



# Mínima energia Potencial e princípio do trabalho virtual.

O conceito de deslocamento virtual é a base para os métodos de Energia na Mecânica. O deslocamento virtual é um deslocamento hipotético muito pequeno que satisfaz as condições de boundary condicional.

As tensões virtuais  $\sigma_{ij}^v$  são obtidas a partir das deslocamentos virtuais.

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_{uij} + \sigma_{ujj})$$

A incremento da tensão  $\sigma_{ij}$  é correspondente ao incremento das tensões de cisalhamento e não obtidas da lei da elasticidade.

$$S_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

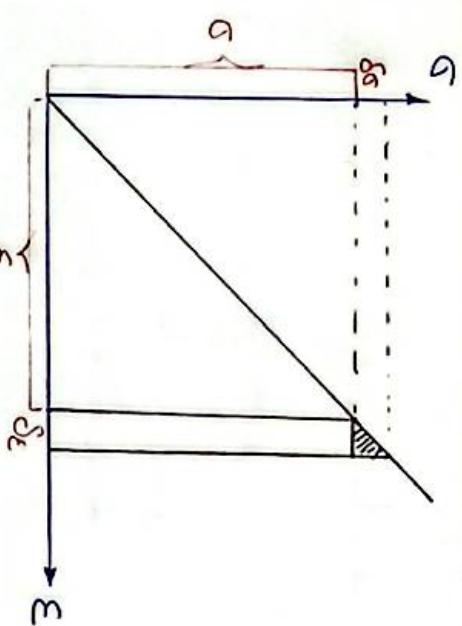
$$S_{ij} = C_{ijkl} \delta_{kl}$$

eliminando a  $C_{ijkl}$

$$S_{ij} S_{ij} = \epsilon_{ij} S_{ij}$$

A Energia Total do sistema ( $\Pi$ ) é a soma da energia elástica conservada + forças extensoras

$$\Pi = \int \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} dV - \int T_i u_i ds$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int (\delta S_{ij} \epsilon_{ij} + S_{ij} \delta \epsilon_{ij}) dV - \int T_i S_{ui} ds = 0 \\
 &\boxed{\int S_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int T_i S_{ui} ds}
 \end{aligned}$$

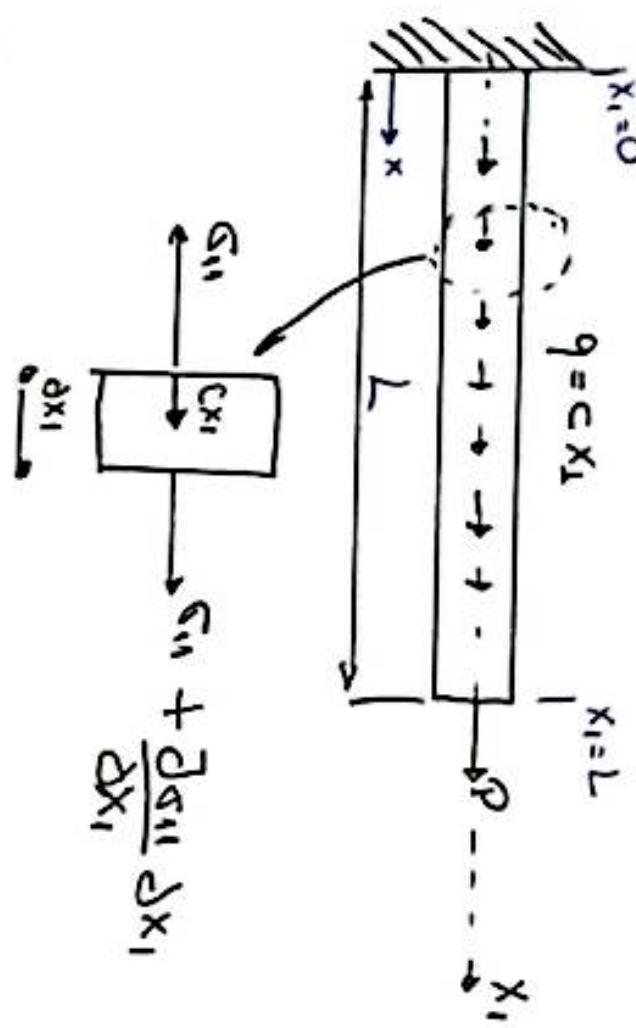
## 1.2 Método de Rayleigh - Ritz

Quando o problema admite um princípio variacional ou se a solução torna necessária um funcional da Energia podemos aproximar a solução por uma combinação finita de funções que já respeitam Dirichlet, substando uma aproximação no funcional e impõe estacionariedade em alcance das condições iniciais diretamente a um sistema linear Kantian K

②

continuação: m\'etodo da Rayleigh-Ritz

caso ap\'ice do Barra Axial 2D



$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = -\frac{c x_1}{E A}$$

condições de边界 para obter C<sub>1</sub> e C<sub>2</sub>

$$@ x_1 = 0 : u_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$@ x_1 = L : \sigma_{11} = E \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{P}{A} \Rightarrow C_1 = \frac{P}{AE} + \frac{CL^2}{2EA}$$

Solução para deslocamento u<sub>1</sub> e tensão σ<sub>11</sub>:

$$u_1 = -\frac{c x_1^3}{6EA} + \left( \frac{P}{AE} + \frac{CL^2}{2EA} \right) x_1$$

$$\sigma_{11} = E \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{c x_1^2}{2A} + \left( \frac{P}{A} + \frac{CL^2}{2A} \right)$$

a solução por aproximação pelo m\'etodo Rayleigh-Ritz

$$PE = \int_0^L U dx - \omega = \int_0^L \frac{\sigma_{11} E_{11}}{2} A \frac{\partial x_1}{\partial x_1} - P u_1 \Big|_{x_1=L} - \int_0^L P u_1 dx_1$$

$$PE = \int_0^L \frac{c A}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 - P u_1 \Big|_{x_1=L} - \int_0^L C x_1 u_1 dx_1$$

podemos assumir u<sub>1</sub> como polinomio de grau 2 no

$$[u_1 = a_0]$$

exemplos: Forma Forte e Forma Fraca

Quadro Geral Variacional  $\Rightarrow$  discussão

1) Problema Variacional (Forma abstrata) (Forma Fraca)

Considerando um problema linear, simétrico e assintótico

com forma bilinear  $A(\cdot, \cdot)$ , funcional linear  $L(\cdot)$ .

A solução exata  $u$  é o ponto de máx. mínimo de:

$$J(u) = \frac{1}{2} A(u, u) - L(u)$$

de modo que a estacionariedade

$$\delta J(u; w) = 0$$

é equivalente à (Forma fraca):  $a(u; w) = l(w)$

exemplos da  $a, l$  em problemas escalares de difusão

(Forma forte)

$$a(u, w) = \int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla w \, dx \quad \text{e também } l(w) = \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\Gamma} g w \, ds$$

as condições de contorno Escrevem conforme Dirichlet  
estão ambientadas no espaço de funções admissíveis

as condições de contorno Neumann conforme

Neumann aparecem em  $Q_0$  operando integrações por partes.

2) Aproximações da Ritz em espaços finitos

Escolha um espaço  $V_h = \text{span } \{\phi_1, \dots, \phi_m\} \subset V$  tal

que todos os  $\phi_i$  satisfaçam Dirichlet homogênea

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^m a_i \phi_i(x) \quad \text{onde } \sum_{i=1}^m a_i J(u_i) = 0$$

### 1.3 Forma Forte e Forma Fraca

Forma forte  $\Rightarrow$  sistema mediado por equações diferenciais, equações de equilíbrio, assim também como todas as condições de contorno impostas podem ser pensadas

Forma fraca  $\Rightarrow$  sistema variacional que consiste em multiplicar a forma por função teste  $w$  admissível, integrar  $\Omega$  e integrar por partes (Teorema da Difusão) para reduzir a ordem das derivadas.

#### 1.4 Derivações do MEF via Rayleigh-Ritz

Conceito:

Quando o problema admite um princípio variacional (ou seja, tem a solução estacionária em funções da energia) podemos reformular a busca a um subespaço finito  $V_h$  gerado por funções de forma que respeitem Dirichlet, substituir a aproximação  $u_h$  no funcional  $J$  e impor estacionariedade em relação a  $J$  com coeficientes. Resultado é o sistema linear simétrico  $Ka=f$ , com  $K_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$  e  $f_i = l(\phi_i)$ , o que é exatamente a matrizes de rigidez (Matriz de Rígidez) e vetores de força (MCF). Em operadores elásticos simétricos

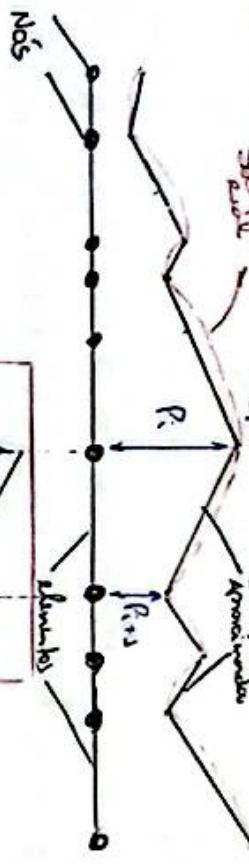
Concide com Galerkin e herda propriedades de Orto Energético. (Elemento)

As Aplicações típicas: Condução / difusão elástica / dinâmica estática, vibrações lineares (autovalores), placas/vírgas em regime linear todos com funcional de energia bem definido

## 1.5 Método de Galerkin

Solução Aproximada de Várias nodos

Usando Galerkin Método dos elementos finitos (GFEM) é considerado uma subdivisão dos elementos finitos, obtida num processo numérico através da equação de Galerkin, onde a função é aproximada por funções teste por parte de cada um elemento, a ilustração mostra para um caso 1D as funções sinusoidais em cada elemento, ( $P_i$ ) é a função aproximada.



The unknown of problem on the nodal Value of  $P_1, P_i$   
no contorno do elemento, no caso 1D  $i = 1 \dots N+1$   
é um simples ponto. A solução aproximada para cada elemento pode ser construída usando-se que o valor nodal é conhecido.

O Método Finito de Galerkin para elementos finitos para soluções das equações de função costela em alguns passos

- (1) multiplicar a equação de função pela função teste  $w(x)$  e a integrar ou domínio de todo o sistema

- (2) Se necessário, integrar por partes para reduzir a ordem das termos da ordem elevadas.

- (3) Escolha da ordem da interpolação linear, quadrática, etc) e a correspondente representação da função  $N_{i,j=1 \dots m}$ , das funções teste  $P = P(x) = \sum_{i=1}^N P_i N_i(x)$

- (4) Aplicar Taylor as integrais das elementais sendo escalar ou numérico para obter a equação de um sistema de equações onde  $P_i$ 's não são conhecidos.

- (5) Resolver o sistema das equações das  $P_i$ .

Exemplo

$$\frac{d^2P}{dx^2} = 0, \quad P(0) = 1, \quad P(2) = 0 \quad (\text{Solução exata} \quad P(x) = 1 - x^2)$$

primeiro passo, multiplicar as equações  $w(x)$  e integrar para obter a integral indefinida pendente

$$I = \int \left( \frac{d^2P}{dx^2} \right) w(x) dx = 0$$

$$⑥ \quad 0 = \left[ \frac{x^p}{p} \right]_0^x + x^p \int_0^x \left( a \frac{x^p}{p} - b \frac{x^p}{p} - c_1 w - c_2 w \right) dx - I$$

Ressolvendo para  $I$

$$P = a + \frac{x^p}{p} + C_1$$

Se considerarmos agora uma equação de função com coeficientes.

Solução linear e exata.

$$P = (1-x)(P_1 + (x^2)^{P_2}) = x-2$$

A solução completa é:

da equação exata, que é  $P(z) = 2$

$$z = P_1$$

$$P(z) = 0 \quad P_1 = P(0) = 2 \quad \text{dado por } \frac{1}{2} P_1 = P(0)$$

condição

aplicando a condição da equação exata

$$\begin{bmatrix} (z)P_1 + \\ (0)P_1 - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{z}{2}$$

ou seja, temos que  $P_1 = 2$

$$0 = \left[ \frac{x^p}{p} \right]_0^x - \frac{x^p}{p} \int_0^x \frac{x^p}{p} dx + \frac{x^p}{p^2} \int_0^x \frac{x^p}{p} dx - P_1 \int_0^x \frac{x^p}{p} dx$$

$$0 = \left[ \frac{x^p}{p} \right]_0^x + \frac{x^p}{p^2} \int_0^x \frac{x^p}{p} dx + P_1 \int_0^x \frac{x^p}{p} dx$$

Podemos substituir para equação com polinômio da seguinte forma, para obter uma solução mais simples.

$$u_1 = (P + C_1 x^2) \quad ! \quad P_1 = (P + C_1)$$

$$\boxed{\frac{DPE}{Dx^2} - 0 = EA_1 L - PL - CL^3 = 0 \Leftrightarrow A_1 = P + C_1}$$

a unica solução que pode contém a solução

$$\frac{EA_1}{2} x^2 - P_1 L - CA_1 L^3$$

$$PE = \int_{-L}^L \frac{EA_1}{2} x^2 dx - P_1 L - \int_{-L}^L C x_1 x_1 dx_1 =$$

Substituindo na equação da função parcial da equação exata

$$A_1 = \frac{P}{Dx^2} = 13$$

Comparando termo a termo

para obter  $P_1 = 0$

$$u_1 = a_0 + a_1 x_1$$

polinômio de primeiro grau

para obter a constante da equação exata

Digitalizado com CamScanner

$$⑨ I = \left[ m \frac{xp}{\pi R} \right] b - xp \int_{2x}^{1x} + xp \left( m^2 - m \frac{xp}{\pi R} p - \frac{xp}{\pi R} \frac{xp}{\pi R} q \right) \int_{2x}^{1x} = I$$

Koordinate parallel da yukaridər

$$\rho = C_1 + \frac{x\rho}{n\rho} q + \frac{z x \rho}{n^2 \rho} a$$

Se consideran los aspectos que se presentan en la siguiente tabla.

## Sewage Human & Animal

$$2-x = 2\left(\frac{2}{x}\right) + 1\left(\frac{2}{x}-1\right) = 1$$

A very good example is

$$z = 1$$

Aplicando la condición de Euler-Lagrange se tiene

$$\begin{bmatrix} (z)_t \partial_+ \\ (0)_t \partial_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_j \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_+ & r_- \\ r_- & r_+ \end{bmatrix} \frac{z}{1}$$

so in which was used as a substitute for some of the former substances.

$$O = \left[ \frac{xp}{\delta P} \right] - xp \frac{xP}{2N^2} \frac{xP}{N^2} \int_0^P \rho^2 dx + xp \frac{xP}{N^2} \frac{xP}{NP} \int_0^P \rho^2 dx$$

$$0 = \left[ \frac{x\rho}{\rho} \right] + \frac{x\rho}{NP} \int_0^x \frac{x\rho}{NP} dy + x\rho \frac{x\rho}{NP} \int_0^x y dy$$

$$O = \int_0^{\infty} \left[ N^2 \frac{xp}{\partial P} \right] - xP \left( \frac{xp}{N^2 P^2} \bar{z}^2 \partial z \right) \left( \frac{x^2}{N^2 P^2} + \frac{xp}{N^2 P^2} \bar{z}^2 \partial z \right)$$

$$O = \int_0^P \left[ I_N \frac{\partial P}{\partial P} \right] - x_P \left( \frac{x_P}{I_N P (2d^2 N + d^2 N) P} \right) \int_0^P$$

$$W_i = \frac{dP_i}{dP} = \frac{1}{\lambda_i}$$

$$\frac{z}{x} = \mu^2 \left( \frac{z}{x} - 1 \right) = \mu^2 \quad \Rightarrow \quad z = \mu^2 + \mu^2 x$$

$$O = \left[ m \frac{xp}{\partial p} \right] - xp \left( \frac{xp}{m \partial p} \right) = I$$

First-Order Systems (FOSLS) Numerically

Sintética da forma  $\dot{y} = f(y)$

$$\Delta y_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y) dt = (y_{i+1} - y_i)$$

$$\Delta y_i = R(u_i) \Delta t$$

$O = \int_{t_0}^t f(y) dt = y(t) - y(t_0)$   
Forma iteração (aproximação)

$$O = \int_{t_0}^t \left( f - \frac{\partial f}{\partial y} R \right) dt = \frac{1}{2} \left[ R(u_0) + \frac{1}{2} \left( R(u_1) + \dots + R(u_n) \right) \right]$$

minimizar sua norma  $L^2$ :

ou Até o ponto onde o erro é aceitável

Least-Squares (LS)

utiliza a forma da equação acima

$$O = \int_{t_0}^t R(u_i) dt = \sum_{i=1}^n R(u_i) \Delta t$$

extraída impõe:

$\{u_i\}_{i=1}^n$  é amostrado da função  $f$   
colhe-se um conjunto de funções da forma

Forma work-around (Residuos pendentes)

Divide para as partes:

$$f - R(u) = L(u) - R(u)$$

$$L(u) = f \text{ em } I^0 \quad R(u) = u \text{ em } I^0$$

caso particular é linear multíplo  
alguns de seu tipo de Galerkin padrão / em Técnicas  
Há outras técnicas de residuos fundamentais  
T.6 outras técnicas fundamentais

$$u(x) = u_0 + x u_1 + \dots + x^n u_n$$

$$u_0 = 2 \quad u_1 = 0 \quad \dots$$

Substituindo no equação linear da função teste

$$u(x) = u_0 + u_1 x + \dots + u_n x^n = f(x) \Leftrightarrow u(x) = f(x) + x^{n+1}$$

$$a = \left[ \begin{matrix} \frac{(x_1)^n}{n!} & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(x_n)^n}{n!} & \dots & 1 \end{matrix} \right] b = \left[ \begin{matrix} \frac{x_1^{n+1}}{n+1} \\ \vdots \\ \frac{x_n^{n+1}}{n+1} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} a_1 = \frac{1}{2} \left[ f(x_1) + f(x_2) \right] \\ \vdots \\ a_n = \frac{1}{2} \left[ f(x_{n-1}) + f(x_n) \right] \end{matrix} \right\}$$

equações lineares da função teste

a um sistema de duas equações:

⑧ *Procurando hipnóicos.*  
'Ativando e fixando, informa para o cliente'

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \left( y_1 \right) = \int_{y_1}^{y_2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \text{RP} \left( y_1 \right) \cdot \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\} \right] dx - \text{RP} \left( y_2 \right) \cdot \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\} \int_{y_1}^{y_2} - \text{RP} \left( y_1 \right) \cdot \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\} \int_{y_1}^{y_2}$$

With, quando que pessoas se deslocam em áreas urbanas, é comum que os motoristas se deslocarem entre áreas urbanas e rurais, o que ocorre é que os motoristas que se deslocam entre áreas urbanas e rurais podem ter maior risco de acidente.

⑥ ① is continuous Galerkin (DG)

implications of simple and interrelated changes.

$$u^1 \dots u^n = (\exists x)(\forall n) \varphi \Leftrightarrow (\exists x - x) S = (x)^o(n)$$

Ainda que se realizasse um encontro entre os dois países, o que é de fato improvável, não haveria possibilidade de se estabelecer um tratado de amizade entre os países.

## ⑤ UOLLOCAHIA (UOLLOCAHIA)

ende  $\frac{1}{2}$  & Riegels as subjects for greater consideration  
of some like common features & differences in their  
various forms of action.

$$GLS(\mu_1, \mu_2) = \alpha G_{\mu_1} + (1-\alpha) G_{\mu_2}$$

A child's participation in making Gallokin pads is a good idea. Let me tell you how we do it.

#### ④ GLS (Galerkin / Least-Squares)

$$\text{Total force} = \int_{x_1}^{x_2} \sigma(x) A(x) dx$$

$$\int (\mathbf{E} \Delta u_i \cdot \nabla u_i + (\mathbf{a} \cdot \nabla u_i) u_i) dx + \sum_{j=1}^m \int \Gamma(\mathbf{a}, \nabla u_i) F(u_j) dx$$

Geometrische Bedeutung

Final Foundation Subplot

$$(\text{redundant}) \quad 4\Delta - 2L + 4n = 4m$$

SUDG (Stromlinie - Upwind, Fehn-Godberkin) para Advecção - di fluxo escalar ( $-E \Delta u + a \nabla u = f$ )

$$\forall n \neq m \in \mathbb{N} \quad (\psi_m) \neq (\psi_n)$$

Wluda es capaz de reducir la variancia entre los observadores.

### ③ Schrödinger-Gleichung (P6)

A lauacaso tomar um arôma definido para o (S01) em (u,g) visual com espacos H, X H (dw)

$$(u, q) = \frac{1}{2} \|q + k\Delta u\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|_0^2 - \frac{1}{2} \|f - q \cdot \nabla\|_0^2$$

$$f = b \cdot \Delta + o = n\Delta x + f_0$$

$$(n\Delta \geq 1) \circ \Delta - = f$$

FOS5 em exemplo de fólio

# 1.7 - Derivações do MEF através da Método de Galerkin

a. (Forma Física)  $\Rightarrow$  problema contínuo

$$-\nabla \cdot (C \nabla u) = f \text{ em } \Omega \quad u = \bar{u} \text{ em } \Gamma_u$$

$$(C \nabla u) \cdot \eta = \bar{q} \text{ em } \Gamma_q \quad \text{onde} \quad \partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_q \quad \Gamma_u \cap \Gamma_q = \emptyset$$

$C(x)$  simétrica definida positiva.

b. (Forma Fraca)  $\Rightarrow$  variacional

Multiplicar a forma física por  $w \in V_0$  e integrar por partes.

$$\int_{\Omega} (\nabla w)^T C \nabla u \, d\Omega - \int_{\Omega} f w \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{q} w \, d\Gamma_q \quad \forall w \in V_0$$

definimos

$$a(u, w) = \int_{\Omega} (\nabla w)^T C \nabla u \, d\Omega, \quad l(w) = \int_{\Omega} f w \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{q} w \, d\Gamma_q$$

problemas fracos encontram  $u \in V$  com  $u|_{\Gamma_u} = \bar{u}$   
de tal forma que  $a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in V_0$

Galerkin - FEM  $\Omega \{v\} = [\Omega_1, \dots, \Omega_m]$   
espaços discretos

$$V_h = \text{Span}\{\phi_1, \dots, \phi_m\} \subset V \text{ com } \phi_i = 0 \text{ em } \Gamma_q$$

$$u_h = u_{0,h} + \sum_{j=1}^m a_{ij} \phi_j \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dirichlet homogênea} \Rightarrow u_{0,h} = 0 \\ \text{Dirichlet não-homogênea} \Rightarrow u_{0,h} \neq 0 \end{array} \right.$$

$$w_h = v_h \rightarrow w_h - \phi_i$$

sistema discreto temos imposto  $a(u_h, \phi_i) = l(\phi_i)$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} a(\phi_j, \phi_i) = l(\phi_i) - a(u_{0,h}, \phi_i) \quad i = 1, \dots, m$$

- matriz Vátor

$$K\bar{a} = f, \quad K_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$$

$$f_i = l(\phi_i) - a(u_{0,h}, \phi_i)$$

para  $\bar{u}$  homogêneo  $\Rightarrow u_{0,h} = 0 \Rightarrow f_i = l(\phi_i)$

Forma elemental em cada elemento e com  
funções de forma  $N$  e operador  $B$  tais que

$$\nabla u_h^{(e)} = B \bar{a}^{(e)}$$

$$K^{(e)} = \int_{\Omega_e} B^T C B \, d\Omega, \quad f^{(e)} = \int_{\Omega_e} N^T f \, d\Omega + \int_{\Gamma_{q,e}} N^T \bar{q} \, d\Gamma$$

global

$$K = \sum_e K^{(e)}, \quad f = \sum_e f^{(e)}$$

⑦

$$f_{(e)} = \int_{L_e}^0 N_T P_o dx = P_o L_e [1] \quad (+\text{força de tração})$$

para corrigir acréscim. unifor.  $f(x) = P_o$   
Característica dada

$$C_{(e)} = \int_{L_e}^0 N_T C A N dx = C A L_e [2]$$

Ampliação devido ao efeito

$$M_{(e)} = \int_{L_e}^0 N_T C A N dx = Q A L_e [2]$$

massa constante

$$R_{(e)} = \int_{L_e}^0 E A B dx = E A [3]$$

com  $E, G, I_c$  constantes

tributária da rigidez, massa e amortecedor

$$M_{(e)} + C_{(e)} \ddot{a} + K_{(e)} a = P_{(e)}$$

lema da vibração:

$$M_{(e)} + C_{(e)} \ddot{a} + K_{(e)} a = 0$$

$$\ddot{a}_T \left( \int_{L_e}^0 E A B dx - \int_{L_e}^0 P A N dx - \int_{L_e}^0 C A N dx - P_{(e)} \right) = 0$$

substituindo as forças fixas e fazendo  $\ddot{a}$

$$N = [N_1 \ N_2] = \left[ -\frac{1}{L_e} \ \frac{1}{L_e} \right] \ \ddot{B} = \left[ -\frac{1}{L_e} \ \frac{1}{L_e} \right]$$

com elementos ZN's (diagonal)

$$N_h = N(e) a(t) \quad W_h = N(e) g_a \quad u_{h,x} = B a$$

analogia FEM funções teste

$$\int_E A u_x w_x dx = \int_{L_e}^0 P_w dx + \int_{L_e}^0 C A u_w dx + [N_w]$$

equação para passo

$$\frac{d}{dt} (E A u_x) + P(x,t) = C A u_x + C A u_i \quad x \in (0,L_e)$$

Galerkin (método variável) equação teste

Kao (2018)  $\Rightarrow$  Soma axial  $\Sigma$

$E, A, G, I_c$  constantes

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{L_e}{X} \\ N_1 &= 1 - \frac{L_e}{X} \end{aligned}$$

analogia para formulação numérica de Galerkin

2.3 - Garantia dinâmica numérica

amortecedor para ultrapassar juntura fixa

dinâmico para as mudanças da velocidade linear

Estudo teórico 2.4.1 análogo mundo formulário

$$\text{Equação: } C = \alpha M + \beta k$$

$$x_F(e) \int_{L_e}^0 N_T = f(e)$$

*(e) é o eixo de referência para a seção.*

$$Q(e) = q_0 u_{\text{máx}} = \frac{q_0 L_e}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13L_e & 13L_e \\ 13L_e & 13L_e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 22L_e & 22L_e \\ 22L_e & 22L_e \end{bmatrix}$$

*Carregamento é sobre distribuído*

$$C(e) = \frac{C_{\text{máx}}}{420}$$

*Amortecimento viscoelástico é hidráulico (A = C\_m)*

$$M(e) = P A L_e$$

*Momento fúnico*

$$\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13L_e & 13L_e \\ 13L_e & 13L_e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 22L_e & 22L_e \\ 22L_e & 22L_e \end{bmatrix}$$

*Carregamento é sobre distribuído com propriedade constante*

$$K(e) = \frac{E I}{L_e^3}$$

*Momento fúnico é hidráulico com propriedade constante*

$$M(e) + C(e) + K(e) = f(e)$$

*Logo:*

$$\sum_{k=1}^n \left( B_k^T E I B_k x_k - \int_{L_k}^0 N_T P A N_k dx_k - \int_{L_k}^0 C_w N_k dx_k - f_k \right) = 0$$

*Substituído na forma fúnica é obtendo S2:*

$$ENt \rightarrow N = [N_1, N_2, N_3, N_4] \in B_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$$

*Com  $\ddot{x} = \frac{dx}{dt}$  e da função da forma hidráulica*

$$K_h = w_h = B^2(e) \ddot{x}$$

*A = [w\_1, \theta\_1, w\_2, \theta\_2]*

*Introduzida FEM para Galerkin*

$$\int_{x=0}^L EI w'' w'' dx + \int_{x=0}^L Q A w' dx + \int_{x=0}^L C_w w' dx + [M_1 - V_1]$$

*para passar*

*Função fúnica na forma  $\Rightarrow$  W(h) aplicado por W(h) e W(h')*

*Momento fúnico  $M = EI w''$*

*Em  $e=0, L_e \Rightarrow$  fúnico/momento hidráulico*

*Logo:  $V = -(EI w'')$*

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI w'') + q(x) t = (Q A w' + C_w w')$$

*Cw (parâmetro) em W:*

*Curva fúnica  $W = W''$ .*

*transversal  $w(c,t)$  rotogiro  $\theta = w'$*

*Curvatura e curvatura fúnica*

*Produções para Galerkin (haba do virtual)*

*constante*

*2.2  $\Rightarrow$  Equação da dinâmica*

$$\int_{L_e}^0 (V_i + q) v \, dx = \int_0^{L_e} \Phi A_i w \, v \, dx$$

$$Divisão + \int_0^L q = 0 \quad q = 0$$

Funções da forma  $v(x)$  para  $w = \phi(v)$  para

$\text{Forma Física (Tabuleiro Virtual)}$

$$M_i + V = \Phi I_i \quad \phi = \frac{\partial A}{\partial w}$$

equilíbrio dinâmico  $\Rightarrow$  sob longe transversal  $q(x, t)$  (extremo)

$$V = k_s G A \phi = k_s G A(w - \phi) \quad \text{côncavo da curva}$$

$$M = EI \phi = EI \phi \quad \phi = \text{côncavo da curva (constante)}$$

- constantes (constante no extremo):  $K = (\text{Fator de constante})$

$$K = \phi_i \quad (\text{curvatura})$$

$$- \text{defomeração: } \phi = w_i - \phi \quad (\text{côncavo})$$

- deslocamento transversal  $w(x, t) \in \text{rotacional}(x, t)$

Cinemática constância e forma fixa

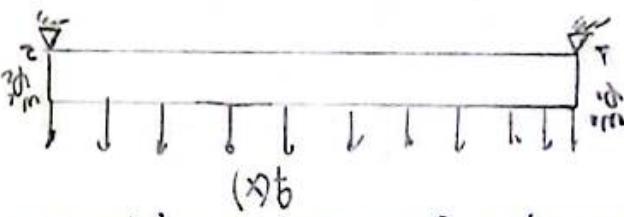


Diagrama útil para o tabuleiro virtual

2.3 = Vídeo Elástica de Timoshenko (vídeo)

$$(2) (k_s G A(w - \phi))' = - \int_{L_e}^0 k_s G A(w - \phi) v \, dx + \int_{L_e}^0 k_s G A(w - \phi) \phi \, dx = \int_{L_e}^0 k_s G A(w - \phi) v \, dx$$

aplicado. os dois termos com  $k_s G A$

$$\int_{L_e}^0 \Phi A_i w \, v \, dx + \int_{L_e}^0 \Phi I_i \phi \, v \, dx$$

termos de tensão

$$- \int_{L_e}^0 k_s G A(w - \phi) v \, dx - \int_{L_e}^0 E I \phi v \, dx + \int_{L_e}^0 k_s G A(w - \phi) \phi \, dx = \int_{L_e}^0 k_s G A(w - \phi) v \, dx$$

$$[M_i]_i^0 - \int_{L_e}^0 E I \phi v \, dx + \int_{L_e}^0 k_s G A(w - \phi) \phi \, dx = [M_i]_i^0 + [W_i]_i^0$$

termos de longe

$$[M_i]_i^0 - \int_{L_e}^0 E I \phi v \, dx + \int_{L_e}^0 k_s G A(w - \phi) \phi \, dx = M_i - E I \phi \quad \therefore V = k_s G A(w - \phi)$$

$$[M_i]_i^0 - \int_{L_e}^0 E I \phi v \, dx + \int_{L_e}^0 k_s G A(w - \phi) \phi \, dx = [M_i]_i^0 - \int_{L_e}^0 M_i v \, dx$$

$$\int_{L_e}^0 M_i v \, dx = [M_i]_i^0 - \int_{L_e}^0 M_i v \, dx \quad \text{analogamente para } M_i$$

$$\int_{L_e}^0 (M_i + V) v \, dx = \int_{L_e}^0 E I \phi v \, dx$$

analogamente para  $V$ .

$$[V_i]_i^0 - \int_{L_e}^0 k_s G A(w - \phi) v \, dx + \int_{L_e}^0 q v \, dx = \int_{L_e}^0 \Phi A_i v \, dx$$

$$\text{analogamente a constante } V = k_s G A(w - \phi)$$

$$[V_i]_i^0 - \int_{L_e}^0 k_s G A(w - \phi) v \, dx + \int_{L_e}^0 q v \, dx = \int_{L_e}^0 \Phi A_i v \, dx$$

$$\int_{L_e}^0 V_i v \, dx = [V_i]_i^0 - \int_{L_e}^0 V_i v \, dx$$

analogamente para  $V_i$ .

$$\boxed{\begin{bmatrix} \phi_W & 0 \\ 0 & m_W \end{bmatrix}} = M_{(e)} \quad \text{and} \quad (\phi_W, m_W) = \text{diag}(M_{(e)})$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} z & 1 \\ 1 & \frac{1}{z} \end{bmatrix}} = \frac{6}{P_{\text{IRLC}}} \quad M_w = \frac{P_{\text{ALC}}}{6} \boxed{\begin{bmatrix} z & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix}}$$

massa constante

$$\boxed{\begin{bmatrix} \phi_W + K_w \phi \\ K_w m_W \end{bmatrix}} = M_{(e)} \quad \text{blocks total}$$

$$O = \phi_f! \left[ \begin{bmatrix} r \\ T \end{bmatrix} \right] \frac{2}{\log e} = f^m$$

$\phi_f(x) = q_0$  uniforme en  $x$

Fracasos =  $q_0$  uniformes

$$C_{(e)} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & q_0 \\ q_0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Probabilidad de éxito/ $C_{(e)}$  =  $C = \alpha M + \beta K$

$$M_w = \frac{\rho A L e^{[1/2]}}{M_n}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_W & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} = (e)W \quad (\phi_W, w) \text{diag} = (e)W$$

$$\text{Bloco total} = K(e) \cdot \left[ K_{\text{máx}} + K_{\phi} \cdot \left( \frac{K_{\phi}}{K_{\text{máx}}} - 1 \right) \right]$$

Forma final  $\Rightarrow$  forma fraca (longege padee) inwards  
Blocks of ice have a small

$$+ x_F(r_b + \phi \dot{\phi} - \dot{r}_b \phi^2) + k_s G A(w - \phi) = \int_{r_b}^r (EI\phi' \dot{\phi}' + k_s G A(w - \phi)) dr$$

$$N = [N_1 N_2] = \left[ \frac{L}{2} - \frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right] = \left[ -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right]$$

$$M(e) \ddot{a} + C(e) \dot{a} + K(e) a = f(e)$$

$$K_{\text{min}} = \int k_s G A B^T B dx = k_s G A$$

$$K\phi_W = K_T \phi = K_S G A$$

$$k_{AB} = - \int k_A B_N dx = k_S G_A$$

$$\left[ \frac{T}{T-T_0} \right] \frac{\partial \sigma}{\partial T} = \text{exp} \left[ \frac{\sigma}{k_B T} \right] = \phi \phi$$

(ଓঁ শশী - প্রতিষ্ঠাতা) লক্ষণ

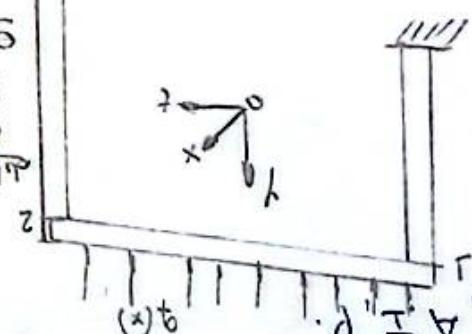
$$\begin{aligned}
 & \text{Form Factor} = f_{\text{coax}} + f_{\text{JLW}} \\
 & \text{Dielectric Gain} = N_1 A_u \\
 & \text{Actual Gain} = N_2 A_u \\
 & N_u = \left[ N_1 N_2 \right] = \left[ 1 - \frac{\epsilon_r}{\epsilon_0} \right] \cdot \frac{1}{\lambda^2} \\
 & B_u = \frac{dN_u}{dx} = \left[ -\frac{1}{\epsilon_0} \right] \frac{1}{\lambda^2} \\
 & \text{Loss: } \eta_u = N_u G_u \\
 & \text{Substituting in the formula for coaxial } \rightarrow \text{for coaxial } G_u \\
 & G_u = \int_{\lambda_c}^{\lambda_a} E_A B_u dx - \int_{\lambda_c}^{\lambda_a} N_u T_d A_u dx - \int_{\lambda_c}^{\lambda_a} N_u C_d A_u dx - f_u = \\
 & \quad \underbrace{C_u}_{\text{Coax}} \quad \underbrace{\text{Max}}_{\text{Max}} \quad \underbrace{K_u}_{\text{Coax}}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^t \left[ \frac{d}{dt} (\rho u) - \frac{d}{dt} (\rho w) + \nabla \cdot (\rho u u) + \nabla \cdot (\rho w w) \right] dt = \int_0^t \left( \rho u u_t + \rho w w_t + \nabla \cdot (\rho u u) + \nabla \cdot (\rho w w) \right) dt$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Left side: } \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = N_1 N_2 N_3 N_4 \\
 & \text{Right side: } \nabla^2 B_z = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \\
 & \text{Equating: } \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{\partial B_z}{\partial r} = N_1 N_2 N_3 N_4 \\
 & \text{Solving: } B_z = N_1 N_2 N_3 N_4 \left[ C_1 e^{-r} + C_2 e^{r} \right] \\
 & \text{Boundary conditions: } B_z(r=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\
 & B_z(r=a) = N_1 N_2 N_3 N_4 \left[ C_1 e^{-a} + C_2 e^a \right] = N_1 N_2 N_3 N_4 \left[ C_1 e^{-a} \right] \\
 & \text{Thus: } C_1 = N_1 N_2 N_3 N_4 e^a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Forme fraca (trabalho virtual) funções tais que } u_i(x) \\
 & \text{têm zeros em } x_0 \text{ e } x_1 \text{ e } u_i'(x) \neq 0 \text{ nesse intervalo} \\
 & \int_{x_0}^{x_1} ((EAu_i)' + PCu_i) dx = \int_{x_0}^{x_1} (PAu_i' + Cu_i) u_i dx \\
 & \int_{x_0}^{x_1} (EAu_i)' u_i dx = \left[ EAu_i u_i \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} EAu_i u_i' dx \\
 & \int_{x_0}^{x_1} EAu_i u_i' dx = \int_{x_0}^{x_1} EAu_i u_i dx + \int_{x_0}^{x_1} [du_i] u_i dx \\
 & \int_{x_0}^{x_1} EAu_i u_i dx = \int_{x_0}^{x_1} (PAu_i' + Cu_i) u_i dx + \int_{x_0}^{x_1} [du_i] u_i dx \\
 & \int_{x_0}^{x_1} EAu_i u_i dx = \int_{x_0}^{x_1} (PAu_i' + Cu_i) u_i dx + \int_{x_0}^{x_1} du_i u_i dx \\
 & \int_{x_0}^{x_1} EAu_i u_i dx = \int_{x_0}^{x_1} (PAu_i' + Cu_i) u_i dx + \int_{x_0}^{x_1} du_i u_i dx \\
 & \int_{x_0}^{x_1} EAu_i u_i dx = \int_{x_0}^{x_1} (PAu_i' + Cu_i) u_i dx + \int_{x_0}^{x_1} du_i u_i dx
 \end{aligned}$$

Diagram illustrating a beam of length  $L$  with a fixed support at the left end and a roller support at the right end. A uniformly distributed load  $q$  acts downwards. The deflection curve  $w(x,t)$  is shown as a downward parabolic shape. The coordinate  $x$  starts from the fixed end.



15

$$\frac{M_{11}}{M_{11}} = \frac{\int_0^L (T - 3\bar{x}^2 + 2\bar{x}^3)^2 dx}{\int_0^L (w_{1111})^2 dx} = \frac{35}{420} = \frac{PA_L}{PA_L} (156)$$

$$M_{11} = \int_0^L N_T^6 P A N_b dx = P A_L \int_0^L N_b^6 N_T^6 dx$$

Flexo  $\Rightarrow$  Massa Lamina

+ momento  $PA = C_4$   
fazendo  
também a massa

$$M_{11} = \frac{PA_L}{6} \left[ \frac{1}{2} \right]_0^L$$

para amarrador

$$N_1 = T - \frac{7}{6}x - \frac{7}{6} = \int_0^L N_1^2 dx = \frac{3}{5} \cdot \int_0^L N_1^2 dx = \frac{6}{7}$$

$$M_{11} = \int_0^L N_1^2 P A N_b dx = P A_L \int_0^L N_1^2 dx$$

Massa  $M \Rightarrow$  amarrador

$$K_{11} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & \left[ \frac{EA}{L} - 1 \right] \end{bmatrix} = K$$

Rigidez total

$$K_{11} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 72 & 67 & 67 & 72 & 72 & 72 \\ 67 & 12 & -67 & 12 & -67 & 12 \\ 67 & -12 & 12 & -67 & 412 & -67 \\ 72 & 12 & -67 & -12 & 72 & -67 \\ 67 & 12 & -67 & 12 & 72 & 67 \\ 72 & -67 & 12 & -12 & -67 & 72 \end{bmatrix}$$

matriz  $K_{11}$

$$\frac{EI}{L^2} \int_1^3 [L(4+6x)]^2 dx = EI L^2 (16-24+12) = \frac{EI}{L^2} (4L^2)$$

$$\frac{EI}{L^2} \int_1^3 [N_1^2 N_2^2 dx = \frac{EI}{L^2} (-6+12) = \frac{EI}{L^2} 6$$

$$\frac{EI}{L^2} \int_1^3 (N_1^2 dx = \frac{EI}{L^2} (36-72+48) = \frac{EI}{L^2} 12$$

$$K_{11} = EI \int_1^3 B_T^2 dx = \frac{EI}{L^2} \int_1^3 \left[ \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{3}x^2) \right]^2 dx = \frac{EI}{L^2} \int_1^3 \frac{1}{4} (1 - \frac{1}{3}x^2)^2 dx$$

$$N_1 = -6 + 12x ! N_1 = L(-4+6x) ! N_1 = 6 - 12x ! N_1 = L(2+6x)$$

$$\left[ \frac{1}{2} \right]_0^L = \frac{1}{2} [N_1(E) N_2(E) N_3(E) N_4(E)]$$

$$B_T = \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], M_h = N_1^6 A_1, K_1 = w_1^2 = B_T^2 A_1$$

$$B_T = \frac{1}{2} E [0,1] \times [0,1] = \frac{1}{2} B_T$$

integro local e quando é feito  $\frac{1}{2} B_T$

$$K_{11} = \int_0^L EA \left[ \frac{1}{L}x - \frac{1}{L} \right]^2 dx = EA \left[ \frac{1}{L}x - \frac{1}{L} \right]$$

$$Acrod (u_1 u_1) - Integro local \alpha B_T^2 E A B_T$$

$$K_{11} = \frac{EI}{L^3} \int_0^L [L(4+6x)]^2 dx$$

95

$$M_{21} = M_{12}, \quad M_{31} = M_{13}, \quad M_{32} = M_{23}, \quad M_{34} = M_{43}$$

por simetria

$$M_{34} = PAL\left(-\frac{112}{420}\right) = PAL\left(-\frac{210}{420}\right)$$

$$\left[ \frac{5}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \right] L = \int_1^0 (-2L^{\frac{5}{6}} + 5L^{\frac{2}{5}} - 3L^{\frac{1}{2}}) dL = \int_1^0 (N_{34} N_{43}) dL$$

$$M_{23} = PAL\left(\frac{136}{420}\right) = PAL\left(\frac{420}{420}\right)$$

$$\left[ \frac{1}{3} + \frac{5}{8} - \frac{2}{7} + \frac{1}{2} - \right] L = \int_1^0 (-2L^{\frac{5}{6}} + 7L^{\frac{2}{5}} - 8L^{\frac{1}{2}}) dL = \int_1^0 (N_{23} N_{32}) dL$$

$$M_{14} = PAL\left(-\frac{136}{420}\right) = PAL\left(-\frac{420}{420}\right)$$

$$L \left[ \frac{5}{2} - \frac{1}{7} + \frac{5}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \right] = -136$$

$$= \int_1^0 (2L^{\frac{5}{6}} - 5L^{\frac{2}{5}} + 3L^{\frac{1}{2}} - L^{\frac{1}{3}}) dL = \int_1^0 (N_{14} N_{41}) dL$$

$$M_{13} = PAL\left(\frac{136}{420}\right) = PAL(156)$$

$$\frac{5}{3} = \frac{5}{6} + \frac{9}{21} - \frac{1}{7} = \int_1^0 (4L^{\frac{5}{6}} + 12L^{\frac{2}{5}} + 9L^{\frac{1}{2}}) dL = \int_1^0 (N_{13} N_{31}) dL$$

$$M_{13} = PAL\left(\frac{9}{420}\right) = PAL\left(\frac{420}{420}\right)$$

$$\frac{13}{13} = \underbrace{\left[ -4L^{\frac{5}{6}} + 12L^{\frac{2}{5}} - 9L^{\frac{1}{2}} - 2L^{\frac{1}{3}} + 3L^{\frac{1}{2}} \right]}_{\text{Expressão}} \int_1^0 \Leftrightarrow \int_1^0 (N_{13} N_{31}) dL$$

$$M_{12} = PAL \cdot \frac{22}{420} = PAL\left(\frac{22}{420}\right)$$

$$\frac{12}{22} = \int_1^0 (2L^{\frac{5}{6}} + 2L^{\frac{2}{5}} + 2L^{\frac{1}{2}}) dL = \int_1^0 (N_{12} N_{21}) dL$$

$$C_{4L} = \frac{P_{AL}(L^2)}{420} \begin{bmatrix} 71 & 722 & -3L^2 & 4L^2 \\ 722 & 13L & 156 & -22L \\ -3L^2 & 13L & 54 & 74 \\ 4L^2 & -22L & 74 & 22L \\ 71 & 156 & 22L & 13L \\ 722 & -3L^2 & 13L & -3L^2 \\ -3L^2 & 54 & 74 & -13L \\ 4L^2 & 74 & -13L & 556 \end{bmatrix}$$

para amparar o círculo de umidade com a PA quando houver chuva para extração da água e umidade para conservação, não há necessidade adicional de umidade extra para o círculo de umidade.

$$M_{4L} = \frac{P_{AL}}{420} \begin{bmatrix} 71 & 722 & -3L^2 & 4L^2 \\ 722 & 13L & 156 & -22L \\ -3L^2 & 13L & 54 & 74 \\ 4L^2 & -22L & 74 & 22L \\ 71 & 156 & 22L & 13L \\ 722 & -3L^2 & 13L & -3L^2 \\ -3L^2 & 54 & 74 & -13L \\ 4L^2 & 74 & -13L & 556 \end{bmatrix}$$

Métrica Massa-fixa

$$M_{44} = P_{AL}\left(\frac{L^2}{420}\right)$$

$$\frac{\text{sot}}{L^2} = \left[ \frac{5}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right] L^2 = \left( \frac{5}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) L^2 = \int_1^0 N_{44} d\theta = \int_1^0 \left( \frac{5}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) L^2 d\theta$$

$$M_{24} = P_{AL}\left(-\frac{L^2}{420}\right)$$

$$\frac{\text{sot}}{L^2} = \left[ \frac{5}{4} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right] L^2 = \left( \frac{5}{4} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) L^2 = \int_1^0 N_{24} d\theta = \int_1^0 \left( \frac{5}{4} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) L^2 d\theta$$

$$M_{22} = P_{AL} \frac{\text{sot}}{L^2} = \frac{P_{AL}}{420} L^2$$

$$= \frac{\text{sot}}{L^2}$$

$$M_{22} = P_{AL} \frac{\text{sot}}{L^2} = \int_1^0 N_{22} d\theta = \int_1^0 \left( \frac{5}{4} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) L^2 d\theta = \left[ \frac{5}{4} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right] L^2 = \left( \frac{5}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) L^2 = \left( \frac{5}{4} + \frac{2}{3} \right) L^2$$

85

$$N = \begin{bmatrix} \dots & N_2 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix}$$

Equação de equilíbrio  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$ ,  $\sum M = 0$

$$M_i a + C_i a + K a = f$$

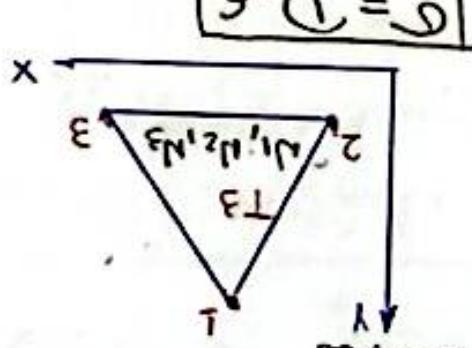
Forma direta da equação de equilíbrio  $\sum F = 0$

$$\sum F_x = P_i a + C_i a + M_i a = 0$$

Tabulação para  $P_i = P_i + C_i$  e  $M_i = M_i + C_i$

$$P_i + C_i + M_i = 0$$

Formas b  $\Rightarrow$  Equilíbrio com admisão de superfície



$$E \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$E \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C$$

$E = \text{máximo! Fórmula!} = j$

\* Forma Forte da estrutura

V. r. forte

Diagrama de duas formas únicas (Galerkin/Hibbel)

Função é a função

2.5 - Estado plástico de tensões (Volume)

matrizes elementares

$$K^e = \int_{\Omega_e} B^T D B d\Omega; M^e = \int_{\Omega_e} N^T Q N d\Omega; C^e = \int_{\Omega_e} N^T C N d\Omega$$

Elementos Triangulares linear

Nós ( $x_i, y_i$ )  $A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} b_i &= y_i - y_k \\ c_i &= x_k - x_j \\ \{i, j, k\} &= \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

$$N_i(x) = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y)$$
$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$\boxed{\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A}}$$
$$\boxed{\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2A}}$$

Logo matriz  $B$  é constante no elemento

$$B = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

Definição Variacional

$B$  e  $D$  são constantes

$$K^e = \int_{\Omega_e} B^T D B d\Omega = t \left( \int_{\Omega_e} \right) B^T D B = K^e = t A B^T D B$$

$$K^e = t A \left( \frac{1}{2A} \hat{B} \right)^T D \left( \frac{1}{2A} \hat{B} \right) = \boxed{\frac{t}{4A} \hat{B}^T D \hat{B}}$$

$$K_{ij} = \frac{t}{4A} \begin{bmatrix} D_{11} b_i b_j + D_{33} c_i c_j & D_{12} b_i c_j + D_{33} c_i b_j \\ D_{12} c_i b_j + D_{33} b_i c_j & D_{11} c_i c_j + D_{33} b_i b_j \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; D_{12} = \frac{EJ}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; D_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Massa e amortecimento do triângulo

$$\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega = \begin{cases} \frac{A}{6} & i=j \\ \frac{A}{12} & i \neq j \end{cases} \quad \text{com } A = \frac{1}{2}$$

$$M^{(t)} = \frac{\rho t A}{12} \begin{bmatrix} 2I_2 & I_2 & I_2 \\ I_2 & 2I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 & 2I_2 \end{bmatrix} = \frac{\rho t}{24} \begin{bmatrix} 2I_2 & I_2 & I_2 \\ I_2 & 2I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 & 2I_2 \end{bmatrix}$$

2.6 - Elementos Sólidos elásticos (tetraedro e hexaedro) TET 4 / HEX 8

$$u = [u \ v \ w]^T \quad \epsilon = Lu \quad \text{onde} \quad L = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_z & 0 \\ \partial_z & 0 & \partial_y \end{bmatrix}$$

Conforme lei constitutiva

$$\sigma = D \epsilon$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

equilíbrio com Inicia e amortecimento desabilitado

$$\nabla \cdot \sigma + b = \rho u_i + c \ddot{u} \Rightarrow \text{em } \Omega$$

Forma Fraca (Trabalho Virtual / Galerkin)

$w_{\text{ext}} = 0$  Direkt

$$\int_{\Omega} (Lw)^T D(Lu) dV = \int_{\Omega} w^T (\rho u_i + c \ddot{u} + b) dV + \int_{\Gamma} w^T T dS$$

(20)

Galerkin ( $\omega_h \in V_h$  = base de deslocamento), numa forma discreta elemental:

$$M^{(e)} \ddot{\omega} + C^{(e)} \dot{\omega} + K^{(e)} \omega = f^{(e)}$$

nóllmeno

$$\omega_h(x) = N(\epsilon) \omega^{(e)} \quad \epsilon_h = B(\epsilon) \omega^{(e)}, \quad B = LN$$

as matrizes elementares pl TET4 e HEX8

$$K^{(e)} = \int_{\Omega_e} B^T D B d\Omega \quad M^{(e)} = \int_{\Omega_e} N^T P N d\Omega \quad C^{(e)} = \int_{\Omega_e} N^T C N d\Omega$$

para triângulo linear

$$\text{Nós } (\epsilon_i, y_i, z_i), i=1 \dots 4 \quad V = \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} 1 & \epsilon_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & \epsilon_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & \epsilon_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & \epsilon_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$g_i = \begin{bmatrix} g_{ix} \\ g_{iy} \\ g_{iz} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \left[ \begin{array}{l} \det \begin{bmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_K & z_K \\ 1 & y_L & z_L \end{bmatrix} \\ - \det \begin{bmatrix} 1 & \epsilon_1 & z_1 \\ 1 & \epsilon_K & z_K \\ 1 & \epsilon_L & z_L \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} 1 & \epsilon_j & y_i \\ 1 & \epsilon_K & y_K \\ 1 & \epsilon_L & y_L \end{bmatrix} \end{array} \right] \Rightarrow \nabla N_i = g_i$$

$$B = \begin{bmatrix} g_{ix} & 0 & 0 & g_{zx} & 0 & 0 & g_{3x} & 0 & 0 & g_{4x} & 0 & 0 \\ 0 & g_{iy} & 0 & 0 & g_{iy} & 0 & 0 & g_{3y} & 0 & 0 & g_{4y} & 0 \\ 0 & 0 & g_{iz} & 0 & 0 & g_{2z} & 0 & 0 & g_{3z} & 0 & 0 & g_{4z} \\ g_{iy} & g_{ix} & 0 & g_{zy} & g_{yx} & 0 & g_{3y} & g_{3x} & 0 & g_{4y} & g_{iy} & 0 \\ 0 & g_{iz} & g_{iy} & 0 & g_{2z} & g_{2y} & 0 & g_{3z} & g_{3y} & 0 & g_{4z} & g_{iy} \\ g_{iz} & 0 & g_{ix} & g_{cz} & 0 & g_{2c} & g_{3c} & 0 & g_{3x} & g_{1z} & 0 & g_{iy} \end{bmatrix} \quad (4)$$

integração (Analítica)  $\Rightarrow$  como B é constante

$$K_{TET4}^{(1)} = \sqrt{B^T D B}$$

$$M_{TET4}^{(1)} = \rho \int_{V_1} N^T N dV = \rho \frac{\sqrt{30}}{30} \begin{bmatrix} 2I_3 & I_3 & I_3 & I_3 \\ I_3 & 2I_3 & I_3 & I_3 \\ I_3 & I_3 & 2I_3 & I_3 \\ I_3 & I_3 & I_3 & 2I_3 \end{bmatrix}$$

$$\int N_i N_j dV = \frac{\sqrt{30}}{30}, \quad \int N_i N_j dV = \frac{\sqrt{30}}{20} \text{ para } i \neq j$$

$$C_{TET4}^{(1)} = M_{TET4}^{(1)} |_{\rho=0}$$

Para Hex 8 (hexaedro 8nó)

Isoparamétrico e derivadas ( $\xi = 1 - \eta - \zeta$ )

$$(\xi, \eta, \zeta) \in [-1, 1]^3 \quad N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 \pm \xi)(1 \pm \eta)(1 \pm \zeta)$$

Mapamento geométrico  $(x, y, z)(\xi, \eta, \zeta) \Rightarrow$  Jacobiano

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} N_i \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} N_i \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} N_i \end{bmatrix} = J^{-1}(\xi, \eta, \zeta) \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} N_i \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} N_i \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} N_i \end{bmatrix} \quad J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}$$

B matrix (6x24)

$$B = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & \dots & \dots & N_{8,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & \dots & \dots & 0 & N_{8,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,z} & \dots & \dots & 0 & 0 & N_{8,z} \\ N_{2,y} & N_{1,x} & 0 & \dots & \dots & N_{8,y} & N_{8,x} & 0 \\ 0 & N_{1,z} & N_{1,y} & \dots & \dots & 0 & N_{8,z} & N_{8,y} \\ N_{3,z} & 0 & N_{1,y} & \dots & \dots & N_{8,z} & 0 & N_{8,y} \end{bmatrix}$$

(22)

Integragão

$$W_k = 1$$

$$K_{H \times 8} = \sum_{k=1}^8 w_k B^T D B_k \det J_k \quad (\xi, \eta, \zeta)_k = \left( \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

massa

$$M_{H \times 8} = \sum_{k=1}^8 w_k N_k^T P N_k \det J_k$$

Amarador distribuído

$$C_{H \times 8} = \sum_{k=1}^8 w_k N_k^T C N_k \det J_k$$

## 2.7 Placas, Cascas e Membranas

Plano de Tensão

$$\text{compos } u = [u \ v]^T$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix}$$

constitutiva

$$\varepsilon = L u$$

$$\sigma = D \varepsilon$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Forma Fraca (trabalho virtual)

$$\int_n (Lw)^T D(Lu) t d\Omega = \int_n w^T (\rho u_i + c u + b) t d\Omega + \int_n w^T t + d\Gamma$$

Discretização

$$u_h = N \bar{u} \quad \varepsilon_h = B \bar{u}, \quad B = L N$$

matrizes elementares

$$K^{(e)} = \int_{\Omega} B^T D B t d\Omega$$

$$M^{(e)} = \int_{\Omega} N^T P N t d\Omega$$

$$C^{(e)} = \int_{\Omega} N^T C N t d\Omega$$

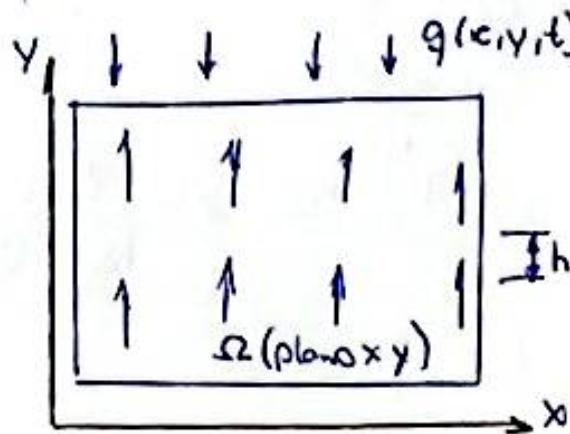
$$T_3: B \text{ constante} \Rightarrow K^{(e)} = t A B^T D B$$

$$M^{(e)} = \frac{\rho t A}{12} \begin{bmatrix} 2I_2 & I_1 & I_2 \\ I_1 & 2I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 & 2I_2 \end{bmatrix}$$

(23)

# Placa de Kirchhoff - love

deflecão  $w(x, y, t)$



Placa, eixos xy  
espessura h, deflecão  $w(x, y, t)$   
Carga  $q(x, y, t)$

$$u(x, y, z, t) = -z w_{xx}$$

$$v(x, y, z, t) = -z w_{yy}$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t)$$

$$\epsilon_{xx} = u_x = -z w_{xx} \quad \epsilon_{yy} = v_y = -z w_{yy} \quad \gamma_{xy} = u_y + v_x = -2zw_{xy}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_{xx} \\ -w_{yy} \\ -2w_{xy} \end{bmatrix}$$

constitutiva = tensão plana lineares  $\sigma = Q \cdot \epsilon$

$$Q = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Momento fletor

$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{y_1}^{y_2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz = D_b K$$

$$D_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Fórmulas contínuas

$$V = [V_x \ V_y]^T \quad V_x = M_{xx} + M_{xy} \quad y$$

$$V_y = M_{yy} + M_{xy} \quad z$$

Equilíbrio (Forma Física) com Carga  $q(x, y, t)$

$$M_{c,xx} + 2M_{cy,xy} + M_{y,yy} + q = \rho h \ddot{w} + c_w \dot{w}$$

Substituindo  $M = D b K$  e  $K$  em termos de  $w$

$$D \nabla^4 w + q = \rho h \ddot{w} + c_w \dot{w} \text{ onde } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Forma Fraca (trabalho virtual)

$$\int_{\Omega} (M_{c,xx} + 2M_{cy,xy} + M_{y,yy}) v d\Omega + \int_{\Gamma} q v d\Gamma = \int_{\Omega} (\rho h \ddot{w} + c_w \dot{w}) v d\Omega$$

$$K(v) = \begin{bmatrix} -J_{yy} \\ -J_{yy} \\ -2J_{xy} \end{bmatrix} \text{ operador da cunha}$$

Green  
Tensão:  $\int_{\Omega} K(v)^T D_b K(w) d\Omega = \int_{\Omega} (\rho h \ddot{w} + c_w \dot{w} + q) v d\Omega + \int_{\Gamma} (M_n v_{,n} - Q_n v) ds$

condições naturais:

- Momento normal  $M_n = n^T \begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{xy} & M_y \end{bmatrix} n$

- Constante efetiva  $Q_n = V_n + \partial_s M_{ns}$   $V_n = n \cdot V_0 M_{ns}$

Discretização FEM (matrizes)

$$w_h = N_h w \quad k_h = B_h a$$

Matrizes elementares

$$[K^{(e)} = \int_{\Omega_e} B_h^T D_b B_h d\Omega]$$

(25)

$$M^{(e)} = \int_{\Omega_e} N_w^T \rho_h N_w d\Omega \quad C^{(e)} = \int_{\Omega_e} N_w^T C_w N_w d\Omega$$

Maturidade

3. Elementos finitos em problemas dinâmicos/Vibração  
Determinações de módulo e frequência naturais

Módulo contínuo  $\Rightarrow$  Módulo discreto (FEM)

equação de movimento

$$\nabla \cdot \sigma(u) + b = \rho \ddot{u} + c \dot{u} \quad \text{em } \Omega$$

$$\sigma = D\varepsilon \quad \varepsilon = Lu$$

Forma Fraca (Trabalho Virtual e Galerkin)

$$\int_{\Omega} (Lu)^T D(Lu) d\Omega = \int_{\Omega} w^T (\rho \ddot{u} + c \dot{u} - b) d\Omega + \int_{\Gamma} w^T \bar{t} d\Gamma$$

Discretizações FEM (por elementos e)

$$u_h = Na \quad \epsilon_h = \beta a \quad K^{(e)} = \int_B B^T D B d\Omega$$

$$M^{(e)} = \int_N^T \rho N d\Omega \quad C^{(e)} = \int_N^T C_N$$

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f(t)$$

3.2

Método de integração numérica no domínio do tempo para respostas com um Amortecimento partindo de

$$\ddot{M}\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t)$$

Newmark -  $\beta$  - implícito

$$(\gamma, \beta) \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{1}{4} \quad \text{mídia-aceleração}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{1}{6} \quad \text{linear-aceleração}$$

Estados em cada passo  $n \rightarrow n+1$ :  $\{q_n, \dot{q}_n, \ddot{q}_n\} \rightarrow \{q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}, \ddot{q}_{n+1}\}$

Fórmulas de predição

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{q}_n + \beta \Delta t^2 q_{n+1}$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta t \left( 1 - \gamma \right) \ddot{q}_n + \gamma \Delta t \ddot{q}_{n+1}$$

Constantes

$$\alpha_0 = \frac{1}{\beta \Delta t}; \quad \alpha_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}; \quad \alpha_3 = \frac{1}{2\beta} - 1; \quad \alpha_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1$$

$$\alpha_5 = \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right)$$

Passo  $n \rightarrow n+1 \Rightarrow$  Resíduo Dinâmico em  $t_{n+1}$

$$r_{n+1} = f_{n+1} - Kq_{n+1} - C\dot{q}_{n+1} - M\ddot{q}_{n+1}$$

por Newmark

$$K_{eff} q_{n+1} = R_{eff}$$

$$K_{eff} = K + \alpha_1 C + \alpha_0 M$$

$$R_{eff} = f_{n+1} + M(\alpha_0 q_n^* + \alpha_2 \dot{q}_n + \alpha_3 \ddot{q}_n) + C(\alpha_1 \dot{q}_n + \alpha_3 \ddot{q}_n - \ddot{q}_n^*)$$

$$\ddot{q}_{n+1} = q_0(q_n + \alpha_1 - q_n) - \alpha_2 \dot{q}_n - \alpha_3 \ddot{q}_n \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{1}{4} \quad \left. \begin{array}{l} \text{(condição)} \\ \text{estável} \end{array} \right\}$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta t ((1-\beta) \ddot{q}_n + \gamma \ddot{q}_{n+1}) \quad \beta > \frac{1}{4} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{(manejável)} \\ \text{estabilidade} \end{array} \right\}$$

Realizando Método (Hilber-Hughes-Taylor) → dispõe 1.10

parâmetros  $\alpha \in [0, \frac{1}{3}]$  ( $0 \rightarrow$  Newmark médio)

$$t_{n+1} = t_n + (1-\alpha)\Delta t$$

$$(1-\alpha)[K_{q_{n+1}} + C_{\dot{q}_{n+1}} + M_{\ddot{q}_{n+1}}] + \alpha[K_{q_n} + C_{\dot{q}_n} + M_{\ddot{q}_n}] = (1-\alpha)f_{n+1} + f_n$$

$$\text{Newmark} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \beta = \frac{1}{2} - \alpha \\ \gamma = \frac{1}{4}(1-\alpha)^2 \end{array} \right\} K_{eff} q_{n+1} = R_{eff}$$

$$\alpha_f = \frac{\rho_f \omega - 1}{\rho_0 \omega + 1}, \quad \alpha_f = \frac{\rho_f \omega}{\rho_0 \omega + 1}, \quad \gamma = \frac{1}{2} + \alpha_f - \alpha_m \quad \beta = \frac{1}{4}(1 + \alpha_f - \alpha_m)^2$$

equilíbrio em  $t_n + \alpha_f$  com aceleração  $t_n + \alpha_m$

$\rho_0 = 0$  → dissipação nula

$\rho_0 = \infty$  → metade

$\rho_0 = 1$  → dissipação = Newmark

Leapfrog - Crítica  $\Rightarrow \Delta t \leq \Delta t_{crit}$

$$q_{n+1} = \Delta t^2 M^{-1} (f_n - Kq_n) + 2q_n - q_{n-1} \rightarrow \text{sem instabilidade}$$

$$q_{n+1} = \Delta t^2 M^{-1} (f_n - Kq_n - C \frac{q_{n-1} - q_{n-2}}{\Delta t}) + 2q_n - q_{n-1} \quad \text{com amarração}$$

$$q_{-1} = q_0 - \Delta t \ddot{q}_0 + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\ddot{q}}_0 \quad \text{onde } \ddot{q}_0 = M^{-1} (f_0 - C q_0 - K q_0)$$

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{max}} \quad (\text{onde } \omega_{max} \text{ é a maior frequência dinâmica})$$

$$\Delta t = \Theta \frac{2}{\omega_{max}} \quad \text{com } \Theta = \left\{ \begin{array}{l} 0,6 \\ 0,9 \end{array} \right\}$$

3º Método de integração considerando uma configuração por transformação modal (participação modal)

Partindo da equação discutida (FEM)

$$M \ddot{q}(t) + C \dot{q}(t) + K q(t) = f(t) \quad M, K \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad M > 0$$

Autovalores e Autovetores (livre, não amortecido)

$$K \phi_j = \lambda M \phi_j \quad \lambda_j = \omega_j^2 > 0$$

Ortogonalidade  $\Rightarrow$  escala de normalização por massa

$$\phi_i^T M \phi_j = \delta_{ij} \quad \phi_i^T K \phi_j = \omega_i^2 \delta_{ij}$$

$$\bar{\Phi} = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n] \Rightarrow \bar{\Phi}^T M \bar{\Phi} = I, \quad \bar{\Phi}^T K \bar{\Phi} = \Omega^2 = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$$

Transformação modal

$$q(t) = \bar{\Phi} z(t), \quad \dot{q}(t) = \bar{\Phi} \dot{z}, \quad \ddot{q} = \bar{\Phi} \ddot{z}$$

Substituindo na equação

$$\underbrace{\bar{\Phi}^T M \bar{\Phi} \ddot{z}}_{I} + \underbrace{\bar{\Phi}^T C \bar{\Phi} \dot{z}}_{C_m} + \underbrace{\bar{\Phi}^T K \bar{\Phi} z}_{\Omega^2 z} = \underbrace{\bar{\Phi}^T f(t)}_{r(t)}$$

$$\ddot{z}(t) + C_m \dot{z}(t) + \Omega^2 z(t) = r(t) \quad \begin{cases} \text{se } C \text{ proporcional} \\ \text{Rayleigh } (\alpha M + \beta K) \end{cases}$$

$$C_m = \alpha I + \beta \Omega^2 = \text{diag}(z \xi_j \omega_j) \Rightarrow \text{sistema diacoplado}$$

Forças Modais (participações)

Força Externa Modal

$$r_j(t) = \phi_j^T f(t)$$

Excitação por aceleração de Base (nível, opção móvel)  
se opção tem aceleração  $\ddot{u}_g(t)$  na direção do DOF a forma clássica

$$f(t) = -M\Gamma \ddot{u}_g(t)$$

$\Gamma$  é o vetor de influência ( $\perp$  nos DOF,  $1$  rotacionado,  $0$  não rotacionado)  
participação modal:

$$\Gamma_j = \phi_j^T M \Gamma \quad \text{com mao-norma } \Gamma_j = \phi_j^T \Gamma \propto M \rightarrow \Gamma_{\text{m-norma}} \text{ modal}$$

Logo o fencamento modal é:

$$\Gamma_j^*(t) = -\Gamma_j \ddot{u}_g(t)$$

Damping modal

$$\text{Rayleigh} \Rightarrow C = \alpha M + \beta K \Rightarrow C_m = \alpha I + \beta \Omega^2 = \text{diag}(2\xi_i \omega_i)$$

$$2\xi_j \omega_j = \alpha + \beta \omega_j^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2\omega_1 \omega_2 (\zeta_1 \omega_1 - \zeta_2 \omega_2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \\ \beta = \frac{2(\zeta_2 \omega_2 - \zeta_1 \omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \end{cases}$$
(w)

Integração por modo (SDOF)

$$\ddot{z}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{z}_j + \omega_j^2 z_j = r_j(t)$$

Newmark-β (média-aceleração) por modo

$$\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4} \quad (2^{\text{a}} \text{ Ordem Condicionamento estável})$$

$\Delta t$  constante para

$$a_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2} = \frac{4}{\Delta t^2}, a_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} = \frac{2}{\Delta t}, a_2 = \frac{1}{\beta \Delta t} = \frac{4}{\Delta t}, a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1 = 1, a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1$$

Massa modal  $\Rightarrow M_j = 1$  // Rigidez modal  $\Rightarrow K_j = \omega_j^2$  // amortecimento modal  
 $C_j = 2\xi_j \omega_j$  (30) 2

## Rigidez efetiva escalar

$$\hat{K}_j = k_j + \alpha_1 c_j + \alpha_0 m_j = w_j^e + \frac{2}{\Delta t} (2\dot{\phi}_j w_j) + \frac{4}{\Delta t^2}$$

Fórcas efetivas escalar:

$$\begin{aligned}\hat{r}_j &= r_j(t_{n+1}) + m_j(\alpha_0 z_{j,n} + \alpha_1 \dot{z}_{j,n} + \alpha_2 \ddot{z}_{j,n}) + C_j(\alpha_1 z_{j,n} + \alpha_2 \dot{z}_{j,n} + \alpha_3 \ddot{z}_{j,n}) \\ &\quad + C_j \left[ \left( \frac{2}{\Delta t} \right) \ddot{z}_{j,n} + (1) \dot{z}_{j,n} + 0 \cdot z_{j,n} \right]\end{aligned}$$

Passo para solução escalar

$$z_{j,n+1} = \frac{\hat{r}_j}{\hat{K}_j}$$

Recuperação de  $\ddot{z}, \dot{z}$

$$\ddot{z}_{j,n+1} = \alpha_0(z_{j,n+1} - z_{j,n}) - \alpha_1 \dot{z}_{j,n} - \alpha_2 \ddot{z}_{j,n}$$

$$\dot{z}_{j,n+1} = \dot{z}_{j,n} + \Delta t \left[ \frac{1}{2} \ddot{z}_{j,n} + \frac{1}{2} \ddot{z}_{j,n+1} \right]$$

$\zeta_j = 0$  (mamatação) removemos da equação  $C_j$

Condições Iniciais em coordenadas modais

$$q_0, \dot{q}_0 \quad | \quad z_0 = \Phi^T M q_0 \quad | \quad \dot{z}_0 = \Phi^T M \dot{q}_0 \quad | \quad \begin{array}{l} z_j > m, 0 \\ \dot{z}_j > m, 0 \end{array}$$

$$z_j(t) = \int_0^t h_j(t-\tau) (-\Gamma_j u_g(\tau)) d\tau$$

$$h_j(t) = \frac{1}{\omega_{dj}} e^{-\zeta_j w_j t} \sin(\omega_{dj} t)$$

onde

$$q(t) \approx \sum_{j=1}^m \phi_j z_j(t) = \Phi_m z_m(t)$$

$$z_m(t) = \int_0^t H_m(t-\tau) r_m(\tau) d\tau$$

③

### 3.4 - Técnicas de Análise no domínio da frequência

da equações no tempo para o domínio da frequência (FEM)

$$\boxed{M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t)} \quad t \in \mathbb{R}$$

transformada de Fourier/Laplace da EDO

$$F\{x(t)\}(w) = X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-iwt} dt$$

onde:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(w) e^{iwt} dw$$

$$F\{\dot{x}(t)\}(w) = \int i e^{-iwt} dt = x e^{-iwt} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i w \int e^{-iwt} dt = i w X(w)$$

$$F\{\ddot{x}(t)\}(w) = (iw)^2 X(w) =$$

$$\boxed{F\{\ddot{x}(t)\}(w) = -w^2 X(w)}$$

aplicando Fourier à EDO matricial

$$\underbrace{F\{M\ddot{q}\}}_{-w^2 MQ} + \underbrace{F\{C\dot{q}\}}_{i w C Q} + \underbrace{F\{Kq\}}_{K Q} - \underbrace{F\{f\}}_F$$

onde  $Q(w) = F\{q\}$ ,  $F(w) = F\{f\}$

fatora-se por  $Q(w)$

$$(K + i w C - w^2 M) Q(w) = F(w)$$

Definições por comparação

$$Z(w) = K + i\omega C - \omega^2 M$$

temos

$$Z(w) Q(w) = F(w) \quad H(w) = Z(w)^{-1} \Rightarrow Q = HF \quad (w)$$

- Receptância:  $H_r(w) = Z(w)^{-1}$

- Mobilidade:  $H_J(w) = i\omega Z(w)^{-1} = i\omega H_r$

- Acelerância:  $H_a(w) = (\omega)^2 Z(w)^{-1} = -\omega^2 H_r$

## SDOF (Um grau de liberdade)

$$m\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f(t) \Rightarrow Z(w) = K + i\omega C - \omega_m^2$$

Receptância  $\Rightarrow$  integralização (Duhamel + Fourier)

a resposta no tempo é a convolução com resposta ao impulso

$$q(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s)f(s)ds \quad h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t) \quad t > 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \zeta = \frac{C}{2m\omega_n}, \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

da transformada de Fourier temos

$$Q(w) = H(w)F(w) \quad H(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t) e^{-j\omega t} dt$$

jinkando  $H(w)$ :  $(\sin(\omega_d t)) = \Im\{e^{i\omega_d t}\}$

$$H(w) = \frac{1}{m\omega_d} \Re \left\{ \int_0^{\infty} e^{-(\zeta\omega_n + i\omega - j\omega_d)t} dt \right\} = \frac{1}{m\omega_d} \Re \left\{ \frac{1}{\zeta\omega_n + i(\omega - \omega_d)} \right\}$$

como  $\omega_d^2 = \omega_n^2(1 - \zeta^2)$  obtemos a forma racional

$$H(w) = \frac{1}{K + i\omega C - \omega_m^2} = Z(w)^{-1}$$

Casos para função dada de uma  $f(t) = t$  em  $[-\pi, \pi]$   
 $f$  é ímpar  $\Rightarrow a_n = 0$  e  $a_0 = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt$$

Como  $\sin$  é ímpar e igual a par, então podemos dobrar de  $0$  à  $\pi$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt$$

Inegração por partes:

$$u = t \Rightarrow du = dt \quad \Rightarrow dv = \sin(nt) dt \Rightarrow v = -\frac{\cos(nt)}{n}$$

$$\int_0^{\pi} t \sin(nt) dt = -\left. \frac{t \cos(nt)}{n} \right|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{n} dt = -\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} \left[ \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi}$$

$$\boxed{\sin(0) = 0}$$

$$\int_0^{\pi} t \sin(nt) dt = -\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} = -\frac{\pi (-1)^n}{n}$$

Portanto

$$\boxed{b_n = \frac{2}{\pi} \left( -\frac{\pi (-1)^n}{n} \right) = \frac{2(-1)^n}{n}}$$

Série final

$$\boxed{f \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nt) = 2 \left( \sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t \dots \right)}$$

$f$  é par  $\Rightarrow b_n = 0$  todos os parcos são zeros

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |nt| \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} nt \cos(nt) dt \quad (\text{se } nt = x, dx = n dt)$$

$$\int_0^{\pi} nt \cos(nt) dt = \frac{1}{2} [\sin((n+1)t) + \sin((1-n)t)] \quad a_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1-n^2)}, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

$$\boxed{|nt| \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-(2k+1)^2)} \cos((2k+1)t)}$$