2, olyan csúcsokat kötünk össze, amik 1 komponensen belül voltak, tehát lesz 1 kör, ami a tartományok és az élek számát növeli, tehát az egyenlet még mindig áll.

Euler féle poliédertétel: $n+t=e+2$

BIZ: poliéderről beszélünk ami összefüggő tehát $k=1$.