20. tétel

Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja

Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja, a megoldhatóság és az oszlopok alterének kapcsolata. Összefüggés az egyértelmű megoldhatóság, az egyenletek és ismeretlenek száma között. Az egyértelmű megoldhatóság feltétele n × n méretű együtthatómátrix esetén

Lineáris egyenletredszer mátrixegyenletes alakja

Paraszti (chatgpt) módon

A lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletes alakja egy tömör, algebrai formában történő leírása az egyenletrendszernek, ahol az ismeretlenek és az egyenletrendszer együtthatói mátrixokkal vannak kifejezve.

Matekos módon:

Legyen adott egy lineáris egyenletrendszer, amely a következő formában írható fel:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i=1,2,\ldots,m)$

Legyen az a_{ij} az egyenletrendszer együtthatói

Xj az ismeretlenek

B_i az egyenletrendszer jobb oldalán szereplő konstansok

Ezt a mátrixegyenletet felírhatjuk Ax=b formában is, ahol az A az együtthatómátrix,

x a változók oszlopvektora, és b az eredményvektor

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

TEHÁT ez a cucc egy fancy egyenletrendszer leírási módja.

Megoldhatóság:

Egyenletrendszer akkor és csak akkor megoldható, ha

az együtthatóiból képzett mátrix determinánsa nem nulla,

az együtthatóiból képzett mátrixnak több sora van mint oszlopa,

nincs az egyenletek között ellentmondás

Állítás: Ha $A \in R^{n \times n}$: (Ax=b egyért. megoldható)⇐⇒(|A|!=0)

Biz: ⇒: Indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy |A| = 0. Láttuk, hogy ilyenkor A oszlopai nem lineárisan függetlenek, ezért A oszlopainak valamely nemtriviális lineáris kombinációja 0-t ad: ∃y != 0 : Ay = 0. Ezért ha x az Ax = b megoldása, akkor A(x + y) = Ax + Ay = b + 0 = b miatt x + y is megoldás. Tehát az Ax = b mátrixegyenletnek ha van is megoldása, az nem egyértelmű. Ez ellentmondás, tehát A oszlopai lin.ftn-ek, ezért |A| 6= 0.

⇐: Most azt tesszük fel, hogy |A| != 0. Ekkor A reguláris (azaz invertálható), így A^{-1} -zel szorozhatunk balról. Ezért Ax = b ⇐⇒ $x = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$, azaz x egyértelmű.