C.G.N. van Veen

HiSPARC

1 Inleiding

In het voorjaar van 2015 start de LHC opnieuw op. Ditmaal met een hogere energie dan ooit tevoren. Protonen met een energie van 7,0 TeV zullen op elkaar botsen en bij deze botsingen hoopt men extra dimensies aan te tonen en aanwijzingen te vinden wat donkere materie is. Daarnaast zullen er interacties tussen Higgs bosonen onderzocht gaan worden.

2 Voorkennis

Van het natuurkunde programma van het VWO hebben leerlingen kennis nodig van impuls, energiebehoud,atoommodel en de beschikking hebben over een Binas. Daarnaast hebben leerlingen geleerd dat geladen deeltjes afbuigen in magneetvelden en dat geladen deeltjes versneld kunnen worden in elektrische velden. De energie van bewegende deeltjes (relativistisch) is:
$E^2 = E_0^2 + p^2 \cdot c^2 \rightarrow E^2 = m_0^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2$

Als achtergrondinformatie moet de LHC guide gedownload worden van de website van CERN en kan de presentatie van I. van Vulpen gebruikt worden. LHC-guide: `http://cds.cern.ch/record/1165534/files/CERN-Brochure-2009-003-Eng.pdf` Presentatie LHC: `www.nikhef.nl/~ivov/Talks/2009_10_14_FomVisiteNikhef.ppt`

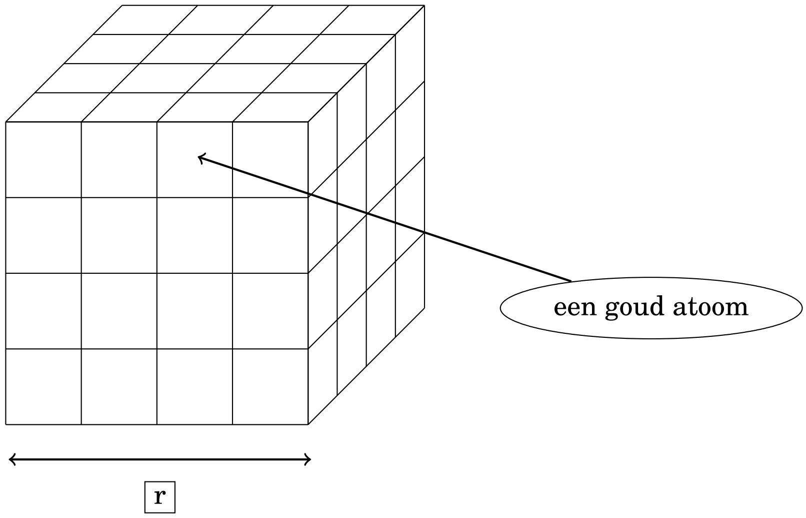
3 Opgaven atoombouw

Opdracht 1: Schat de grootte van een goudatoom. (We gaan uit van een kubusvormig blokje met zijden van 1 cm.)

> **Antwoord:** De molaire massa van goud is 197 g/mol en de dichtheid is 19,3 g/cm^3
> $n = \frac{m}{M} = \frac{\rho \cdot V}{M} = 0{,}098[mol]$
> $N = n \cdot N_A = 5{,}9 \cdot 10^{22}$
> Er zijn $5{,}9 \cdot 10^{22}$ atomen in de kubus van 1,0 cm^3 aanwezig. $V = r^3$ en $V' = a^3$
> Waar $V' = \frac{V}{N}$ het volume dat een goudatoom in het rooster inneemt.
> $a = \sqrt[3]{\frac{V}{N}} = 2{,}56 \cdot 10^{-8} cm \approx 2{,}6 \cdot 10^{-10} m$ Als ‘a’ de diameter is dan is de straal van het atoom is dus $\approx 1 \times 10^{-10}$ m.

Opdracht 2: Welke energie is nodig om met elektronen de innerlijke structuur van

(a) atomen te onderzoeken?



Antwoord: Om de structuur van atomen te onderzoeken heb je een resolutie nodig van 10^{-10} m. Er geldt (voor atomen):
$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{10^{-10}} = 6,626 \cdot 10^{-24} kgm/s$
$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} = 150eV$ Het gaat hier om niet relativistische elektronen omdat de benodigde energie minder is dan de rustenergie van elektronen.

(b) protonen en neutronen te onderzoeken?
(hint:Bedenk dat materie een golflengte heeft (de Broglie [1]) en dat de resolutie voor waarneming afhangt van de golflengte van het deeltje wat voor detectie moet zorgen.)

Antwoord: Kerndeeltjes hebben afmetingen kleiner dan 1×10^{-15} m. Er geldt (voor kerndeeltjes):
$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{10^{-15}} = 6,626 \cdot 10^{-29} kgm/s$
$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \approx pc = 1,24GeV$ Elektronen zijn met deze energie relativistisch.

Opdracht 3: Doordat we de afmetingen van neutronen en protonen weten, kunnen we schatten wat de massa is van het deeltje, dat voor de interactie tussen die twee zorgt. Gebruik hierbij de onzekerheidsrelatie van Heisenberg en de tijd die een deeltje nodig heeft om een afstand in de orde van grootte van een kerndeeltje af te leggen. De afstand tussen twee nucleonen is in de orde van 10^{-15} m.

Antwoord:

$r = c \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{r}{c} = \frac{10^{-15}}{3{,}0 \cdot 10^{8}} = 3,34 \cdot 10^{-24} s$

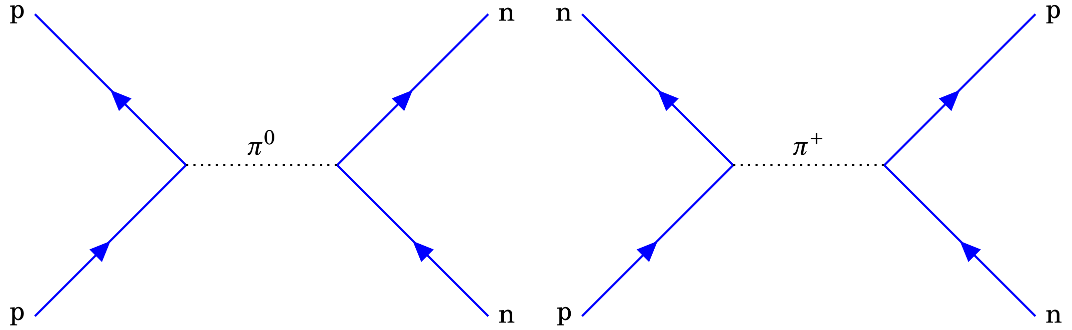
$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar \rightarrow \Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t} = 197 MeV$

[1] zie routenet: `http://www.hisparc.nl/docent-student/lesmateriaal/routenet`

Figuur 3.1 – Feynman voorstelling van sterke kernkracht door pionen.

(a) proton, neutron interactie met uitwisseling van π^0.

(b) Interactie tussen p en n onder uitwisseling van een π^+



$\hbar$ is $\frac{h}{2\pi}$ De onzekerheidsrelatie voor een afstand van 10^{-15} m geeft een afwijking in de energie van ongeveer 200 MeV. Een deeltje wat zorgt voor een interactie tussen twee nucleonen zou dus een massa moeten hebben in de orde grootte van 200 MeV, maar kan slechts 10^{-24} s bestaan. Yukawa voorspelde het π -meson en Powell ontdekte het deeltje met een massa van 140 MeV. Yukawa kreeg in 1949 de Nobelprijs.

4 Versnellers

In de LHC guide (die je kunt downloaden van de Cern site) vind je informatie over de LHC en over de bundels protonen, die deze versneller tot dichtbij de lichtsnelheid en vervolgens laat botsen in detectoren zoals CMS en ATLAS. Om een betere voorstelling te kunnen maken gaan we even rekenen aan de eigenschappen van de protonen bundels in de LHC.

Opdracht 4: Vergelijk de dichtheid in een protonenbundel in de LHC met de dichtheid van zuurstof en goud (beide bij kamertemperatuur). Een bundel protonen is een cilinder met een lengte van 15 cm en een straal van 17×10^{-6} m, met zo'n 10^{11} protonen. (We rekenen niet relativistisch vanuit de bundel zelf.)

Antwoord:

De dichtheid van goud kun je opzoeken in Binas. Dit tabellenboek geeft een waarde van ρ is 19,3 kg/m^3. Dit kun je omrekenen naar een ρ van 19,3 g/cm^3. Bij zuurstof gebruiken we dat er een mol zuurstof in 22,4 L gaat.

$\rho_0 = \frac{n \cdot M}{V} = \frac{1mol \cdot 16g/mol}{22{,}4L} = 7,14 \cdot 10^{-4} g/cm^3$

Voor de dichtheid in de bundel geldt:

$\rho_{bundel} = \frac{m}{V} = \frac{n_p \cdot m_p}{\pi \cdot r^2 \cdot l} \approx 1,23 \cdot 10^{-3} g/cm^3$

De dichtheid van de bundel is laag, maar heeft een iets grotere dichtheid dan een gas.

5 LHC

In de LHC guide kun je op pagina 30 veel specificaties opzoeken over de LHC.

Opdracht 5: Zoek de omtrek van de LHC en de maximale magneetveldsterkte op van de supergeleidende magneten.

Antwoord: blz. 30 $L = 26659[m]B = 8,33[T]$

Opdracht 6: Wat is de maximale energie, die een versneller met de lengte van de LHC en het gegeven magneetveld, kan meegeven aan protonen? (hint: De middelpuntzoekende kracht wordt geleverd door de Lorentzkracht.)

Antwoord: In de ring bewegen geladen deeltjes met hoge snelheid, waarop het magneetveld een lorentz kracht uitoefent. Deze Lorentz kracht levert de benodigde middelpuntzoekende kracht op de bewegende protonen.

$F_L = F_{MPZ} \rightarrow q \cdot v \cdot B = \frac{m \cdot v^2}{R}$

De impuls van de bewegende protonen, wordt dan:

$p = q \cdot R \cdot B$
$= 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot \frac{27 \cdot 10^3}{2\pi} \cdot 8,33$
$\approx 5,756 \cdot 10^{-15}[kg \cdot m/s]$
$E \approx p.c \approx \frac{5,756 \cdot 10^{-15} \cdot 3,0 \cdot 10^8}{1,602 \cdot 10^{-19}[J/ev]} = 10,8[TeV]$

Opdracht 7: Uit de vorige vraag vinden we dat de energie van de bundel hoger is dan 7 TeV, die genoemd is in de LHC guide. De verklaring hiervoor is dat effectieve lengte (dat is de lengte waarin de protonen worden afgebogen) korter is. Er zijn dus ook rechte stukken in de ring van de LHC. Wat is dan effectieve lengte van de LHC uitgaande van de 7 TeV? De rustmassa van protonen is 938 MeV.

Antwoord: Volgens Einstein geldt:
$E^2 = E_0^2 + p^2 \cdot c^2 \rightarrow p = \sqrt{\frac{E^2 - E_0^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{7^2 - (938 \cdot 10^{-3})^2}{c^2}} \approx 7\frac{TeV}{c}$ De rustmassa van de protonen is dus te verwaarlozen bij deze hoge energiëen. Wat ook te verwachten was.

Voor de impuls geldt geldt:
$p = \frac{E}{c} = \frac{7 \cdot 10^{12} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{3,0 \cdot 10^8} = 3,738 \cdot 10^{-15}[kgm/s]$

Het gedeelte van de LHC wat de bundel afbuigt is dan $p = q \cdot R \cdot B$
dus:
$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} \rightarrow \frac{p}{q \cdot B}$ Voor de omtrek van de effectieve ring(2πR) vinden we:

$omtrek = 2\pi \frac{p}{qB} = 2\pi \frac{3{,}738 \cdot 10^{-15}}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 8{,}36} \approx 17{,}5[km]$

De effectieve lengte komt door het feit dat naast dat er magneten in de ring zijn die de bundel protonen de bocht om buigen, er ook magneten zijn, die de protonenbundels focusseren. De protonen worden ook versneld in gedeelten van de LHC ring.

Het gedeelte van de LHC, dat 'recht' is:
$\frac{27[km] - 17{,}5[km]}{27[km]} \approx 0{,}35$

Opdracht 8: Op bladzijde 34 van de LHC guide kun je lezen over de 'proton beam' en dat elke beam bestaat uit 2835 'bunches' van 10^{11} protonen. Deze bunches botsen met elkaar op de plekken waar hun banen elkaar kruisen.

(a) Hoeveel botsingen van deze 'bunches' zijn er per seconde?

Antwoord: De bunches reizen met de lichtsnelheid dus komen elke: $t = \frac{L_{LHC}}{2835}/c = \frac{27 \cdot 10^3}{2835}/3{,}0 \cdot 10^8 = 3{,}2.10^{-8}[s]$ Het aantal botsingen is dan:
$f = \frac{1}{3{,}0 \cdot 10^8} = 32[MHz]$ Dit is minder dan de LHC guide aangeeft, maar dit komt door het 'pacman' effect. Bundels die overblijven voegen samen met andere bundels.

(b) Hoeveel botsingen zijn er in een run (een run duurt ongeveer 10 uur)?

Antwoord: In een uur hebben we dan: $32 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 3600 \approx 1{,}2 \cdot 10^{12}$ botsingen.

Opdracht 9: Als een Formule 1 coureur met 320 km/h door de ring van de LHC zou rijden. Hoe lang moet hij rijden zodat hij dezelfde afstand heeft gereden als proton in de LHC in 1 s aflegt?

Antwoord: Het duurt dan:
$t = \frac{s}{v} = \frac{c \cdot t}{v} = \frac{300000[km/s] \cdot 1[s]}{320[km/h]} = 937{,}5[h] = 39 dagen.$

Opdracht 10: De LHC werkt met supergeleidende magneten, als deze aangezet worden kan de stroomsterkte in de magneten toenemen met 10 A/s. Hoe lang duurt het dan om de maximale stroomsterkte van $11{,}7 \times 10^3$ A te bereiken?

Antwoord: De tijd, die dat kost is:
$t = \frac{11700[A]}{10[A/s]} = 1170s \approx 19,5[min.]$

Opdracht 11: Een buis in een deel van de LHC is ongeveer 15 m lang en gemaakt van staal. Hoeveel cm is de buis kleiner geworden als hij van kamertemperatuur 20 °C naar 1,9 K afgekoeld wordt?

Antwoord: De lineaire expansiecoefficiënt λ van staal is 12×10^{-6}/K:
$\Delta L = L_0 \cdot \lambda \cdot \Delta T$ Invullen geeft:
$\Delta L = 15 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot (293 - 1,9) = 0,05[m]$

Opdracht 12: Hoeveel energie zit er in het totale aantal bundels protonen, die in één ring ronddraaien? De energie van de protonen is 7 TeV en er zitten 10^{11} protonen in een bundel.

Antwoord: De totale energie in de bundel is: $E_{totaal} = 2835 \cdot 10^{11} \cdot 7 \cdot 10^{12} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \approx 320[MJ]$

Als je dit zou vergelijken met een boot die 11 km/h vaart. Dan heeft die boot een massa van : $m = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{v^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 320 \cdot 10^6}{(11/3,6)^2}} = 7,0 \cdot 10^7[kg]$

Er zit dus ontzettend veel energie in één beam protonen.