Små tips og tricks

Denne note er tænkt som supplement til formelsamlingen på Aula. Indholdet vil være en repetition af eksamensrelevant stof fra tidligere kurser - især Calculus[1]. Det følgende kan frit benyttes til eksamen, men giver langt fra en fuldstændig oversigt over de tricks, man kan anvende til at løse et eksamenssæt. Jeg tager også forbehold for trykfejl.

Cosinus og sinus

At kunne skrive om på udtryk indeholdende sinus og cosinus kan ofte gøre udregningerne væsenligt nemmere. Desuden kan det i nogle tilfælde være en fordel at skrive sinus og cosinus på kompleks form.

- *Idiotformlen:*

  $$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

  Gælder for alle reelle tal x.

- *Kompleks sinus og cosinus:*

  $$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{og} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

  for alle reelle tal x.

- *Identiteter:*
  Additionsformlerne er som følger

  $$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \\ \sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x) \end{aligned}$$

  for alle reelle tal x og y. Heraf følger de nyttige specialtilfælde:

  $$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \sin(2x) &= 2\cos(x)\sin(x) \end{aligned}$$

[1] Calculusbogen (den store af Stewart) har desuden også en omfattende integraltabel og formelsamling på de første og sidste sider i bogen.

samt

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \text{og} \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Hvis vi i de sidste to sætter $\frac{x}{2}$ ind i stedet for x fås

$$\cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos(x)}{2} \quad \text{og} \quad \sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos(x)}{2}.$$

- Den her sidder vist på rygraden efterhånden:

  $$\cos(k\pi) = (-1)^k \quad \text{og} \quad \sin(k\pi) = 0$$

  for alle *hele* tal k.

Eksponentialfunktionen

Vi har i løbet af kurset brugt eksponentialfunktionen og Eulers formel en hel del. Her opsummeres et par af de væsentlige egenskaber.

- *Eulers formel:*
  I dette kursus vil x typisk være et reelt tal. Helt generelt gælder

  $$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

  og

  $$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x).$$

  Faktisk kan man for et komplekst tal $x + iy$ skrive

  $$e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

- *Grundlæggende regneregler:*

  $$e^{x+y} = e^x e^y, \quad (e^x)^y = e^{xy}, \quad e^0 = 1, \quad e^{ik\pi} = (-1)^k, \quad e^{i2k\pi} = 1,$$

  hvor k er et helt tal og x og y vilkårlige reelle (eller komplekse) tal.

- *Grænseværdier:*
  For et reelt tal x har vi

  $$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \text{eller} \quad \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0.$$

  Bemærk fortegnet på x! Vi kan generalisere til komplekse tal

  $$\lim_{x\to-\infty} e^{x+iy} = 0, \quad \text{eller} \quad \lim_{x\to\infty} e^{-x+iy} = 0.$$

Normen

Når man anvender Parsevals og Plancherels sætninger, kommer man ikke uden om normen af et reelt (eller komplekst) tal. Her følger nogle forskellige egenskaber, der er nyttige at huske på.

- *Grundlæggende egenskaber:*
  Vigtige regneregler mht. normen er

  $$|ab| = |a||b| \qquad |\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|} \qquad |a^2| = |a|^2 \qquad |-a| = |a|.$$

- *For komplekse og reelle tal:*
  For et komplekst tal på formen $x + iy$ med x og y reelle gælder

  $$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

  med specialtilfælde

  $$|i| = 1 \qquad \text{og} \qquad |e^{ix}| = 1.$$

  For et reelt tal x har vi

  $$x^2 = |x^2| = |x|^2,$$

  og $|x| = -x$ når x er negativ, samt $|x| = x$ når x er positiv.

Et eksempel

$$\begin{aligned}
|\frac{-k}{2i}(e^{i\lambda x} + 1)|^2 &= |\frac{-k}{2i}|^2 |e^{i\lambda x} + 1|^2 = \frac{|-k|^2}{|2i|^2} |\cos(\lambda x) - i\sin(\lambda x) + 1|^2 \\
&= \frac{k^2}{4} |cos(\lambda x) + 1 - i\sin(\lambda x)|^2 \\
&= \frac{k^2}{4} ((\cos(\lambda x) + 1)^2 + \sin^2(\lambda x)) \\
&= \frac{k^2}{4} (\cos^2(\lambda x) + 1 + 2\cos(\lambda x) + \sin^2(\lambda x)) \\
&= \frac{k^2}{4} (2 + 2\cos(\lambda x)) = k^2 \frac{1 + \cos(\lambda x)}{2} = k^2 \cos^2(\frac{\lambda x}{2})
\end{aligned}$$