ningen ved hjælp af tilnærmede metoder, og ingen af dem har løst tilbagestuvningsproblematikken tilfredsstillende.

Med til vurderingen hører også tilgængeligheden af modellen samt omkostningerne ved at bruge den. For projektet og senere anvendelser skønnedes det at være af betydning at have direkte adgang til modellen både under projektet og senere.

Som omtalt er NIVA-modellen tilgængelig, da den kan køres over ØK-data. Omkostningerne er således de direkte maskinudgifter. Viggo Michaelsen A/S oplyser, at disse vil være af størrelsesordenen 700-800 kr. pr. kørsel, hvis man regner med et net på 75 delstrækninger, et tidsinterval på 15 min. og en kørsel som dækker et døgn.

Philips forudsætter, at de i ret høj grad medvirker med kørslerne, idet modellen ikke har brugervenlig ind- og udlæsning af data (modellen er i første række beregnet til reguleringsopgaver). Ved en aktuel opgave (simulering af kloaknet med ca. 75 delstrækninger for at vurdere behovet for udbygning eller regulering) ville udgiften blive 130.000 kr.

BBC har været af den opfattelse, at de selv skulle stå for alle kørsler. Ved samme opgave ville udgifterne ved kørsel hos BBC også blive af samme størrelsesorden, 130.000 kr. Det må tilføjes, at BBC på et senere tidspunkt har foreslået, at modellen i forbindelse med en konkret opgave kunne overføres til Danmark, således at der blev direkte adgang til modellen.

SWMM er ikke för øjeblikket tilgængelig i Danmark. Benyttelse af denne model ville altså indebære, at den skulle installeres på et EDB-anlæg i Danmark. Det er vanskeligt at vurdere udgifterne forbundet hermed. Og-

så selve kørselsudgifterne kan dårligt vurderes. Rapporten nævner, at kørselsudgifterne vil være fra 10.000 til adskillige 100.000 Dollars for en by, afhængig af byens størrelse.

Det kan sammenfattende siges, at af de 4 modeller er kun NIVA idag umiddelbart tilgængelig, idet de øvrige enten skal anvendes med udvikleren som mellemled eller først skal installeres på en datamat i Danmark. For alle modeller gælder, at de for at kunne anvendes til at simulere styring/regulering og tage hensyn til stuvning skal videreudvikles. En sådan viderudvikling forudsætter et så indgående kendskab til modellen, at den tid, der går hermed, nok kan sammenlignes med en nyudvikling.

På dette grundlag blev det besluttet at opbygning af en model skulle indgå i projektet.

4.2. Egen model

4.2.1. Ligningssystem for ikke stationær strømning i ledning

Den vigtigste enkelte del af afløbssystemet er en ledning, og det viser sig også, at det er denne del, der volder de fleste princippielle vanskeligheder ved opbygning af en model. Dette skyldes, at de ligninger som beskriver ledningen er partielle differentialligninger som er vanskelige at løse, specielt under tidsvarierende forhold. Disse ligninger gennemgås i det følgende.

Kontinuitetsligningen er en massebevarelseslov. Den siger, at netto flow ind i et volumen er lig med den hastighed, hvormed volumenet ændres.

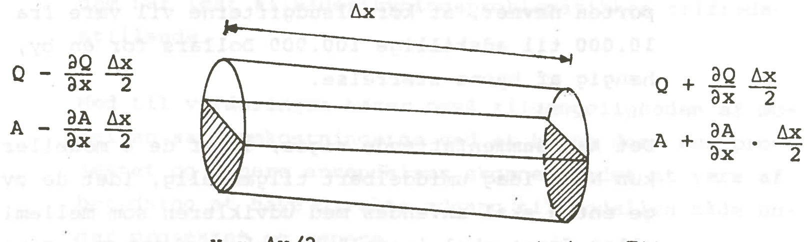

FIG. 4.1

Med figurens betegnelser fås:

$$(Q-\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\Delta x}{2})-(Q+\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\Delta x}{2} \cdot (A-\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} + A + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}))$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \Delta x = \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \Delta x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

Ved denne udledning er forudsat, at tilvækster for Q og A kan beskrives ved hjælp af de afledede. Når man lader Δx gå mod O er dette sandt under forudsætning af, at Q og A er differentiable. Endvidere er der forudsat, at der kun strømmer vand gennem elementets endeflader.

Impulsligningen er en bevarelseslov for bevægelsesmængde. Den udtrykker: den bevægelsesmængde som strømmer ind gennem en kontrolflade + summen af de kræfter, som virker på fladen = den hastighed, hvormed bevægelsesmængden opmagasineres indenfor kontrolfladen. Ligningens komposant i X-aksens retning (parallelt med bunden) opstilles:

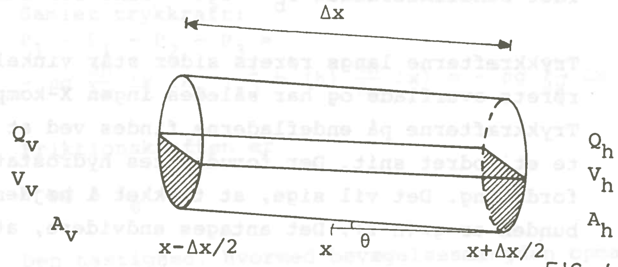

FIG. 4.2

De enkelte led i ligningen er:

Bevægelsesmængde ind gennem venstre endeflade pr. tidsenhed

$$\rho\, V_v \cdot Q_v = \rho(\frac{Q}{A} \cdot Q - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{Q}{A} \cdot Q)\frac{\Delta x}{2})$$

Bevægelsesmængde ud gennem højre flade pr. tidsenhed

$$\rho\, V_h \cdot Q_h = \rho\,(\frac{Q}{A} \cdot Q + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{Q}{A} \cdot Q)\frac{\Delta x}{2})$$

Der er her set bort fra hastighedens fordeling over tværsnittet. I stedet for $V_v\, Q_v$ skulle der egentlig stå

$$\int_{F_v} v dQ = \alpha' \, V_v \, Q_v$$

hvor α' er en hastighedsfordelingskoefficient (se /5/ side 69).

Tre typer kræfter påvirker elementet, tyngdekræfter, trykkræfter og friktionskræfter.

Tyngdekræfternes X-komposant er (parallelt med røret)

$$g\rho\Delta x A \sin\theta \sim g\rho\Delta x A \, I_b$$

idet bundliniefaldet $I_b = tg\theta \sim \sin\theta$ for små θ.

Trykkræfterne langs rørets sider står vinkelret på rørets overflade og har således ingen X-komposant. Trykkræfterne på endefladerne findes ved at betragte et lodret snit. Der forudsættes hydrostatisk trykfordeling. Det vil sige, at trykket i højden z over bunden er $g\rho(h-z)$. Det antages endvidere, at $\cos\theta \approx 1$.

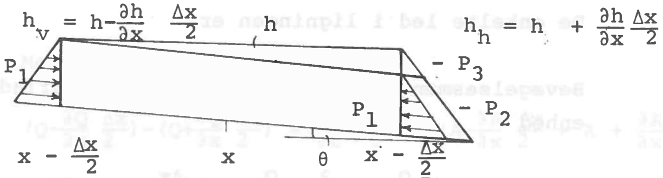

FIG. 4.3

Trykkraft på venstre flade

$$\int_0^{h_v} \rho g\, (h_v - z) \cdot b(z)\, dz \doteq P_1$$

Trykkraft på højre flade

$$-\int_0^{h_h} \rho g\, (h_h - z)\; b\,(z)\; dz$$

$$= -\int_0^{h_v} \rho g\; (h_v - z)\; b\;(z)\; dz - \int_0^{h_v} \rho g\; (h_h - h_v)\; b\;(z)\; dz -$$

$$\int_{h_v}^{h_h} \rho\; h\; (h_h - z)\; b\;(z)\; dz = -P_1 - P_2 - P_3$$

Den samlede trykkraft kan nu findes, idet

$$P_3 = \int_{h_v}^{h_h} \rho g\; (h_h - z)\; b\;(z)\; dz \approx -\rho g b\;(h)\;\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\,\Delta x\right)^2$$

og

$$P_2 = \int_0^{h_v} \rho g\; (h_h - h_v)\; b\;(z)\; dz = -\rho g\,\frac{\partial h}{\partial x}\,\Delta x\; A_v$$

Samlet trykkraft:

$$P_1 - P_1 - P_2 - P_3 =$$

$$-\rho g\,\frac{\partial h}{\partial x}\,\Delta x\,(A_v + \frac{1}{2}\, b\;(h)\;\frac{\partial h}{\partial x}\,\Delta x) = -\rho g\,\frac{\partial h}{\partial x}\,\Delta x\; A$$

Friktionskraften er

$$-\rho g\; A\; I_e\;\Delta x$$

Den hastighed, hvormed bevægelsesmængden opmagasineres er

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(\rho\,\frac{Q}{A}\; A\;\Delta x)$$

Den samlede impulsligning kan nu skrives

$$\rho\,(\frac{Q}{A}\,Q - \frac{\partial}{\partial x}\,(\frac{Q}{A}\cdot Q)\,\frac{\Delta x}{2}) - \rho\,(\frac{Q}{A}\,Q + \frac{\partial}{\partial x}\,(\frac{Q}{A}\cdot Q)\,\frac{\Delta x}{2})$$

$$+\rho g\;\Delta x\; A\cdot I_b - \rho g\,\frac{\partial h}{\partial x}\,\Delta x\; A - \rho g\; A\; I_e\,\Delta x$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\,(\rho\,\frac{Q}{A}\; A\Delta x)$$

Efter sammentrækning og division med Δx fås

$$-\rho\,\frac{\partial}{\partial x}\,(\frac{Q^2}{A}) + \rho g\; A\; I_b - \rho g\; A\,\frac{\partial h}{\partial x} - \rho g\; A\; I_e = \rho\,\frac{\partial Q}{\partial t}$$

Divideres der med $\rho g A$ og arrangeres om fås

$$\frac{1}{gA}\;\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{gA}\;\frac{\partial}{\partial x}\,(\frac{Q^2}{A}) \;=\; I_b - I_e \qquad (2)$$

Kontinuitetsligningen og impulsligningen udgør et differentialligningssystem som bestemmer en ikke stationær strømning.

Forudsætningerne for ligningernes udledning er sammenfattende:

- bundens hændning er lille ($\sin\theta \cong tg\;\theta \cong \theta \cong I_b$, $\cos\theta \cong 0$)

- der sker ikke pludselige ændringer i tværsnittet
- der ses bort fra hastighedsfordelingen over tværsnittet ($\alpha'=1$)
- der regnes med hydrostatisk trykfordeling.

Foruden disse ligninger er der behov for en række hjælpeligninger, som her anføres.

Man har brug for at bestemme størrelsen af friktionsleddet I_e i (2) (angående friktionsleddet, se /5/). Dette beregnes almindeligvis ud fra formlen

$$I_e = f \cdot \frac{v^2}{2g} \frac{1}{R}$$

hvor f er en friktionsfaktor, og R er den hydrauliske radius. f kan bestemmes af Colebrook-Whites formel

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = 6{,}62 - 2{,}45 \ln \left(\frac{k}{R} + \frac{4{,}7}{R_e \sqrt{f}}\right)$$

hvor k er den ækvivalente sandruhed, og R_e er Reynolds tal. For et cirkulært fuldtløbende rør kan disse formler bestemme vandføringen til

$$Q_f = -\,3{,}02 \ln \left(\frac{0{,}74 \cdot 10^{-6}}{d\sqrt{dI_e}} + \frac{k}{3{,}71\, d}\right) d^2 \sqrt{dI_e} \qquad (3)$$

hvor d og k indsættes i m, og Q_f bestemmes i m^3/s.

Man kan også bruge de 2 formler for ikke fuldtløbende rør. En anden mulighed er imidlertid at bruge (3) i forbindelse med en empirisk fyldningsgradskurve

$$\frac{Q}{Q_f} = 0{,}46 - 0{,}5 \cos\left(\pi \frac{h}{d}\right) + 0{,}04 \cos\left(2\pi \frac{h}{d}\right) \qquad (4)$$

Ligningerne (3) og (4) og andre kendte energitabsformler gælder for ensformige, stationære strømninger, men

det er almindeligt antaget, at de også kan anvendes for uensformige og ikke stationære forhold. Det er i hvert fald nødvendigt, så længe der ikke er fundet andre formler.

Ud over disse formler har man brug for sammenhængen mellem vandspejlshøjde og tværsnitsareal

$$A = \frac{d^2}{4} \operatorname{Arccos}\left(\frac{\frac{d}{2} - h}{\frac{d}{2}}\right) - \sqrt{h\,(d-h)}\,\left(\frac{d}{2} - h\right) \qquad (5)$$

Man har altså følgende ligningssystem til beskrivelse af strømningen

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{gA}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) = I_b - I_e \qquad (2)$$

$$Q_f = -\,3{,}02 \ln \left(\frac{0{,}74 \cdot 10^{-6}}{d\sqrt{dI_e}} + \frac{k}{3{,}71\, d}\right) d^2 \sqrt{dI_e} \qquad (3)$$

$$\frac{Q}{Q_f} = 0{,}46 - 0{,}5 \cos\left(\pi \frac{h}{d}\right) + 0{,}04 \cos\left(2\pi \frac{h}{d}\right) \qquad (4)$$

$$A = \frac{d^2}{4} \operatorname{Arccos}\left(\frac{\frac{d}{2} - h}{\frac{d}{2}}\right) - \sqrt{h\,(d-h)}\,\left(\frac{d}{2} - h\right) \qquad (5)$$

4.2.2. Tilnærmet løsningsmetode

4.2.2.1. Princip

Strømningsligningerne kan, på grund af deres ulineære karakter, ikke løses analytisk. Man må derfor normalt ty til numeriske metoder. En numerisk løsning af det samlede ligningssystem er dog vanskelig og tidskrævende både med hensyn til programmeringstid og med hensyn til maskintid ved kørsler. Der er derfor verden over ofret betydelige anstrengelser på at finde egnede metoder til løsning af ligningerne som også anvendes i en række andre sammenhæng, floder, overrislingsanlæg, vandkraftværker. Et vigtigt bidrag er /6/ som er en statusrapport i 3 bind, omhandlende alt indenfor ikke stationære strømninger, især med henblik på numeriske løsninger.

Den løsningsmetode som nu anvendes i modellen involverer dog ikke hele ligningssystemet, idet impulsligningen tilnærmes med

$$I_e = I_b \qquad (2')$$

Kontinuitetsligningen tilnærmes nu med et skema som kan illustreres på følgende måde

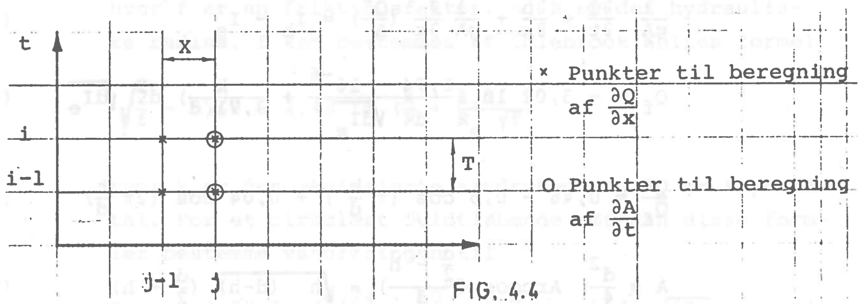

FIG. 4.4

Da gamle værdier af de variable ikke gemmes i EDB-programmet bruges der notationen $Q_o\,|j|$ og $Q_1\,|j|$ i stedet for $Q\,|i,j|$ og $Q\,|i-1,j|$. Denne notation bruges derfor også her. De skarpe paranteser markerer index

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2X}\,(Q_o\,|j| + Q_1\,|j| - Q_o\,|j-1| - Q_1\,|j-1|\,)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{T}\,(A_o\,|j| - A_1\,|j|\,)$$

Kontinuitetsligningen får nu følgende udseende

$$\frac{1}{2X}\,(Q_o\,|j| + Q_1\,|j| - Q_o\,|j-1| - Q_1\,|j-1|\,)$$

$$= \frac{1}{T}\,(A_o\,|j| - A_1\,|j|\,)$$

I beregningsgangen vil alle størrelser til i-1 være kendt. Også størrelsen med index j-1 er kendt, idet beregningen begyndes opstrøms. Ligningen løses nu med hensyn til de ukendte størrelser

$$\frac{T}{2}\,Q_o\,|j| + X\,A_o\,|j|$$

$$= \frac{T}{2}\,(Q_o\,|j-1| + Q_1\,|j-1| - Q_1\,|j|\,) + X\,A_1\,|j|$$

$$= Z_o \qquad (6)$$

Da Q_f er bestemt en gang for alle for en ledning, når man gør tilnærmelsen $I_e = I_b$ udgør (6) nu sammen med (4) og (5) et ligningssystem som bestemmer $Q_o\,|j|$ og $A_o\,|j|$.

Dette ligningssystem kunne løses ved iteration, i programmet er det dog valgt at løse ved at ændre vanddybden h i små spring. Når det interval, som h skal ligge i, er fundet, løses ligningerne ved interpolation.

Anvendelse af denne model på en ledningsstrækning vil vise, at variationer i tilløbsmængden udjævnes, så variationerne er langsommere i den nederste ende af ledningen.

Det er fristende at tro, at denne dæmpning skyldes, at vandstanden skal øges, for at vandføringen kan blive større, og at denne kræver en opmagasinering, som dæmper variationerne.

At dette ikke er den fulde sandhed, kan man se, ved at tænke sig at vandføringen er proportional med tværsnitsarealet $Q = c \cdot A$. Ved at indsætte dette i kontinuitetsligningen fås

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

Denne differentialligning har løsningen

$$Q\ (x,\ t) = Q\ (o,\ t - \frac{x}{c}) = Q_{ind}\ (t - \frac{x}{c})$$

En hydrograf med et givet tidsforløb udbredes altså med konstant hastighed uden at blive dæmpet.

Den dæmpning, der er af variationerne i tilløbsmængden skyldes altså, at differensligningerne ikke tilnærmer differentialligningen godt nok. På den anden side sker der jo i virkeligheden en dæmpning som skyldes, at antagelsen om $I_e = I_b$ ikke holder.

I det følgende skal det vises, at man ved at vælge X hensigtsmæssigt kan sætte dæmpningen i differensskemaet i relation til virkningen fra de udeladte led i impulsligningen.

4.2.2.2. Valg af længdeskridt, X

Det anvendte differensskema forudsætter, at det volumen, der er opmagasineret i sektion j, kan beregnes ved

$$V_o\ |j| = A_o\ |j| \cdot X \qquad (a)$$

Samtidig forudsættes en entydig sammenhæng mellem

$A_o\ |j|$ og $Q_o\ |j|$

$$Q_o\ |j| = F\ (A_o\ |j|,\ I_b) \qquad (b)$$

hvor $Q = F\ (A,\ I_e)$ fås af (3), (4) og (5)

Disse ligninger er korrekte ved stationær, ensformig strømning.

Der tænkes nu en situation, hvor vandspejlet har en lidt større hældning end I_b

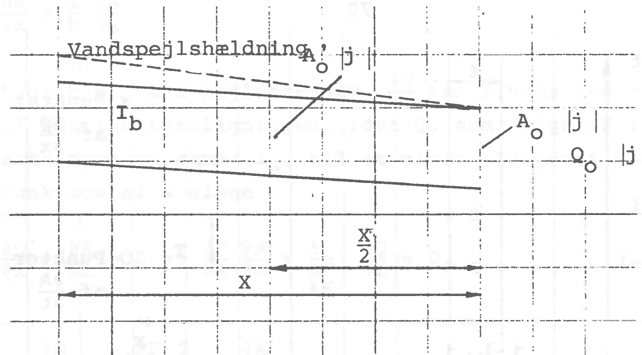

FIG. 4.5

Energiliniens gradient I_e, vil da være større end I_b. Den virkelige vandføring vil derfor være større end den, som kan beregnes ud fra $A_o\ |j|$. Volumen i sektionen vil også være større end det, der kan beregnes ud fra $A_o\ |j|$. Man kan derfor tænke sig, at $Q_o\ |j|$ bedre beskrives ved en fast sammenhæng med tværsnitsarealet i et punkt på ledningen, som ligger lidt opstrøms for j. Volumen vil være bedre beskrevet ved tværsnitsarealet midt i sektionen, $A'_o|j|$.

Det vil derfor være hensigtsmæssigt at vælge X sådan, at $Q_o\ |j|$ kan beskrives ved en fast sammenhæng med $A'_o\ |j|$, tværsnitsarealet midt i sektionen.

Der vil da være en fast sammenhæng mellem vandvolumen i sektionen, $A'_o\ |j|$. X, og vandføringen ud af sektionen, $Q_o\ |j|$.

Man kan da stadig anvende de samme differensligninger. Men man må gøre sig klart, at det nærmere svarer til følgende skema

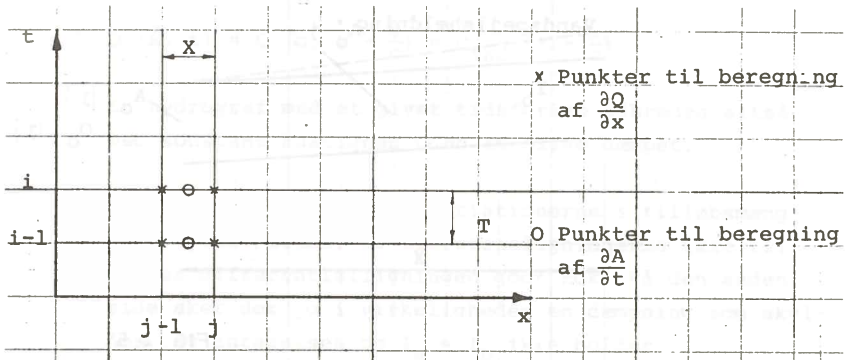

FIG. 4.6

Det fænomen som ovenfor er beskrevet er ofte observeret i praksis, idet den største vandføring i en bølge optræder før den største dybde.

X vælges nu sådan, at

$$Q_o|j| = F\,(A'_o|j|,\ I_b)$$

Med tilnærmelse vil der gælde

$$Q_o|j| = F\,(A'_o|j|,\ I_b) + \frac{\partial F}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial x}\frac{X}{2} + \frac{\partial F}{\partial I_e} \cdot (I_e - I_b)$$

Det ønskes altså, at

$$\frac{\partial F}{\partial A}\ \frac{\partial A}{\partial x}\ \frac{X}{2} + \frac{\partial F}{\partial I_e} \cdot (I_e - I_b) = 0 \qquad \text{(c)}$$

Ved hjælp af impulsligningen (2) fås

$$I_e - I_b = -\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{gA}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right)$$

Uden forudsætning af, at I_e er den samme i hele sektionen, kan de enkelte led udtrykkes ved hjælp af $\frac{\partial A}{\partial x}$

$$\frac{1}{gA}\ \frac{\partial}{\partial x}\ \left(\frac{Q^2}{A}\right) = \frac{1}{gA}\ \left(\frac{1}{A}\ 2Q\ \frac{\partial F}{\partial A}\ \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2}\ \frac{\partial A}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{b}\,\frac{\partial A}{\partial x}$$

hvor b er vandspejlsbredden. $\frac{\partial Q}{\partial t}$ kan findes ved hjælp af kontinuitetsligningen, idet Q, som følge af forudsætningen om samme I_e, til et givet tidspunkt er en funktion af A alene

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial A}\,\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial A}}\ \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = -\left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)^2 \cdot \frac{\partial A}{\partial x}$$

Man får altså

$$I_e - I_b = +\frac{1}{gA}\left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)^2 \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{b}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{2Q}{gA^2}\frac{\partial F}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial x}$$

Man kan altså skrive

$$I_e - I_b = -\,C\,\frac{\partial A}{\partial x}$$

hvor

$$C = \frac{1}{b} - \frac{1}{gA}\left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)^2 + \frac{2Q}{gA^2}\frac{\partial F}{\partial A} - \frac{Q^2}{gA^3} \qquad (7)$$

Idet man i (7) indsætter $\frac{\partial F}{\partial A} = \beta\,\frac{Q}{A} = \beta V$, kan man sætte C i relation til Froude-tallet $F_r = \frac{V}{\sqrt{g\,\frac{A}{b}}}$

$$C = \frac{1}{b}\,(1 - F_r^{\,2}\,(1 - \beta)^2)$$

Funktionen F (A, I_e) kan skrives som F $(A, I_b) \cdot \sqrt{\frac{I_e}{I_b}}$, da Q_f i (3) er tilnærmelsesvis proportional med $\sqrt{I_e}$ (leddet $0{,}74 \cdot 10^{-6} / (d \cdot \sqrt{d\ I_e})$ er uden betydning for ru rør). Man får derfor

$$\frac{\partial F}{\partial I_e} = \frac{1}{2}\ F\ (A, I_b) \cdot \frac{1}{\sqrt{I_e \cdot I_b}} = \frac{Q}{2I_e}$$

(c) side 70 giver altså nu

$$\frac{\partial F}{\partial A}\ \frac{\partial A}{\partial x}\ \frac{X}{2} + \frac{Q}{2I_e}\ (- C\ \frac{\partial A}{\partial x}) = 0$$

$$X = \frac{C \cdot Q}{I_e\ \frac{\partial F}{\partial A}}$$

En forudsætning for udledningen er $I_e - I_b << I_b$. Man kan derfor erstatte I_e med I_b og bestemme $\frac{\partial F}{\partial A}$ under forudsætning af $I_e = I_b$. Altså

$$X = \frac{C \cdot Q}{I_b\ \frac{\partial F}{\partial A}} = \frac{A\ (1 - F_r^{\,2}\ (1 - \beta)^2)}{b \cdot \beta I_b} \qquad (8)$$

4.2.2.3. Differensskemaets anvendelighed

For at et differensskema kan anvendes til at løse en differentialligning, må differensligningen tilnærme differentialligningen tilstrækkelig godt, differensskemaet skal være kompatibelt (konsistent).

Desuden skal skemaet være stabilt, hvilket vil sige at fejl, som introduceres ved afrunding, ikke har tendens til at ophobes. Det er almindeligt antaget, men ikke bevist, at et skema som er kompatibelt og stabilt også er konvergent, hvilket vil sige at løsningen af differensligningen tilnærmer løsningen af differentialligningen, samt at forskellen mellem de to løsninger går mod nul, når tids- og længdeskridt (her T og X) går mod nul.

Kompatibilitet undersøges ved at finde forskellen mellem differensligningen og differentialligningen. For at finde denne udtrykkes de enkelte led ved en Taylorrække med udgangspunkt i $((j - \frac{1}{2})\ X,\ (i - \frac{1}{2})\ T)$

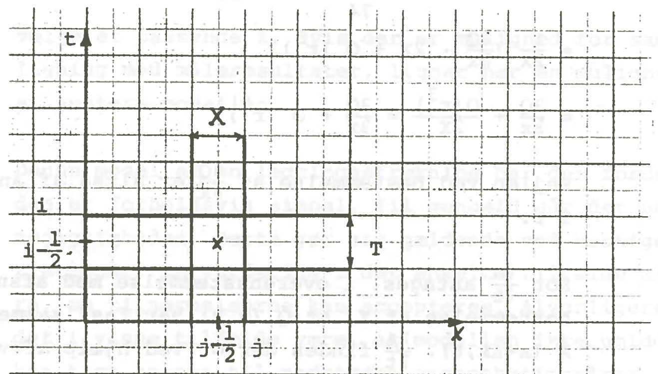

FIG. 4.7

(Det bemærkes, at F (j,i) og F (jX,iT) og tilsvarende udtryk bruges i flæng i det følgende for nemheds skyld).

For Q1 (j-1) = Q (j-1, i-1) findes

$$Q\ (j-1,\ i-1) = Q\ (j-\tfrac{1}{2},\ i-\tfrac{1}{2}) + \frac{\partial Q}{\partial x}\ (-\tfrac{X}{2}) + \frac{\partial Q}{\partial t}\ (-\tfrac{T}{2})$$

$$+ \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\ (-\ \tfrac{X}{2})^2 + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\ (-\tfrac{X}{2})\ (-\tfrac{T}{2}) + \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\ (-\tfrac{T}{2})^2$$

$$+ O\ (r^3)$$

hvor differentialkvotienterne findes i $(j-\frac{1}{2},\ i-\frac{1}{2})$ restleddet er lille af 3 orden i

$$r = \sqrt{(\tfrac{X}{2})^2 + (\tfrac{T}{2})^2}$$

For punkterne (j - 1, i), (j, i-1) og (j, i) kan findes helt tilsvarende udtryk. For differenskvotienten fås, idet leddene af anden orden går ud mod hinanden.

$$\frac{1}{2X}\ (Q\ (j,i) + Q\ (j,\ i-1) - Q\ (j-1,\ i) - Q\ (j-1,\ i-1))$$

$$= \frac{1}{2X} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cdot 2X + O\,(r^3)\right)$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{O(r^3)}{2X} = \frac{\partial Q}{\partial x} + O\,(r^2)$$

Fejlen ved bestemmelse af $\frac{\partial Q}{\partial x}$ er altså af anden orden i r.

For $\frac{\partial A}{\partial t}$ antages, i overensstemmelse med afsnittet om bestemmelse af X, at Q (x,t) har fast sammenhæng med A (x-Δx,t). $\frac{\partial A}{\partial t}$ findes derfor ved hjælp af værdierne A (jX-Δx, iT) og A (jX-Δx, iT-T). Ved Taylorudvikling fås

$$A\,(jX-\Delta x,\ iT-T) = A\,(j-\tfrac{1}{2},\ i-\tfrac{1}{2}) + \frac{\partial A}{\partial x}\,(\tfrac{X}{2} - \Delta x)$$

$$+ \frac{\partial A}{\partial t} \cdot (-\tfrac{T}{2}) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\,(\tfrac{X}{2} - \Delta x)^2 + \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial t}\,(\tfrac{X}{2} - \Delta x)\,(-\tfrac{T}{2})$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\,(-\tfrac{T}{2})^2 + O\,(r^3)$$

og tilsvarende for A (jX-Δx, iT). For differenskvotienten fås da

$$\frac{1}{T}\,(A\,(jX-\Delta x,\ iT) - A\,(jX-\Delta x,\ iT-T))$$

$$= \frac{1}{T}\,\left(\frac{\partial A}{\partial t} \cdot T + \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial t}\,(\tfrac{X}{2} - \Delta x)\,T + O\,(r^3)\right)$$

$$= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial t} \cdot (\tfrac{X}{2} - \Delta x) + O\,(r^2)$$

Det ses altså, at fejlen på $\frac{\partial A}{\partial t}$ er af første orden, når $\frac{X}{2} - \Delta x \neq 0$. Hvis X derimod vælges, så $\frac{X}{2} = \Delta x$ vil fejlen være af anden orden.

Antagelsen om, at Q (x,t) har fast sammenhæng med A (x-Δx,t) gælder kun for små og langsomme udsving i vandføringen, ligesom den kun gælder for en bestemt middelvandføring. Imidlertid er det klart, at man kan forbedre resultaterne også ved store udsving ved at

vælge et passende X. Hvis der er mulighed for sammenligning med måleresultater, ligger her en mulighed for at justere modellen.

Denne model af en ledningsstrækning har den fordel, at den er forholdsvis simpel. Til gengæld går det ud over nøjagtigheden. Dette gør sig gældende ved hurtigere variationer. En vurdering i det enkelte tilfælde må afgøre, om tilnærmelserne kan accepteres. Alvorligere kan det i visse tilfælde være, at modellen ikke umiddelbart kan tage hensyn til nedstrøms grænsebetingelser. Der laves dog en korrektion som delvis tager højde for dette.

4.2.2.4. Sammenligning med måling

For at undersøge gyldigheden af denne model er der foretaget målinger på en ledning, som er sammenlignet med beregninger med input til modellen lig med det registrerede input.

Ledningens data er:

$D \;=\; 0{,}60$ m

$L \;=\; 561$ m

$I_b \;=\; 2{,}14$ o/oo (middelværdi)

Indløbet til ledningen kommer fra en trykledning. Q_{ind} er nu bestemt ved at registrere start og stop i pumpestationen. På pumpestationen var der alternerende drift mellem to pumper. Pumpeydelsen for de to pumper er beregnet ved at antage samme vandføring til pumpesumpen ved fyldning og tømning af pumpesumpen. Når pumpesumpvolumen V er kendt, kan pumpeydelsen beregnes som følger:

$$\left.\begin{aligned} Q_1\,T_1 &= V \\ (Q_2 - Q_1)\,T_2 &= V \end{aligned}\right\} \qquad Q_2 = \frac{V}{T_2} + Q_1 = \frac{V}{T_2} + \frac{V}{T_1}$$

Q_1 er flow til pumpesumpen
T_1 er fyldningstiden
T_2 er tømningstiden
Q_2 er pumpeydelsen

På denne måde er ydelsen for de to pumper beregnet. Da V er ret unøjagtigt bestemt, er pumpeydelserne justeret, således at middelværdien af det målte flow ud fra ledningen er lig med middelværdien af flowet fra pumpestationen.

Vandføringen ud fra ledningen er målt med et måleoverløb.

Endvidere er vanddybden målt i en brønd 139 m nede på ledningen.

På side 78 og 79 er måleresultaterne vist sammenlignet med de beregnede værdier.

En passende værdi af X findes ud fra formel (7) og (8), idet middelværdien af tilløbsvandføringen bruges som udgangspunkt

$Q = 0{,}016\ m^3/sek.$

Den hertil svarende naturlige dybde er ($Q_f = 0{,}282\ m^3/sek.$)

$h = 0{,}11\ m$

og svarende hertil

$b = 0{,}464\ m$
$A = 0{,}0355\ m^2$

$\frac{\partial F}{\partial A} = \frac{Q_f}{b} \frac{d}{dh} \left(\frac{Q}{Q_f}\right)$ findes ved at differentiere (4), side 65.

$\frac{\partial F}{\partial A} = 0{,}634$ m/sek.

C kan nu findes ved indsættelse i (7), side 71

$C = 2{,}05\ m^{-1}.$

Herefter kan X findes af (8), side 72

$$X = \frac{Q \cdot C}{I_b \cdot \frac{\partial F}{\partial A}} = \frac{0{,}016 \cdot 2{,}05}{0{,}00214 \cdot 0{,}634} = 24\ m$$

I programmet er tidsintervallet sat til

$T = 20$ sek.

Længdeintervallerne er indpasset, således at hver brøndstrækning er delt i et helt antal stykker. Længderne er valgt, så

$X < 20\ m$

Der ses at være temmelig stor forskel på beregnede og målte størrelser. Dette må skyldes, at forudsætningerne ikke er opfyldt i tilstrækkelig grad. I den nederste del af ledningen kan der opstå fejl, fordi måleoverløbet giver anledning til opstuvning i ledningen. Dette kan modellen ikke tage højde for. I den øverste ende af ledningen vil hurtige variationer i Q_{ind} bryde forudsætningerne.

I /6/ (side 193-200) er der angivet kriterier for, hvornår man erfaringsmæssigt kan anvende en løsningsmetode baseret på kontinuitetsligningen alene.

Disse kriterier tager udgangsfunktion i Froudetallet:

$$F_o = \frac{V_o}{\sqrt{g\ A_o/b_o}} .$$

og det kinematiske flow-tal:

$$k = \frac{I_B\ L_o}{F_o^{\ 2} A_o/b_o} = \frac{I_B\ g\ L_o}{V_o^{\ 2}}$$

V_o er middelhastigheden

A_o/b_o er den tilsvarende middeldybde

L_o er længden af ledningen

Der skelnes mellem dynamiske og kinematiske bølger. Dynamiske bølger kan kun beskrives ved hjælp af hele ligningssystemet for ikke stationære strømninger, mens en kinematisk bølge kan beskrives af kontinuitetsligningen og den stationære sammenhæng mellem h og Q.

Det angives, at dynamiske bølger hurtigt vil dæmpes, hvis F_o er mindre end 1,5-2.

En kinematisk model vil være nøjagtig, hvis k er stor. Der henvises til forskellige forfattere. En af disse angiver, at en kinematisk model har en nøjagtighed på 10%, hvis k = 10, men fejlen aftager hurtigt ved højere k. En anden siger samstemmende, at en kinematisk model er god for k > 20.

For at se hvorvidt disse betingelser er opfyldt, regnes disse størrelser ud i et par eksempler.

I det tidligere viste eksempel er D = 0,60 m, L_o = 561 m, I = 2,14%, Q_F = 0,300 m^3/sek. Ved indløbet varierer vandføringen fra 0 til 48 l/sek. Q_o sættes nu til Q_o = 16 l/sek.

Den tilsvarende middeldybde er A_o/b_o = 0,076 m

Hastigheden er V_o = 0,45 m/sek.

Man kan nu beregne:

F_o = 0,52 og k = 58

Sættes L_o = 139 m fås k = 14,4

Hvis L_o = 561 m og ledningen er halvt fuld fås:

F_o = 0,58 og k = 14,9

De udregninger, der er foretaget viser, at det er rimeligt at regne med den stationære sammenhæng mellem vanddybde og flow.

Hvorfor fås da så store afvigelser mellem målt og beregnet vandføring?

Det antages, at en del af denne forskel skyldes, at der sker tilbagestuvning i røret i forbindelse med målingerne. Dette medfører, at den stationære sammenhæng mellem h og Q ikke er ensbetydende med $I_e = I_b$. For at undersøge virkningen af dette beregnes stuvningskurven, som den ser ud ved en konstant vandføring svarende til middelværdien af den målte vandføring.

Denne kurve beregnes ved hjælp af impulsligningen, som i det stationære tilfælde får følgende udseende:

$$\frac{dh}{dx}\left(1 - \frac{Q^2}{g\ A^3}\ b\right) = I_b - I_e$$

Hvor b er bredden af vandspejlet.

For at forsimple udregningerne bruges Manningformlen til at beregne sammenhængen mellem I_e og Q_f (se /5/ side 97).

$$V = M\ R^{2/3}\ I_e^{\ 1/2}, \text{ hvor } M = \frac{25,4}{\sqrt[6]{k}}\ m^{1/3}/\text{sek.}$$

Sættes k = 0,001 m fås:

$$V = 80\ R^{2/3}\ I_e^{1/2}\ \text{m/sek.}$$

hvor R indsættes i m.

Løses denne ligning med hensyn til I_e, vil man for et fuldtløbende cirkulært rør med D = 0,6 m få:

$$I_e = 0{,}0236\ Q_f^2$$

hvor Q_f indsættes i m^3/sek.

Delfyldningskurven (4) anvendes nu sammen med denne ligning til at finde I_e svarende til hvert h og den givne vandføring Q. Q_f skal her blot opfattes som en regnestørrelse.

Man fastlægger Δh og beregner Δx ved formlen:

$$\Delta x = \frac{(1 - \frac{Q^2}{g\,A^3}\,b)}{I_b - I_e}\,\Delta h$$

A, b og I_e i udtrykket beregnes ved hjælp af middelværdien af h i intervallet, altså h + ½ Δh.

Ved hjælp af denne metode er kurven figur 4.8. beregnet. Følgende værdier er anvendt:

Q = 0,016 m^3/sek.

$h_{ud,\ ledning}$ = 0,218 m

I_b = 0,00267 (værdien af I_b ved udløbet)

Af formlerne (3) og (4) side 65 kan man finde h_o (værdien af h uden opstuvning), ved at sætte $I_e = I_b$.

h_o = 0,1002 m

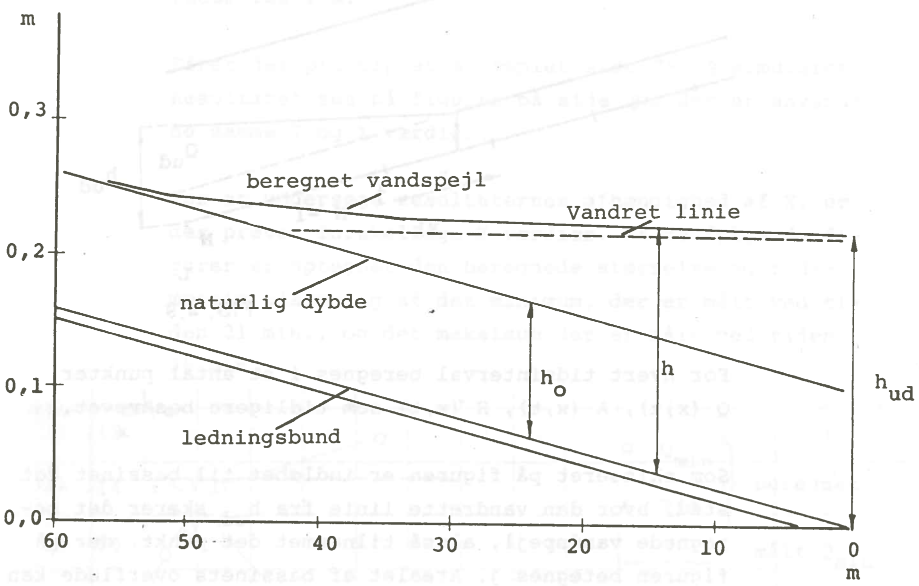

FIG. 4.8

På figuren er denne stuvningskurve tegnet op. Det ses, at den i hovedsagen følger en ret linie, indtil kæring med linien $h = h_o$.

Det antages nu, at strømningen som en bedre tilnærmelse kan beregnes ved at betragte nederste del af røret som et bassin, og i øvrigt beregne strømmen som tidligere beskrevet. Det må formodes, at denne model tæt på stærkt varierende tilløb (pumpestation) vil give resultater, som afviger fra virkeligheden. I en vis afstand fra et sådant tilløb skulle den imidlertid give rimelige resultater.

Beregningen går nu på følgende måde:

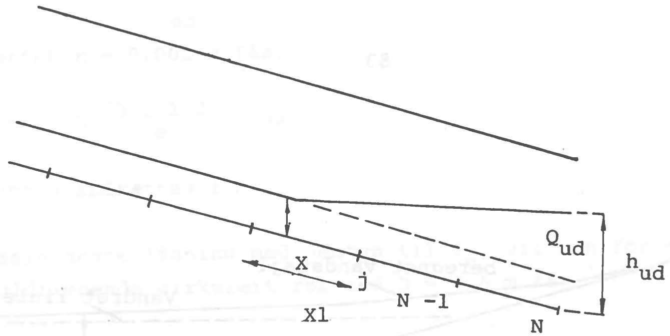

FIG. 4.9

For hvert tidsinterval beregnes i et antal punkter Q (x,t), A (x,t), H (x,t) som tidligere beskrevet.

Som skitseret på figuren er indløbet til bassinet det sted, hvor den vandrette linie fra h_{ud} skærer det beregnede vandspejl, altså tilnærmet det punkt, der på figuren betegnes j. Arealet af bassinets overflade kan beregnes som:

$$\text{Areal} = \int_{xl}^{L} b\,dx = \frac{1}{I_b}\,(A\,(L,t) - A\,(x_1,t)) \approx$$

$$\frac{1}{I_b}\,(A\,(h_{ud}) - A\,(j\,X,t))$$

Kontinuitetsligningen for bassinet siger på differensform:

$$0{,}5\,T\,(Q_o\,(j\,X) + Q_1\,(j\,X) - Q_{ud}\,(t) - Q_{ud}\,(t - T))$$

$$= \text{Areal}\,(h_{ud}\,(t) - h_{ud}\,(t - T))$$

Der mangler nu en ligning for at bestemme Q_{ud} (t), den stationære sammenhæng mellem h_{ud} og Q_{ud}. For måleoverløbet er denne sammenhæng (Thomson overløb):

$$Q_{ud} = 1{,}34 \cdot (h_{ud} - h_{ud\,o})^{2{,}48}\ m^3/sek.$$

hvor $h_{ud\,o}$ er højden af overløbets bund. h_{ud} og $h_{ud\,o}$ indsættes i m.

Efter det princip er eksemplet side 75-79 simuleret. Resultatet ses på figuren på side 86, der er anvendt de samme T og X værdier.

For at undersøge resultaternes afhængighed af X, er der prøvet forskellige X værdier. På de følgende figurer er optegnet den beregnede størrelse og tidsmæssig placering af det minimum, der er målt ved tiden 21 min., og det maksimum der er målt ved tiden 26 min.

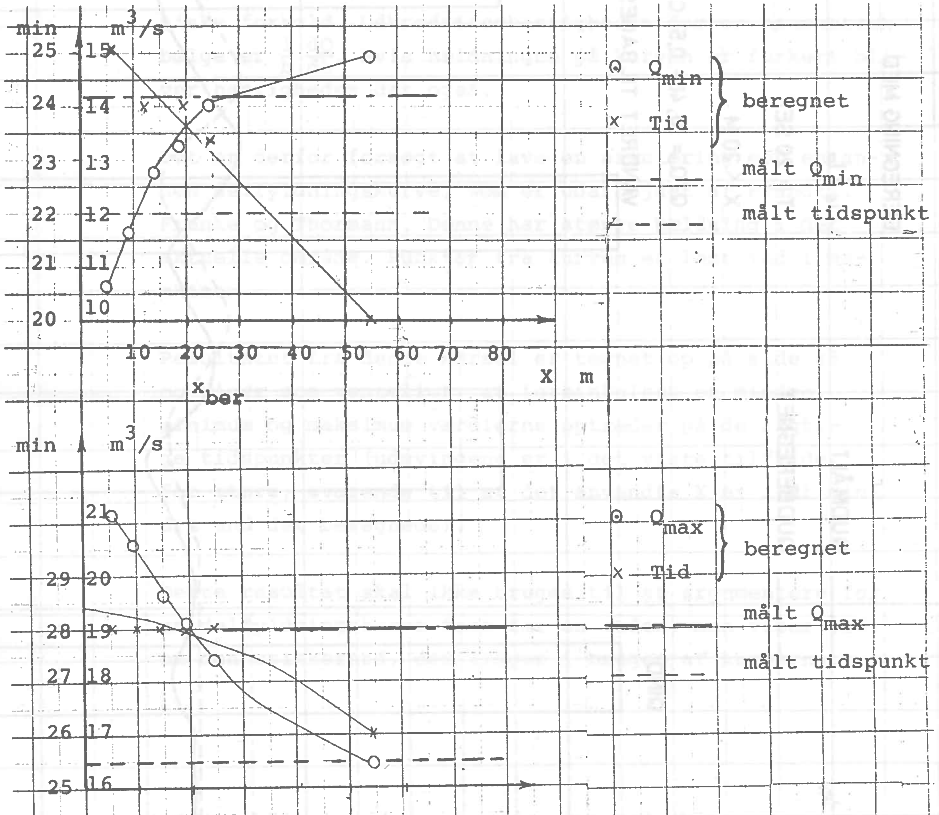

FIG. 4.10