| | |
|---|---|
| מספר הקורס: | 114032 |
| מספר הקבוצה: | 55 |
| תת-קבוצה: | - |
| עמדת עבודה: | 14 |
| שם המדריך: | גבריאל ויינרוט |
| מגישים: | 1. מיכאל רוזנבלום, 318251030,<br>rmichael@campus.technion.ac.il |
| | 2.רועי וויסבורד , 206914442,<br>roy.waisbord@campus.technion.ac.il |
| תאריך: | 18/06/2024 |
| דו"ח מסכם לניסוי: | מטוטלת פשוטה |

# מדידת תלות בין זמן המחזור של מטוטלת לבין אורכה

## תקציר

מטרת ניסוי זה הנה לבחון את התנהגות מטוטלת פשוטה. השתמשנו במערכת קיימת המורכבת ממשקולת שתלויה בעזרת חוט. ביצענו מדידות של זמן המחזור כתלות בזוויות שחרור שונות, ממדידות אלו חילצנו תחום אפשרי לזוויות שבהן אין תלות של זמן המחזור בזווית (זוויות קטנות). בשלב השני, ביצענו מדידות של זמן מחזור כתלות באורכי חוט שונים, עבור זווית שחרור הנמצאת בתחום הזוויות הקטנות. ביצענו השוואה לתוצאות המודל התיאורטי והגענו למסקנה כי תוצאות הניסוי עומדות בקנה אחד עם התיאוריה.

## מבוא

מטוטלת מתמטית פשוטה הנה מערכת הבנויה ממשקולת כבדה ונקודתית, המחוברת לחוט מתוח וקל (חסר מסה ביחס למסת המטוטלת), בסביבה נטולת איבודי אנרגיה (חיכוכים מוזנחים).

מהמודל המתמטי מתקבל קשר בין זמן המחזור לבין אורך החוט:

$$(1) \quad T = A \cdot l^{\alpha}$$

כאשר $A = const. \quad ,T[sec] = period \quad ,l[m] = length\ of\ string$

בניסוי עלינו לבדוק האם מתקיים $T \propto \sqrt{l}$ (כלומר, האם $\alpha = 0.5$). לשם כך נשתמש ברגרסיה לינארית. לינאריזציה ישירה למודל (הפעלת ln על שני אגפי המשוואה) בעייתית משום שהפעלת לוגריתם על גודל בעל מימדים היא פעולה שאיננה מוגדרת, ובנוסף לכך ישנה תלות של A בערך של α וכן בתוצאות הספציפיות של הניסוי. אי לכך, המשוואה עמה נעבוד הנה:

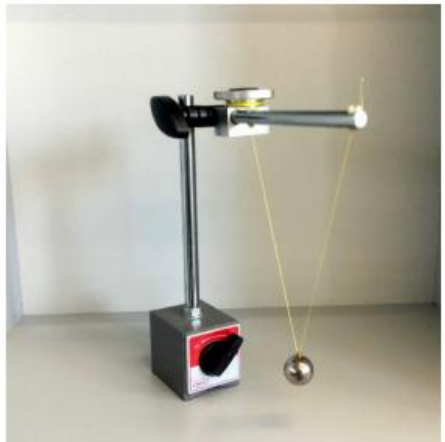
$$(2)\ \ln\left(\frac{T}{T(l_{max})}\right) = \alpha \cdot \ln\left(\frac{l}{l_{max}}\right)$$

כאשר $l_{max} = maximal\ \ string's\ length$

מכאן שנרצה לבדוק בניסוי האם הקשר בין $\ln\left(\frac{T}{T(l_{max})}\right)$ לבין $\ln\left(\frac{l}{l_{max}}\right)$ אכן לינארי וכן האם $\alpha = 0.5$.

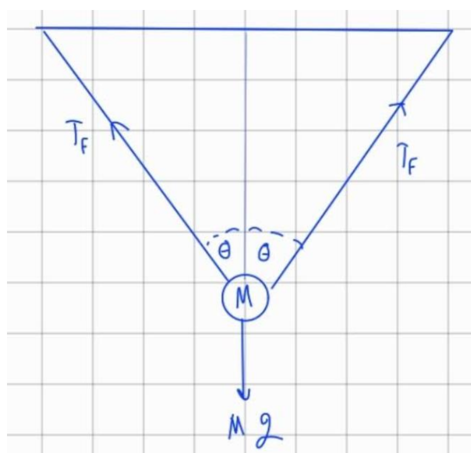
על מנת לדמות את התנאים האידיאליים המערכת מורכבת מחוט דייג בעל משקל זניח ביחס לכדור, ובחרנו אורכי חוט גדול משמעותית מקוטר הגוף על מנת להתייחס אליו כנקודתי. המדידות נעשו באמצעות סרגל בעל שגיאת מדידה בגודל $\pm 0.5 \cdot 10^{-3}[m]$, ומד זווית בעל שגיאת מדידה בגודל $\pm 0.5[°]$. המערכת בנויה ממוטות בצורת ר' שמעוגנות על ידי מגנט, מהמוט האופקי יוצא בקצה חוט שיורד אל הכדור ומתחבר בצורת משולש שווה שוקיים חזרה למוט עם מנגנון לשינוי אורך החוט על ידי סיבוב גלגלת (איור 1). במהלך הניסוי וידאנו כי החוט מתוח לאורך כל התנועה, וזאת באמצעות שחרור מגבהים נמוכים.

להלן תמונת המערכת הניסויית :



**איור 1**: מערכת המדידה לניסוי

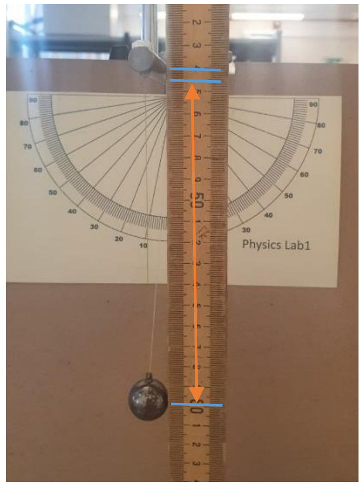
נשרטט את הכוחות הפועלים על המשקולת על מנת לוודא כי המערכת מתאימה לתאוריה של מטוטלת מתמטית :




**איור 2**: תרשים כוחות של
מערכת המטוטלת המתמטית

ניתן לראות כי הכוחות בכיוון האופקי מתבטלים כל עוד האורכים בשני הצדדים זהים ולכן כוח הכובד והכוח של החוט פועלים במישור אחד ולכן מתאים לתיאוריה.

ייצבנו את המערכת על גבי המדף, כיוונו את מד הזווית במקביל למישור המשקולת, ווידאנו כי החוט אכן בעל אורכים שווים בשני צדדיו. את מדידת האורך ביצענו על ידי שימוש בסרגל בצורה אנכית מהשולחן, כך שהוא השיק גם לכדור וגם למוט האופקי של המערכת.



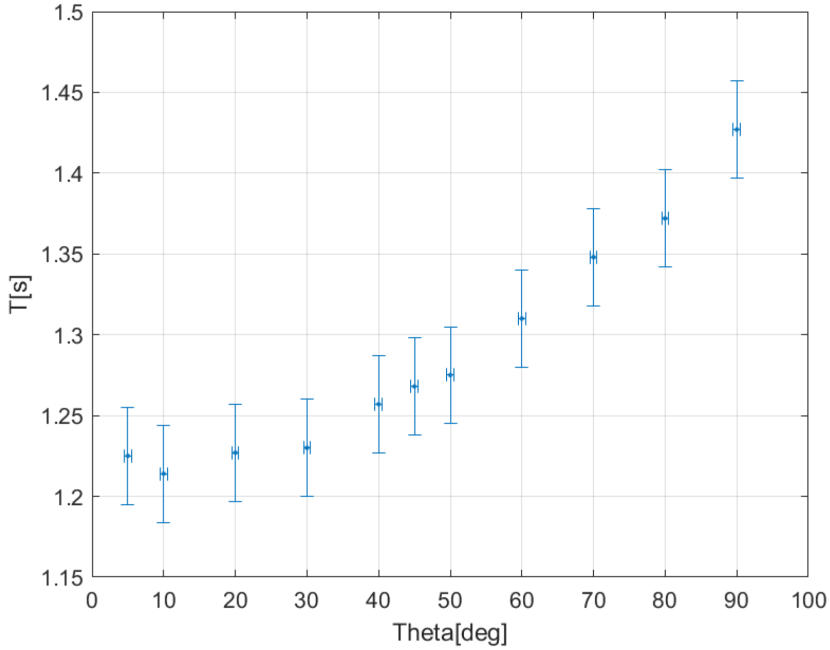

**איור 3**: מדידת האורך במטוטלת
קו עליון - השקת המוט
קו תחתון – השקת כדור
חץ – ערך האורך שנלקח

הנוסחה בה השתמשנו לחישוב שגיאה נגררת של פרמטר $\alpha$ (הנובעת מהשגיאה בציר $x$ ומהשגיאה בציר $y$ היא:

$$(3)\quad \frac{\delta\alpha}{\alpha} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2}$$

תוצאות הניסוי

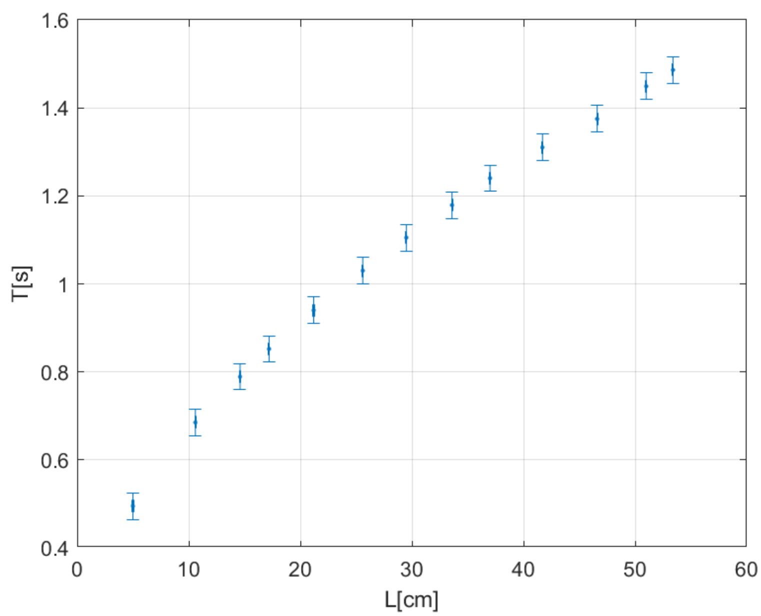
מדדנו את זמן המחזור של המטוטלת עבור זוויות שחרור שונות. על מנת להגדיל את הדיוק של כל מדידה מדדנו את הזמן של 10 מחזורים ולבסוף חילקנו במספר המחזורים על מנת לקבל זמן מחזור. להלן תוצאות:




*גרף 1 – זמן מחזור כתלות בזוויות שחרור שונות*

אנו מסיקים מתוצאות ניסוי זה כי עד לזווית $30°$ ניתן להתייחס לזוויות כזוויות קטנות, וזאת משום שזמן המחזור המתקבל עבורן (כולל שגיאות המדידה) דומה – ישנה חפיפה גדולה בין זמני המחזור שמתקבלים. עקב תוצאות ניסוי זה בחרנו בזווית של $20°$ , אשר נמצאת בטווח הזוויות הקטנות, לביצוע המדידה הבאה.

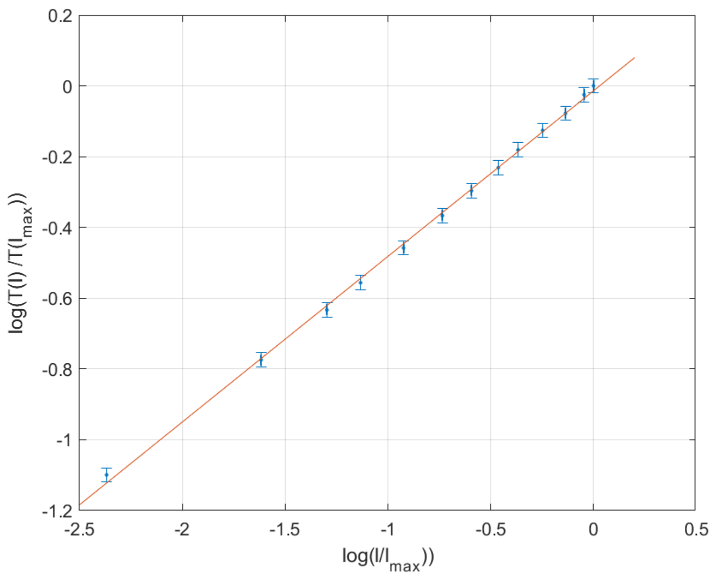
המדידה הבאה הנה מדידת זמן המחזור של המטוטלת עבור אורכי חוט שונים. להלן התוצאות:



*גרף 2 – זמן מחזור כתלות באורכי חוט שונים*

ניתן להבחין כי ישנו יחס ישר בין אורך החוט לבין זמן המחזור – ככל שהחוט ארוך יותר, כך גדל זמן המחזור. מגמה זו מתקיימת עבור כל המדידות שביצענו באופן חד משמעי. גרף זה מתאים לנוסחה (1) שמופיעה בפרק המבוא.

בשלב הבא ביצענו נרמול של המדידות מתנאי ההתחלה על מנת להגיע למצב שניתן להפעיל log על המשוואה ולקבל לינאריזציה של פרמטר $\alpha$ והפיכתו לשיפוע הגרף (נוסחה 2). ביצענו רגרסיה לינארית על נתונים מעובדים אלו והשוונו את הישר המתקבל לתוצאות המדודות. להלן התוצאות:




*גרף 3 – השוואת המודל הנמדד במעבדה לתוצאות רגרסיה לינארית, בסקאלה לוגריתמית.*

המודל הלינארי בו נעשה שימוש ברגרסיה הלינארית הינו $f(x) = a \cdot x + b$, כאשר מתקבל (עם שגיאות נומריות):

$$a = 0.467 \pm 0.005$$

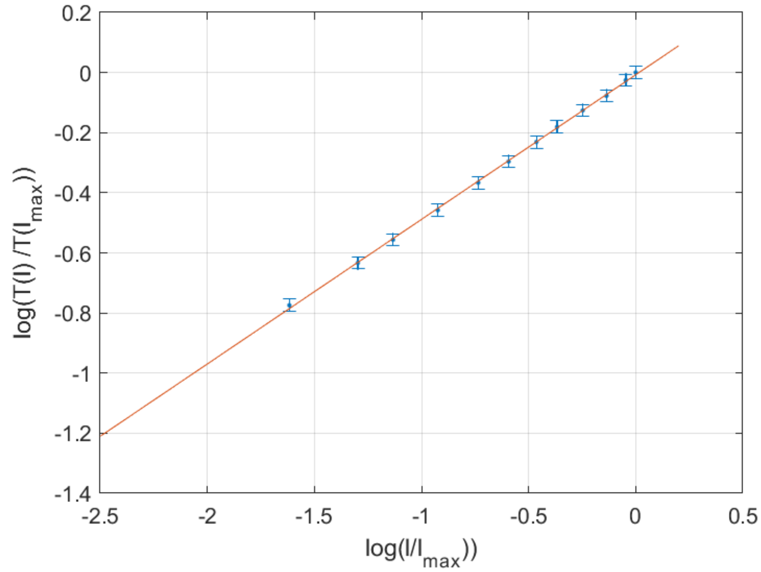
$$b = 0.014 \pm 0.005$$

כמו כן, מתקבל $R^2 = 0.9989,\ RMSE = 0.013$

נבחין כי הערך שמתקבל עבור $R^2$, המהווה קריטריון להתאמת המודל הלינארי, קרוב מאוד ל-1. מכאן ניתן להסיק כי ההתאמה של המודל הלינארי למדידות גבוה. בנוסף, ערך ה-RMSE קרוב ל-0 כנדרש.

דיון בתוצאות והשוואה לתיאוריה

תחילה ניתן לראות כי ישנה נקודה אחת בגרף 3 עבורה הקו הישר לא עובר בתוך תחום השגיאה האפשרית (הנקודה השמאלית ביותר). אנו מעריכים כי התנהגות זו נובעת מכך שבמדידה של נקודה זו אורך החוט לא היה ארוך משמעותית מהגודל של המשקולת. אם לא ניקח את נקודה זו בחשבון נקבל את התוצאות הבאות :




*גרף 4 – השוואת המודל הנמדד במעבדה לתוצאות רגרסיה לינארית, בסקאלה לוגריתמית, ללא נקודה בה אורך החוט קצר מידי.*

$$a = 0.481 \pm 0.003$$

$$b = 0.007 \pm 0.003$$

כמו כן, מתקבל $R^2 = 0.9995,\ RMSE = 0.0057$

ניתן לראות כי בחישוב השני קיבלנו ערך $R^2$ קרוב יותר ל-1 וערך $RMSE$ קרוב יותר לאפס ולכן תוצאה זאת יותר מדויקת. בניסוי זה רצינו לבחון האם מתקיים $a = 0.5$, כפי שמתקיים במודל התיאורטי. ניתן לראות כי בחישוב שביצענו ללא הנקודה הבעייתית אכן קיבלנו תוצאות יותר קרובות לתיאוריה. מיצענו את ערכי השגיאה היחסית הפיסיקלית שמתקבלת עבור הפרמטר $a$ (נוסחה 3) וקיבלנו : $\frac{\delta a}{a} = 0.15$, כלומר שגיאה של 15%. השגיאה הנומרית זניחה ביחס לשגיאה הפיסיקלית במקרה של $a$ ולכן לא נתייחס אליה בחישוב השגיאה. עם כך ערך השיפוע המתקבל הוא $a = 0.481 \pm 0.072$ .

קיבלנו כי הערך $a = 0.5$ נמצא בטווח ערכי השגיאה של $a$ ולכן תוצאות הניסוי אכן תואמות למודל התיאורטי. בנוסף, ציפינו כי הערך של b יהיה שווה ל-0 וזאת לפי נוסחה (2) בפרק המבוא. בפועל קיבלנו את הערך $b = 0.007 \pm 0.003$, ניתן להבחין כי הערך b=0 אינו נמצא בטווח הערכים .

נציין כי השגיאות המתקבלות עשויות לנבוע מאי דיוקים במדידות על ידינו. רק אחד מאיתנו מדד את הזמנים וספר את המחזורים של המטוטלת (זאת על מנת שלא יהיה ערבוב של שני זמני תגובה), אך דבר זה פיצל את הריכוז שלו בין שני דברים שונים שככל הנראה השפיע על זמן התגובה. אנו מעריכים שזמן התגובה (הזמן שעבר מרגע עזיבת המטוטלת ועד לחיצה על שעון העצר, וכן הזמן שעבר מרגע סיום מספר המחזורים הרצוי ועד עצירת השעון) מהווה את הסיבה העיקרית לקבלת שגיאות במדידה. דרך אפשרית להקטין שגיאה זו היא על ידי ביצוע הניסוי מספר פעמים ומיצוע על התוצאה. סיבה נוספת לקבלת השגיאות בתוצאות הנה דיוק מכשירי המדידה בהם השתמשנו.

## מסקנות

בניסוי זה מטרתנו הייתה לבחון את ההתנהגות של מטוטלת פשוטה, ולהשוותה למודל התיאורטי של מטוטלת מתמטית. רצינו לבחון האם מתקיים הקשר $T \propto l^{0.5}$ ($\alpha = 0.5, b = 0$) בין זמן המחזור לבין אורך המטוטלת. קיבלנו כי הערך $\alpha = 0.5$ נמצא בתוך טווח השגיאה אך הערך b לא. מאחר והסטייה מהערך הרצוי לא גדולה וכן השפעת b על המערכת הינה רק הוספה של קבוע, ניתן להסיק כי מערכת הניסוי ממדלת בקירוב טוב את המודל התיאורטי של מטוטלת מתמטית פשוטה.