



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY  
DENMARK

## Kompendium i Vandløbshydraulik

Larsen, Torben

*Publication date:*  
2017

*Document Version*  
Early version, also known as pre-print

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*  
Larsen, T. (2017). Kompendium i Vandløbshydraulik. Aalborg Universitet, Institut for Byggeri og Anlæg.

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- ? Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- ? You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- ? You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Kompendium i

# Vandløbshydraulik

Torben Larsen

Institut for Byggeri og Anlæg  
Aalborg Universitet

Foreløbig udgave  
01-10-2017

## Forord

Dette kompendium er udarbejdet til brug ved projekter og kurser om vandløb og ved Aalborg Universitet. Kompendiet er tænkt som en første introduktion til hydraulik for kanaler og vandløb. For studerende og andre med forudgående kendskab til emnet kan det eventuelt anvendes som en kort repetition og oversigt af de grundliggende elementer i

Brorsen, M. og Larsen, T. (2009). *Lærebog i Hydraulik*. 2. udgave. Aalborg Universitetsforlag.

Det er tilstræbt at give en oversigt over de vigtigste principper i den grundlæggende hydraulik i forhold til hvad der benyttes i vandløb. Derimod er ikke medtaget mere detaljerede fysiske og /matematiske udledninger, som kan ses i lærebogen.

Indtil videre er denne udgave foreløbig og under bearbejdning. Alle kommentarer modtages derfor med taknemmelighed.

Torben Larsen

Institut for Byggeri og Anlæg, Aalborg Universitet

tl@civil.aau.dk

01-10-2017

# Indholdsfortegnelse

<b>1. Det fysiske grundlag</b>	<b>5</b>
<i>Newtons love og SI-enhedssystemet</i>	5
<i>Centrifugalkraft og Corioliskraft</i>	6
<i>Fysisk analyse af strømningsfænomener</i>	7
Et simpelt eksempel	7
<b>2. Vands fysiske egenskaber</b>	<b>8</b>
<i>Massetæthed</i>	8
<i>Specifik tyngde</i>	8
<i>Viskositet</i>	8
<i>Kinematisk viskositet</i>	10
<i>Viskositeten af ferskvand</i>	10
<i>Sammentrykkelighed</i>	10
<i>Overfladespænding</i>	10
<b>3. Trykfordeling og forskydningsspænding</b>	<b>11</b>
<i>Hydrostatisk trykfordeling</i>	11
<i>Bundforskydningsspændingen</i>	12
<b>4. Laminær og turbulent strømning</b>	<b>13</b>
<i>Potentialstrømning</i>	14
<b>5. Kontinuitetsligningen og energiligningen</b>	<b>15</b>
<i>Kontinuitetsligningen</i>	15
<i>Energiligningen for en partikel</i>	16
<i>Hydraulikkens energiligning</i>	17
<b>6. Strømmende og strygende bevægelse</b>	<b>18</b>
<b>7. Energitab i vandløb</b>	<b>19</b>
<i>Hydraulisk radius</i>	19
<i>Colbrook og Whites generelle formel</i>	19
<i>Manningformlen</i>	20
<i>Måling af Manningtallet i vandløb</i>	21
<i>Naturlig dybde</i>	21
<i>Naturlig dybde i forskellige tværsnit</i>	22
<i>Naturlig dybde i trapzformet kanal</i>	22
<i>Naturlig dybde i virkelige naturlige vandløb</i>	23

Naturlig dybde i vandløb med dobbeltprofil	23
<i>Modstandsradius</i>	24
<i>Enkelttab – Carnots formel</i>	26
<b>8. Overløb med kritisk strømning</b>	<b>28</b>
<i>Overløbsformler</i>	29
<b>9. Hydraulisk spring</b>	<b>31</b>
<b>10. Iterativ beregning af stuvnings- og sænkningsskurver</b>	<b>32</b>
<i>Bestemmende tværsnit</i>	32
<i>Beregning af stuvnings- og sænkningsskurver</i>	33
<i>Iterativ beregning</i>	34
<i>Forsimplet beregning af stuvnings- og sænkningsskurver</i>	34
<b>11. Vandløbsbundens stabilitet mod erosion</b>	<b>35</b>
<i>Hjulströms diagram</i>	35
<i>Shields formel og diagram</i>	36
<b>12. Styrt og stryg</b>	<b>38</b>
<i>Styrt</i>	38
<i>Stryg</i>	38
<b>13. Måling af vandføring</b>	<b>40</b>
<i>Manuel måling af vandføring</i>	40
<i>Automatisk måling af vandføring med ultralyd/doppler udstyr</i>	41
<i>Måling af vandstand</i>	41
<i>Q/h-kurver og bestemmelse af daglig vandføring</i>	41
Q/h-kurver efter brændpunktmetoden	42
Q/h-kurver efter proportionalmetoden	43
Beregning af daglig vandføring - kontrolvandføring og kontrollote	44
Ekstrapolation af Q/h-kurver til ekstreme værdier	44
<b>14. Litteratur</b>	<b>46</b>

## 1. Det fysiske grundlag

Teorien for væskers bevægelse bygger på den grundlæggende mekaniske fysik. Et godt kendskab til de klassiske fysiske love, herunder især Newtons love og tyngdeloven, samt hvad man kan aflede heraf, er en nyttig forudsætning for forståelsen af den hydrauliske teori.

### Newtons love og SI-enhedssystemet

**Newtons love** er

1. Inertiens lov.
2. Loven om sammenhængen mellem kraft og acceleration.
3. Loven om aktion og reaktion (ligevægtsloven).

Disse love er i realiteten indeholdt af Newtons 2. lov, som for en partikel lyder

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

hvor  $m$  er partiklens masse,  $\frac{dv}{dt}$  er accelerationen,  $v$  er hastigheden,  $t$  er tiden og  $F$  er den resulterende ydre kraft. (Helt korrekt er Newtons 2. lov en vektorligning, hvor acceleration og den ydre kraft er ensrettede vektorer)

Denne ligning er grundlaget for SI enhedssystemet. (System International).

**Fysiske enheder i SI-systemet**

Type	Betegnelse	Enhed
Længde	X	m
Masse	M	kg
Tid	T	s
Hastighed	$v = dx/dt$	m/s
Acceleration	$dv/dt = d^2x/dt^2$	$m/s^2$
Kraft	$F = m dv/dt$	Newton
Tryk	$p = F/x^2$	Pascal
Energi	$E = F x$	Joule
Effekt	$W = E/t$	Watt

**Tyngdeloven** baserer sig på Newtons 2. lov og Newtons lov om massetiltrækning. Sidstnævnte bestemmer tiltrækningen  $F$  mellem to punktformede partikler med masserne  $m_1$  og  $m_2$  som befinder sig afstanden  $a$  fra hinanden. Loven om massetiltrækning er

$$F = k \frac{m_1 m_2}{a^2}$$

hvor  $k$  er en eksperimentelt bestemt konstant (gravitationskonstanten)  $k = 6,67 \cdot 10^{-11} [m^3/s^2/kg]$

Som et special tilfælde af loven om massetiltrækning fås tyngdeloven:

$$G = m g$$

hvor  $G$  er kraften rettet lodret nedad mod jordens tyngdepunkt,  $m$  er massen af legemet og  $g$  er tyngdens acceleration ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ).

**Energisætningen** (ofte i hydrauliken betegnet *Bernoullis ligning*) for en partikel kan udledes af Newtons 2. lov: Vi betragter en partikel med massen  $m$  som er påvirket af kraften  $F$ . Partiklen bevæges nu et lille stykke  $dx$  i  $F$ 's retning.  $F$  udfører herved et arbejde  $dE$ :

$$dE = F dx$$

Indføres Newtons 2. lov og da  $dx = v dt$  fås

$$dE = m \frac{dv}{dt} v dt$$

som også kan skrives

$$dE = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

Det arbejde, som kraften  $F$  udfører, svarer til at partiklen udfører et tilsvarende arbejde  $dE_p = -dE$ .

Vi får da

$$dE_p + d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

integreres denne fås

$$E_p + \frac{1}{2} m v^2 = \text{konst}$$

Dette er den velkendte energisætning, som siger, at under partiklens bevægelse er summen af partiklens potentielle og kinetiske energi er konstant. I hydraulik er kraften  $F$  forårsaget af tyngden og er dermed konstant i tid og sted. Energisætningen kan da skrives som

$$m g h + \frac{1}{2} m v^2 = \text{konst}$$

eller

$$h + \frac{v^2}{g} = \text{konst}$$

hvor  $h$  er den lodrette højde (koten) over et arbitrært, men fastholdt, vandret udgangsniveau.

### Centrifugalkraft og Corioliskraft

**Centrifugalkraften** opstår hvis partiklen bevæger sig langs en krum bane. En partikel der følger en cirkelbevægelse med konstant hastighed  $v$  langs cirklen påvirkes af en centrifugalkraft  $F_{cen}$  rettet bort fra cirkelens centrum på

$$F_{cen} = m \frac{v^2}{r}$$

hvor  $m$  er partiklens masse og  $r$  er cirkelens radius.

For at en partikel skal kunne følge cirkelbevægelsen må den fastholdes af en modsattet kraft for eksempel via en snor mellem partiklen og cirkelens centrum. I strømmende væsker vil krumme strømlinier inducere trykforskelle som ikke forekommer når strømningen foregår næsten retlinet. Krumme strømlinier medvirker ofte til at beskrivelsen af det aktuelle strømningsfænomen kompliceres betydeligt.

**Corioliskraften** er en korrektion til Newtons 2. lov som er nødvendig, fordi det koordinatsystem, som vi normalt benytter og som ligger fast i forhold til jordoverfladen, er under acceleration på grund af Jorden omdrejning. Corioliskraften har stor betydning for luftens strømning i atmosfæren og i nogen grad for vandets strømning i havet. Corioliskraften er normalt ubetydelig for strømninger i vandløb.

### Fysisk analyse af strømningsfænomener

Der eksisterer ingen generelle strømningsbeskrivelser eller strømningsmodeller som dækker alle situationer fuldstændigt, fordi antallet af muligheder næsten er ubegrænsede. Men her præsenteres nogle principper til afgrænsning af hvad der er væsentligt og hvad der uvæsentlig i forhold til løsning af en konkret problemstilling.

Når man står over en konkret strømningsmæssig problemstilling bør man som første skridt forsøge at forsimple den mest muligt ved at se bort fra alle aspekter, som ikke bidrager til det der i hovedsagen karakteriserer fænomenet, som det opleves i tid og sted. Denne forenkling kan gøres ved, at man overslagsmæssigt udfører en opgørelse af fænomenets følgende 3 aspekter:

- Massebalance
- Kraftbalance
- Energibalance

Ved at sammenligne den numeriske størrelse af hvad de forskellige fysiske aspekter bidrager til disse balancer afsløres ofte et klart billede af hvilke aspekter det er nødvendigt at indrage i løsningen af det konkrete problem.

#### *Et simpelt eksempel*

Over et tidsrum på et par dage betragter vi en vandløbsstrækning på nogle hundrede meter i et vandløb og vi ønsker at finde ud af hvad årsagen er til at vandets hastighed er hvad den er.

**Massebalancen** viser, at vandføringen ind og ud af strækningen i perioden er næsten ens. Deraf konkluderes, at der fra grundvandet kun indsiver få promille heraf. Derfor kan det antages at vandføringen er konstant.

**Kraftbalancen** viser at vindens vandrette kraftpåvirkning af vandoverfladen i strømrretningen kun er enkelte procenter af den kraft som tyngden udøver på vandmassen projiceret i strømrretningen. Derfor ses der bort fra vindpåvirkningen

**Energibalancen** viser, at et vandlegeme der strømmer igennem strækningen taber en betydelig potentiel energi undervejs, medens den forskel i kinetisk energi, der er mellem indløb og udløb (grundet mindre variationer af tværsnitsarealet) er lille i forhold til tabet af potentienergi. Strømningen er turbulent og det observeres at der forekommer kinetisk energi fra både middelstrømningen og fra hastighedsfluktuationerne, men en analyse af målingerne viser at den turbulente kinetiske energi er lille i forhold til middelbevægelsens kinetiske energi. Totalt set viser overslaget over energibalancen, at der i dette tilfælde ikke sker ændringer af den kinetiske energi og derfor kan et simpelt hydraulisk princip (betegnet *naturlig dybde* og omtalt senere) benyttes til at beregne vandets hastighed. Mere komplicerede betragtninger vil være overflødige.



## 2. Vands fysiske egenskaber

### Massetæthed

Vandet i vandløb er ferskvand som har en densitet (massetæthed) meget nær  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ . Massetætheden af havvand (og fjordvand) ligger mellem 1000 og 1025  $\text{kg/m}^3$ . Når et vandløb udmunder i havet vil der ofte lokalt være så store forskelle i massetætheden, at lagdelte forhold optræder enten i vandløbet eller i havet i nærområdet ved udløbet (eventuelt begge steder). Betydningen af temperatur og salinitet (saltholdighed) for densiteten af fersk- og havvand ses i Tabel 2.

**Tabel 2 Densitet (massetæthed) af fersk- og saltvand [ $\text{kg/m}^3$ ]**

Temperatur °C	Salinitet promille efter vægt			
	0	5	10	35
0	999,8	1003,91	1008,0	1028,1
4	1000,0	1003,97	1007,9	1027,8
10	999,7	1003,6	1007,5	1027,0
20	998,2	1002,0	1005,8	1024,8

Det er bemærkelsesværdigt at ferskvand (og brakvand, dvs. ”tyndt” havvand) har en maksimal massetæthed ved 4° C. Den højeste salinitet i havet omkring Danmark er 33 -34 promille.

Når meget flade og langsomtløbende vandløb udløber i havet, er der mulighed for at havvandet kan presse sig ind under ferskvandet i vandløbet og skabe en saltvandskile opad i vandløbet. Kriteriet for om dette sker ligger i størrelsen af det *densimetriske Froude tal*  $F_d$ :

$$F_d = \frac{V}{\sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho} g D}}$$

hvor  $V$  er strømhastigheden i vandløbet,  $\Delta\rho$  er densitetsforskellen mellem ferskvandet og havvandet,  $\rho$  er vandets middeldensitet og  $D$  er vanddybden af vandløbet ved udløbet. Hvis  $F_d < \text{ca. } 1$  er der risiko for indtrængning og skabelse af en saltvandskile, som skyder sig ind langs bunden i vandløbet.

Når vandløb udmunder i søer optræder der ofte lagdelte fænomener på grund af temperaturforskelle. Disse er som regel afhængige af årstiden.

### Specifik tyngde

Den *specifikke tyngde*  $\gamma$  bliver ofte betegnet *rumvægten* (tyngdekraften pr. rumfangsenhed) er

$$\gamma = \rho g$$

For ferskvand fås ca.  $\gamma = 9,81 \cdot 10^3 \text{ [N/m}^3\text{]}$

### Viskositet

En væskes viskositet udtrykker, hvor tyktflydende væsken er. F.eks. har vand en lille viskositet i forhold til en tyktflydende olie. Viskositeten har betydning for strømningsmodstanden særligt for laminære strømninger og i mindre grad for turbulente strømninger.

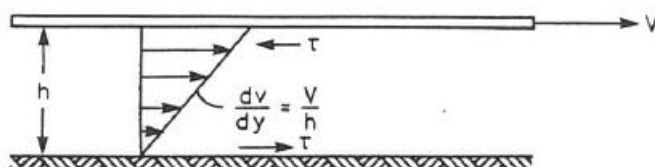
Viskositeten  $\mu$  bestemmes i princippet ud fra Newtons formel for forskydningsspændingen i en stationær ensformig strømning:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

hvor  $\tau$  er forskydningsspændingen,  $\mu$  er den dynamiske viskositet,  $dv/dy$  er hastighedsgradienten vinkelret på strømretningen.

En væske der strømmer langs en fast begrænsning (for eksempel en vandløbsbund eller en rørvæg) har en hastighed der, som grænseværdi når man nærmer sig væggen, er lig med hastigheden af væggen dvs. lig nul.

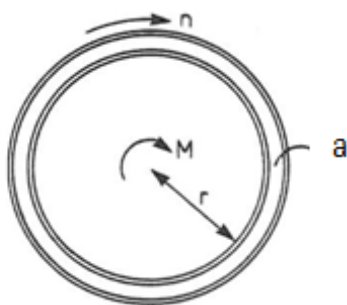
Figur 2-1 Hastighedsfordeling i spalte ved laminær strømning



Figur 2-1 Hastighedsfordeling i spalte ved laminær strømning

Viskositeten kan i princippet måles i en opstilling som ses skematisk på Figur 2-1 . Vi forestiller os væsken placeret mellem to parallelle plader. Den ene plade bevæges med hastigheden  $V$  og der opstår et retlinet hastighedsprofil mellem pladerne. Forskydningsspændingen  $\tau$  må være konstant i væsken og bestemmes ved at måle kraften på den ene plade og dividere med pladens areal.

I praksis måles viskositeten i en opstilling (betegnet et *viskosimeter*) bestående af to koncentriske cylindre, hvor spalten er lille i forhold til diameteren og hvor den yderste kan bringes til at rotere med konstant omløbstal, og hvor den inderste stillestående cylinder er ophængt således, at drejningsmomentet  $M$  som overføres mellem cylindrene kan måles.



Figur 2-2 Tværsnit i viskosimeter, inderste ring er fastholdt, yderste roterer.

Er højden af cylindrene  $h$  (vinkelret på figuren), bliver momentet  $M$  lig med

$$M = \text{forskydningsspænding} \cdot \text{spalteomkreds} \cdot \text{spaltehøjde}$$

$$M = \tau 2\pi r h = \mu \frac{dv}{dy} 2\pi r h = \mu \left(\frac{V}{a}\right) 2\pi r h = \mu \left(\frac{2\pi r n}{a}\right) 2\pi r h$$

hvoraf

$$\mu = M / [h (2\pi r)^2 n/a]$$

hvor  $n$  er antallet af omdrejninger pr.tidsenhed og  $a$  er spaltevidden.

## Kinematisk viskositet

Den dynamiske viskositet  $\mu$  har enheden  $[kg/m\ s]$ . Ofte anvendes i stedet den kinematiske viskositet  $\nu$  som bestemmes af

$$\nu = \mu/\rho$$

hvor  $\rho$  er væskens massetæthed (densitet). Enheden for  $\nu$  er  $[m^2/s]$ .

Det er den kinematiske viskositet som indgår i Reynolds'tal (se senere).

## Viskositeten af ferskvand

**Tabel 3 Viskositet af ferskvand**

Temperatur Grader Celsius	dynamisk viskositet $\mu$ kg/m s	kinematisk viskositet $\nu$ m <sup>2</sup> /s
0	$1,79 \cdot 10^{-3}$	$1,79 \cdot 10^{-6}$
5	$1,51 \cdot 10^{-3}$	$1,51 \cdot 10^{-6}$
10	$1,30 \cdot 10^{-3}$	$1,30 \cdot 10^{-6}$
15	$1,14 \cdot 10^{-3}$	$1,14 \cdot 10^{-6}$
20	$1,00 \cdot 10^{-3}$	$1,00 \cdot 10^{-6}$

Viskositeten af havvand (saltvand) er stort set den samme som viskositeten af ferskvand.

## Sammentrykkelighed

En væsentlig egenskab ved vand er dets meget ringe sammentrykkelighed. I relation til strømning og vandføring i vandløb betyder dette, at man helt kan se bort fra variationerne af denne egenskab og blot betragte vandet som usammentrykkeligt.

I lukkede rørsystemer bidrager sammentrykkeligheden til fænomenet *trykstød*, som ikke skal omtales nærmere her. Sammentrykkeligheden er sammen med densiteten (massetætheden) styrende for forplantningshastigheden af lydbølger, som udnyttes i forskellige måleinstrumenter som for eksempel ekkolodder og hastighedsmålere (ultralyd). Lydbølgers hastighed i vand er ca. 1500 m/s.

## Overfladespænding

Vands overfladespænding har normalt kun betydning for fænomener med lille geometrisk udstrækning, for eksempel skaber en svag vind med en hastighed større end ca. 1 m/s og som blæser hen over en vandoverflade, små korte bølger af nogle få centimeters højde og længde. Disse bølgers udbredelse (længde og hastighed) er i høj grad styret af overfladespændingen. Ved kraftigere vindstyrker vil disse bølger blive højere og stejlere og en vis bølgebrydning på overfladen opstår, og også her har overfladespændingen betydning på bølgebrydningen, som er vigtig for transporten af ilt på tværs af vandoverfladen.

Overfladespændingen har stort set ingen betydning på almindelige hydrauliske forhold i vandløb. Men når det gælder fysiske modelforsøg med skalamodeller med frie vandoverflader sætter overfladespændingen ofte en nedre grænse for hvor små modeller der kan anvendes uden at skalafejl optræder.

Økologisk set har overfladespændingen en væsentlig betydning, eksempelvis for insekter, der kan "gå" på vandoverfladen.

### 3. Trykfordeling og forskydningsspænding

Trykket i en væske er defineret på samme måde som trykspændingen i faste legemer, dvs. trykket er den kraft pr. fladeenhed som væsken udøver på et lille fladeelement placeret i væsken. Enheden er kraft pr. fladeenhed =  $\text{Newton/m}^2 = \text{Pascal}$ . Definitionen på hvad der forstås ved en væske (som en modsætning til fast stof), er at trykket i et punkt ens i alle retninger. I definitionen indgår også at et væskeelement kan bevæges frit rundt i væsken uden at der tilføres energi, såfremt bevægelsen foregår "uendeligt" langsomt. Den velkendte konsekvens af dette er, at vandspejlet i en stillestående væske med frit vandspejl er vandret.

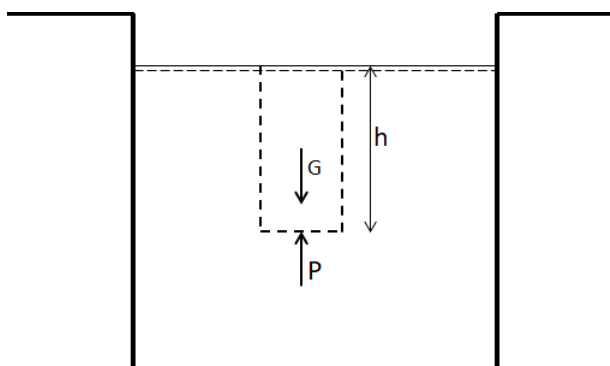
I strømmende væsker opstår forskydningsspændinger. Det er det arbejde disse forskydningsspændinger udfører, der er årsag til energitabet i strømmingen. Energitalb betyder her at mekanisk energi omsættes til varme. Dette arbejde udføres på grund af de interne hastighedsforskelle inde i væsken. Forskydningsspændingen mellem væg (og/eller bund) udfører intet arbejde, fordi hastigheden ved væggen er nul. Dette står i modsætning til udvikling af varme i grænsefladen mellem to faste legemer, der glider mod hinanden.

#### Hydrostatisk trykfordeling

Trykket  $p$  i en stillestående væske skabes af alene af tyngdekraften. Trykket i dybden  $y$  under overfladen i et væskekar (Figur 3-1) beregnes af tyngdeloven og bliver

$$p = \rho g y \text{ eller } p = \gamma y$$

Dette betegnes *hydrostatisk trykfordeling*.



Figur 3-1 Hydrostatisk tryk i stillestående vand

Det er vigtigt for forståelse af hvad en væske egentlig er, at indse at den potentielle energi (ofte betegnet trykenergien) af alle væskepartikler i karet er ens, og svarer til partiklerne befandt sig præcist i vandoverfladen. Antages at partiklerne hver har en masse  $m$  har alle partikler i karet uanset deres højdemæssige placering en potentiel energi  $E_p$  på

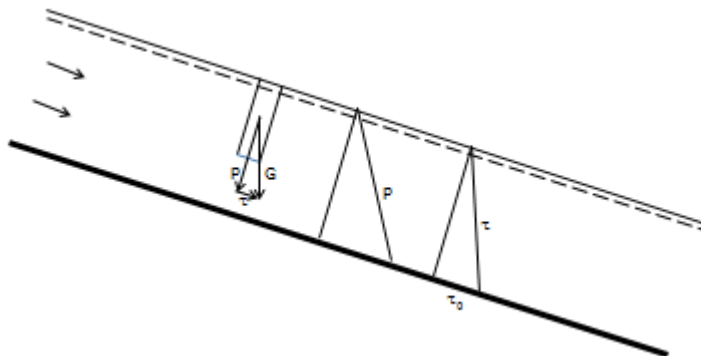
$$E_p = h m$$

hvor  $h$  er højden (ofte betegnet *koten*) over et fast vandret udgangsniveau.

I en *stationær ensformig* strømning (for eksempel strømning nedad et skråplan) accelereres væsken ikke og derfor kan det udledes af inertiens lov, at der også for sådanne strømninger eksisterer hydrostatisk trykfordeling. Dette vil normalt kunne antages for strømninger i vandløb (undtagen på steder hvor trykket påvirkes af centrifugalkræfter, for eksempel ved skarpkantede overløb).

## Bundforskydningsspændingen

Forskydningsspændinger opstår uundgåeligt i strømmende væsker. I en stationær og ensformig strømning nedad et skråplan drevet af tyngdekraften må tryk- og forskydningskraften på et væskeelement som vist på Figur 3-2 holde ligevægt med tyngdekraften.



Figur 3-2 Tryk og forskydningsspænding i ensformig strømning (hældningen er stærkt forøget)

Hvis bunden og vandoverfladen har en hældning på  $\beta$  med vandret, og da hældning i praksis er lille og af størrelsesorden 1,0 promille, er  $\sin \beta \cong \tan \beta \cong I$  bliver forskydningsspændingen  $\tau$  i dybden  $y$  (vinkelret på bunden)

$$\tau = \gamma y \sin \beta = \gamma y I$$

Bundforskydningsspændingen  $\tau_0$  bliver hermed

$$\tau_0 = \gamma h I$$

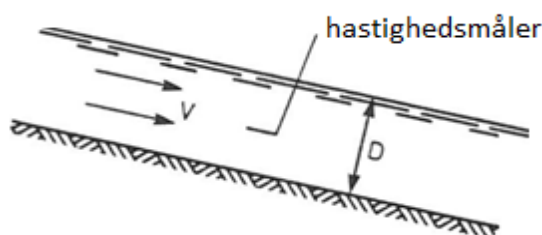
hvor  $\gamma = \rho g$  (for vand fås:  $9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 = 9,81 \cdot 10^3 \text{ Newton/m}^3$ ) og  $h$  er vandybden. Enheden for bundforskydningsspændingen bliver  $\text{Newton/m}^2$  eller Pascal (Samme enhed som for tryk).

Bundforskydningsspændingen har blandt andet betydning for sedimenttransporten på vandløbsbunden. Ofte benytte begrebet *kritisk bundforskydningsspænding*  $\tau_{0,c}$  som er den værdi af forskydningsspændingen hvor sedimenttransporten netop sættes i gang (se senere).

## 4. Laminær og turbulent strømning

Et af hydraulikkens vigtigste problemstillinger er spørgsmålet om hvorvidt en strømning er laminær eller turbulent. Erfaringen viser at strømningerne i vandløb altid er turbulente, men tilgængæld er strømmingen i det grundvand, der gennem jorden strømmer til vandløbene, laminær.

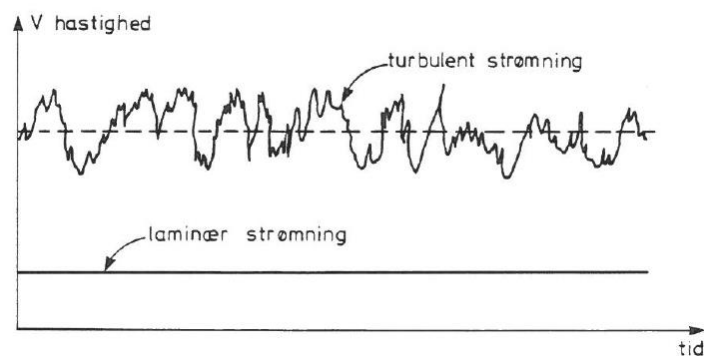
Vi betragter en stationær, ensformig strømning i et retlinet vandløb, som har et konstant fald. I denne strømning placerer vi en hastighedsmåler (en propel eller en ultralydsmåler), som kan måle den øjeblikkelige langsgående hastighed. Endvidere forudsættes det, at hastighedsmåleren er meget lille af udstrækning i forhold til vanddybden.



Figur 4-1 Hastighedsmåling i et punkt i et vandløb

Vi antager nu først, at både hastighed og vanddybde er meget små (dvs. brøkdele af millimeter), og vi konstaterer at den målte hastighed holder sig helt jævnt og konstant i tiden. Dernæst forøger vi både vanddybde og hastighed, og det bemærkes, at der på et tidspunkt sker et markant skift i strømningsformen, idet hastigheden pludselig begynder at fluktuere kraftigt.

De to strømningsformer betegnes henholdsvis laminær og turbulent strømning.



Figur 4-2 Strømningshastighed ved laminær og turbulent strømning i et punkt

Den teoretiske baggrund bag disse forhold er komplicerede, men både teori og erfaring har vist, at det som er afgørende for strømningsformen, er det såkaldte Reynolds' tal  $R_e$ :

$$R_e = \frac{V R}{\nu}$$

hvor  $V$  er middelstrømhastigheden,  $R$  er hydraulisk radius (defineres senere, men i vandløb er  $R$  nær lig med middelvanddybden) og  $\nu$  er den kinematiske viskositet.

Forståelsesmæssigt kan man sige at Reynolds tal udtrykker i hvor høj grad den interne friktion i strømmingen evner at "vælte" den retlinede laminære strømning. En fysisk analogi, der kunne minde herom, kendes fra en

bil som trækker en anhænger. Ved lav hastighed kører bil og anhænger jævnt og stabilt, men når hastigheden overskrider en kritisk værdi bliver systemet ustabilt og anhængerens begynder at slingre voldsomt.

For lange retlinede rør og kanaler er det kritiske Reynolds tal  $R_{e,k} = 580 \pm 50$  for overgangen mellem laminær og turbulent strømning og omvendt. Såfremt der er forstyrrelser og retningsændringer er  $R_{e,k}$  lavere.

Begrebet ”en stationær strømning i et vandløb” betyder således ikke at hastighederne i alle punkter er konstante i tid. De fluktuerer hurtigt omkring en gennemsnitsværdi med en *turbulensgrad* på 10 – 15 %, hvor turbulensgraden er standardafvigelsen divideret med gennemsnittet. Først hvis vi beregner et løbende gennemsnit af hastigheden over i størrelsesorden 1 minut får vi værdier, som kan kaldes stationære.

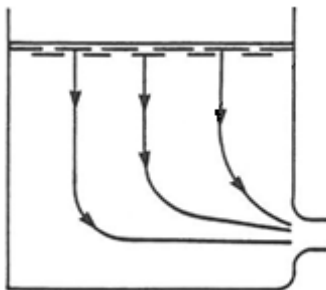
De tryk- og forskydningspændinger, som blev omtalt i forrige afsnit, vil i turbulent strømning ligeledes fluktuere i tid omkring en gennemsnitsværdi.

Det meste af det vand der strømmer i vandløbene stammer fra det omkringliggende grundvand, der gradvist trænger ind i vandløbene. Grundvandstrømningen er laminær.

### Potentialstrømning

Betragtes uensformige strømninger med konvergerende strømlinier, som vist på nedenstående eksempel på Figur 4-3, er det ikke relevant at benytte Reynolds' tal, fordi den interne friktion er ubetydelig. I eksemplet kan strømningen betegnes som en potentialstrømning, dvs. en strømningsform, som med god tilnærmelse kan forklares (og modelleres) uden at medtage friktionen.

En *potentialstrømning* kan betegnes som er laminær strømning uden forskydningspændinger.



Figur 4-3 Eksempel på potentialstrømning - udløb fra beholder

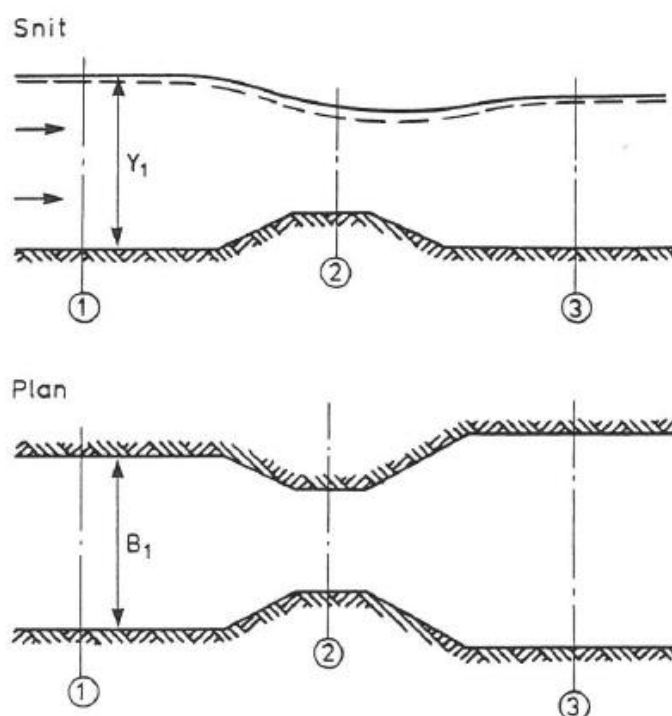
Potentialstrømning forekommer kun ved udstrømning fra beholderen. Havde strømningen været modsat rettet (indpumpning af vand til beholderen) havde strømninger været helt anderledes (en jet-stråle med kraftig turbulens og energitab) fordi strømlinierne i så fald ville divergere.

## 5. Kontinuitetsligningen og energiligningen

De to ligninger, kontinuitetsligningen og energiligningen, udgør tilsammen det vigtigste værktøj til beregning af hvorledes vandstand og strømhastighed varierer ved stationære strømninger i vandløb.

### Kontinuitetsligningen

Kontinuitetsligningen tager sit udgangspunkt i loven om massens konstans. Da vands sammentrykkelighed er helt forsvindende i relation til de tryk som optræder ved strømninger med frie vandoverflader, er massens konstans ensbetydende med volumenets konstans. Såfremt strømmingen er stationær (dvs. ikke varierende i tid), må vandføringen  $Q$  være den samme gennem forskellige snit i kanalen (se Figur 5-1).



Figur 5-1 Kontinuitetsligningen, vandføringen gennem snit 1, 2 og 3 er den samme

Betegnes tværsnitsarealerne ved  $A$ , bredderne ved  $B$  og vanddybderne ved  $y$  lyder kontinuitetsligningen herafter:

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 = V_3 A_3$$

eller

$$Q = V_1 B_1 y_1 = V_2 B_2 y_2 = V_3 B_3 y_3$$

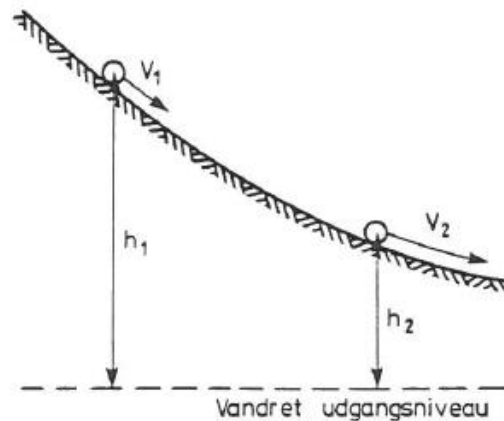
Da strømmingen er turbulent er alle hastigheder tidslige gennemsnitsværdier. Kontinuitetsligningen benyttes ofte sammen energiligningen.



### Energiligningen for en partikel

Som nævnt i det tidligere afsnit postulerer fysikkens energisætning, at summen af en partikels potentielle og kinetiske energi er konstant, såfremt der ikke sker energitab. Hydraulikkens energisætning, som betegnes *energiligningen* kan indledningsvis illustreres ved følgende eksempel.

En partikel med massen  $m$  glider på et friktionsløst underlag som vist på Figur 5-2.



Figur 5-2 Energisætningen for partikel på friktionsløst skråplan

Den potentielle energi  $E_p$  beregnes som det arbejde der skal udføres for at løfte partiklen op til højden  $h$  over det vandrette udgangsniveau:

$$E_p = h g m$$

Partiklens kinetiske energi  $E_k$  beregnes af

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

hvor  $v$  er partiklens hastighed.

Energisætningen lyder herefter

$$E_p + E_k = \text{konst}$$

eller

$$h g m + \frac{1}{2} m v^2 = \text{konst}$$

eller

$$h + \frac{v^2}{2 g} = \text{konst}$$

I forhold til partiklens 2 positioner i figuren fås

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2 g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2 g}$$

### Faldloven

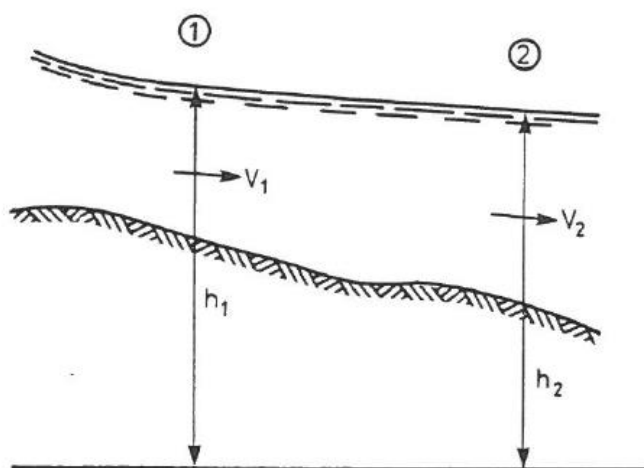
Hvis partiklen starter i hvile, dvs. med hastigheden nul, fås faldloven

$$v_2 = \sqrt{2 g (h_1 - h_2)}$$

## Hydraulikkens energiligning

Den hydrauliske energiligning for stationær strømning i åbne kanaler skal ikke udledes her, men den baserer sig på den mekaniske fysiks energisætning og hydraulikkens kontinuitetsligning, hvor man forudsætter, at strømningen er stationær og hvor man nu (i stedet for en partikel) betragter et vandlegeme af endelig udstrækning.

Vi betragter to snit i en stationær strømning i et vandløb (se Figur 5-3).



Figur 5-3 Længdeprofil af strømning mellem snit 1 og snit 2

Energiligningen mellem snit 1 og snit 2 lyder

$$h_1 + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \Delta H$$

Hvor  $h$  er vandspejlshøjden (koten) over et vandret udgangsniveau,  $\alpha$  er en hastighedsfordelingskoefficient,  $V$  er middelstrømhastigheden over tværsnittet og  $\Delta H$  er energitabet mellem de to snit. (Trods betegnelsen har de enkelte led i energiligningen ikke enheden energi [Joule] men enheden længde [m]).

Hastighedskoefficienten  $\alpha$  er en korrektion, fordi transporten af kinetisk energi over tværsnittene ikke helt korrekt kan beregnes ud fra middelhastigheden  $V$ . For retlinede kanaler er  $\alpha = ca. 1,1$  og for vandløb vil  $\alpha$  normalt have værdier på 1,2 til 1,4, men større værdier kan lejlighedsvis observeres.

Energitabet  $\Delta H$  skyldes den indre friktion i væsken. Som det ses i det følgende kan energitabet enten være et kontinuert tab som forekommer løbende når vandet strømmer gennem vandløbet eller et *enkelttab*, der opstår ved en forhindring. Det førstnævnte kan for eksempel beregnes af Manningformlen og det næste for eksempel af Carnots formel.

## 6. Strømmende og strygende bevægelse

Endnu en grundlæggende problemstilling i hydraulikken er spørgsmålet om hvorvidt strømmingen i systemer med fri vandoverflade kan betegnes som værende strømmende (subkritisk) eller strygende (superkritisk).

Fra andre fagområde kendes lignende fænomener. Fra skibsteknikken har vi traditionelle langsomtsejlende skibe, som sejler med subkritisk fart i modsætning til for eksempel hurtigfærger, som har superkritisk fart. Fra luftfarten kendes traditionelle trafikfly som flyver langsommere end lyden, og supersoniske jagerfly som flyver med 2 – 3 gange lydens hastighed.

For strømninger i vandløb og kanaler med frit vandspejl er Froudes tal  $F_r$  afgørende for strømningsformen.

$$F_r = \frac{V}{\sqrt{g D}}$$

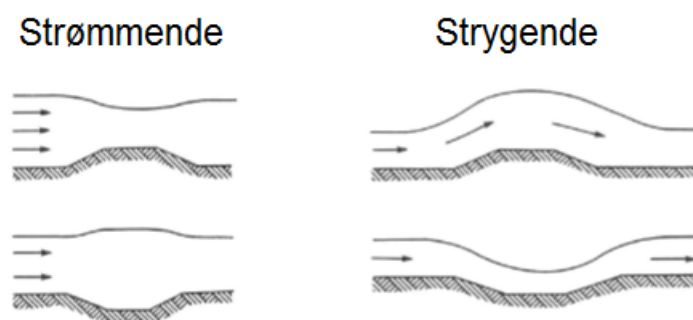
Froudes tal er således forholdet mellem den tværsnitsmidlede strømningshastighed  $V$  og forplantningshastigheden  $\sqrt{g D}$  af en lang bølge (såkaldt grundtvandsbølge) i kanalen med den tværsnitsmidlede vanddybde  $D$ . (Hastigheden af en grundtvandsbølge er den største hastighed en bølge på vandoverfladen kan bevæge sig. Bølger med kort bølgelængde bevæger sig langsommere).

Hvis Froudes tal  $F_r = \frac{V}{\sqrt{g D}} < 1$  er strømningsformen *strømmende* (en ændring kan forplante sig både med og mod strømmen).

Hvis Froudes tal  $F_r = \frac{V}{\sqrt{g D}} > 1$  er strømningsformen *strygende* (en ændring kan kun forplante sig med strømmen)

Hvis Froudes tal  $F_r = \frac{V}{\sqrt{g D}} = 1$  forekommer *kritisk strømning*

På de følgende figur ses den markante forskel på hvorledes vandspejlet ændrer sig ved en forandring af bundens højde henholdsvis strømmende og strygende bevægelse.



Figur 6-1 Vandspejlsændringer skabt af bundændringer ved strømmende og strygende bevægelse

## 7. Energitab i vandløb

I dette afsnit beskæftiger vi os med energitabet i energiligningen, og i hydrauliske systemer er det en normal procedure, at opdele energitabet i strækningstab og enkelttab, og denne opdeling benyttes også i vandløb og dermed også i herværende afsnit.

I vandløb forekommer som nævnt kun turbulent strømning og her eksisterer et generelt system af empiriske formler baseret på målinger for energitabet som funktion af strømningshastigheden og andre relevante parametre. Når det gælder strækningstab på lange lige strækninger indgår der i dem alle størrelsen *hydraulisk radius*  $R$ , som derfor skal omtales først.

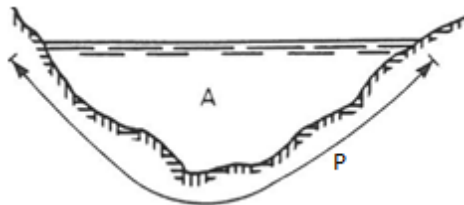
### Hydraulisk radius

Hydraulisk radius udtrykker størrelsen af strømningstværsnittet. Intuitivt kan den forstås som den gennemsnitlige afstand fra de strømmende vandpartikler til vandløbsbunden og/eller til vandløbets sider, hvor friktionskraften mellem vandet og bunden overføres. Det bemærkelsesværdige er, at den nedenstående definition stort set er universelt gældende for alle tværsnitsformer. En undtagelse, der gælder for meget brede og lavvandede vandløbstværsnit, omtales i et senere afsnit.

Hydraulisk radius  $R$  defineres som

$$R = \frac{A}{P}$$

hvor  $A$  er tværsnittets areal og  $P$  er ”den våde perimeter”, se Figur 7-1. Da der ikke overføres forskydningskraft over den frie overflade regnes vandløbsbredden ved overfladen ikke med til den våde perimeter.



Figur 7-1 Hydraulisk radius  $R = A / P$

### Colbrook og Whites generelle formel

Til beregning af energitabet  $\Delta H$  ved turbulent strømning i rør, kanaler og vandløb mellem to tværsnit kan man helt generelt anvende følgende to formler. Formel (1), *modstandsformlen*, lyder:

$$\Delta H = f \frac{V^2}{2g} \frac{1}{R} L \quad (1)$$

hvor  $f$  er friktionstallet,  $V$  er middelhastigheden over tværsnittet,  $R$  er hydraulisk radius (se nedenfor) og  $L$  er afstanden mellem de to tværsnit.

Friktionstallet  $f$  findes af den implicitte formel (2), kendt som Colbrooke og Whites formel:

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = 6,4 - 2,45 \ln \left( \frac{k}{R} + \frac{4,7}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (2)$$

hvor  $k$  er den hydrauliske ruhed (den såkaldte *ækvivalente sandruhed*) og  $Re$  er *Reynolds tal*  $Re = V R / \nu$ .

Friktionstallet må bestemmes ved iteration med denne nøjagtige men lidt besværlige formel. Først isoleres  $f$  på venstresiden og et gæt (for eksempel  $f = 0,001$ ) indsættes på højresiden og en værdi af  $f$  beregnes. Den nye værdi indsættes på højresiden osv. Normalt vil 2 – 4 iterationer være tilstrækkelig.

Det er vigtigt at lægge mærke til, at de to formler hører sammen og skal bruges med samme enheder. I den internationale litteratur betegnes modstandsformlen (1) ofte *Darcy-Weisbachs formel*, hvor man i stedet for hydraulisk radius benytter hydraulisk diameter. I så fald er formel (2) modificeret således at de to formler samlet set er korrekte.

Disse former er besværlige til håndregninger, men er ofte en valgmulighed ved hydrauliske edb-modeller, hvor der skal specificeres en hydraulisk ruhed (ækvivalent sandruhed)  $k$  samt eventuelt en temperatur af hensyn til viskositeten.

I virkelige vandløb stammer den samlede hydrauliske modstand fra forskellige ruhedselementer langs bund og brinker. Hvis man derfor regner baglæns fra målt vandføring, tværsnitsareal, hydraulisk radius og fald til den hydrauliske ruhed  $k$  får man en værdi der repræsenterer den samlede virkning af disse elementer og den vil næsten altid være større end den ruhed man vil skønne de aktuelle bundsedimenter giver anledning til.

## Manningformlen

I historisk perspektiv opstod der i 1800-tallet et større antal formler til beregning af energitabet i vandløb, dvs. lang tid tidligere end den før nævnte *Colebrook og White formel*. De havde hver især sit eget data- og idégrundlag, men trods øjensynlige forskelle giver de nogenlunde de samme resultater. Igennem en mangeårig udviklingsproces er Manningformlen, skabt af den irske vandingeniør Robert Manning (1816 - 1897) efterhånden blevet enerådende. Derfor skal kun denne omtales her.

Manningformlen lyder

$$V = M R^{2/3} I^{1/2} \quad (1)$$

Hvor  $V$  er middelstrømhastigheden,  $R$  er hydraulisk radius og  $I$  er faldet på energilinen.

Introduceres vandføringen  $Q$  via kontinuitetsligningen  $Q = V A$  i formel (1) fås

$$Q = A M R^{2/3} I^{1/2} \quad (2)$$

Hvis faldet på energilinen  $I$  antages at være konstant over en strækning med længden  $L$  er

$$I = \frac{\Delta H}{L} \quad (3)$$

Derfor bliver energitabet over strækningen

$$\Delta H = L \left( \frac{V}{M R^{2/3}} \right)^2 \quad (4)$$

et er vigtigt at lægge mærke til, at Manningformlen ikke er dimensionskorrekt. Resultatet bliver kun rigtigt såfremt der benyttes SI-enheder.

Manningformlens gyldighedsområde er mere snævert end hvad gælder for Colebrook og Whites formel, men i forhold til strømninger i vandløb (herunder kravet om hydraulisk ru væg og højt Reynolds tal) er Manningformlen stort set fuldt dækkende. Inden for Manningformlens gyldighedsområde kan det vises, at de to formler vil give samme resultater såfremt der benyttes et Manningtal  $M$  på

$$M = \frac{25,4}{\sqrt[6]{k}} \quad [\text{m}^{1/3}/\text{s}] \quad (5)$$

hvor  $k$  er den hydrauliske ruhed (*den ækvivalente sandruhed*). Husk at benytte SI-enheder.

## Måling af Manningtallet i vandløb

I et vandløb er det det hydrologiske opland, der befinder sig **opstrøms** for det tværsnit som betragtes, som skaber den vandføring  $Q$ , som passerer stedet.

Det ses umiddelbart af Manningformlen, at Manningtallet  $M$  kan beregnes hvis vi kender  $Q$ ,  $A$ ,  $R$  og  $I$ . Men i praksis er  $A$ ,  $R$  og  $I$  ikke fuldstændigt konstante selv inden for korte afstande i vandløbet. Med henvisning til afsnittet om Froudes tal og strømningsformerne (strømmende og strygende) skal man derfor gøre sig klart, at når bevægelsen er strømmende, som den næste altid er i danske vandløb, er den vandstand  $h$  (og tilhørende  $A$  og  $R$ ) man observerer i det tværsnit hvor vandføringen  $Q$  måles, resultatet af den hydrauliske modstand, der er fremkommet over en vis strækning **nedstrøms** for måletværsnittet. Når man derfor skal beregne Manningtallet så bør man principielt benytte gennemsnitsværdier af  $A$ ,  $R$  og  $I$  for en passende strækning nedstrøms for måletværsnittet.

Det kan for eksempel være udmærket at måle vandføring ved en bro, hvor tværsnittet er rektangulært og nogenlunde lige så bredt som vandløbet. Men skal Manningtallet for vandløbet bestemmes må det tværsnit og det fald, som benyttes, være det som befinder sig nedstrøms for broen.

Ofte vil man se i praksis at Manningtallet på en given lokalitet ikke er helt konstant men vokser med stigende vandstand og vandføring. Dette gælder også i grødefri vandløb, men i høj grad i vandløb med grøde. Men i vandløb med kraftig brinkvegetation kan det modsatte opleves.

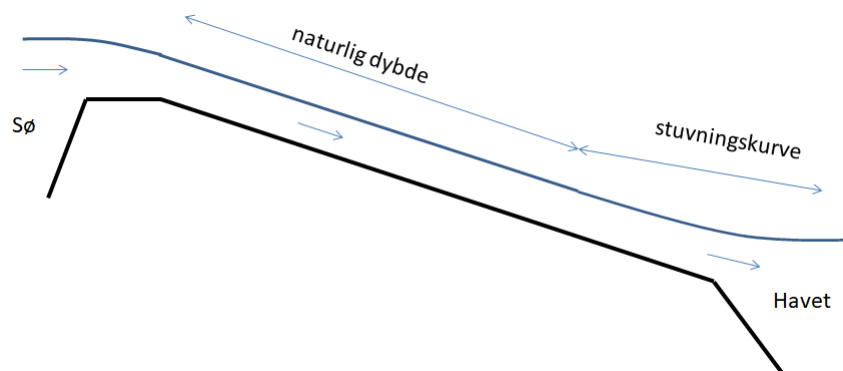
Huskeregul:

Når vi betragter et konkret tværsnit i et vandløb, er det oplandet opstrøms, der skaber den vandføring der passerer stedet; men det er den hydrauliske modstand i den nærmeste nedstrøms strækning, der skaber vandstanden.

## Naturlig dybde

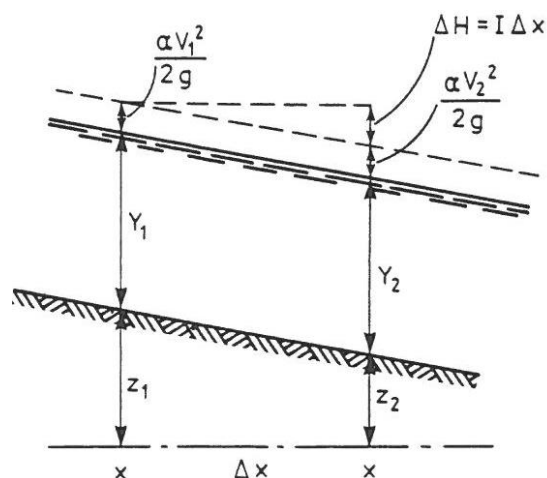
Såfremt et vandløb har konstant tværsnit, vandføring og bundhældning er der muligheder for, at der kan opstå en ligevægtssituation, hvor det arbejde tyngdekraften udfører på det strømmende vand netop svarer til energitabet i strømningen. I denne situation betegnes dybden i vandløbet at være *naturlig dybde*. Begrebet har mange paralleller. Et eksempel kunne være en cyklist der kører på frihjul ned ad en lang bakke. I begyndelsen accelererer cyklisten, men efterhånden opnås en konstant hastighed fordi luftmodstanden øges og til sidst opnår at holde ligevægt med tyngdekraften.

Det er en ofte anvendt antagelse at størstedelen af strømningen i et vandløb sker ved naturlig dybde, hvilket i større eller mindre grad er en tilnærmelse, da hverken bundhældningen eller tværsnitsgeometrien i virkelige vandløb er fuldstændig konstant i længdeprofilet. Særligt på den sidste strækning før udløbet til havet, hvor hastigheden aftager, kan strømningen ikke antages at ske med naturlig dybde. (I øvrigt er strømningen her tæt på havet ofte ikke-stationær fordi tidevand og andre variationer i havet trænger op i vandløbet nederste strækning).



Figur 7-2 Længdeprofil af vandløb med naturlig dybde og stuvningskurve. Kurverne kan efter forholdene både være stuvnings- eller sænkingskurver. Bemærk at der er naturlig dybde næsten helt op til udløbet fra søen, fordi der er strømmende bevægelse med  $Fr < 1$

Betragtes et område midt på strækningen, hvor vandhastigheden er konstant ses på følgende figur Figur 7-3 ses at bundlinjen, vandspejlet (tryklinien) og energilinen er parallelle



Figur 7-3 Bundlinie, vandspejl og energilinie ved naturlig dybde

Denne situation betegnes som sagt *naturlig dybde* og energiligningen forsimpes til

$$\Delta H_{1-2} = I \Delta x$$

som herefter kan benyttes til beregne vanddybden.

## Naturlig dybde i forskellige tværsnit

### Naturlig dybde i trapzformet kanal

Tværsnittet er trapezformet

Det er ikke muligt at udføre en eksplicit beregning af vanddybden  $y$  som funktion af følgende 5 størrelser:

- Vandføringen  $Q$
- Bundbredde  $B$
- Skråningsanlægget  $a_n$
- Manningtallet  $M$
- Vandløbets fald  $I$

Derfor vendes problemstillingen om, og i stedet for beregnes  $Q$  som funktion af  $y$  og derefter kan man ved simpel gætning indkredse vandstanden. Dette gøres let i et regneark (f.eks. EXCEL). Følgende formler indskrives i den viste rækkefølge i en række i regnearket.

1.  $y = 1,0$  (første gæt)
2.  $B = 2,0$
3.  $a_n = 2,5$
4.  $M = 30$
5. Fald,  $I = 0,0005$
6. Tværsnitsareal:  $A = B y + a_n h y^2$
7. Våd perimeter:  $= B + 2 y \sqrt{(1 + a_n^2)}$
8. Hydraulisk radius  $R = A/P$
9. Vandføring, beregnet med Manningformlen:  $Q = A M R^{2/3} I^{1/2}$
10. Ønsket vandføring  $Q = 1,5 \text{ m}^3/\text{s}$

Herefter vender vi tilbage til punkt 1 og indsætter en korrigeret værdi indtil den beregnede og den ønskede værdi for  $Q$  er ens.

Dette giver følgende resultat:

y (gæt)	B	$a_n$	M	I	A	P	R	Q beregn	Q ønsket
m	m	dim.løs		dim.løs	m <sup>2</sup>	m	m	m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s
0,838	2,0	2,5	30	0,0005	3,432	6,513	0,527	1,501	1,500

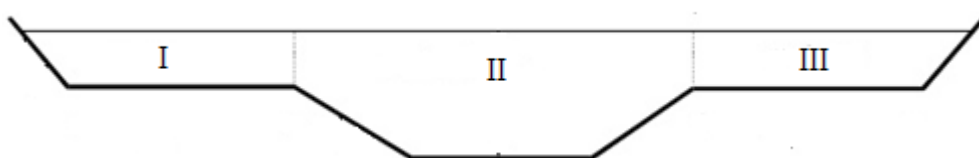
Det ses at en gættet vandstand på 0,838 giver den ønskede vandføring, men da der i praksis er en usikkerhed bl.a. på Manningtallet kan det sidste ciffer ikke tillægges nogen værdi. Til hurtige beregninger kan man ofte tilnærme virkelige opmålte tværnsnit med enten med et trapez- eller parabelformede tværnsnit.

#### Naturlig dybde i virkelige naturlige vandløb

Ved virkelige vandløb, hvor tværnsnitsgeometrien ikke er simpel og hvor  $R$  og  $P$  ikke kan beskrives ved analytiske formeludtryk er beregningsarbejdet mere omstændigt. Her vil man normalt benytte sig af edb-modeller, der før den egentlige beregning, opstiller tabeller for  $A = A(y)$  og  $P = P(y)$  (hvori der interpoleres) som udgangspunkt for de videre beregninger. Beregningsproceduren følger i øvrigt oven nævnte procedure for det trapezformede tværnsnit.

#### Naturlig dybde i vandløb med dobbeltprofil

Da vandføringen i danske vandløb varierer i størrelsesorden 10 gange mellem minimum og maksimum og da særligt de ekstremt store vandføringer har en kort varighed har anvendelsen af såkaldte dobbeltprofiler vundet indpas. Et eksempel på et tværnsnit med dobbeltprofil ses på figuren.



Figur 7-4 Vandløbstværsnit med dobbeltprofil

Tværsnittet dimensioneres således at den nederste af den centrale del har kapacitet til at føre den ”almindelige” vandføring medens den øvre og brede del kun udnyttes ved ekstreme vandføringer.

Beregningen af dobbeltprofilets naturlige dybde (og af  $Q/h$ -kurven) kan foretages på to måder, som giver lidt forskellig resultat:

1. Der itereres (kald det systematisk gætning) med hele tværsnittet på samme måde som tidligere vist ved det trapez-formede tværnsnit, dvs. vi gætter en vanddybde  $y$  og beregner tilhørende  $A$  og  $R$  hvorefter  $Q$  fås af Manningformlen. Hvis  $Q$  er for stor gætter vi en mindre  $y$  og omvendt hvis  $Q$  er for lille,



og vi begynder forfra indtil  $Q$  er korrekt.

2. Vi opfatter vandløbet som bestående af 3 parallelltløbende del-vandløb I, II og III med hver sit areal  $A$  og hver sin hydrauliske radius  $R$ , hvor den lodrette (teoretiske) adskillelse mellem sektionerne ikke medregnes til de respektive "våde omkredse". Tværsnittets vandføring bliver herefter summen af de 3 del-vandføringer. Med disse 3 del-vandløb itereres på samme måde som nævnt ovenfor. Med at denne metode har man mulighed for at antage der er forskelligt Manningtal i de 3 sektioner, hvilket eksempelvis er nyttigt, hvis der antages, at der er grøde i den dybe sektion og ikke i resten af tværsnittet.

Som nævnt giver de to metoder lidt forskellig resultat alt efter sektionernes relative størrelse. For en given vanddybde kan forskellen i vandføring være op til 15 %. Hvis metoderne benyttes omvendt til ud fra målingerne at bestemme Manningtallet  $M$  vil man få et  $M$  der ligger tilsvarende lavere ved metode 2. Denne problemstilling er nært knyttet til dette emne som beskrives i følgende afsnit om *modstandsradius*, som der derfor henvises til.

### Modstandsradius

Som tidligere omtalt er det almindelig praksis, når energitabet skal bestemmes i hydrauliske systemer med turbulent strømning, at lade strømningstværsnittets størrelse repræsenteres af hydraulisk radius  $R$ , hvilket udgør en bemærkelsesværdig forsimpning af problemstillingen, en forsimpning som for eksempel ikke er gældende for laminære strømninger.

Brugen af hydraulisk radius dækker over at det antages, at forskydningsspændingen  $\tau$  mellem vand og vandløbsbund er konstant langs den våde omkreds og lig med

$$\tau = \gamma R I$$

Dette er imidlertid ikke en god antagelse, hvis der er tale om meget brede vandløbstværsnit, hvor bredden er markant større end dybden. I dette tilfælde vil det være en bedre tilnærmelse at antage at forskydningsspændingen ikke er konstant, men at den på tværs af vandløbet varierer proportionalt med vanddybden  $y(x)$  efter

$$\tau(x) = \gamma y(x) I$$

hvor  $x$  er den horisontale koordinat vinkelret på strømretningen.

Derfor blev modstandsradius introduceret af F. A. Engelund (Engelund og Pedersen, 1978) til anvendelse ved meget brede vandløb med varierende vanddybde ved formlen:

$$R_* = \left( \frac{1}{A} \int_0^B y^{2/3} dx \right)^2 \quad (1)$$

hvor  $B$  er vandløbets bredde,  $y = y(x)$  er den lokale vanddybde og  $x$  er afstanden vinkelret på strømretningen fra punktet, hvor brinken rammer vandoverfladen. Udledningen af formel (1) bygger på Colebrook og White's formel og er forholdsvis kompliceret, se lærebogen (Brorsen og Larsen, 2009). Tages udgangspunkt i Manningformlen bliver udledningen simplere og modstandsradius bliver:

$$R_* = \left( \frac{1}{A} \int_0^B y^{5/3} dx \right)^{3/2} \quad (2)$$

Fra en logisk betragtning burde formel (1) benyttes hvis vandføringen beregnes med udgangspunkt i den hydrauliske ruhed (dvs. Colebrook og White's formel plus *modstandsformlen*), og formel (2) burde benyttes hvis Manningformlen anvendes. Forskellen på resultatet fra (1) og (2) er dog ubetydelig i praksis. Trods det inkonsistente heri benyttes ofte formel (1) sammen med Manningformlen.

Anvendelsen af modstandsradius er særlig aktuell ved floder, som ved store vandføringer breder sig ud over omgivelserne (floodsplains) og opnår bredder der er størrelsesorden større end dybden.

Sagt på en anden måde indebærer brugen af modstandsradius, at der kun medtages friktion ved vandløbsbunden men ikke til brinkerne. Derfor er det uhensigtsmæssigt at bruge modstandsradius ved smalle grøfter og kanaler.

I den praktiske verden, hvor vandløbsberegninger ofte udføres med edb-modeller, er det blevet almindeligt altid at benytte modstandsradius uanset om det er begrundet eller ej (hvad det i de fleste tilfælde ikke er). Det er vigtigt at gøre sig klart, at modstandsradius ikke er generelt dækkende og at den ikke indeholder hydraulisk radius som et særtilfælde. Da der omvendt stort set ikke eksisterer målinger, der viser om hydraulisk radius eller modstandsradius passer bedst til danske forhold, har denne lidt inkonsekvente praksis udbredt sig i Danmark uden at det øjensynligt har nogen væsentlig betydning for resultaternes nøjagtighed.

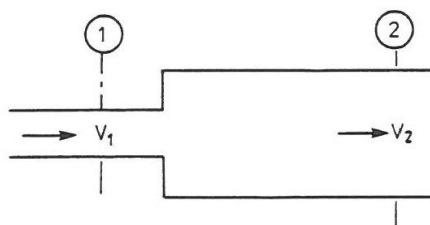
Den uheldige konsekvens af forskellen mellem hydraulisk radius og modstandsradius er, at det beregnede resultat bliver forskelligt, når vi ud fra målinger i vandløbet regner tilbage til Manningtallet. For almindelige danske vandløb udgør forskellen omkring 20 %, således, at modstandsradius-Manningtallet må være omkring 20 % mindre end hydraulisk-radius-Manningtallet for at give det korrekte vanddybde. Trods den usikkerhed, der er på bestemmelsen af Manningtallet, er denne forskel så stor at der ikke kan ses bort fra den.

Modstandsradius benyttes stort set kun i Danmark (og af danske konsulenter). Internationalt bruges i stedet at korrigere Manningtallet når floder med meget brede tværsnit skal beregnes. De vejledende værdier af Manningtallet som ses i danske og internationale fag- og lærebøger er knyttet til hydraulisk radius. Disse skal derfor reduceres, hvis modstandsradius benyttes.

Summa summarum : Forskellen på at benytte hydraulisk radius eller modstandsradius er uden praktisk betydning for de fleste danske vandløb, dog er modstandsradius-Manningtallet ca. 20 % mindre end hydraulisk-radius-Manningtallet.

### Enkelttab – Carnots formel

Ved bratte og lokale udvidelser eller indsnævringer vil der i de fleste tilfælde ske energitab som betegnes *enkelttab*. Helt forsimplet kan man sige den overskydende kinetiske energi der dannes af forstyrrelsen går tabt. Ved en rørudvidelse i et fuldtløbende rør (se Figur 7-5 ) kan Carnots formel benyttes



Figur 7-5 Tab ved skarpkantet udløb

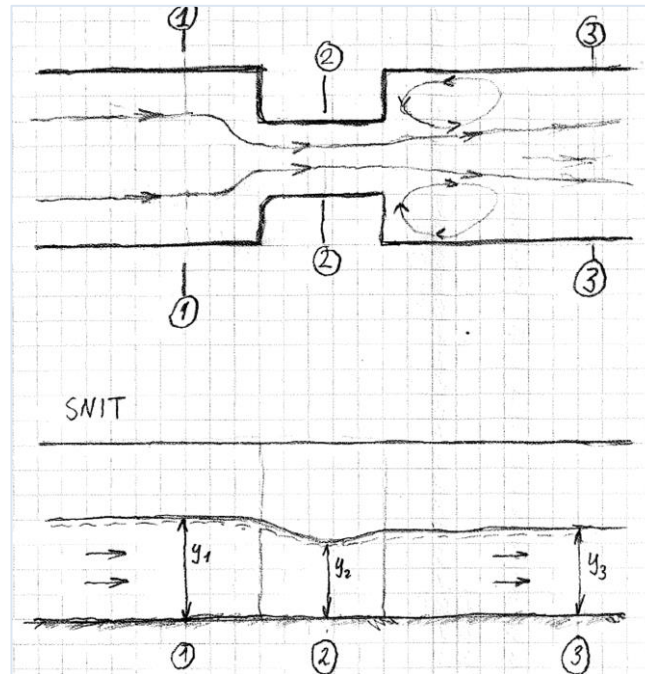
Carnots formel lyder

$$\Delta H = \frac{\alpha (V_1 - V_2)^2}{2g}$$

Såfremt at strømhastigheden i indsnævringen i vandløbet er så lille at vandstanden ikke sænker sig så meget at hastigheden øges mærkbart kan Carnots formel også benyttes her.

Er derimod strømhastigheden i indsnævringen så høj at vandspejlet og dermed gennemstrømningsarealet også ændres jævnfør energiligningen må en mere detaljeret beregning foretages.

Den korrekte beregning af en indsnævring som vist på Figur 7-6 må foretages med den fulde energiligning. Det antages at bevægelsen er *strømmende* (Froudes tal er mindre end 1) hvorfor beregningen må ske mod strømretningen. Beregningen starter i snit 3 hvor vandstanden  $y_3$  må kendes (for eksempel ud fra at der er naturlig dybde nedstrøms for snit 3). Fra snit 3 regnes der med energiligningen og kontinuitetsligningen mod strømretningen frem til vanddybden  $y_2$  i snit 2. Energitabet mellem snit 2 og snit 3 beregnes ud fra Carnots formel. Fra snit 2 frem til snit 1 (dvs. til  $y_1$ ) bruges igen energiligningen og kontinuitetsligningen og eventuelt medtages et indløbstab, hvis indløbet er skarpkantet (se senere). Hvis indløbet er afrundet kan der ses bort fra energitab fra snit 1 til snit 2.

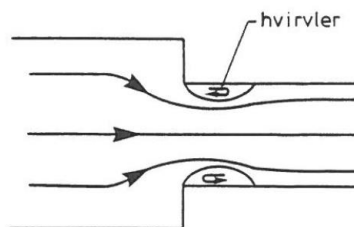


Figur 7-6 Beregning af vandspejl ved indsnævring

Det er vigtigt at undersøge om indsnævringen ikke er større end at strømmingen forbliver at være *strømmende* ( $Fr < 1$ ). Hvis der opstår strygende bevægelse ( $Fr > 1$ ) i indsnævringen kan det antages at der er kritisk dybde i snit 2. (se herom senere). I så fald har  $y_3$  ingen indflydelse på  $y_1$ .

Det sidstnævnte kan udnyttes til indretning af et bygværk måling af vandføring. I en såkaldt *Venturikanal* (somme tider betegnet en *Parschal-flume*) foretager man en bevidst indsnævring af tværsnittet så en kritisk strømning opnås. Herved kan man ved at måle vandstanden opstrøms på bygværket få en entydig sammenhæng mellem vandstand og vandføring. Vandføringen kan i så fald bestemmes af *overløbsformlen* beskrevet i næste kapitel.

Man skal her henlede opmærksomheden på, at der ved starten af indsnævringen, til trods for at strømlinierne konvergerer, kan optræde et energitab hvis indløbet har skarpe kanter (Figur 7-7). Såfremt dette er tilfældet skal dette indløbstab med i beregningen fra snit 2 frem til snit 1.



Figur 7-7 Kontraktion og deraf følgende energitab ved skarpkantet indløb

I den udenlandske litteratur (bl.a. Chow, 1959) er angivet enkeltmodstande for en lang række sluser og bro-piller.

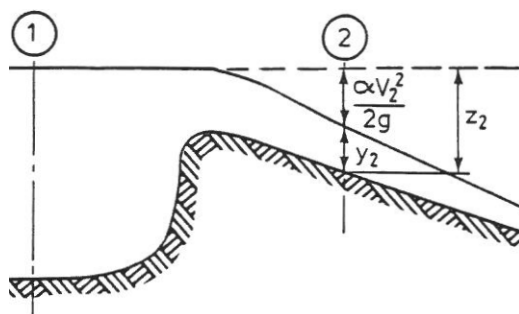
Det kan ofte være nødvendigt at udføre modellforsøg for at få en nøjagtig beskrivelse af enkelttabet ved mere geometrisk komplicerede konstruktioner. Modellforsøg kan udføres med en fysisk model eller med en tre-dimensional numerisk CFD-model (CFD = Computational Fluid Dynamics).

## 8. Overløb med kritisk strømning

Egentlige overløb, hvor overløbet passeres med kritisk strømning forekommer stort set ikke naturligt i danske vandløb, som er aluviale vandløb, der løber gennem bløde aflejringer, hvor vandløbssengen er skabt af strømmingen. Forklaringen er at såfremt overløbet passeres med kritisk strømning, ville der nedstrøms have været strygende bevægelse og denne ville herefter være afsluttet med et hydraulisk spring inden strømmingen havde forsat med strømmende bevægelse. I et hydraulisk spring foregår et stort energitab ved skabelse af særdeles kraftig turbulens inden for et lokalt område. Dette vil skabe så stor en erosion i de bløde aflejringer, at hele overløbet vil eroderes væk efter relativ kort tid. Egentlige overløb er derfor næsten altid menneskeskabte og benyttes ofte til at styre vandspejlet opstrøms for overløbet for eksempel ved udløb fra søer og bassiner. Erosionsbeskyttelse nedstrøms overløbet er ofte nødvendig.

Teorien for kritisk strømning, kan virke vanskelig, men den er nødvendig for forståelsen af hvad der er årsag og virkning i det hydrauliske system, herunder hvorledes det forklares, at vandstanden i et givet punkt i vandløbet er som den er. Derfor følger her de vigtigste punkter i denne teori.

Vi betragter udløbet fra en sø som vist på figuren. Inden for korte afstande fra udløbet vil energitabet være uden betydning, som der derfor ses bort fra her.



Figur 8-1 Strømning over overløbskant

Nu benyttes energiligningen mellem snit 1 og 2 og det forudsættes at vanddybden i snit 1 er stor så hastighedsleddet her er nul. Det vandrette udgangsniveau for energiligningen lægges i overfladen af søen, Energiligningen lyder da

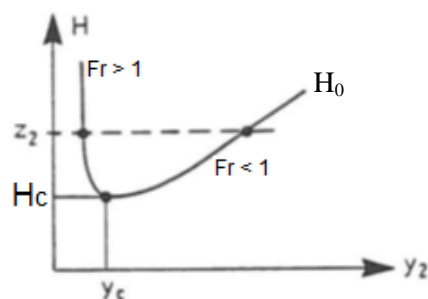
$$0 = -z_2 + y_2 + \frac{\alpha V_2^2}{2g}$$

Antages at udløbet at være en uendelig bred kanal med vandføringen  $q$  pr. breddeenhed (vinkelret på figuren), så giver kontinuitetsligningen at  $q = V_2 y_2$  og indsættes dette i energiligningen fås

$$H_0 = z_2 = y_2 + \frac{\alpha q^2}{2g y_2^2}$$

hvor  $H_0$  betegnes *den specifikke energi*, som må fortolkes som den energi, der er til rådighed for strømmingen til at passere snit 2 på vej ned af skråningen.

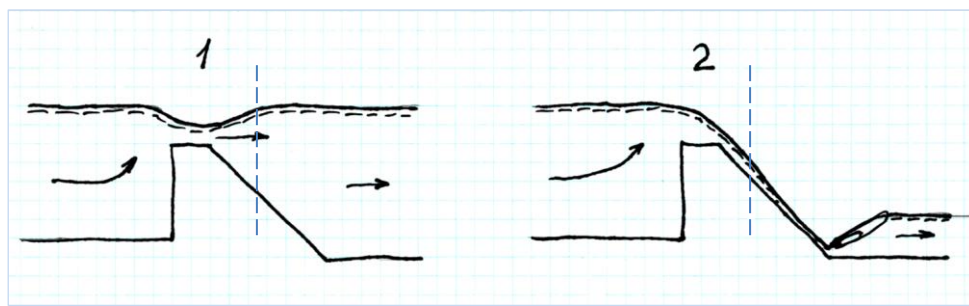
Formelt set er denne ligning en 3. grads ligning i  $y_2$ , og hvis vi vil finde denne kan vi forsøge at løse ligningen grafisk ved at plotte  $H_0$  som funktion af  $y_2$  fås grafen som ses på følgende figur.



Figur 8-2 Plot af  $H_0$  som funktion af  $y_2$  med det formål at finde  $y_2$  for en given værdi af  $z_2$

Som det ses af figuren foreligger der 3 muligheder. For store værdier af  $z_2$  er der 2 løsninger og for små værdier er der ingen løsninger. Desuden eksisterer der et specielt punkt  $(y_c, H_c)$ , hvor der netop kun er en løsning. Strømningen her betegnes *kritisk strømning* og den tilhørende dybde  $y_c$  betegnes *kritisk dybde*.

For det område, hvor der findes 2 løsninger for dybden, kan disse illustreres med følgende figur



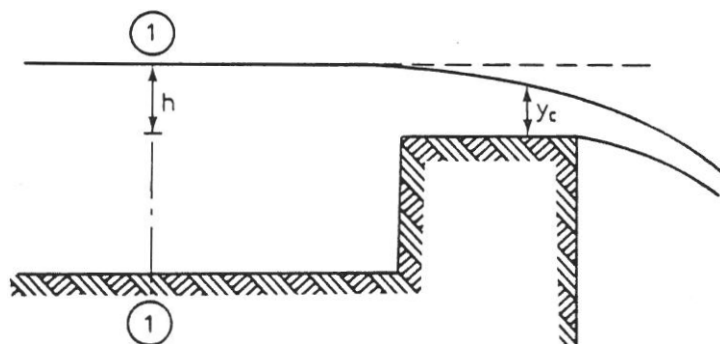
Figur 8-3 To mulige løsninger til energiligningen ved overløb

Pointen er nu, at det ikke er muligt ud fra ligningerne at afgøre hvilken af de løsninger, der er den korrekte. Når det drejer sig om vandløb afgøres dette af omstændighederne uden for figuren dvs. af forholdene nedstrøms for overløbet. Hvis vandspejlet ligger højt nedstrøms forekommer et dykket overløb (til venstre i figuren) hvor overløbskanten passeres med strømmende bevægelse ( $Fr < 1$ ) med kun et mindre energitab, hvorimod et lavt vandspejl (højre side i figuren) nedstrøms fører til at overløbskanten passeres med kritisk dybde og hastighed ( $Fr = 1$ ), hvor der så sker et stort energitab i det hydrauliske spring, der optræder for enden af overløbs skråningen.

Hvis der nedstrøms for overløbet er en længere strækning med ensformigt tværsnit og konstant fald vil det være *naturlig dybde* for denne strækning, der vil bestemme nedstrøms vandspejls beliggenhed.

### Overløbsformler

For egentlige overløb hvor strømninger er kritisk er der entydig sammenhæng mellem højden  $h$  før overløbet og vandføringen. (Energi- og kontinuitetsligningen har undtagelsesvist kun en løsning). Derfor kan denne sammenhæng udledes af disse to ligninger. (I herværende udledning ses endvidere bort fra hastighedsfordelingskoefficienten  $\alpha$ , hvilket i de fleste praktiske tilfælde er uden betydning).



Figur 8-4 Bred overløbskant

Det er ikke vigtigt at vide præcist hvor på overløbskanten at der netop er kritisk dybde, men da der opstrøms er strømmende og nedstrøms strygende bevægelse ved vi at der er kritisk strømning et sted på overløbskanten. Dvs.

$$F_{r,0} = \frac{V_c}{\sqrt{g y_c}} = 1$$

Indsættes heri kontinuitetsligningen  $q = V_c y_c$  fås

$$q = y_c \sqrt{g y_c} \quad (1)$$

Servi nu igen på energiligningen fra snit 1 til det snit der har kritisk strømning giver herefter

$$h = y_c + \frac{V_c^2}{2g} = y_c + \frac{1}{2} F_{r,0}^2 y_c = \frac{3}{2} y_c \quad (2)$$

kombineres ligning (1) og (2) fås

$$q = \frac{2}{3} h \sqrt{g \frac{2}{3} h}$$

Som der er tradition for skrives denne formel som

$$q = h \sqrt{\frac{4}{27}} \sqrt{2 g h} \quad \text{eller} \quad = 0,385 h \sqrt{2 g h} \quad (3)$$

Dette er den klassiske overløbsformel for et bredt overløb uden kontraktion fra siderne og for det tilfælde at hastighedshøjden opstrøms kan negligeres

For andre overløb, for eksempel skarpkantede over overløb, overløb med sidekontraktion mv., benyttes den generelle formel (4)

$$Q = C b h \sqrt{2 g h}$$

hvor  $Q$  er vandføringen,  $C$  er den såkaldte overløbskonstant (dimensionsløs) og  $b$  er bredden af overløbet.

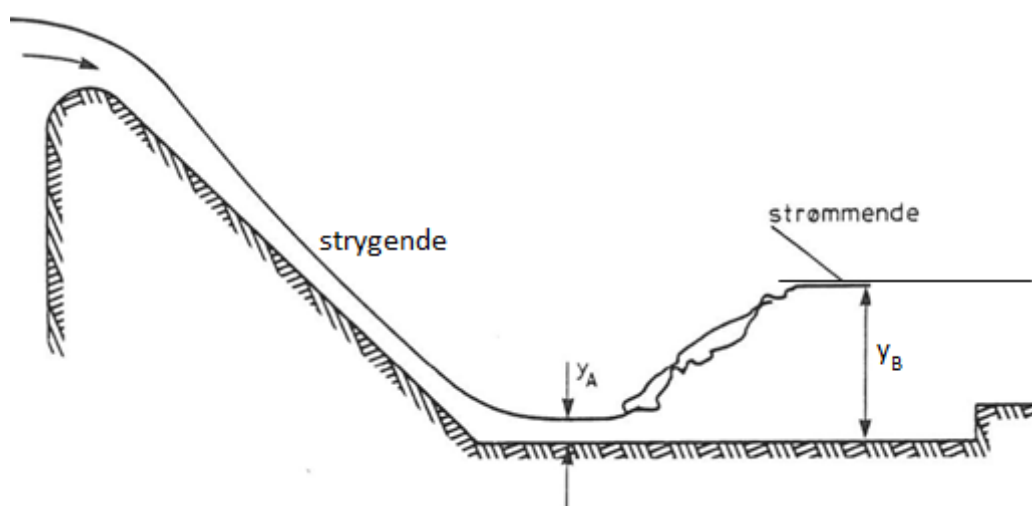
Overløbskonstantens størrelse afhænger af geometrien af overløbet og må bestemmes ved modelforsøg, men værdien af  $C$  ligger normalt i omegnen af 0,40 svarende til ovenstående teoretiske værdi (0,385). Den omfattende speciallitteratur indeholder mange eksempler herpå. Endvidere ses i litteraturen forskellige ikke-dimensionskorrekte overløbsformler af typen

$$Q = c b h^{3/2}$$

hvor konstanten  $c$  afhænger af det anvendte enhedssystem (og i øvrigt indeholder værdien af  $g$ ).

## 9. Hydraulisk spring

Overgangen fra strømmende til strygende bevægelse, som det for eksempel ses ved et overløb, forløber erfaringsmæssigt glat og uden særlige problemer. Den modsatte vej, fra strygende til strømmende bevægelse, giver anledning til et særdeles effektfuldt fænomen betegnet *hydraulisk spring*.



Figur 9-1 Hydraulisk spring

Det kan vises, at det hydrauliske spring kun optræder såfremt de to dybder  $y_A$  og  $y_B$  korresponderer i overensstemmelse med følgende formel

$$y_B = \frac{y_A}{2} + \sqrt{\frac{2 y_c^3}{y_A} + \frac{y_A^2}{4}}$$

hvor  $y_A$  er vanddybden umiddelbart opstrøms for det hydrauliske spring,  $y_B$  er vanddybden umiddelbart nedstrøms og  $y_c$  er kritisk dybde beregnet efter formel i foregående afsnit. Denne ligning er udviklet ved en kombineret anvendelse af impuls-ligningen (dvs. den hydrauliske version af fysikkens bevægelsesmængdeligning) og kontinuitetsligningen.

Da det som nævnt er en forudsætning for tilstedeværelsen af det hydrauliske spring, at dybderne korresponderer efter formel (1) vil man ofte i praksis se at placeringen af det hydrauliske spring i vandret retning er meget ustabil. Derfor vil man ofte lokalt uddybe vand løbet en kort strækning efter bygværket for at fiksere det hydrauliske spring til dette område (se Figur 9-1).

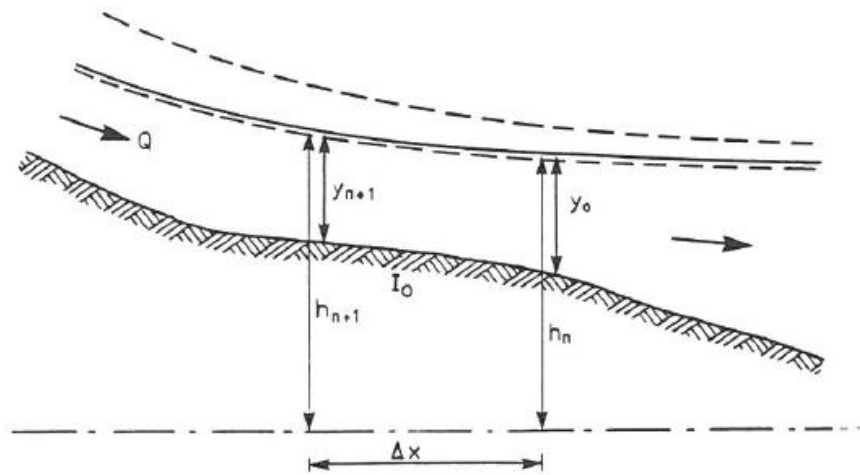
Det hydrauliske spring giver anledning til et stort energitab og megen turbulens. Såfremt man nedstrøms for et bygværk kan forudse, at der vil forekomme et hydraulisk spring, vil det normalt være nødvendigt at etablere en bundsikring for at hindre erosion.





## Beregning af stuvnings- og sænkingskurver

I det følgende gives et eksempel på, hvorledes man kan foretage en numerisk stuvningsberegning i et trapezformet vandløb. Det forudsættes, at der foregår stationær strømmende bevægelse (subkritisk). Beregningen må starte ved et *bestemmende tværsnit* og beregningen må, da strømmingen er subkritisk, arbejde sig op mod strømretningen.



Figur 10-2 Stuvningsberegning

Energiligningen mellem de to viste snit bliver herefter

$$h_{n+1} + \frac{\alpha V_{n+1}^2}{2g} = h_n + \frac{\alpha V_n^2}{2g} + \Delta H \quad (1)$$

og da

$$(h_{n+1} - y_{n+1}) - (h_n - y_n) = I_0 \Delta x \quad (2)$$

hvor  $I_0$  er bundhældningen, og indsættes (2) i (1) fås

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\alpha V_n^2}{2g} - \frac{\alpha V_{n+1}^2}{2g} + \Delta H - I_0 \Delta x \quad (3)$$

Indføres kontinuitetsligningen  $V = Q/A$  fås

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\alpha Q^2}{2g} \left[ \frac{1}{A_n^2} - \frac{1}{A_{n+1}^2} \right] + \Delta H - I_0 \Delta x \quad (4)$$

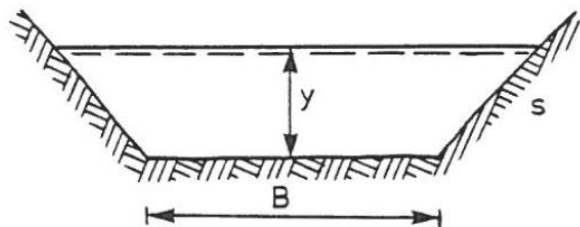
Energitabet  $\Delta H$  bestemmes af Manningformlen

$$\Delta H = \frac{V^2}{M^2 R^{4/3}} \Delta x \quad (5)$$

og da Manningformlen skal dække strækningen mellem de to snit benyttes middelværdier af  $A$  og  $R$  og vi får

$$\Delta H = \frac{Q^2 \Delta x}{M^2 \left( \frac{R_{n+1} + R_n}{2} \right)^{4/3} \left( \frac{A_{n+1} + A_n}{2} \right)} \quad (6)$$

Det antages som nævnt at tværsnittet er trapez-formet



Figur 10-3 Trapez-formet tværsnit

Tværsnitsarealet  $A$  som funktion af vanddybden  $y$  er  $A = y B + y^2 s$

hvor  $B$  er bundbredden og  $s$  er skråningsanlægget

Våd omkreds er  $= b + 2 y \sqrt{1 + s^2}$

Hydraulisk radius er  $R = \frac{A}{P}$

### Iterativ beregning

Beregningen af en stuvnings- eller sænkningkurver er iterativ i dobbelt forstand. Ved strømmende bevægelse må kurven beregnes skridt for skridt op i mod strømmen (modsat ved strygende, hvor der beregnes med strømmen). Formel (6) kan opfattes som en del af formel (4) således at formel (6) i hver skridt beregnes først, så  $\Delta H$  kan indsættes i (4). Iterationen sker simpelt med formel (4), hvor der i første skridt antages at  $y_{n+1} = y_n$  hvoraf formelen giver en ny  $y_{n+1}$ . Med denne nye  $y_{n+1}$  opdateres  $A$ ,  $R$  og  $\Delta H$  og  $y_{n+1}$  beregnes igen. Dette gentages indtil en stabil værdi for  $y_{n+1}$  er bestemt. Antallet af iterationer vil bl.a. afhænge af stedskridtet  $\Delta x$ . Tages for store skridt kan beregningen blive ustabil.

Beregningen må som nævnt starte i et *bestemmende tværsnit* hvor vandstanden kendes (dvs. ved en randbetingungelse, som er uafhængig af hvad der sker i de tværsnit, som skal beregnes). Dette kan for eksempel være ved vandløbets udløb i havet eller ved et overløb hvor overløbskanten passeres med kritisk dybde. En beregning kan ikke starte et tilfældigt sted i et vandløb. Man skal desuden være opmærksom på at start-tværsnittet som regel ikke er trapez-formet. I første skridt skal der derfor for start-tværsnittet bruges værdier af  $A_1$  og  $R_1$ , der passer til tværsnittets form.

### Forsimplet beregning af stuvnings- og sænkningkurver

Såfremt man kan acceptere en mindre nøjagtig beregning i langsomt løbende vandløb og kanaler (dvs. når Froudetal  $\ll 1$ ) kan man opnå en lettere og hurtigere beregning ved at se bort fra hastighedshøjderne i energiligningen. Herved reduceres ligning (4) til følgende ligning

$$y_{n+1} = y_n + \Delta H - I_0 \Delta x \quad (7)$$

Hvor energitabet  $\Delta H$  uændret bliver

$$\Delta H = \frac{Q^2 \Delta x}{M^2 \left( \frac{R_{n+1} + R_n}{2} \right)^{4/3} \left( \frac{A_{n+1} + A_n}{2} \right)} \quad (8)$$

Iteration sker i øvrigt på samme måde som ovenfor beskrevet.

## 11. Vandløbsbundens stabilitet mod erosion

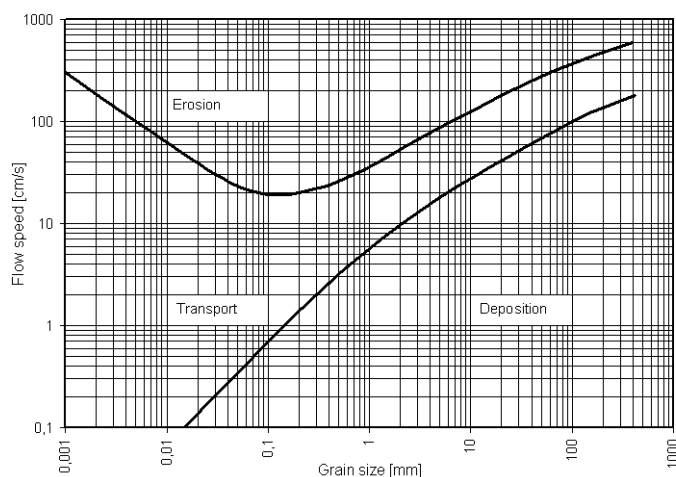
Sedimenttransport i vandløb og vandløbsmorfologi er omfattende og komplicerede emner som ikke skal gennemgås i dette kompendium. Dog skal et par enkelte punkter omtales i dette kapitel

Aluviale lavlandsvandløb som de danske løber i en vandløbsseng bestående af de sedimenter som transporteres igennem vandløbet. For naturvandløb kan man derfor gå ud fra at det er det afstrømmende vand der har skabt vandløbets geometriske form (bredde og dybde). Som følge heraf løber de lidt større vandløb næsten altid med hastigheder, der forholdsvis ens, i området 0,25 - 0,6 m/s. Dette er helt i modsætning hvad man ser i menneskabte afløbssystemer (kloakker og betonkanaler), hvor det er en normal målsætning at have så store strømhastigheder at sedimenterne skylles ud af systemerne. I vandløbene må tankegangen i sagens natur være den omvendte.

På grund af ønsket om at kunne styre vandet på forsvarlig vis gennem vandløbene vil der kunne optræde situationer, hvor man af forskellige årsager ønsker at specielle vandløbsstrækninger skal passeres med en højere strømningshastighed end den normale. Dette vil uundgåeligt føre til erosion, hvis ikke bunden sikres med tilstrækkeligt grovkornet materiale (grus) som er stabilt ved den pågældende strømhastighed (eller rettere bundforskydningsspænding) som beskrevet i det følgende.

### Hjulströms diagram

Den simpleste (og mindst nøjagtige) metode til at vurdere bundens stabilitet er anvendelsen af nedenstående diagram udarbejdet af den svenske geograf Filip Hjulström (1902-1982)



Figur 11-1 hjulströms diagram

Den skrå linie i diagrammet, der adskiller områderne transport og deposition angiver den sammenhæng mellem strømningshastighed og kornstørrelse (sigtediameter) hvor vandløbsbunden netop bliver ustabil og bundsedimentet begynder at bevæge sig.

Hjulströms diagram er fastlagt helt empirisk på grundlag af observationer i svenske vandløb, hvilket naturligvis er en kvalitet, men diagrammet har store begrænsninger blandt andet fordi vanddybden og massetætheden af sedimentets korn ikke indgår.

## Shields formel og diagram

Den almindeligt videnskabeligt accepterede metode for at bestemme vandløbsbunden stabilitet er udviklet på grundlag af rationelle hydrauliske principper af Albert F. Shields (1908-1974). Princippet bygger på den tankegang at stabiliteten af bundmaterialet må afhænge af balancen mellem de kræfter der forsøger bringe partiklerne i bevægelse (de drivende kræfter) og de kræfter der holder partiklerne tilbage (de stabiliserende kræfter).

De drivende kræfter er bundforskydningspændingen  $\tau$  og i forhold til det enkelte korn med korndiameteren  $d$  bliver den drivende kraft  $F_d$  proportional med  $F_d \approx \tau d^2$

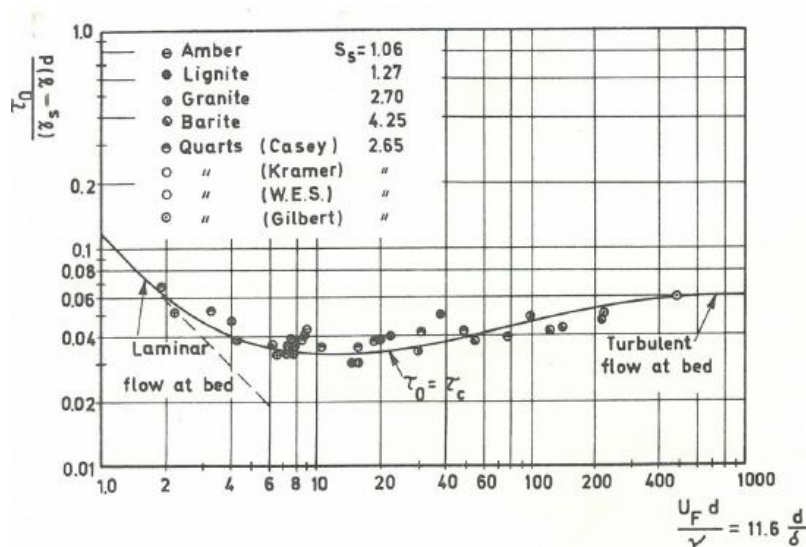
Den stabiliserende kraft  $F_s$  er tyngdekraften reduceret med opdriften og denne bliver herefter proportional med  $F_s \approx (\rho_k - \rho_w) g d^3$ , hvor  $\rho_k$  er densiteten af kornene (ofte 2650 kg/m<sup>3</sup>) og  $\rho_w$  er densiteten af vandet (normalt 1000 kg/m<sup>3</sup>).

Shields' påstand var herefter at grænsen for at partiklerne netop begynder at bevæge sig, afhænger af en dimensionsløs parameter (betegnet Shields parameter)  $\theta$  som er forholdet mellem de drivende og stabiliserende kræfter (dvs. forholdet mellem strømkraften og tyngdekraften):

$$\theta = \frac{\tau d^2}{(\rho_k - \rho_w) g d^3} = \frac{\tau}{(\rho_k - \rho_w) g d} \quad (1)$$

Af formelen ses at man også kan opfatte  $\theta$  som den dimensionsløse bundforskydningsspænding. Fordelen ved at introducere en dimensionsløs parameter er, at problemets dimensioner reduceres betydeligt.

Shields (og siden mange andre forskere) udførte herefter eksperimenter for at finde den kritiske værdi  $\theta_{krit}$  hvor netop partiklerne begynder at bevæge sig (Figur 11-2). Som det ses af figuren dækkede forsøgene korn-densiteter i intervallet 1060 – 4250 kg/m<sup>3</sup>. Da den turbulente strømning helt tæt på bunden omkring kornene vil ske i det viskose (laminære) vægslag er det naturligt at forvente at resultaterne af  $\theta_{krit}$  fra eksperimenterne vil være afhængige korn-Reynoldstallet  $Re_{e,k} = d u_f / \nu$  som derfor i plottet benyttes som den uafhængige variable. ( $u_f$  er friktionshastigheden givet ved  $u_f = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ ). De særlige problemer ved bestemme bundforskydningsspændingen omtales senere.



Figur 11-2 Shields' og andres målinger af dimensionsløs kritisk forskydningsspænding  $\theta_{krit}$

Fra Figur 11-2 ses at man normalt kan regne med, at den dimensionsløse kritiske bundforskydningsspænding antager en værdi på ca.  $\theta_{krit} = 0,045$  som er den værdi som anbefales ved fastlæggelse af den mindste korndiameter for det grus- eller stenmateriale som må udlægges på vandløbsbunden, såfremt bunden ønskes stabiliseret.

Af formel (1) kan man herefter bestemme den mindste korndiameter  $d_{min}$  til

$$d_{min} = \frac{\tau}{\theta_{krit} (\rho_k - \rho_w) g} \quad (2)$$

Forskydningsspændingen  $\tau$  må beregnes af Cobrooke og Whites formel eller af Mannigformelen idet erfaringen viser at den ækvivalente sandruhed  $k$  af bundbeskyttelseslaget er ca. 2,5 gange konstørrelsen  $d$  i laget.

[Umiddelbart skulle man have forventet at den ækvivalente ruhed skulle være lig med kornstørrelsen, fordi det jo netop er sådan at sandruheden er defineret, men den praktiske erfaring fra felt- og laboratorieforsøg viser, at løst liggende korn lejret på bunden medfører en ækvivalent ruhed, der der er noget større end kornstørrelsen. Forskellen kan ligge i at den ækvivalente sandruhed blev defineret ud fra at sandkornene var fastlimet til en rørvæg.]

Beregningsproceduren må nødvendigvis være iterativ. Indledningsvis skønnes en korndiameter. Dernæst beregnes hastighed, dybde og bundforskydningsspænding (enten som naturlig dybde eller ved en stuvningsberegning). Herefter beregnes  $d_{min}$  efter formel (2). Nu kan en ny korndiameter skønnes og der startes forfra.

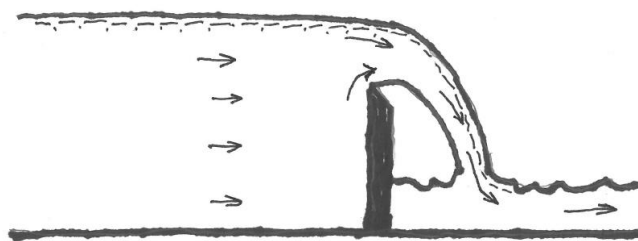
## 12. Styr og stryg

Styr og stryg forekommer meget sjældent i naturlige danske vandløb, men benyttes ofte både i vandløb og afløbssystemer til styring af vandstandsforholdene i søer, damme og bassiner. Hydraulisk set er de helt forskellige fordi vandet passerer styr med kritisk hastighed (Froude tal = 1) og hvorimod vandet passerer stryg med strømmende bevægelse (Froude tal < 1).

### Styr

Et styr er en overløbskant hvorfra vandet som en fri stråle falder ned mod nedstrøms vandspejl således at den skabte kinetiske energi tabes ved kraftig turbulens. Mange af disse styr blev etableret i forbindelse med de mange afvandingsprojekter, der blev udført især i perioden 1850 – 1950, hvor mange meanderende vandløb blev rettet ud til ensrettede kanaler. Herved blev vandets vej i landskabet reduceret, således at faldet pr. længdeenhed blev forøget. Med forøget fald opstår højere strømningshastigheder og tilhørende risiko for erosion. For at imødegå dette etablerede man derfor disse lokale opstemninger under vejs i forløbet (Figur 12-1).

Af hensyn til den kraftige turbulens må der etableres en effektiv bundbeskyttelse ved udlægning af sten umiddelbart nedstrøms for styr.



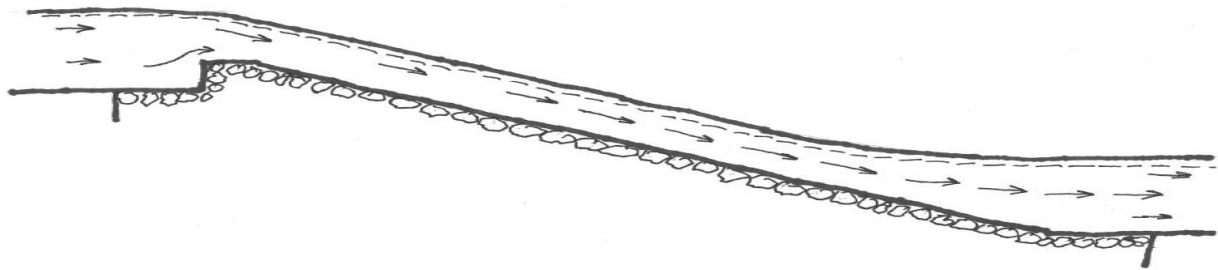
Figur 12-1 Styr - skarpkantet overløb

Styr og overløbskanter benyttes desuden ofte for at stabilisere vandspejlet i vandløb i søer og damme plus i vandløb, som udnyttes i rekreative sammenhænge. De hydrauliske beregninger i forbindelse med styr er omtalt i Kapitel 10 om overløb.

### Stryg

Et stryg er en kort stejl vandløbstrækning, hvor der opnås en stor strømhastighed og tilhørende stort energitab. Funktionsmæssig et stryg samme formål som et styr, nemlig at slippe af med overskydende mekanisk energi på kontrolleret måde. Stryg etableres ofte for at erstatte styr fordi en væsentlig ulempe ved brug af styr i vandløb er at fisk og anden fauna ikke kan passere.

Den mest effektive løsning på dette problem er etablering af et stryg, hvor man opretholder et sammenhængende og kontinuert vandspejl henover det højdespring, der var skabt af styrtet. Dette gøres ved at forbinde opstrøms- og nedstrøms vandspejl med en kort og relativ stejl vandløbstrækning, hvor bunden udgøres af et sten- eller grusmateriale, der kan modstå den forhøjede vandhastighed som opstår på grund af den store hældning. For at undgå at der opstår et hydraulisk spring for enden af stryget er det vigtigt at undgå at der opstår strygende bevægelse (altså at Froudes tal holdes under én).



Figur 12-2 Stryg med strømmende bevægelse

Et stryg skal opfylde følgende betingelser:

1. Vandhastigheden (set i sammenhæng med strygets længde) må ikke være større end at de fiskearter, der forventes at benytte stryget kan passere ved normale afstrømningsforhold.
2. Der må kun være strømmende bevægelse på stryget og der må ikke optræde kritisk strømning, fordi der i så fald vil dannes et hydraulisk spring for enden af stryget hvilket kan vanskeliggøre passagen af fisk og eventuelt skabe erosion
3. Bundsikringen (stenmaterialet) i stryget skal være stabilt også ved de ekstreme vandføringer.

Da der som nævnt skal være strømmende bevægelse hele vejen nedstrøms til opstrøms vandspejl er de aktuelle vandspejls beliggenhed ikke bestemt af de lokale forhold. Stryget er således at betragte som et såkaldt dykket overløb (uden kritisk strømning). Ofte kan det forudsættes at det nedre vandspejl bestemmes af at der eksisterer naturlig dybde i nedstrøms vandløb. Med dette som udgangspunkt må der herefter foretages en stuvningsberegning opad stryget til toppunktet af dette. Fra toppunktet fortsættes med en stuvnings/sænkings-beregning videre i opstrøms vandløb.

Er toppunktet af stryget udløbet fra en sø må man gøre sig klart at søens vandspejl er bestemt af forholdene på stryget, hvis stryget er så langt at der opstår naturlig dybde på stryget. Er stryget kort har vandspejlet nedstrøms stryget også betydning.

At få opfyldt alle ovennævnte betingelser for alle forekommende vandføringer kan være en kompleks opgave. Hvorvidt kompromisser er acceptable må vurderes i det konkrete tilfælde.

Til fastsættelse af strygets geometri for en given niveauforskel en given vandføringsfordeling er frihedsgaderne strygets fald og bredde samt det stenmateriale som må sikre bunden mod erosion.



### 13. Måling af vandføring

I Danmark eksistere omkring 500 vandføringsmålestationer som kontinert overvåger afstrømningen i ca. halvdelen af landets areal. På enkelte undtagelser nær måles vandføringen indirekte via en vandstandsmåler, der løbende registrerer vandstanden, som transmitteres trådløst til en central computer. Den registrerede vandstand omsættes herefter til en vandføring via en såkaldt Q/h-kurve (vandføring/vandstandskote-kurve). Dette betegnes ofte Q/h-metoden.

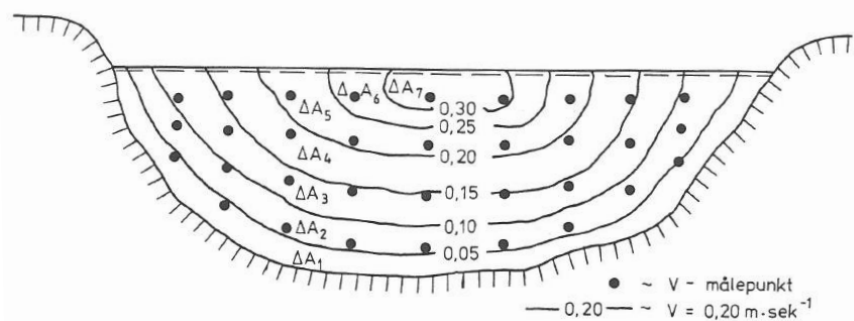
Q/h- kurven dannes af et større antal Q/h-målinger, hvor vandføring og vandstandskote måles samtidigt. Derfor følger her en beskrivelse af hvorledes disse vandføringsmålinger foretages.

I fremtiden må det forventes at direkte måling af vandføring med ultralyd/doppler udstyr bliver udbredt.

#### Manuel måling af vandføring

Manuel måling af vandføring foretages normalt med det som ofte betegnes en vingemåling, som dækker over at målingen foretages med en propel der oftest har en diameter på enten 3 eller 10 cm. Målingerne bør foretages på standardiseret måde (Ovesen, 2011).

Vandhastigheden varierer over vandløbstværsnittet som skitseret på Figur 13-1.

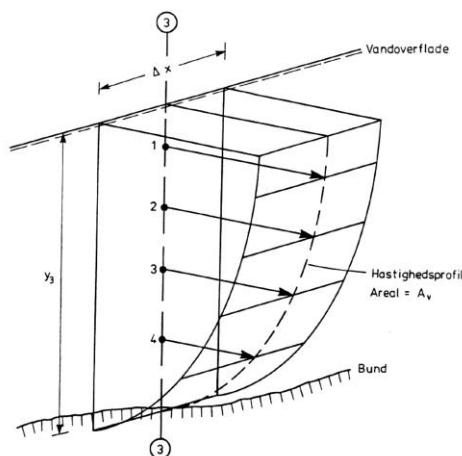


Figur 13-1 Tværsnit for vandføringsmåling

Måletværsnittet lægges normalt vinkelret på strømmingen. Over dette tværsnit fordeles vandføringsmålingen over et antal punkter, hvor hastigheden  $u_i$  måles i hvert punkt, hvortil er knyttet et delareal  $\Delta A_i$ . Den samlede vandføring  $Q$  bliver herefter:

$$Q = \sum_{i=1}^n u_i \Delta A_i$$

Fordelingen af punkterne organiseres af praktiske grunde normalt i vertikaler, som ses på Figur 13-2.



Figur 13-2 Målepunkter for strømhastighed i vertikal

Ved placering af målepunkterne bør det tilstræbes at hvert punkt repræsenterer nogenlunde samme delareal af det samlede tværsnitsareal.

### Automatisk måling af vandføring med ultralyd/doppler udstyr

Gennem de seneste årtier har der foregået en udvikling af udstyr til hastighedsregistrering af strømning i meget forskellige strømningssystemer baseret på doppler-effekten af ultralyd. Sådant udstyr eksisterer og benyttes i særdeles forskellige sammenhænge lige fra strømninger i blodårer til vandudvekslingen gennem Store Bælt, hvor udsyret betegnes *Acoustic Doppler Current Profilers (ADCP)*. Med ultralyd måles både hastigheden (ved doppler-effekten) og målepunktets afstand fra transduceren (ved forsinkelsen). Af økonomiske grunde har denne form for udstyr kun været meget begrænset anvendt i vandløb i Danmark hidtil, men det er gradvis ved at vinde indpas.

Med dette udstyr vil mange af de svagheder der er indeholdt i den nuværende Q/h-metode blive afhjulpet og mere nøjagtige resultater vil fremkomme. Da også systematiske fejl vil reduceres vil kontinuiteten i måleserierne i en vis grad brydes og langtidsvurderinger, som bygger på nye og gamle målinger, vanskeliggøres.

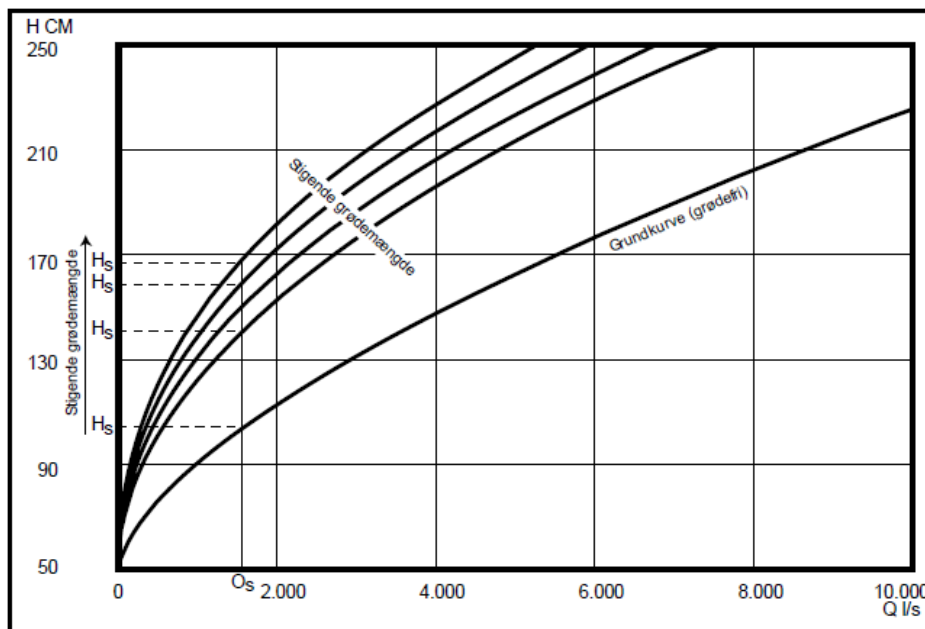
### Måling af vandstand

Vandstanden blev tidligere målt med flyder nedsænket i rør, hvor flyderen hang i en tynd line som løb over en tromle hvorpå vandspejlsvariationerne blev optegnet på en papirstrimmel. I dag måles udelukkende med elektronisk tryktransducer nedsænket under vandoverfladen.

Ofte transmitteres de målte vandstandsdata on-line til en central overvågningscomputer. På hjemmesiden [www.hydrometri.dk](http://www.hydrometri.dk) (drevet af fa. Orbicon A/S) ses aktuelt målte vandstande for mange stationer landet over.

### Q/h-kurver og bestemmelse af daglig vandføring

På grundlag af et antal sammenhørende målte Q/ h-værdier kan en Q/h-kurve optegnes. Grundkurven optegnes på grundlag af værdier fra den grødefrie vinterperiode. Q/h-kurverne for perioden med grøden flytter sig gradvist opad og kan kun antages at være konstant i få dage



Figur 13-3 Q/h-kurver. Grundkurve, plus grødekurver der er konstrueret ud fra styrekoter (se teksten)

Grundkurven antages ofte at følge følgende udtryk

$$Q = K (h - h_0)^n \quad (15-1)$$

Hvor  $K$ ,  $h_0$  og  $n$  er konstanter, der tilpasses efter mindste kvadraters metode.

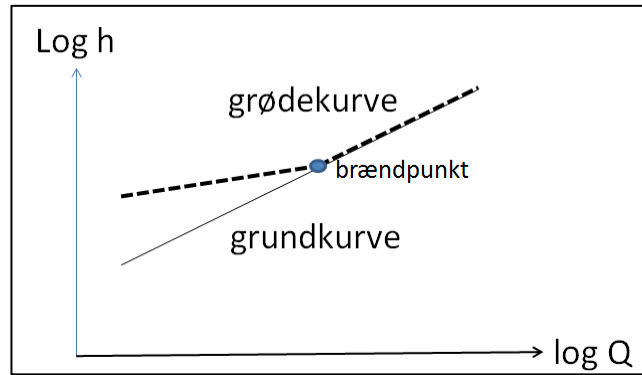
Traditionelt optegnes Q/h-kurven med logaritmisk skala fordi der hermed opnås et rellinet forløb. Formel (15-1) omskrives hermed til

$$\log(Q) = \log(K) + n \log(h - h_0) \quad (15-2)$$

Q/h-kurver for grødeperioden (normalt maj til november) er vanskeligere at opstille, fordi grøden ændrer sig hurtigt og fordi vandføringen normalt kun måles én gang månedligt. Derfor er der udviklet forskellige tilnærmede metoder, som bygger på at Q/h-kurven kan fastlægges ud fra måling af kun et Q/h-punkt (til trods for, at der som bekendt og principielt set kræves to punkter til at fastlægge en linie). Her skal omtales *brændpunktmetoden* og *proportionalmetoden*.

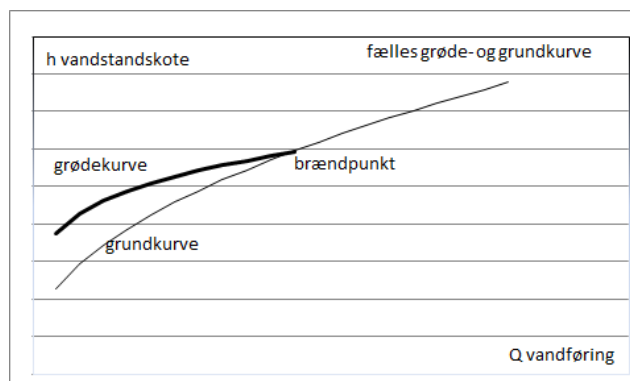
#### Q/h-kurver efter brændpunktmetoden

Denne metode bygger på antagelsen om at grøde-Q/h-kurverne (i dobbelt logaritmisk afbildning) har et fælles brændpunkt der svarer til at for vandføringer større end brændpunktsvandføringen vil det strømmende vand presser grøden helt ned mod bunden, så grødens bremsende virkning er forsvundet, så det derfor her er grundkurven der er gældende. Fastlæggelsen af brændpunktet kræver derfor, at der foreligger en godt bestemt grundkurve samt et datamateriale med flere sæt Q/h-målinger for forholdsvis store vandføringer i grødeperioden



Figur 13-4 Q/h-kurve ved brændpunktmetoden

I de sædvanlige afbildning med lineære akser bliver Q/h-kurven som vist på Figur 13-5.



Figur 13-5 Q/h-kurve ved brændpunktmetoden lineære akser

På grund af manglende data kan man ofte være nødsaget til at benytte en skønnet placering af brændpunktet. Dette er vanskeligt, fordi der ikke foreligger anderkendte retningslinier for hvorledes dette skøn bør foretages, og det betyder at særligt de store vandføringer bliver beregnet meget usikkert.

Da måleserierne i sagens natur gradvis forbedres med tiden vil det ofte være nyttigt at gå tilbage og omregne tidligere målinger med det forbedrede kalibreringsgrundlag, som er fremkommet.

Såfremt man alligevel ønsker at skønne placeringen af et brændpunkt må det fra et fysisk synspunkt anbefales at placere det i forhold til strømhastigheden  $V$  og ikke i forhold til vandføringen  $Q$ , da det er strømhastigheden der fremkalder grødens afbøjning. Med den foreliggende viden må det formodes at brændpunktet befinder sig ved en strømhastighed på 0,6 – 0,7 m/s. Da brændpunktet befinder sig på grundkurven kan den tilhørende vandføring findes ved iteration med hyalisk radius  $R = R(h)$  og tværsnitsareal  $A = A(h)$  samt Manningformlen med Manningtal  $M = \text{ca. } 30 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ . Efter dette princip vil brændpunktets placering være afhængigt af vandløbets fald.

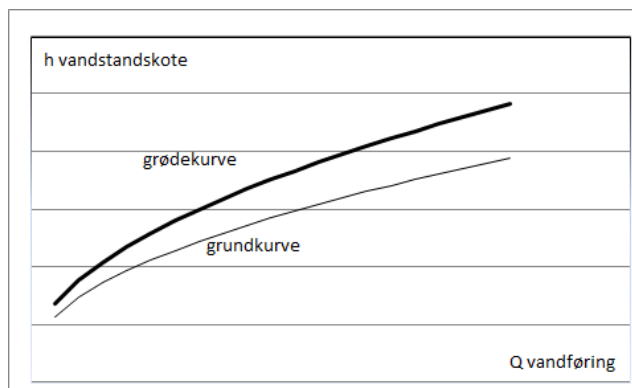
#### *Q/h-kurver efter proportionalmetoden*

Ved proportionalmetoden antages at den tidligere omtalte formel for grundkurven, dvs. Formel (15-1), med tilhørende konstanter  $h_0$  og  $n$  også er gældende i grødeperioden dog således at konstanten  $K$  tilpasses ved hjælp at det målte Q/h-punkt.

$$Q = K (h - h_0)^n \quad (15-1)$$

Erfaringsmæssigt giver proportionalmetoden rimelige resultater ved almindelige daglige vandføringer, som for eksempel bruges til beregning af transporterede opløste stoffer over længere perioder. Derimod under-

vurderer metoden de moderat store og ekstremt store vandføringer i tydelig grad. I forbindelse med de sommervandføringer der er kritiske i forhold bredfyldning af vandløbet er metoden uegnet.



Figur 13-6 Q/h-kurve ved proportionalmetoden

Ved proportionalmetoden (Figur 13-6) antages at grødens relative virkning er den samme ved alle vandføringer. I øvrigt er proportional- og brændpunktmetoderne ens såfremt brændpunktet er placeret uendeligt højt i forhold til vandspejlet.

Proportionalmetoden vil i de fleste tilfælde i praksis undervurdere de lidt sjældnere kraftige vandføringer i grødesæsonen, fordi metoden ikke tager hensyn til at strømmingen afbøjer grøden og derved reducerer den hydrauliske ruhed. Dette kan være mindre vigtigt såfremt formålet er at beregne for eksempel års- eller månedsgennemsnit til bestemmelse af vandbalance eller transport af opløst stof. Gælder det imidlertid sedimenttransport, erosion samt oversvømmelse, hvor de store vandføringer har stor relativ indflydelse, er det tvivlsomt om vandføringer beregnet efter proportionalmetoden giver rimelige resultater.

#### Beregning af daglig vandføring - kontrolvandføring og kontrolkote

Som hjælpemiddel til at beregne daglig vandføring ud fra målt vandstandskote indføres hjælpestørrelserne *kontrolvandføring* og *kontrolkote* (også betegnet *styrevandføring* og *styrekte*). *Kontrolkoten* defineres som den vandstandskote som hører til en arbitrært valgt men fastholdt *kontrolvandføring*.

Til bestemmelse af daglig vandføring ud fra målt daglig vandstand kræves en daglig gældende Q/h-kurve bestemt enten ved brændpunktmetoden eller proportional metoden. I begge tilfælde behøves et dagligt Q/h-punkt.

Et dagligt Q/h-punkt bestemmes herefter ved kontrolvandføringen og en vandstandskote, der beregnes ved lineær interpolation af kontrolkoten mellem nærmest foregående og nærmest efterfølgende tidspunkt, hvor kontrolkoter har været bestemt ud fra Q/h-målinger.

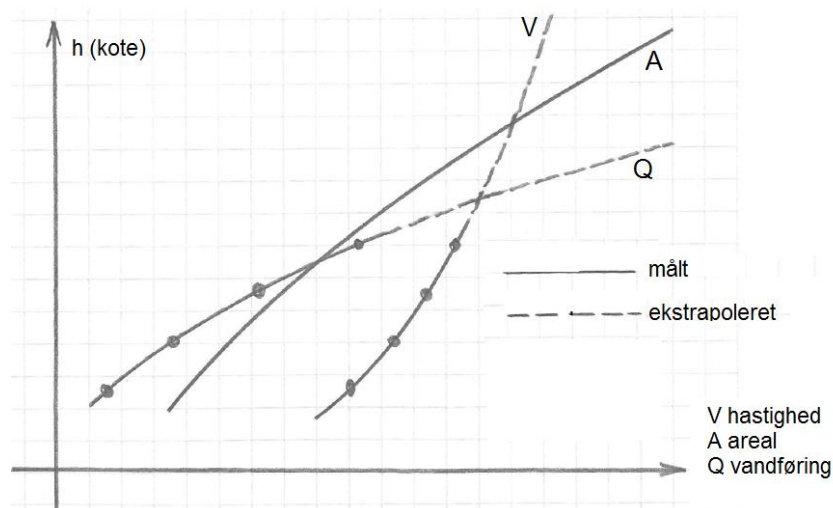
#### Ekstrapolation af Q/h-kurver til ekstreme værdier

Man har ofte behov for at ekstrapolere Q/h-kurver til store værdier, der ligger uden for det interval der er dækket af Q/h-målingerne fordi disse sjældent er foretaget ved ekstremt store vandføringer. Derfor vil der være en betydelig usikkerhed knyttet til bestemmelse af ekstreme vandføringer ved brug af Q/h-kurver.

Den simpleste ekstrapolation er blot at benytte formel (15-1) så langt ud som der er behov for. Hvis brændpunktmetoden benyttes og hvis brændpunktet er et "sandt" brændpunkt fastlagt ud fra Q/h-målinger opnås en rimelig nøjagtighed. Men er brændpunktet blot gættet eller benyttes proportionalmetoden vil de ekstreme vandføringer ofte blive betydeligt overvurderede.

Usikkerheden ved ekstrapolationen af Q/h-kurverne til ekstreme forhold kan reduceres ved at ekstrapolere

strømhastigheden  $V$  i stedet for vandføringen  $Q$ , der som bekendt er produktet af tværsnitsareal og strømhastighed (Hersch, 2009). Hastigheden  $V$  varierer kun svagere med vandstandskoten end hvad  $Q$  gør, og kan derfor mere nøjagtigt ekstrapoleres til store værdier (ekstrapolationen af  $V$  kunne eventuelt gøres med hjælp af Manningformlen). Tværsnitsarealet er derimod opmålt og behøver derfor ikke at ekstrapoleres. Herved kan en mere nøjagtig ekstrapolation til de helt ekstreme forhold opnås. En principskitse af metoden ses på Figur 13-7.



Figur 13-7 Princip af ekstrapolation af middelhastighed i stedet for vandføring

Denne metode benyttes ikke i Danmark i praksis.

## 14. Litteratur

- Brorsen, M. og Larsen, T. (2009). Lærebog i Hydraulik. Aalborg Universitetsforlag.
- Herschy, R.W. (2009). Streamflow measurement. Third Edition. Rutledge. London
- Chow, V.T. (1959). Open-channel hydraulics. McGraw-Hill, New York
- Chanson, H. (2004). The Hydraulics of Open Channel Flow. Elsevier, New York.
- Ovesen, N. E. (2011). Teknisk anvisning for udførelse og beregning af vingemålinger. DCE – Aarhus Universitet.