Resolução de Problemas

Reflexões e ações na Educação Básica

Jean Peixoto Campos
Rodrigo Ruiz Brasil
Vlademir Fernandes de Oliveira Júnior

INSTITUTO FEDERAL
Rondônia
Campus Porto Velho Calama

Jean Peixoto Campos
Rodrigo Ruiz Brasil
Vlademir F. de Oliveira Júnior

Resolução de problemas: reflexões e ações na educação básica

PORTO VELHO
INSTITUTO FEDERAL DE RONDÔNIA
2017

Livro publicado com o apoio do Departamento de Pesquisa do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia, *Campus* Porto Velho Calama – Edital Nº 77/2017/PVCAL-CGAB/IFRO, de 04 de maio de 2017.

Capa:
Valmir Vitor Viana Farias

Diagramação:
Francisco Alex de Souza Costa

Impressão:
Gráfica Editora e Impressos Nacional Eireli

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

O48r Oliveira Júnior, Vlademir Fernandes de
Resolução de problemas: reflexões e ações na educação básica / Vlademir Fernandes de Oliveira Júnior, Jean Peixoto Campos, Rodrigo Ruiz Brasil. – Porto Velho/RO: IFRO, 2017.
126 p.

ISBN:

1. Resolução de Problemas. 2. Metodologia. 3. Educação Matemática. I. Campos, Jean Peixoto. II. Brasil, Rodrigo Ruiz. III. Título

CDD: 372.7

Bibliotecária Responsável: Roseni Santos Rodrigues CRB11/916

Presidente da República
Michel Miguel Elias Temer Lulia

Ministro da Educação
José Mendonça Bezerra Filho

Secretário de Educação Profissional e Tecnológica
Eline Neves Braga Nascimento

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE RONDÔNIA - IFRO
***CAMPUS* PORTO VELHO CALAMA**

Reitor
Uberlando Tiburtino Leite

Diretor Geral
Marcos Aparecido Atiles Mateus

Diretor de Ensino
Alexandre Santos de Oliveira

Diretora de Planejamento e Administração
Eliane Regina Acácio Dos Santos

Chefe do Departamento de Extensão
Rodrigo Moreira Martins

Chefe do Departamento de Pesquisa, Inovação e Pós-Graduação
Antônio Dos Santos Junior

Apresentação

Educação é tema a ser continuamente pensado e repensado. Em se tratando de Educação em Ciências e Matemática o foco é ainda mais relevante, pois a tendência da sociedade contemporânea é se tornar cada vez mais dependente das tecnologias de informação e comunicação. Assim, as áreas de Ciências, Matemática e Engenharias serão mais solicitadas para dar suporte técnico à continuidade desse desenvolvimento.

Pensando em tais necessidades para sociedade e seu reflexo na escola, o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia – IFRO tem como proposta ser relevante em seu contexto educacional propondo soluções e iniciativas que contribuam na formação discente e docente. Ser expressivo em nossa região seria a palavra chave para o IFRO.

Nessa perspectiva, como colaboradores desse projeto, temos a oportunidade de lançar a coleção *PROSSEGUIR: SUBSÍDIOS DIDÁTICOS PARA A DOCÊNCIA EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA* que visa divulgar principalmente pesquisas, trabalhos e produções resultantes da participação dos docentes em programas de Pós-Graduação *Stricto Sensu* mestrado e doutorado na área de Educação em Ciências e Matemática.

Trata-se de uma contribuição para a difusão de metodologias alternativas de ensino e técnicas que foram alvo de pesquisas e serão objetivamente direcionadas à prática docente na educação básica e superior. Ou seja, efetivamente teremos à disposição subsídios didáticos das mais amplas esferas: experiências, sequências didáticas, teorias e uso de TIC'S.

Subjacente a tal objetivo há o desejo de popularizar entre a comunidade docente do ensino básico e superior da região norte, o efetivo uso de tais instrumentos a fim de uma transformação em nossa perspectiva educacional, rompendo definitivamente com os métodos tradicionais em busca de novas opções metodológicas para o ensino contemporâneo.

Neste primeiro volume intitulado *RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: REFLEXÕES E AÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA* abordaremos a Metodologia da Resolução de Problemas (MRP) e suas possibilidades de auxílio na construção do conhecimento matemático.

Investigamos a MRP e, dentre outros benefícios, encontramos que ela efetivamente: faz o estudante pensar produtivamente, desenvolve o raciocínio, ensina o estudante a enfrentar situações novas, dá oportunidade de o estudante se envolver com aplicações da Matemática, torna as aulas de Matemática mais dinâmicas e desafiadoras, equipa o estudante com estratégias para resolver problemas e dá uma boa base Matemática às pessoas. Logo, uma alternativa para o ensino de Matemática. (OLIVEIRA JR, 2015).

Desta forma, disponibilizamos esta obra desejando que a mesma encontre oportunamente espaço para desenvolvimento e expressão na prática docente, que seja realmente motivadora de mudanças e possa alavancar processos de transformação em nosso contexto educacional.

Os Autores

Agradecimentos

A produção ora apresentada é fruto das pesquisas realizadas no âmbito do Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT; Polo da Universidade Federal de Rondônia – UNIR. Assim, nossos sinceros agradecimentos direcionados aos envolvidos nesta ação. Aos professores Abel Ahbid Ahmed Delgado Ortiz, Adeilton Fernandes da Costa, Flávio Batista Simão, Marinaldo Felipe da Silva e Tomás Daniel Menéndez Rodrigues do Programa – PROFMAT Polo da Universidade Federal de Rondônia – UNIR por toda atenção e auxílio prestado.

Agradecemos à Capes – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo financiamento dos estudos, pesquisa e produção acadêmica.

Não deixemos de lembrar a importância em participar do Grupo de Pesquisa em Educação, Filosofia e Tecnologias – GET que nos rendeu incentivo e várias discussões no âmbito da Educação Matemática, contribuindo para nossa formação e atuação como docentes e pesquisadores.

Nossa apreciação e reconhecimento ainda ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia – IFRO, que nos incentivou e possibilitou a publicação deste volume e da coleção inteira, intitulada *PROSSEGUIR: SUBSÍDIOS DIDÁTICOS PARA A DOCÊNCIA EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA.*

Agradecemos a Deus pela força, inspiração e desejo de ajudar e contribuir com a sociedade com as ferramentas nos que chegaram às mãos.

Sumário

É visível que dentre todos os períodos históricos já conhecidos estamos naquele singular em termos do domínio e produção de conhecimento, ciência e tecnologia. Nossa sociedade é complexa, rica em informação e conhecimento, como nunca. É imprescindível o conhecimento em nosso momento histórico. Se antes era possível alguns desdenharem a necessidade de educação, hoje, sem dúvida, qualquer cidadão consegue visualizar a importância de tal.

Neste contexto convém notar que as demandas para o cidadão em termos de conhecimento também são crescentes. Exige-se hoje do cidadão muito mais do que no passado. Não apenas em termos de informação, de armazenamento de dados ou procedimentos, mas de uma disposição ativa e criativa frente a eles e uma capacidade de aplicação dos mesmos em situações novas do cotidiano. Sendo assim, exige-se, em outros termos, que todos ampliem suas capacidades e competências.

Diante de tais demandas o processo de educação deverá responder a altura destes interesses. Os princípios para a educação também devem estar tão avançados quanto a complexidade da sociedade à nossa volta o exige. Desta forma, não há mais espaço para uma educação tradicional, arcaica, que não contemple os novos desafios que os educandos enfrentam cotidianamente.

Em virtude desta "nova" realidade, notamos que certo avanço na educação para romper com os paradigmas anteriores em busca de novas alternativas que possibilitem uma formação mais holística do cidadão são requeridos. Aqueles princípios meramente tecnicistas e instrumentais não servirão mais para o desenvolvimento do "novo" cidadão.

Com respeito ao ensino de Matemática a tendência se mostrou similar. Os padrões de ensino que enfatizavam os exercícios de memorização, um currículo fragmentado e a exclusão da participação do estudante deveriam ser substituídos por princípios educativos mais concatenados com a real situação da sociedade. Em razão disso despontaram os debates interessados em repensar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática propondo novas metodologias ou princípios que permitissem uma formação mais ampla do estudante.

A didática da Matemática propunha diferentes linhas de abordagem. Algumas atuando nas dificuldades com o currículo, estruturado de forma fragmentada e desconexa. Outras iniciativas dialogando com o conteúdo em si, propondo uma aprendizagem mais significativa e contextualizada. O estudante também foi valorizado como um agente ativo e responsável por sua própria formação. O conhecimento, portanto, ao contrário de ser "depositado" nos alunos deveria ser construído pelos mesmos num processo dialógico com seus pares e com a sociedade em geral.

Investigar metodologias, métodos e técnicas para o aperfeiçoamento da educação de qualquer tipo ou modalidade sempre é uma atividade imprescindível por sua própria característica de possibilitar o progresso da humanidade de modo geral. No caso da investigação a fim de se avançar no que diz respeito ao ensino e aprendizagem de Matemática também segue essa lógica de importância.

Propor alternativas para o ensino de Matemática com novas abordagens deve ser sempre bem vindo se tal opção realmente nos permitir corresponder adequadamente às necessidades de nossa demanda atual na sociedade, conforme visto antes.

Com a Metodologia da Resolução de Problemas (MRP) ocorre justamente este fato. É uma proposta de abordagem para o ensino de Matemática que se mostra rica por suas possibilidades e que atualmente estão sendo redescobertas e ampliadas. Também a própria Metodologia é uma recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.

> Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a

> organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 2000, p.52).

Conforme veremos posteriormente, tal metodologia aporta, dentre outras qualidades, aquelas relacionadas à efetiva participação do aluno fazendo-o pensar produtivamente, desenvolver seu raciocínio, enfrentar novas situações e resolver problemas.

Notamos, de modo informal, um aparente desuso desta metodologia. Pode ser que alguns professores não utilizem com frequência em suas aulas problemas realmente desafiadores, que necessitem de processos criativos para sua solução, optando, de modo geral, pela apresentação dos conceitos seguida de uma espécie de ilustração dos mesmos com exemplos e algumas atividades já bastante apreciadas. Segue-se então a necessidade de continuar investigando, aperfeiçoando e divulgando a metodologia a fim de contribuir para mudança de paradigmas para melhoria no ensino de Matemática.

É notório que o processo de ensino da Matemática deve ser melhorado em nosso país, pois nas últimas décadas amargamos resultados catastróficos no que diz respeito à aprendizagem matemática quando comparado com outros países, de acordo com alguns sistemas de avaliação como o teste de PISA (Programa Internacional de Avaliação de Alunos), em que ficamos com péssimas classificações. Internamente, o país aponta também sérios problemas com o ensino da Matemática. O IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) apesar de mostrar uma evolução na educação básica de 2005 para cá, ainda indica um resultado bastante preocupante quando temos como meta a média 6.0, o que, possivelmente não será alcançando nem mesmo em 2021!

Diante de tamanho desafio devemos nos mobilizar em todas as frentes possíveis em busca de melhorias. Evidente que não é uma metodologia que irá mudar toda uma realidade, contudo, ela é parte essencial da estrutura e precisa ser considerada adequadamente.

Nesta perspectiva passamos a analisar a Metodologia da Resolução de Problemas em Matemática que se insere neste panorama de mudanças de paradigmas no ensino da Matemática. Tal metodologia tem a seu favor a capacidade de trabalhar o conhecimento com o estudante justamente num processo de construção rico em possibilidades, criatividade, significância e liberdade.

São exatamente estas qualidades que pretendemos cristalizar neste texto. Qualidades que possibilitam a efetiva construção do conhecimento matemático através de situações-problema desafiadoras, instigantes e produtivas.

Para tanto algumas questões norteadores nos auxiliarão, tais como: *1) O que podemos deduzir do percurso histórico da educação que contribui em tomada de decisão para o ensino de Matemática atual? 2) Como a Resolução de Problemas se destaca como uma metodologia alternativa condizente com as necessidades educativas atuais? 3) De que forma podemos abordar tópicos da Matemática utilizando a Resolução de Problemas?*

Como objetivo principal, queremos analisar as contribuições da Metodologia da Resolução de Problemas na construção do conhecimento matemático. Os objetivos específicos que subsidiam tal abordagem podem ser identificados como: 1) Distinguir o momento histórico de mudança de paradigma no ensino de Matemática para opção de um projeto mais eficaz – distinção de metodologias de ensino de cunho tradicional e a Resolução de Problemas como proposta alternativa, 2) Descrever como a Resolução de Problemas auxilia na construção do conhecimento matemático e 3) Caracterizar abordagens de tópicos matemáticos com a Resolução de Problemas.

O texto está dividido em quatro capítulos em que se inicia com aspectos históricos e perspectivas de educação caminhando até o último capítulo onde se trata do desenvolvimento de tópicos da Matemática por meio da Metodologia da Resolução de Problemas.

No Capítulo I – *Marcos históricos na educação e no ensino de Matemática* – falaremos sobre o período e as características de uma educação tradicional. Mostraremos os primórdios de uma educação renovada e as motivações para tal culminando na mudança de paradigma para um a educação renovada. Abordamos suscintamente o surgimento da Educação Matemática.

No Capítulo II – *A construção do conhecimento matemático.* O plano de fundo será a educação pautada na perspectiva da "nova" pedagogia. Enfatizamos como possibilidade de construção do conhecimento matemático a teoria piagetiana e suas vantagens.

No Capítulo III – *A Metodologia da Resolução de Problemas.* Será apresentada a Metodologia da Resolução de Problemas (MRP), suas principais características e contribuições para o ensino de matemática. As famosas etapas de Pólya serão apresentadas além de seus benefícios, também abordaremos alguns problemas e limitações encontradas no uso da metodologia, tal como falha na formulação de problemas. Finalizaremos este capítulo mostrando que os sistemas de avaliação da educação em nível nacional e internacional cobram justamente competências e habilidades de resolução de problemas, ou seja, é requerido do estudante tal capacidade.

No Capítulo IV – *Tópicos de Matemática e a resolução de problemas*. Apresentaremos possibilidades de se trabalhar conteúdos de Matemática com a resolução de problemas enfatizando a potencialidade da metodologia. Os temas escolhidos foram: 1) A construção do conceito de função afim por problemas, 2) Análise combinatória estruturada em problemas, por um curso "sem fórmulas", 3) Problemas em geometria e a construção do conhecimento geométrico e 4) Aritmética criativa a partir de problemas.

Após os respectivos quatro capítulos teremos as considerações finais e as referências. Constam ainda nos anexos alguns teoremas e suas devidas demonstrações que, acreditamos, não cabiam no texto.

MARCOS HISTÓRICOS NA EDUCAÇÃO E NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Necessitamos ter em mente os marcos históricos pelos quais caminhou a educação antes de falarmos sobre uma perspectiva de ensino e aprendizagem da Matemática. Especialmente quando se quer falar sobre uma perspectiva que considere a construção do conhecimento e não apenas uma reprodução ou memorização de informações. Será importante ressaltar os métodos e técnicas utilizadas no passado e perceber que eles não mais satisfazem as necessidades educacionais de nossa época e, portanto, uma mudança de postura, em busca de aperfeiçoamento didático será fundamental.

1.1. Educação tradicional

Conforme Haidt (1999, p. 14): "Da antiguidade até o início do século XIX, predominou na prática escolar uma aprendizagem de tipo passivo e receptivo". Se observarmos bem, o tempo em que predominou este pensamento é considerável. Desde os primórdios da educação até o século XIX, talvez este fato ainda torna tal perspectiva tão arraigada em alguns sistemas educacionais. Esta ideia estava ancorada na concepção de que o homem é como uma "*tábula rasa*", ou seja, como uma folha de papel em branco pronta para ser preenchidas com informações. Esta era a base da epistemologia do conhecimento da época, ou seja, o aprendiz tinha um postura completamente passiva e receptiva. Tal premissa conduzia o processo de ensino e aprendizagem ditando as formas objetivas de seu desenvolvimento.

"Da antiguidade até o início do século XIX, predominou na prática escolar uma aprendizagem de tipo passivo e receptivo"

O ensino era pautado por meio de receitas e fórmulas prontas para a memorização, uma vez que esta era tida, consciente ou inconscientemente, como mais importante que a própria compreensão ou o raciocínio. Deste modo se ensinava ler e escrever da mesma forma que se ensinava a tocar um instrumento musical, por meio de exercícios graduais e muita repetição.

> Os conhecimentos a serem adquiridos eram, até certo ponto, reduzidos. E para que os alunos pudessem repeti-los correta e adequadamente, o professor utilizava o procedimento de perguntas e respostas, tanto em sua forma oral como escrita. Este era o chamado método catequético, cuja origem remonta, pelo menos na cultura ocidental, aos antigos gregos. (HAIDT, 1999, p.14).

Um ensino com estas características é o que denominados hoje de educação tradicional. Ela é caracterizada pela passividade do aprendiz além da ênfase em conteúdos e na memorização.

> A Pedagogia Tradicional, em suas várias correntes, caracteriza as concepções de educação onde prepondera a ação de agentes externos na formação do aluno, o primado objeto de conhecimento, a transmissão do saber constituído na tradição e nas grandes verdades acumuladas pela humanidade e uma concepção de ensino como impressão de imagens propiciadas ora pela palavra do professor ora pela observação sensorial. (LIBÂNEO, 1994, p. 61).

Um exemplo marcante de como se processa o ensino em um sistema com estas características é apresentado por Neto (1998, p. 48) quando responde à pergunta: Como é que a escola tradicional ensina a conta da divisão?

> 1) A maioria começa com o conteúdo. Escreve uma conta e ensina qual é o divisor, o dividendo, o quociente e o resto (o pior do conteúdo, para abordagem, é a nomenclatura). Depois ensina a técnica da conta, o algoritmo. Em seguida, ensina a técnica de resolver problemas de divisão. Está pronto o conteúdo da divisão. O conteúdo é dado pelo professor. 2) Muda de objetivo. Agora são as aplicações e essa parte é do aluno. Contas e mais contas, problemas de fixação, listas de exercícios repetitivos de divisão. Terminou a aplicação. 3) Em seguida vem a compreensão. O professor pega o material dourado e explica e explica e manda o aluno manipular até aprender seu uso e isso significa uma certa compreensão. 4) Passa a outro objetivo: problemas como exercícios de aprofundamento.

Ao pensar sobre o porquê de nosso sistema de ensino (com as devidas exceções) ainda ser influenciado por esta perspectiva, Neto (1998, p. 49), completa elencando diversas possibilidades para tal fato: “(...) baixo investimento escolar, projetos inadequados, alunos desmotivados e até doentes e famintos, planos educativos inadequados, pais com influências negativas, ideologia de submissão, sistema econômico que utiliza conhecimentos importados e mão-de-obra local, tradições de cultivo do corpo e não do cérebro, livros mal escritos e caros, desprestígio da cultura, heróis nacionais negativos, televisão e meios de comunicação dispersivos, etc.”.

Com este panorama em mente, propor um ensino de Matemática que se molde por outra perspectiva pedagógica requer efetivamente uma crítica a estas estruturas antiquadas que insistem em permanecer em nossos sistemas de educação. É preciso compreender de onde viemos (metodologicamente falando) para ser possível desmontar as ideologias educacionais inadequadas para posteriormente ser viável uma mudança. Enquanto os professores, educadores e todos os atores do sistema educacional não se sensibilizarem em observar o quanto se perde mantendo-se única e exclusivamente uma perspectiva educativa como a que foi vista, não podemos traçar grandes avanços. Não podemos falar em construção do conhecimento. Pois é necessário que cada um veja por si só, se indigne por si só e transforme-se por si em um agente de transformação da educação. A construção do conhecimento se iniciará quando a ideologia da retransmissão findar. São dois objetos excludentes, ou retransmitimos ou construímos conhecimento (no que se refere à escolha de perspectivas metodológicas preponderantes).

1.2. Primórdios de uma educação renovada

Contudo, na história da educação, apesar das posturas tradicionais predominantes, sempre existiram pensadores propondo uma alternativa que mudasse a ênfase da memorização para a compreensão e raciocínio, da passividade para a atividade. Assim relacionamos alguns dos grandes nomes que se fizeram notórios tais como: Sócrates (século V a.C.) que considerava o saber não sendo propriedade que o mestre transmite ao discípulo, mas sim algo que o próprio aprendiz descobre por si mesmo; Jesus Cristo, que a pesar de não ser reconhecido pelo público científico como um grande educador, sem dúvida o foi. Seu método consistia em trabalhar a partir da vida cotidiana com seus discípulos que iam se desenvolvendo a partir do contato com a realidade e os problemas da comunidade. Jesus usou muitas parábolas, uma espécie de comparação parecida com uma história, em seu ensino. Qual o objetivo dele usar tantas parábolas? Fazer com que o ouvinte, por si só, pensasse e tirasse suas inferências a partir disso. Ele também foi um mestre em usar o método de perguntas. Constantemente o vimos se dirigindo aos discípulos com perguntas como: “Quem dizeis que eu sou?” ou “Podeis beber o cálice que eu bebo, e ser batizado com o batismo com que sou batizado?”.

> Difícil é separar as perguntas feitas para enfatizar e argumentar das que foram feitas para aplicar verdade e exortar o povo; mas nos parece que Jesus fez algumas delas especialmente para enfatizar seu ensino. Quando finalizou a história do Bom Samaritano, o Mestre perguntou ao doutor da lei: ‘Qual destes três te parece ter sido o próximo daquele que caiu nas mãos dos salteadores?’ (Luc. 10:36). Vemos que esta pergunta era tanto exortatória quanto informativa. (PRICE, 1980, p. 90).

Heinrich Pestalozzi (1746-1827), de acordo com Haidt (1999), tinha como princípios gerais da educação:

- A relação entre o mestre e o discípulo deve ter como base o amor e o respeito mútuo;
- O professor deve respeitar a individualidade do aluno;
- A finalidade da instrução escolar deve basear-se no fim mais elevado da educação, que é favorecer o desenvolvimento físico, mental e moral do educando;
- O objetivo do ensino não é a exposição dogmática e a memorização mecânica, mas sim o desenvolvimento das capacidades intelectuais do jovem;
- A instrução escolar deve auxiliar o desenvolvimento orgânico por meio da atividade, isto é, da ação tanto física como mental;
- A aprendizagem escolar deve corresponder não apenas à aquisição de conhecimentos, mas principalmente ao desenvolvimento de habilidades e ao domínio de técnicas;

- O método de instrução deve ter por base a observação ou percepção sensorial e começar pelos elementos mais simples;
- O ensino deve seguir a ordem psicológica, ou seja, respeitar o desenvolvimento infantil;
- O professor deve dedicar a cada tópico do conteúdo o tempo necessário para assegurar que o aluno o domine inteiramente.

John Frederick Herbart (1776-1841), mencionado por Haidt (1999), considerava que o ser humano é uma unidade integral e não um ser compartimentalizado em faculdades. Assim, o conhecimento é um todo inter-relacionado, portanto, a educação só se processa em categorias fracionadas em matérias escolares para ter uma certa facilidade no ensino e assimilação.

John Dewey (1859-1952) afirmava que o conhecimento e o ensino devem estar diretamente ligados à ação, à vida prática, à experiência, assinala ainda Haidt (1999). Só para citar alguns.

Tais filósofos educacionais já sinalizavam para o que atualmente temos como uma convicção. Sinalizavam a importância da interação entre professor, aluno e conhecimento; a ação do aluno em oposição a uma passividade; as condições mentais e psicológicas necessárias a um bom aproveitamento e, o mais importante, a construção do conhecimento e não apenas a retransmissão.

"Por educação renovada entendemos a postura adotada num processo educativo que releva aspectos fundamentais no relacionamento professor, aluno e conhecimento tais como a liberdade e a participação do aluno dentro desse processo"

1.3. Educação renovada

Por educação renovada entendemos a postura adotada num processo educativo que releva aspectos fundamentais no relacionamento professor, aluno e conhecimento tais como a liberdade e a participação do aluno dentro desse processo. Trabalhar a construção do conhecimento em oposição a uma mera transmissão também é uma abordagem dessa educação.

> A Pedagogia Renovada agrupa correntes que advogam a renovação escolar, opondo-se à Pedagogia Tradicional. Entre as características desse movimento destacam-se: a valorização da criança, dotada de liberdade, iniciativa e de interesses próprios

> e, por isso mesmo, sujeito da sua aprendizagem e agente do seu próprio desenvolvimento; tratamento científico do processo educacional, considerando as etapas sucessivas do desenvolvimento biológico e psicológico; respeito às capacidades e aptidões individuais, individualização do ensino conforme os ritmos próprios de aprendizagem; rejeição de modelos adultos em favor da atividade e da liberdade de expressão da criança. (LIBÂNEO, 1994, p. 61-62).

Além disso, todo o processo educativo recebe um olhar crítico a fim de se renovarem as estruturas do ensino e aprendizagem para se conformarem com este "novo olhar" em busca da formação de um cidadão pleno. Desta forma, o currículo, a regência, a avaliação, os métodos e técnicas, a política, a administração, enfim, tudo em torno do processo recebe um olhar investigativo e é alvo de adequações práticas para correção e aperfeiçoamento de posturas.

Verifica-se neste movimento, muitas vezes conhecido como escola nova, a Pedagogia Pragmática ou Progressivista cujo principal representante é John Dewey (1859-1952). As ideias de Dewey influenciaram muito o pensamento na América Latina e principalmente no Brasil. Dewey e seus seguidores advogam a educação pela ação. A escola não seria uma espécie de laboratório que prepararia o aluno para a vida, mas a escola deveria ser a própria vida. Ou seja, a escola deveria ser um ambiente de interação entre o aluno e o meio.

A educação se daria através da experiência e da reconstrução dessa experiência nessa interação proposta. Assim, a principal função da educação seria prover recursos e estímulos para que os agentes educandos conseguissem se desenvolver e alcançar seus objetivos. Assim, a atividade escolar se centralizaria em propor experiências educativas. O currículo não seria pré-configurado como o temos hoje, mas se basearia nas atividades e ocupações da vida presente, das demandas atuais e contextualizadas. Essa perspectiva foi a que mais influenciou o desenvolvimento pedagógico no Brasil, contudo ele não é o único. O movimento de escola nova tem várias outras vertentes e várias outras propostas, contudo, o que tem em comum é uma oposição àquela postura tradicional mostrada anteriormente.

1.4. A Educação Matemática

A Educação Matemática surgiu recentemente. Podemos situá-la mais efetivamente na década de 1950, como fruto de movimentos de transformação educacional em escala internacional. Ela tem acompanhado as reformulações educacionais e as novas propostas pedagógicas para sala de aula que consideram o aprendizado nos termos definidos pelas mais recentes pesquisas, ou seja, definindo o processo de aprendizagem humana como mais dinâmico do que se pensava. Sabemos melhor agora que o ser humano aprende não apenas num processo linear e de acúmulo de informações, mas, a partir de categorias que se interligam em experiências e sequências das mais aleatórias possíveis numa espécie de emaranhado de fios.

"A Educação Matemática segue os princípios de uma pedagogia renovada. Evidencia a necessidade de participação do estudante no processo educativo e, além disso, não impõe um conhecimento, mas propõe uma construção do aprendizado em termos democráticos, contextualizados e significativos"

A Educação Matemática segue os princípios de uma pedagogia renovada. Evidencia a necessidade de participação do estudante no processo educativo e, além disso, não impõe um conhecimento, mas propõe uma construção do aprendizado em termos democráticos, contextualizados e significativos. Resultados dessa perspectiva são várias linhas metodológicas que surgiram recentemente para apoiar o aluno e o professor nesse processo. Podemos destacar algumas abordagens tais como:

- A própria resolução de problemas que ressurgiu com uma maior força e ganhou maior importância;
- A modelagem matemática que auxilia na resolução de problemas a partir da construção de modelos;
- Jogos e curiosidades matemáticas também entram para compor uma lacuna metodológica em relação ao lúdico, ao aspecto motivacional e criativo;
- As novas tecnologias também são utilizadas como computadores, softwares e outros recursos;
- A história da matemática foi revisitada para traçar um plano de fundo contextual diante do qual as descobertas matemáticas foram feitas;

- A etnomatemática e o;
- Ensino por projetos também completam a lista de opções,

Os pontos comuns de abordagem das tendências em Educação Matemática podem ser listados da seguinte forma, como enfatiza Groenwald (2002, p. 2):

> - Um ensino comprometido com as transformações sociais e a construção da cidadania;
> - Desenvolvimento contando com a participação ativa do aluno no processo de ensino e aprendizagem em um contexto de trabalho em grupo e não individual;
> - A busca de uma Matemática significativa para o aluno, vinculando-a a realidade;
> - Utilização de recursos específicos e um ambiente que propicie o desenvolvimento de sequências metodológicas que levem o aluno a construir seu próprio conhecimento.

A Educação Matemática se encontra atualmente em um interessante processo de participação na construção de um ensino de Matemática mais eficaz apontando caminhos para uma autêntica[1] prática de ensino em sala de aula, apesar da persistência de princípios tradicionais que subsistem em alguns sistemas de ensino. Contudo, aumenta cada vez mais o número de profissionais emprenhados em mudar esta realidade e modificar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Resumindo, podemos afirmar que as tendências atuais na educação – ao contrário da perspectiva tradicional – visam promover um ensino apoiado na atividade do aluno, no trabalho autônomo e fortemente comprometido com a construção do conhecimento. A Educação Matemática acompanha esse pensamento e sugere que o ensino de Matemática seja realizado basicamente seguindo os mesmos princípios.

[1] Autêntica no sentido de condizente com as necessidades atuais.

A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Na busca por uma postura pedagógica de construção do conhecimento em oposição ao ensino tradicional, além dos teóricos mencionados anteriormente, e das propostas da Educação Matemática não podemos deixar de nos referir a uma das principais e mais atuais propostas para a educação que foi a do psicólogo suíço Jean Piaget (1896-1980).

2.1. Jean Piaget e a construção do conhecimento

"Para Jean Piaget o conhecimento é uma construção"

Para Jean Piaget o conhecimento é uma construção. Seu pressuposto básico é que o ser aprende mediante trocas com o meio. Mediante a interação do indivíduo com o meio há um desequilíbrio cognitivo ante as novas informações que são ajustadas na mente até encontrar certo equilíbrio. No contato com novas situações ocorre o mesmo processo e assim se processa gradativamente a construção do conhecimento por meio desses equilíbrios/desequilíbrios, conforme sustenta Guimarães (2012).

Esse elemento novo do qual temos contato é definido como *assimilação* enquanto *acomodação* é o ajuste das estruturas antigas para atingir novamente o equilíbrio. Guimarães define melhor estes elementos.

> Podemos definir *assimilação* como a integração do elemento novo a um sistema do sujeito e *acomodação* como a responsável pela modificação das estruturas pré-existentes para se ajustar ao que lhe é novo. (GUIMARÃES, 2012, p. 44)

É notório que a *equilibração* cognitiva nunca chegará a um fim visto que sempre o sujeito estará aprendendo e vivenciando novos problemas e situações que exigem a busca de um *status* melhor. Logo, é um processo contínuo e dinâmico.

Piaget ao observar seus próprios filhos e alunos de escolas primárias fez alguns testes e verificou que o desenvolvimento do pensamento e da linguagem seguem etapas bem definidas. Assim, propôs as seguintes etapas, conforme Haidt (1999). Desenvolvimento do pensamento sensório motriz (*do nascimento aos dois anos aproximadamente*). Caracterizado pela capacidade de agarrar, sugar, chorar; a criança consegue compreender determinadas propriedades de objetos e servir-se deles.

1) Aparecimento e desenvolvimento do pensamento simbólico: a representação pré-conceitual (*de um ano e meio aos cinco aproximadamente*). Nesta fase a criança consegue identificar elementos por palavras, contudo ainda não construiu conceitos de classes e mais sofisticados podendo cometer o erro de chamar uma ovelha de "cavalo pequeno".
2) O pensamento intuitivo (*de quatro a sete ou oito anos*). A criança ainda responde muito intuitivamente às questões que lhe sobrevêm no cotidiano. Assim, é comum ainda falhas nos julgamentos como a comparação sobre o que pesa mais: um quilo de ferro ou um quilo de pena? Pela intuição ele julgaria pelo que visivelmente seria mais "volumoso", ou seja, provavelmente diria que um quilo de pena pesa mais.
3) Aparecimento do pensamento operatório: operações concretas (*dos sete aos doze anos*). A criança é capaz de fazer algumas operações como ser capaz de reunir, identificar quantidades. Nesta fase comumente a criança inicia seus estudos na escola regular e inicia a aprendizagem de Matemática conhecendo os números e as primeiras operações com eles. Mas, nesta fase a criança é "presa" ainda ao concreto, ou seja, não consegue abstrair ainda as ideias de número independentemente de uma associação como 1 carro, 2 pessoas, etc. O incrível é que muitas pessoas permanecem nesta etapa ou recorrentemente voltam a ela em sua caminhada de aprendizagem (como opção à "complicada" abstração).
4) Aparecimento e desenvolvimento das operações formais (*dos onze ou doze anos em diante*). A criança passa a desenvolver a

capacidade de operar num plano mais abstrato, independente de situações concretas.

Pode-se inferir, do que foi visto, que o desenvolvimento da inteligência não é meramente devido ao aumento de conhecimentos, mas a uma nova estrutura mental (caracterizado pelas 'etapas' de aprendizagem).

2.1.1. Piaget e os três tipos de conhecimento

Para Piaget temos duas fontes de conhecimento: interna e externa. Para ele também existem três tipos de conhecimento: o conhecimento físico, o conhecimento lógico-matemático e o conhecimento social.

O Conhecimento Físico é aquele a respeito das características externas dos objetos. Podemos nos perguntar sobre o material, a cor, peso e outras variáveis sobre o mesmo a fim de caracterizá-lo. Esse conhecimento é alcançado por meio da observação. Trata-se de uma fonte externa. É através da interação com os elementos que a criança consegue adquirir estas informações. Ela consegue compreender de que material é feito, qual a cor, peso, forma, ou seja, consegue entender suas propriedades físicas. Essa compreensão é definida como abstração empírica e ela pode ocorrer "a partir da vivência de situações envolvendo objetos concretos (de diferentes cores, tamanhos, espessuras, texturas, etc.) que o professor apresenta às crianças na escola." (GUIMARÃES, 2012, p. 46).

O conhecimento Lógico-Matemático surge do que é chamado de abstração reflexiva, ou seja, a partir de uma reflexão mental que consegue estabelecer e coordenar relações e estruturas cognitivas. A fonte deste conhecimento é interna, depende do sujeito e de sua reflexão.

O terceiro tipo de conhecimento é o Social. "Ele tem origem no convívio social, é arbitrário e varia de cultura para cultura" (GUIMARÃES, 2012, p. 47). Interessante que neste tipo de conhecimento tomamos contato com os fatos sociais de nossa sociedade. Todas as "regras" de convivência fazem parte desse conhecimento além de outras convenções.

> O conhecimento social refere-se às convenções criadas socialmente. Um exemplo bem interessante sobre o conhecimento social é o de crianças, até mesmo muito novas, conseguirem contar de um (1) a dez (10). Muitos acreditam que só porque elas recitam os números já tenham construído este conceito. Contudo, esse tipo de conhecimento não deve ser confundido com o conhecimento lógico-matemático, uma vez que este não se apoia em símbolos e convenções. Dessa maneira, recitar os números de um (1) a dez (10) trata-se de um conhecimento social. (GUIMARÃES, 2012, p. 47)

2.1.2. O Conhecimento Lógico-Matemático

A construção do conhecimento lógico-matemático não procede, ao contrário do que muitos pensam, de uma atitude simplesmente empírica. Não se alcança conhecimento lógico-matemático por meio da observação das propriedades dos objetos quando se age sobre eles. Contudo, o conhecimento também fica inviável sem a interação. Isso significa que a interação com os elementos externos pode fazer surgir processos mentais de coordenação e estruturação de propriedades próprias do raciocínio lógico-matemático. Assim, a construção de estruturas numéricas e aritméticas, apesar de não serem alcançadas simplesmente pela mera ação sobre objetos, prescindem da interação do sujeito com o objeto.

Neste sentido é que a teoria *piagetiana* valoriza o papel da ação do sujeito para se alcançar a construção do conhecimento, em especial, o conhecimento lógico-matemático. Valoriza as potencialidades, limitações e erros dos estudantes uma vez que todos estes elementos são meios úteis para promover a abstração reflexiva e proporcionar um caminho viável à construção efetiva do conhecimento. Há uma ênfase também ao processo como um todo e não apenas a resultados.

Todas estas características apontadas são diametralmente opostas à perspectiva tradicional de ensino que confunde o ato de aprender o conhecimento lógico-matemático; trabalhando-o como qualquer outro aprendizado. Mas, pelas especificidades mencionadas, ensinar Matemática numa perspectiva em que se ensina um conhecimento social, por exemplo, já seria uma tragédia. E é justamente isso que ainda ocorre na escola.

Há um ensino do conhecimento lógico-matemático baseado naqueles padrões, o que, faz o ensino enfatizar mais a retransmissão de informações alcançadas pela humanidade até aquele momento, dá ênfase também à aquisição de habilidade com algoritmos e processos de soluções padronizadas em detrimento de uma aquisição por parte do estudante de uma verdadeira abstração reflexiva que envolve a construção, recriação, do conhecimento agindo de forma determinante na estrutura de raciocínio e entendimento do ser.

Naquele molde, tradicional, de transmissão do conhecimento, os estudantes fariam como aquela criança que recita números de um (1) a dez (10) por um mero ato de memorização ou convenção social sem se dar conta do que realmente seja o sistema numérico e sem alcançar o conhecimento por trás da oratória. A proposta *piagetiana*, pelo contrário, apoia-se na construção pelo estudante, do conhecimento lógico-matemático, mediante a abstração reflexiva na existência de interação deste com o objeto de forma ativa e produtiva.

2.2. A construção do conhecimento matemático

Pensar na construção do conhecimento matemático é considerar toda a perspectiva da educação atual, que é influenciada por pesquisas oriundas principalmente da Biologia, Psicologia, Sociologia, Pedagogia e Filosofia que são pautadas numa proposta interativa, em que coloca o aluno como ator do processo educativo e propõe que o conhecimento é algo a ser trabalhado, construído, formado e não apenas memorizado, fixado, recebido de modo pronto e acabado.

> Concebemos a construção do conhecimento como um processo dinâmico no qual o aluno torna-se o agente dessa construção ao vivenciar situações, estabelecer conexões com o seu conhecimento prévio, perceber sentidos e construir significados. (HIRATSUKA, 2004, p. 183).

Neste propósito de construção do conhecimento é importante, portanto, considerarmos as perspectivas pedagógicas inovadores e condizentes com nossa necessidade atual, em oposição aos métodos arcaicos de educação dantes utilizados.

Como exemplo, podemos mostrar algumas consequências exclusivas da aplicação do método *piagetiano*, ou *psicogenético* na educação conforme apresentado por Piletti (2004, p. 126) em contraposição a um método simplesmente expositivo.

Método psicogenético (de Piaget)	Método expositivo
O aluno é o *agente* e o professor um orientador.	O professor é o agente e o aluno um *paciente* (ouvinte).
Mantém os alunos permanentemente ocupados durante a aula, fazendo-os refletir sobre um problema proposto. Não existe o problema de manter o aluno atento. A atividade do aluno garante esta condição.	Não conseguindo ocupar verdadeiramente a mente do aluno, tem que apelar para recursos externos de motivação. A atenção só se fixa se o professor possuir recursos extraordinários de ator ou de orador.
O interesse suscitado pelo tema e o impulso investigador iniciado em aula podem estender-se, indefinidamente, fora da classe, levando o aluno à pesquisa e à reflexão espontânea.	Cada assunto termina quando o professor conclui sua exposição, podendo prolongar-se apenas através de exercícios de repetição ou recapitulação.
Nenhum elemento é dado inteiramente elaborado, ao aluno, na convicção de que a aprendizagem só se realiza, realmente, quando o aluno mesmo elabora seu conhecimento.	O professor é considerado tanto mais perfeito quanto menos dificuldade suscitam suas aulas aos alunos: a aula expositiva visa a poupar o esforço intelectual do aluno.
Parte de uma situação-problema (desafio) seguida de uma investigação pessoal ou em grupo orientada pelo professor.	Parte do pressuposto de que a criança não é capaz de, por si mesma, encontrar a solução para uma situação-problema.
Os próprios alunos descobrem novas formas de resolver os problemas, por vezes engenhosamente originais.	O professor adota uma forma estereotipada de expor, que se cristaliza através dos anos de magistério.

Quadro 1: Método psicogenético *versus* método expositivo

A vantagem do método de Piaget é notadamente superior ao método meramente expositivo e traduz justamente uma postura de educação em sala de aula de que necessitamos. Com as qualidades e as especificidades que tornam nosso processo de ensino e aprendizagem moderno e dinâmico, consequentemente mais eficaz na formação do cidadão de nossa época.

É com base nesta postura educativa que acreditamos estar realmente construindo o conhecimento Matemático.

A METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas não é algo novo em Matemática. Na verdade alguns cientistas da área afirmam que saber Matemática é saber resolver problemas, tamanha a ligação entre tais elementos. Desde a antiguidade o homem se preocupava em resolver seus problemas e para tal utilizava-se, muitas vezes, de conhecimento Matemático; em outros momentos este conhecimento era mesmo produzido diante das demandas.

3.1 – O que é a Metodologia da Resolução de Problemas (MRP)?

"A MRP implica algumas posturas para o professor, para o estudante e para o ensino. Trata de aspectos, portanto, ligados à aula, aos objetivos, à eficácia do ensino bem como ao processo avaliativo"

A resolução de problemas obteve uma maior atenção como metodologia de ensino a partir de 1900 d.C. Só há pouco tempo o olhar de alguns estudiosos pairou na possibilidade de utilizar esta ferramenta como esteio para formação de estudantes.

> (...) somente por volta de 1900 em diante é que surgem os primeiros estudos científicos sobre a Resolução de Problemas matemáticos de que temos conhecimento. Os estudos que se originaram nos Estados Unidos da América (EUA) difundiram-se principalmente na década de 1980 e inicialmente sofreram forte influência das teorias da psicologia aplicada à educação de Piaget (1971). (WACHILINSKI, 2012, p. 28).

Assim, tivemos uma formatação mais abrangente para o trabalho com a resolução de problemas a fim de orientar os professores e estudantes bem como o processo de ensino e aprendizagem. Desta forma, a MRP implica algumas posturas para o professor, para o estudante e para o ensino. Trata de aspectos, portanto, ligados à aula, aos objetivos, à eficácia do ensino bem como ao processo avaliativo.

> Essa interpretação para formulação e resolução de problemas [como metodologia do ensino da Matemática] é mais recente e mais frutífera em relação ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, pois leva em conta as três interpretações anteriores [resolução de problemas como meta, como processo e como habilidade básica] e as enriquece com um componente metodológico importante, desencadeando conceitos e

> procedimentos por meio de situações-problema motivadoras e trabalhando com a problematização de situações e também com projetos e modelagem matemática. Em todas essas possibilidades, conteúdo (conceitos, procedimentos e atitudes) e metodologia caminham de mãos dadas, são inseparáveis. (DANTE, 2009, p. 11).

Neste sentido os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), (BRASIL, 2000), fazem algumas orientações, conforme citado por Dante (2009. p. 11), que se coadunam com a proposta da metodologia da resolução de problemas, quais sejam:

> - O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
> - O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
> - Aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da matemática;
> - O aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulando com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;
> - A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

A atividade de resolução de problemas também é traçada como objetivo para o ensino médio para que se alcance uma real aprendizagem.

> (...) desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo; utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos. (BRASIL, 2000, p. 42).

De acordo com o exposto, enfatizamos que a MRP é um conjunto amplo de ações e estratégias para o ensino em geral e, de Matemática em especial, pautadas nas mais recentes perspectivas educacionais, utilizando situações-problema como eixo condutor do processo. É estruturada visando desenvolver competências e habilidades de resolução de problemas.

3.2 – Por que trabalhar com a MRP?

Alguns motivos para trabalhar com a MRP são evidentes. Elencaremos alguns baseados em Dante (2009, p. 18-22) que nos darão maior clareza quanto aos benefícios desta proposta.

3.2.1 – Fazer o estudante pensar produtivamente.

"Faz o estudante pensar produtivamente"

O estudante precisa pensar por si mesmo. Precisamos mudar nossa postura educativa daquela que enfatiza a reprodução para aquela que incentiva a produção de conhecimento. As incertezas do nosso mundo não nos deixam escolha. Não podemos privilegiar este ou aquele conteúdo e dispor aos estudantes para que "decorem", "memorizem" ou se apeguem fixamente a ele por ser importante ou principal. Na verdade, com as mudanças que ocorrem na sociedade, nos negócios e na vida como um todo, não temos a menor condição de prever ou decretar que este ou aquele conhecimento deve ser resguardado para o futuro, o mais provável é que o conhecimento de hoje se tornará obsoleto o mais rápido possível e se nos apegarmos a este conhecimento também nos tornaremos obsoletos. Portanto, o mais importante em termos de perspectivas atuais de ensino será educar nosso discente a pensar por si só e a aprender a aprender.

Ensinar a fixar conteúdos não garante uma boa educação. Ensinar a pensar garante oportunidade para este estudante conseguir dialogar com qualquer realidade de vida que ele se deparar, visto que saberá apreender o mundo a sua volta. A MRP contribui para esta perspectiva na educação.

3.2.2 – Desenvolver o raciocínio do estudante.

"Desenvolve o raciocínio do estudante"

Desenvolve-se o raciocínio mediante desafios. É quase impossível haver desenvolvimento quando não há uma espécie de inquietação de alguma forma. O ser humano tende a ser, por natureza, acomodado. Logo, o despertar de suas faculdades criativas, de raciocínio devem ser estimuladas. Observe os grandes avanços que ocorreram na humanidade, em que momentos históricos de deram? Nos períodos mais turbulentos. Foram nos momentos de desafio que as mentes foram impulsionadas a dar soluções à problemática. Assim também, de certa forma, acontece conosco. Precisamos de uma dose de desafios, de uma problemática real para romper com nossos tenros limites do saber e alcançar novos horizontes.

3.2.3 – Ensinar ao estudante a enfrentar situações novas.

"Ensina a enfrentar situações novas"

É na escola que devemos realmente testar possibilidades, situações nas quais os estudantes poderão passar. Um dos objetivos da escola também é preparar o estudante para o trabalho e para vida social, portanto, situações problema que envolvam estas realidade serão interessantes e podem ser realidade no processo de ensino com a MRP. Além disso, a própria característica dos problemas exigem lidar com situações novas e formatar posturas para isso, uma vez que os problemas não são repetitivos, mas sim uma abordagem nova e criativa. Um verdadeiro desafio.

3.2.4 – Dar ao estudante a oportunidade de se envolver com aplicações matemáticas.

"Dá oportunidade de se envolver com aplicações matemáticas"

"Pra que serve isso, professor?" Talvez seja uma frase recorrente ouvida pelos professores de Matemática. A possibilidade de mostrar a aplicação da Matemática é dada pela resolução de problemas, uma vez que os problemas podem ser reais. Em uma solução, portanto, evidencia-se a utilidade da Matemática para o cotidiano. Por que a antena parabólica tem aquele formato? Como garantir a segurança eletrônica de uma conta bancária? Existe alguma relação da Matemática com o som? Com a música? Questões como estas instigam a uma aplicação Matemática apropriada.

"Torna as aulas mais dinâmicas e desafiadoras"

3.2.5 – Tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas e desafiadoras.

As reclamações quanto à aula também são frequentes. Devemos admitir que ficar sentado por, aproximadamente, 4 horas por dia numa cadeira, durante 5 dias por semana deve deixar qualquer um exausto só por esta realidade em si. Portanto, o máximo possível que pudermos realizar para que as aulas, no cotidiano, se tornem mais dinâmicas, mais atraentes e mais desafiadoras, ainda será pouco! As metodologias estão aí para nos ajudar quanto a isso. Não que o professor deva ser agora animador de auditório, pelo contrário, sua postura deve continuar a mesma, contudo, o processo pode ser menos desgastante e mais atraente quando mediado por boas ações. A MRP nos dá suporte neste sentido, claro que não de modo completo, contudo, dando boas condições e perspectivas para o ensino. Quando o estudante se percebe como aquele que teve condições de resolver um problema certamente experimentará uma sensação de prazer nisso, o que o motivará a continuar em sua caminhada e a enfrentar novos desafios. Neste dialogo entre desafio-solução há um ganho em conhecimento.

"Equipa com estratégias para resolver problemas"

3.2.6 – Equipar o estudante com estratégias para resolver problemas.

Alguns estudantes passam horas diante de um problema e não conseguem nem mesmo "rabiscar" num rascunho alguma coisa. Parece que sua mente foi absorvida pela situação de tal forma que não há nem mesmo ideias ou caminho para se iniciar. A falha quanto a isto é que os estudantes não estão tendo estratégias para resolver problemas. Pólya nos brinda com estratégias bem simples e uma organização no procedimento quanto à resolução de problemas que é genial. As quatro etapas traçadas por ele tornaram-se clássicas. Assim, o estudante deve saber, pelo menos, tais etapas para orientar seu processo de resolução. São elas: i) compreender o problema; ii) traçar um plano; iii) executar o plano e iv) testar ou validar a resposta.

"Dá boa base matemática às pessoas"

3.2.7 – Dar uma boa base Matemática às pessoas

Quem trabalhou ou trabalha com a MRP sabe que a exigência do conhecimento matemático não se reduz, pelo contrário, ela aumenta em virtude da peculiaridade da abordagem. Os problemas, na maioria das vezes, não são incipientes. Eles requerem uma boa fundamentação Matemática para sua resolução. Nesta busca ou construção de elementos matemáticos durante o processo da problemática é que se estabelece um "*no hall*" de conhecimento. À medida que novos desafios são propostos, novos campos de conhecimento são perscrutados. Neste processo dialógico, a formação do conhecimento matemático é inevitável.

3.3. – O que é um problema?

O que é um problema? Queremos reconhecer um conceito de problema em Matemática não a partir de um senso comum, mas a partir da consideração e convenção de muitos estudiosos da área. Assim, temos a opinião quase que unânime enfatizando que a essência de um problema em Matemática está ligada ao fato dele ser uma situação em que se encontre determinada dificuldade para ser solucionada.

Deve ser uma situação desafiadora que exija elencar diversas ferramentas matemáticas bem como a aplicação adequada das mesmas rumo à construção de um caminho que conduza a solução. Parra e Saiz (1996, p. 43) concordam com esta posição ao afirmarem que "os problemas frequentemente oferecem resistência; as soluções são quase sempre parciais, ainda que ideias geniais provoquem avanços espetaculares... que muitas vezes não são reconhecidos desde o começo".

Dante (2009, p. 11) afirma que: "De maneira genérica, pode-se dizer que é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo". Outra definição de problema em Matemática que segue de perto esta linha considerada consensual entre os educadores matemáticos pode ser mostrada: "problema é uma situação que um indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução" (DANTE, 2009).

Carvalho (1995, p.82) ainda pode nos enriquecer o entendimento quando afirma que: "Um problema é uma situação onde ocorre um desequilíbrio, ou seja, que exige uma solução não imediata, mas para a qual dispomos de meios intelectuais de resolução".

Com tal entendimento queremos evitar a todo custo confundir um problema segundo a Metodologia em questão com meras atividades ou os famosos exercícios envolvendo várias contas de Matemática. Um problema é algo mais criativo, que evoca uma problemática desafiadora e tem o potencial de provocar a produção de conhecimento efetivo quando se busca por soluções. Talvez esta seja a maior diferença entre um problema e um mero exercício. O problema acarreta produção de conhecimento enquanto o exercício apenas enfatiza a repetição de procedimentos, habilidades ou regras.

3.4 – Tipos de problemas matemáticos

Os problemas matemáticos se dividem em basicamente dois tipos: problemas de determinação e problemas de demonstração. Nos problemas de determinação é preciso se realizar algum cálculo mediante o qual se encontra um determinado valor para satisfazer as condições dadas, ou seja, neste tipo de problema realmente temos de determinar a solução.

> Os "problemas de determinação" podem ser teóricos ou práticos, abstratos ou concretos, problemas sérios ou simples

> enigmas. Podemos procurar determinar incógnitas de todos os tipos; podemos tentar encontrar, calcular, obter, produzir, traçar, construir todos os tipos imagináveis de objetos. (PÓLYA, 1994. p. 124).

Nos problemas de demonstração temos que trabalhar uma série de argumentações para desenvolver um raciocínio que prove a validade, ou não, de uma hipótese. Pólya (1994. p. 124) nos esclarece melhor o sentido de tais problemas quando afirma que

> O objetivo de um “problema de demonstração” é mostrar conclusivamente que certa afirmativa, claramente enunciada, é verdadeira ou, então, que é falsa. Temos de responder à pergunta: esta afirmativa é verdadeira ou falsa? E temos que respondê-la conclusivamente, quer provando-a verdadeira, quer provando-a falsa.

Esta classificação dos tipos de problemas em apenas dois é uma boa classificação e que simplifica muito o entendimento, contudo, alguns estudiosos propuseram a possibilidade de classificação dos problemas de outras formas, incluindo uma gama maior de categorias. Dante (2009, p.15) nos traz a seguinte classificação:

- Exercícios de reconhecimento;
- Exercícios de algoritmos;
- Problemas-padrão;
- Problemas-processo ou heurísticos;
- Problemas de aplicação e
- Problemas de quebra cabeça.

3.5 – Como se resolve um problema?

Cada problema deve ser único e desafiador, para ser um real problema, portanto não existem fórmulas prontas para se resolver este ou aquele problema. O que podemos fazer para auxiliar no processo de resolução de problemas é traçar algumas diretrizes que conduzam adequadamente o modo de pensar, contudo, o pensar, é individual e cada um tem seu modo de fazê-lo com suas amplitudes e limites.

Pólya (1994. p. 4-10) traçou quatro etapas que nos ajudam muito a organizar e raciocinar diante de um problema proposto. As quatro etapas são: 1) Compreensão do problema; 2) Estabelecimento de um plano; 3) Execução do plano; 4) Retrospecto.

3.5.1 – Compreensão do problema

"Compreender"

Não se deve iniciar a resolução de um problema sem que se saiba corretamente qual o objetivo do mesmo. Sem compreensão do problema não há ponto de partida, pois qualquer iniciativa seria como que atirar no escuro. Muito pior é começar a resolução de um problema sem claro entendimento do que ele requer e chegar a resultados arbitrários. Portanto, é necessário, antes de qualquer iniciativa, se perguntar e analisar atentamente o problema em busca de sua exata compreensão.

Alguns questionamentos podem ser feitos neste ponto, tais como: Qual é a incógnita (incógnita pode ser entendida como a grandeza cujo valor é desconhecido). O problema quer saber sobre o quê? Peso? Altura? Distância? Tempo? Enfim, é preciso determinar a incógnita que se quer determinar. Outra pergunta interessante é quanto aos dados que são disponibilizados no problema. Quais são os dados? É importante relacioná-los para se ter uma noção do que é possível ou não trabalhar. É necessário notar que nem todos os dados, obrigatoriamente, precisam ser utilizados na resolução de um dado problema. Às vezes, certos dados são contingentes, para nada servem, constam no problema apenas a título de ilustração ou complementação de informações essenciais. Assim, avaliar a necessidade de uso de tais dados também é uma tarefa primordial.

Muitos estudantes "travam" em certos problemas porque não conseguem "encaixar" todos os dados na resolução. A falha está em simplesmente querer utilizar todos os dados quando tal não é necessário. Ainda temos outra pergunta crucial: Qual a condicionante? Condicionante se entende como uma determinada limitação a uma situação que deve ser observada. Na verdade, todos os problemas tem uma condicionante. Não se quer saber coisas a esmo, mas se determinar especificidades. Quando se pergunta sobre a área de uma figura a condicionante é a figura. Nem toda figura tem mesma área. Para cada figura geométrica temos um processo de ser calcular sua área. Pólya (1994, p. 5) mostra um exemplo que ilustra bem esta etapa e como ela pode ser conduzida pelo professor em sala de aula:

> (...) os alunos devem calcular, "medir indiretamente", a diagonal da sala. O professor indica o comprimento, a largura e a altura da sala e, com um gesto, mostra a diagonal. (...) O diálogo entre o professor e seus alunos pode principiar da seguinte maneira: - Qual a incógnita? O comprimento da diagonal de um paralelepípedo. – Quais são os dados? O comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo. – Adote uma notação adequada. Qual a letra que deve denotar a incógnita? x. Quais as letras que escolheria para o comprimento, a largura e a altura? a, b e c. Qual é a condicionante que relaciona a, b e c com x? x é a diagonal do paralelepípedo no qual a, b e c são, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura. – Trata-se de um problema razoável? Ou seja, a condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Sim, ele é razoável. Se conhecermos a, b e c, conheceremos o paralelepípedo. Se o paralelepípedo ficar determinado, a sua diagonal também o ficará.

Uma dica para este processo de compreensão é representar quando possível a situação. Se estivermos falando de um retângulo, representá-lo é importante. Se falarmos de contagem, desenhar as unidades, os objetos, mesmo que seja apenas em parte, pode ajudar na compreensão do problema.

"Planejar"

3.5.2 – Estabelecimento de um plano

A existência de plano, projeto ou caminho para se resolver algo é uma realidade. Mesmo que não tenhamos planos formais, escritos ou de forma consciente, o temos por meio de ideias de como abordar a questão proposta. A questão fundamental é que seria importante trazermos tais planos fortuitos e casuais para o âmbito do consciente, do intencional, do argumentativo, do previsível para, com tais elementos e um pouco de formalismo, moldarmos uma estratégia na resolução de um problema.

Os planos dependerão de alguns elementos importantes, tais como a experiência e o conhecimento prévio que se tem da questão. Evidentemente que quanto maior conhecimento matemático maior serão as possibilidades de se enxergar rapidamente um plano básico para atacar o problema. Quanto maior familiaridade com a Matemática mais facilmente se conseguirá elencar elementos dela que sejam úteis para determinado contexto. Contudo, não é só um conhecimento prévio de matemática que resolverá o problema. É preciso um misto de conhecimento, experiência e raciocínio próprio e criativo diante da situação. Nas palavras de Pólya (1994. p. 6): "Não bastam os materiais para a construção de uma casa, mas não poderíamos construí-la sem lançar mão dos materiais necessários". Uma preciosa dica do matemático em questão é que precisamos lançar mão de problemas correlatos. Conhecemos algum problema parecido? Ele pode ser modelado ou adaptado para se "encaixar" na presente situação? Quanto maior a quantidade de problemas que tenhamos resolvido, maior será a possibilidade de termos alguma familiaridade com novos problemas.

"Executar"

3.5.3 – Execução do plano

Tendo compreendido o problema e estabelecido um plano, cabe agora executarmos cuidadosamente tal plano. O momento da execução do plano na resolução de problemas é muito importante. É aqui que se faz necessário concentração e muita paciência. Contudo, a parte mais difícil pode já ter passado, pois conceber o plano é que exige um certo brilhantismo. Ter a ideia chave que solucionará a questão é a parte principal. Após isso é só proceder adequadamente com os cálculos, o que é típico desta etapa, até se encontrar os valores almejados.

Na execução do plano, cada passo deve ser meticulosamente analisado e confirmado com argumentação lógica. Esse encadeamento de linhas de raciocínio embasadas logicamente produz, no mínimo, um resultado final condizente com as operações realizadas. Se todo o processo correr como o previsto, estaremos diante da possível solução do problema.

De fato, a execução do plano, apesar de ser uma etapa razoavelmente fácil, é comum percebermos enormes erros e equívocos por parte dos estudantes justamente neste ponto. Quem nunca ouviu de um estudante a seguinte frase: “professor, só errei o sinal!”. Ou, “professor, errei só a multiplicação”. É comum os estudantes errarem operações triviais como adição, subtração, multiplicação e divisão quando estão resolvendo um problema. E mais, até mesmo estudantes universitários “penam” com estes “pequenos detalhes”. Um problema de cálculo pode ser um percalço não por causa de sua complexidade inerente, mas por causa de uma operação aritmética elementar mal resolvida. Portanto, talvez a maior dica neste ponto esteja relacionada à atenção quanto aos procedimentos operatórios, considerados até mesmo básicos.

3.5.4 – Retrospecto

“Rever”

Mesmo após as etapas anteriores e até mesmo quando se dispõe de determinado valor para a incógnita do problema, não devemos ter como terminado o processo de resolução antes de se realizar um retrospecto, ou seja, uma espécie de revisão ou mesmo prova real do que foi feito.

Comumente os estudantes, ao primeiro relance de valor encontrado, atribuem-no como solução do problema sem antes analisá-lo e criticá-lo adequadamente. Basta em alguns casos um pequeno senso crítico para se refutar o valor encontrado como solução. Um problema que questiona a distância percorrida por uma bola chutada por um jogador de futebol num plano horizontal qualquer e em condições normais dificilmente poderia resultar em 2,5 quilômetros, por exemplo. A espessura do diâmetro de uma tubulação, em condições normais, instalada no interior de uma parece residencial provavelmente não pode ser algo como 1,2 metros, visto que as paredes não têm normalmente esta espessura.

Enfim, uma pequena crítica pode nos conduzir a perceber falhas em algum dos processos anteriores.

O retrospecto serve justamente para este objetivo. Revisar todo o processo e caso se acuse falhas, proceder com a dissolução da mesma. Desta forma, as quatro etapas tornam-se um procedimento cíclico até que se encontre a solução adequada ao problema.

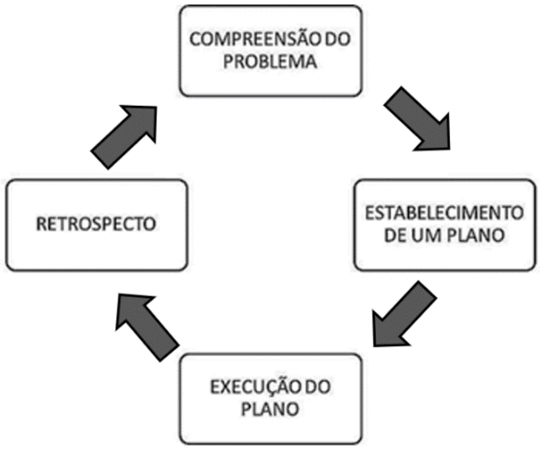


Figura 1: Inter-relação das etapas de Pólya no processo de resolução de problemas.

3.5.5 – Exemplo de Pólya

Pólya nos traz vários exemplos de resolução de problemas mostrando as inter-relações entre as etapas listadas bem como a exemplificação dessa espécie de diálogo com o problema. Vejamos um de seus exemplos de forma simplificada e adaptada.

Problema 1: Calcular a diagonal de um paralelepípedo retângulo do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura.

Solução: Compreensão do problema: Qual é a incógnita? O comprimento da diagonal do paralelepípedo retângulo. Quais são os dados? O comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo. Qual a letra para a incógnita (definindo notação) e para o comprimento, largura e altura? x, a, b e c respectivamente. Qual é a condicionante que relaciona a, b e c com x? x é a diagonal do paralelepípedo no qual a, b e c são, respectivamente, comprimento, largura e altura.

Estabelecimento de um plano: Conhece um problema correlato? Conhece um problema que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante? A incógnita é a diagonal. Um problema correlato poderia ser calcular a diagonal de um quadrilátero. Ou calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo. Será possível utilizar este fato para auxiliar na resolução do problema proposto? Possivelmente, basta identificarmos a oportunidade de introduzir tal fato na questão. Há algum quadrilátero ou triângulo na situação? Façamos uma figura.

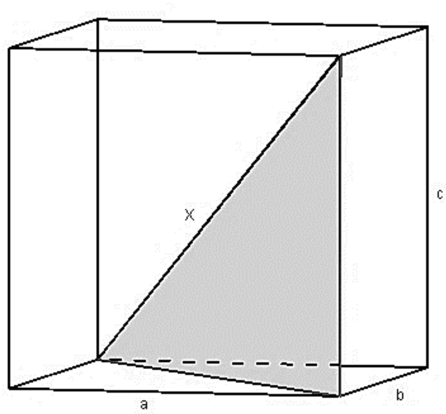


Figura 2: Representação do paralelepípedo com sua diagonal.

Podemos observar a existência de ambos, um quadrilátero será formado pela secção do paralelepípedo com o plano ortogonal que passa pela diagonal do paralelepípedo considerada. Um triângulo retângulo será formado unindo-se a diagonal do paralelepípedo com a diagonal da base do paralelepípedo (projeção ortogonal da diagonal do paralelepípedo na base) e com a aresta comum a ambos os segmentos (conforme disposição na figura 2). Com a ideia suporte do triângulo retângulo, percebemos que a situação pode ser decomposta em duas etapas. Em uma etapa precisaríamos calcular a hipotenusa do triângulo formado, mas para tal precisaríamos ter definido claramente os catetos do triângulo retângulo, ou seja, precisaríamos de uma etapa anterior para calcular tal elemento. Assim, com ambas as informações, conseguiremos encontrar a incógnita procurada. Pronto! Temos um plano.

Execução do plano: A parte mais difícil, certamente é conceber um bom plano. Após esta realização, a execução do mesmo torna-se um trabalho bem mais fácil, contudo, que exige paciência, perseverança e muita atenção. Nesta etapa precisamos observar atentamente detalhes ora não postulados no plano que podem interferir positiva ou negativamente na execução. Precisamos de perícia, para em cada etapa, executá-la adequadamente, sem falhas. No problema, temos que introduzir outra notação para a diagonal da face formada pelas arestas a e b. Esta diagonal será o cateto "desconhecido" do triângulo que introduzimos no paralelepípedo. Chamaremos de y esta incógnita. Podemos calcular, portanto, a situação, assim:

Teorema de Pitágoras

$a^2 = b^2 + c^2$

$$x^2 = y^2 + c^2 \quad (1)$$

$$y^2 = a^2 + b^2 \quad (2)$$

Substituindo a equação $(2) em$ (1), temos:

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (3)$$

Retrospecto: O retrospecto é geralmente uma etapa negligenciada pelos estudantes. Quando encontram um resultado, dão a questão por satisfeita e passam para a próxima. Contudo, a etapa do retrospecto é extremamente importante, uma vez que ela nos permite rever todo o procedimento bem como nos aprimorar ainda mais na resolução de problemas. O estudante, ao encontrar um resultado, não deve se dar por satisfeito. É necessário ainda investigar e rever cada etapa em busca de possíveis erros, uma vez que ninguém é perfeito, a possibilidade de erros em alguma etapa não é descartada.

As questões "óbvias" são aquelas que mais têm potencial de complicar o solucionador, justamente pelo fato de parecer tão óbvio não se dá o devido valor às revisões e às buscas de interpretações incorretas ou induzidas ao erro por "pegadinhas". No processo de retrospecto também é importante tentar chegar ao resultado por outros meios, o que, pode validar ainda mais a resposta. Existem outras maneiras de se chegar a este resultado? Quais? Também é interessante tentarmos verificar de alguma forma o resultado, ou seja, testá-lo na prática. Essa é uma boa alternativa para a conferência das soluções. Antigamente chamávamos tal processo de “prova real”.

3.5.6 – Exemplo de Terence Tao

Outro exemplo que relaciona processos de resolução de problema com uma leve mudança de perspectiva será descrito. Ele foi apresentado por Terence Tao em sua obra intitulada “Como Resolver Problemas Matemáticos: Uma Perspectiva Pessoal”. De modo geral ele incorpora as orientações de Pólya, mas faz contribuições interessantes e, no seu dizer, de caráter pessoal para a abordagem de problemas. Assim, mostraremos de forma resumida e adaptada um de seus problemas modelo. Na abordagem do problema, ficou notório o percurso traçado na resolução. Tal percurso envolveu os seguintes passos, propostos por Tao (2013):

- Perceber o problema;
- Entender os dados;
- Entender o objetivo;
- Escolher uma boa notação;
- Escrever o que sabemos na notação que escolhemos, fazer um diagrama;
- Modificar ligeiramente o problema;
- Modificar grandemente o problema;
- Estabelecer resultados sobre o problema e
- Simplificar, explorar os dados, atingir metas parciais.

Problema 2: Os comprimentos dos lados de um triângulo formam uma progressão aritmética de razão d. A área do triângulo é t. Calcule os lados e os ângulos do triângulo.

Solução: A primeira dica do autor é que:

1) *Precisamos perceber o problema.* Identificar com que tipo de problema estamos lidando. Diferentemente de Pólya, o autor identifica três tipos de problemas: I - aqueles do tipo mostre ou calcule em que se deve

provar uma determinada afirmação ou realizar um cálculo e determinar certo valor, II - do tipo encontre ou encontre todos para se encontrar determinado objeto ou todos satisfazendo certas condições e III - questões do tipo existe ou não em que se tem que provar uma determinada afirmação ou dar um contraexemplo, o que, enquadra tal problema em uma das categorias anteriores. A importância de se identificar com que tipo de problema estamos trabalhando reside no fato dela determinar nossa abordagem de resolução. Segundo o autor, problemas do tipo I são mais fáceis de lidar, pois normalmente já apresentam um determinado objetivo e trazem dados ou expressões que podem ser manipuladas. Os problemas do tipo II geralmente são resolvidos por tentativa e erro. Os do tipo III são aqueles identificados como os mais difíceis, pois primeiro deve-se decidir se tal objeto existe ou não e proceder com a prova ou um contraexemplo. O problema 2 é do tipo calcule. Será necessário exprimir certas incógnitas dependendo de algumas variáveis.

Como a ideia básica será exprimir uma incógnita em função de outras variáveis, tal fato sugere uma abordagem algébrica para o problema e não geométrica.

Assim como Pólya, Terence Tao se preocupa com os dados do problema na etapa seguinte.

2) *Entender os dados*. "Quais são os dados do problema?" pergunta o autor ao que responde: "Para entendermos os dados do problema, precisamos saber como interagem esses objetos com tais propriedades. Isto é importante para focarmos a atenção nas técnicas e notações apropriadas ao problema." (TAO, 2013, p. 2). Na questão em apreciação os dados são um triângulo, sua área, e o fato de que seus lados estão em progressão aritmética de razão d. Importante também é entendermos o objetivo do problema.

3) *Qual é o objetivo*. Precisamos reconhecer aonde pretendemos chegar para termos melhores condições de realizar tal intento. Com uma visão nítida do objetivo podemos modificar o problema para que alcancemos representações mais simples ou resultados parciais que podem

sinalizar a resolução do problema geral. Também com o objetivo em mente fica mais fácil identificar quais serão as ferramentas apropriadas para se utilizar na resolução. No caso em questão, o objetivo é encontrar os lados e ângulos do triângulo. Para tanto é necessário pensamos em conceitos matemáticos que abordem tais elementos. Isso já seria uma espécie de plano ou estratégia para trabalhar com o problema. Poderíamos pensar na lei dos senos e cossenos que interagem entre lados e ângulos em um triângulo e também poderíamos pensar na fórmula de Heron que relaciona área com lados de um triângulo. O ponto chave aqui é que se tivermos um objetivo claro, poderemos ter maior facilidade para traçar os caminhos adequados.

4) *Escolher uma boa notação*. Às vezes os estudantes pensam que as notações são fixas e esperam que elas venham postas no problema. “Criar” uma determinada notação parece ser algo subversivo para o estudante. Ele está acostumado ao x e nada de mudança! Contudo, a notação, a escolha dos signos gráficos que representarão as incógnitas e variáveis, são de livre escolha do solucionador do problema de acordo com seu gosto e princípios. Claro que se requer sempre uma notação clara, objetiva, “não carregada” e o mais simples possível, que facilite ao máximo o processo de solução. Assim, conforme o autor, podemos escolher para os lados do triângulo a notação $b-d,\ b,\ b+d$.

Mas poderíamos nos perguntar: por que não escolher como notação para os lados $a, b\ e\ c$ que é tão comum? Simplesmente pelo fato de que a notação escolhida já inclui a condição dos lados estarem em progressão aritmética de razão d. Observe que praticamente houve uma substituição de a por $b-d$ e de c por $b+d$, caso contrário, a notação realmente seria a mais comum $a, b\ e\ c$. Já para os ângulos podemos aceitar a convenção de que representamos tais com letras minúsculas gregas. Logo, podemos estabelecê-los como $\alpha, \beta\ e\ \gamma$. Apesar de existir uma relação entre eles, pois $\alpha+\beta+\gamma=180°$ não há necessidade de uma escrita do tipo $\alpha, \beta\ e\ 180° - (\alpha+\beta)$, pois não existe vantagem com isso além de tornar a notação carregada.

Soma dos ângulos internos de um triângulo

$\alpha+\beta+\gamma=180º$

5) *Escrever o que sabemos na notação que escolhemos, fazer um diagrama.* Sobre o que se sabe do problema o autor pontua:

- Restrições físicas: $\alpha, \beta, \gamma, t > 0$ e $b \geq d$; também podemos supor, sem perda de generalidade, que $d \geq 0$;
- Soma dos ângulos internos de um triângulo:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad (4)$$

- Lei dos senos:

$$\frac{b-d}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{(b+d)}{sen\gamma} \quad (5)$$

- Lei dos cossenos:

$$b^2 = (b-d)^2 + (b+d)^2 - 2(b-d)(b+d)cos\beta \quad (6)$$

- Fórmula da área:

$$t = \frac{(b-d)bsen\gamma}{2} = \frac{(b-d)(b+d)sen\beta}{2} = \frac{b(b+d)sen\alpha}{2} \quad (7)$$

- Fórmula de Heron:

$$t^2 = s(s-b+d)(s-b)(s-b-d) \quad (8)$$

onde o semiperímetro s é dado por

$$\frac{(b-s)+b+(b+d)}{2} \quad (9)$$

- Desigualdade triangular:

$$b + d \leq b + (b-d) \quad (10)$$

Uma observação a ser feita é que tantos dados e informações nem sempre são úteis. Cabe ao solucionador identificar aquilo que seja mais adequado a cada momento. Contudo, essa exposição de fatos faz com que a mente "libere" criatividade e traga elementos que possam ser valorosos para solução do problema, seria algo como um *brainstorming* (tempestade de ideias). Um diagrama possível para representar a situação encontra-se na figura abaixo.

Lei dos senos

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$

Lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\alpha)$$

Fórmula de Heron

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

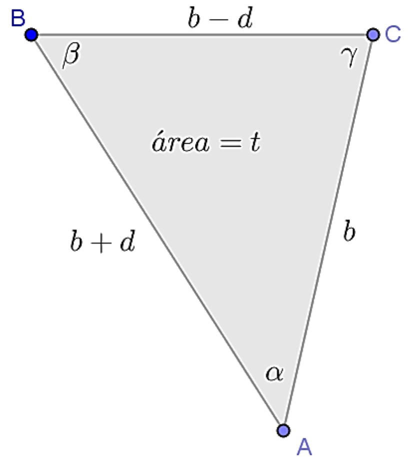


Figura 3: Representação do problema.

6) *Modificar ligeiramente o problema.* Basicamente o autor elenca algumas possibilidades de remodelar o problema em busca de uma sinalização para solução do problema original.

a) Considerar casos especiais do problema, como, por exemplo, casos extremos ou degenerados;
b) Resolver uma versão simplificada do problema;
c) Formular uma conjectura que implicaria na solução do problema, e tentar resolvê-la primeiro;
d) Deduzir algumas consequências do problema, e tentar começar por demonstrá-las;
e) Reformular o problema (por exemplo, tomar o contrapositivo, demonstrar por absurdo, ou tentar alguma substituição);
f) Estudar soluções de problemas análogos;
g) Generalizar o problema.

Um alerta ao uso dessas modificações é quanto ao seu caráter de ser algo específico. Às vezes a abordagem para um caso específico ou simplificado não se aplica ou não auxilia em nada com o caso geral. Contudo, a estratégia ainda se constitui um bom procedimento em casos em que não se há inicialmente perspectiva alguma de ataque ao problema. Mas, o bom senso orientará a perceber quando o caso particular ou especial produz algum elemento que desbloqueie, pelo menos, outras estratégias para o caso geral.

O autor propõe o seguinte caso específico para o Problema 2; podemos ter o caso de $d = 0$. Caso a razão da progressão aritmética seja nula, isso indica que estamos diante de uma progressão estacionária, logo, seus termos serão iguais e o triângulo tornar-se-á equilátero de área t. Assim, o valor de b pode ser calculado da seguinte forma:

$$t = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \to 4t = b^2\sqrt{3} \to \frac{4t}{\sqrt{3}} = b^2 \to b^2 = \frac{4t}{\sqrt{3}}$$

$$b = \sqrt{\frac{4t}{\sqrt{3}}} \to b = \frac{2t^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}} \tag{11}$$

Este caso particular, na verdade não traz muita luz quanto aos procedimentos para o caso geral, contudo, pode indicar que no caso geral também aparecerá na expressão raízes quadradas ou quartas. Ademais, pode ser um recurso para testar a solução geral, uma vez que encontrada a mesma basta ver se o caso em que $d = 0$ se coaduna com o resultado anterior.

7) *Modificar grandemente o problema.* “Neste tipo de estratégia mais agressiva, submetemos o problema a mudanças importantes como a se subtrair alguns dados, trocar os dados com o objetivo, ou negar o objetivo” (TAO, 2013. p. 7). No problema em questão, poderíamos modificá-lo pensando não em um triângulo, mas em um quadrilátero qualquer e mantendo as outras condições, mas tal atitude parece não contribuir em nada com a solução. Por outro lado, essa modificação pode sinalizar para o fato de que não é necessário a posição do triângulo, nem mesmo de um triângulo, o que precisamos são os dados, as medidas. Assim, evitamos trabalhar com coordenadas no plano ou algo parecido.

O autor ainda sugere a possibilidade de ocultar alguns dos objetivos: ao invés de calcular lados e ângulos, pode-se calcular apenas lados. Tal procedimento não interfere em nada no problema, pois caso os lados sejam determinados os ângulos também o serão por relações envolvendo os lados. Assim, é possível trabalhar primeiro neste objetivo e, posteriormente, perseguir o outro, até porque os ângulos ficam determinados a partir das leis dos senos ou cossenos. Também existe a possibilidade de se ocultar a razão d. Mas, novamente, tal fato só causaria maior complicação, pois se teriam várias soluções dependendo da razão d adotada. Com os lados sendo b - d, b e $b + d$ percebemos que só é necessário encontrar b.

8) *Estabelecer resultados sobre o problema.*

Estabelecer alguns pequenos resultados pode favorecer no entendimento geral da questão. O que estamos procurando é uma expressão de b em função de d e t. Logo, temos que $b = b(d,t)$, ou seja, a notação indica que b é uma função de d e t. Assim, um pequeno resultado conclusivo é que $b(d,t) = b(-d,t)$, pois, para cada progressão aritmética de razão d há uma progressão equivalente de razão $-d$. Também temos que $b(kd,k^2t) = kb(d,t)$. Tais observações podem em alguns casos trazer informações valiosos que nos permitam manipular melhor o problema em busca da solução. Neste caso em questão não há grande vantagem.

9) *Simplificar, explorar os dados, atingir metas parciais.* Nesta etapa temos que nos conduzir mais efetivamente em busca da solução do problema. Temos que visualizar algum procedimento, equação e trabalhar simplificações ou manipulações que nos conduzam a resposta. No Problema 2 usaremos a fórmula de Heron. Podemos usá-los, pois ela relaciona exatamente a área de um triângulo com seus lados. É o que precisamos, pelo menos em parte, alcançar uma expressão para b em função da t e d. Após este alcance de b podemos encontrar expressões para os ângulos utilizando as leis dos senos e cossenos. A fórmula de Heron em função de d, t e b fica assim:

$$t^2 = \frac{3b}{2}\left(\frac{3b}{2} - b + d\right)\left(\frac{3b}{2} - b\right)\left(\frac{3b}{2} - b - d\right) \tag{12}$$

Simplificando e isolando o valor de b em (12), temos:

$$t^2 = \frac{3b}{2}\left(\frac{3b - 2b + 2d}{2}\right)\left(\frac{3b - 2b}{2}\right)\left(\frac{3b - 2b - 2d}{2}\right)$$

$$t^2 = \frac{3b}{2}\left(\frac{b + 2d}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b - 2d}{2}\right)$$

$$t^2 = \frac{3b^2(b + 2d)(b - 2d)}{16}$$

$$t^2 = \frac{3b^2(b^2 - 4d^2)}{16}$$

$$16t^2 = 3b^2(b^2 - 4d^2)$$

$$3b^4 - 12b^2d^2 - 16t^2 = 0 \qquad (13)$$

Aqui, usando a fórmula de Bháskara, obtemos:

$$b^2 = \frac{12d^2 \pm \sqrt{144d^2 + 192t^2}}{6}$$

$$b^2 = 2d^2 \pm \sqrt{4d^4 + \frac{16}{3}t^2}$$

Visto que b é positivo, encontramos:

$$b = \sqrt{2d^2 + \sqrt{4d^4 + \frac{16}{3}t^2}} \qquad (14)$$

Como verificação, podemos fazer $d = 0$ e teremos como resultado o caso particular mencionado anteriormente em (4):

$$b = \frac{2t^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}}$$

Para encontrarmos o ângulo α, podemos utilizar a leis dos cossenos, assim:

$$(b - d)^2 = b^2 + (b + d)^2 - 2b(b + d)cos\alpha$$

$$b^2 - 2bd + d^2 = b^2 + b^2 + 2bd + d^2 - 2b(b + d)cos\alpha$$

$$-4bd - b^2 = -2b(b + d)cos\alpha$$

$$b(4d + b) = 2b(b + d)cos\alpha$$

$$(4d + b) = 2(b + d)cos\alpha$$

$$cos\alpha = \frac{4d + b}{2(b + d)}$$

$$\alpha = arccos\left[\frac{4d + b}{2(b + d)}\right] \qquad (15)$$

Como $b = \sqrt{2d^2 + \sqrt{4d^4 + \frac{16}{3}t^2}}$, temos:

$$\alpha = arccos\left[\frac{4d + \sqrt{2d^2 + \sqrt{4d^4 + \frac{16}{3}t^2}}}{2\left(\sqrt{2d^2 + \sqrt{4d^4 + \frac{16}{3}t^2}} + d\right)}\right] \tag{16}$$

Os outros ângulos seguem da mesma forma e pronto. O problema está resolvido.

3.6 – Formulação e Resolução de Problemas.

Quanto à formulação e resolução de problemas podemos contribuir com algumas observações. Tais foram feitas a partir da pesquisa bibliográfica em questão e também a partir da observação do pesquisador no contexto do curso de mestrado do programa PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) e dos cursos do PAPMEM (Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio). Este coordenado pelo IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada) e aquele pela SBM (Sociedade Brasileira de Matemática).

3.6.1 – Problemas na formulação de problemas.

Formular problemas é tão importante quanto resolvê-los. Contudo, essa tarefa não é tão fácil como se imagina. A elaboração de problemas adequados envolve uma série de fatores que devem ser observados para uma boa formulação e para se evitar falha na construção. Segundo Dante (2009, p. 50), as características para um bom problema são: ser desafiador para o aluno, ser real para o aluno, ser do interesse do aluno, ser o elemento desconhecido de um problema realmente desconhecido, não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas e ter um nível adequado de dificuldade. Além desses elementos, ele deve ser criativo e ser apresentado numa linguagem compreensível e logicamente bem estruturada para se evitar incompreensões ou duplo sentido.

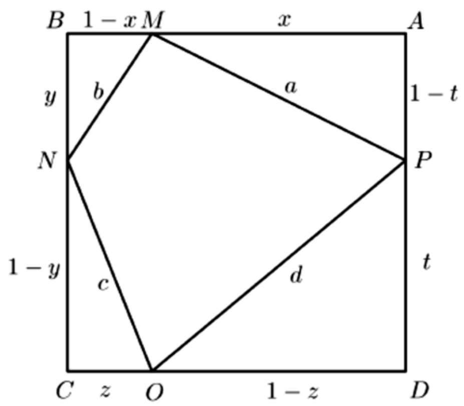
De modo geral até mesmo grandes instituições cometem erros na formulação de problemas. Frequentemente vemos em vestibulares, concursos públicos ou em outros exames seletivos, o cancelamento de questões que se mostraram inconsistentes. Isso nos indica que nós também não estamos isentos de formularmos problemas que apresentem, de alguma forma, falhas.

Um caso que gostaríamos de utilizar como exemplo para as falhas na construção de problemas ou mesmo na sutileza que se oculta na construção de problemas foi a questão cancelada do Exame Nacional de Qualificação do PROFMAT[2] em 2014 (ENQ 2014.1). A questão era a seguinte:

Problema 3: Um quadrilátero tem os seus vértices sobre cada um dos lados de um quadrado, cujo lado tem medida 1. Sabendo que as medidas dos lados desse quadrilátero são a, b, c, d, prove que

$$2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4 \tag{17}$$

A solução foi dada da seguinte maneira pela instituição:



Denote por ABCD o quadrado de lado 1 e por MNOP o quadrilátero inscrito no quadrado tal que $\overline{PM} = a, \overline{MN} = b, \overline{NO} = c$ e $\overline{OP} = d$, conforme mostra a figura.

Denote ainda por $x = \overline{AM}, y = \overline{BN}, z = \overline{CO}$ e $t = \overline{DP}$. Como o quadrado ABCD tem lado 1, tem-se que $\overline{MB} = 1 - x, \overline{CN} = 1 - y, \overline{OD} = 1 - z$ e $\overline{PA} = 1 - t$. Usando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos AMP, MBN, NCO e ODP, conclui-se que

[2] Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

$$a^2 = x^2 + (1-t)^2 \quad (18)$$

$$b^2 = (1-x)^2 + y^2 \quad (19)$$

$$c^2 = (1-y)^2 + z^2 \quad (20)$$

$$d^2 = (1-z)^2 + t^2 \quad (21)$$

Somando (9), (10), (11) e (12), obtém-se

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$= [x^2 + (1-x)^2] + [y^2 + (1-y)^2] + [z^2 + (1-z)^2] + [t^2 + (1-t)^2]$$

$$= (2x^2 - 2x + 1) + (2y^2 - 2y + 1) + (2z^2 - 2z + 1) + (2t^2 - 2t + 1)$$

$$= f(x) + f(y) + f(z) + f(t),$$

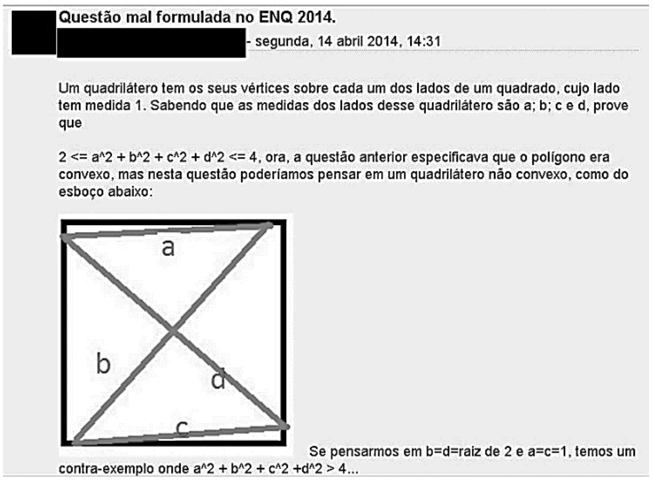
Onde $f(x) = 2x^2 - 2x + 1, x \in [0,1]$. Agora é necessário calcular os valores de máximo e mínimo da função $f(x) = 2x^2 - 2x + 1, x \in [0,1]$. Visto que f é uma função quadrática de coeficiente líder positivo, o valor mínimo ocorre no vértice (desde que esse vértice esteja dentro do intervalo) e o valor máximo ocorre em um dos extremos do intervalo. Como $f(0) = f(1) = 1$, a simetria da parábola assegura que o vértice está dentro do intervalo e ocorre em $x = \frac{1}{2}$. Como $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, obtém-se que

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [0,1] \quad (22)$$

Desta forma, como $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = f(x) + f(y) + f(z) + f(t)$, conclui-se que

$$2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

Todo o processo parecia estar perfeito até que um estudante fez um belo comentário no fórum disponibilizado pela coordenação do mestrado em seu AVA (Ambiente Virtual de Aprendizagem). A imagem abaixo mostra a postagem original.



[redacted] **Questão mal formulada no ENQ 2014.**
[redacted] - segunda, 14 abril 2014, 14:31

Um quadrilátero tem os seus vértices sobre cada um dos lados de um quadrado, cujo lado tem medida 1. Sabendo que as medidas dos lados desse quadrilátero são a; b; c e d, prove que

2 <= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 <= 4, ora, a questão anterior especificava que o polígono era convexo, mas nesta questão poderíamos pensar em um quadrilátero não convexo, como do esboço abaixo:

Se pensarmos em b=d=raiz de 2 e a=c=1, temos um contra-exemplo onde a^2 + b^2 + c^2 +d^2 > 4...

Imagem 1: Questão mal formulada no ENQ 2014
Fonte da imagem: http://moodle.profmat-sbm.org.br/mod/forum/discuss.php?d=37194

O problema encontrado na questão foi sutil, contudo essencial para torná-la inconsistente. O fato foi que o problema não afirmou que o quadrilátero deveria ser obrigatoriamente convexo, assim, poderia ser, portanto, um quadrilátero não convexo (côncavo). E, neste último caso não seria possível provar a desigualdade estabelecida e o problema ficaria sem solução, vejamos o contraexemplo apresentado:

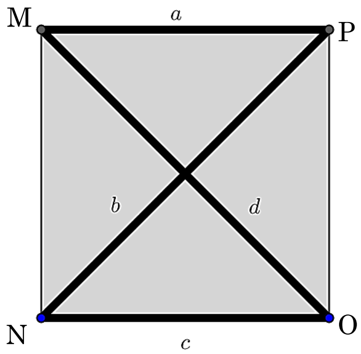


Figura 4: Contra exemplo à questão ENQ 2014

Se considerarmos o quadrilátero MNOP não convexo, como o da figura 4, teremos $b = d = \sqrt{2}$, diagonais e $a = c = 1$, lados. Assim:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 + 2 + 1 + 2 > 4 \qquad (23)$$

Contrariando a hipótese (8) de que

$$2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4$$

O problema na formulação acima foi muito sutil e até mesmo passível de discussão quanto à definição de termos, pois a palavra quadrilátero já poderia indicar, ou ser definida, justamente como aquele polígono convexo. O fato é que em tal circunstância, ou seja, de um exame tão sério, a linguagem deveria estar clara, e não dar margem alguma a entendimentos ambíguos.

Contudo, também é contraproducente ser radicalmente tão técnico, até porque na vida prática as questões interpretativas são bastante complicadas e geralmente bem amplas e abertas. No cotidiano precisamos estabelecer certas hipóteses e limitações para resolver os problemas que surgem. Alguns problemas com enunciados de situações práticas também carecem dessas "convenções" para sua solução. Caso contrário, sempre encontraremos "erros" e "inconsistências". Vejamos:

Problema 4: João da bicicleta. Todo dia, João vai trabalhar a pé e volta de bicicleta ou vai de bicicleta e volta a pé, levando sempre uma hora entre ida e volta. Se ele fosse e voltasse de bicicleta, levaria 30 minutos. Quanto tempo levaria se ele fosse e voltasse a pé?

Solução: Este problema foi proposto por Brolezzi (2013, p. 66-67) que comenta ser preciso estabelecer uma hipótese adicional para se resolver este problema. Tal hipótese é a de que o caminho de João na ida e na volta do trabalho não tem muitas diferenças que afetem de modo significativo o tempo de ida e de volta. Se João mora em um lugar baixo e seu trabalho é em cima de um morro, é claro que o tempo de ida será maior que o de volta. Como temos apenas os dados da soma, precisamos supor que a ida e a volta sejam feitas em tempos iguais, tanto a pé quanto de bicicleta. O autor ainda complementa afirmando que "colocar hipóteses adicionais em problemas de matemática é muito comum. Nenhum problema com historinha resiste a uma análise matemática fria". (BROLEZZI, 2013, p. 67).

Com esta hipótese estabelecida, podemos conduzir à solução. Se João gasta 30 minutos para ir e voltar de bicicleta, logo só a ida ou só a volta de bicicleta levam 15 minutos (admitindo nossa hipótese). Assim, se João for trabalhar a pé e voltar de bicicleta ele gastará uma hora, conforme o enunciado do problema, ou seja, 60 minutos, mas já sabemos que o tempo para a volta de bicicleta é de 15 minutos, logo a ida de João demorou 45 minutos (60-15). Se João demora 45 minutos para ir ao serviço, levará também 45 minutos para regressar a pé. Assim, gastará 90 minutos se for e voltar, a pé, do serviço.

Além da falha na formulação do problema do Exame Nacional de Qualificação (ENQ) do PROFMAT mostrado anteriormente, podemos apresentar outro tipo de equívoco que aparece até mesmo em questões de concursos públicos e mostram, mais uma vez, os graves erros que podem advir da má formulação de problemas. Vejamos um caso:

Problema 5: O fazendeiro e a partilha do rebanho. Um fazendeiro resolveu distribuir parte de seu rebanho aos seus quatro filhos, o primeiro recebeu uma cabeça de gado, o segundo duas cabeças de gado e, o terceiro, quatro cabeças de gado. Quantas cabeças de gado recebeu o quarto filho?

Solução: Este problema forma a sequência (1, 2, 4,...), no entanto não existe a possibilidade de se conhecer a quantidade de animais que receberá o quarto filho devido a uma inconsistência na formulação do problema. Qual foi a inconsistência? O problema é ambíguo e apresenta mais de uma solução! O quarto termo dessa sequência pode ser definido de várias formas, vejamos duas possibilidades:

1º) Utilizando potência de base 2: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3 = 1, 2, 4, 8$

2ª) Utilizando recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{(n-1)} + (n-1) \end{cases} \tag{24}$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_3 = a_2 + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$a_4 = a_3 + 3 = 4 + 3 = 7$$

A primeira resposta é oito se utilizarmos como lógica para formação dos termos potências de dois. A segunda é sete se definirmos a formação dos termos por uma lei de recorrência. Portanto, com apenas estes três termos apresentados no problema não temos como garantir qual será o quarto termo desta sequência.

3.6.2 – Problemas na resolução de problemas: uma abordagem burocrática.

"Método Burocrático"

Na resolução de problemas é comum os estudantes adotarem uma postura que chamaremos de *abordagem burocrática* do problema. O que significa isto? Os estudantes que se enquadram nesta situação pensam inicialmente a partir de sistemas complexos e representações complicadas e às vezes tornam um problema simples num verdadeiro caos. A *abordagem burocrática* na resolução de problemas matemáticos será aquela que tem como pressuposto a abordagem e solução de problemas processada, *a priori*, por meio de uma manipulação formal e sofisticada de objetos matemáticos; articulando o pensamento, basicamente em termos mnemônicos, por meio de categorias como definições, teoremas, corolários e fórmulas em detrimento ao raciocínio que prioriza a livre construção da solução mesmo que a partir de processos simples.

Precisamos conscientizar nossos estudantes a pensar a partir de categorias simples para depois caminharem para as realmente complexas. Fazer esquemas, testes iniciais, representações, bem como notações simples pode facilitar. Ao contrário, procurar sempre por soluções complexas, elegantes e com o uso pedante de uma notação confusa e carregada pode atrapalhar muito.

O caso a seguir exemplifica uma abordagem desta natureza. O fato também ocorreu na prova do Exame Nacional de Qualificação do PROFMAT em 2014 (ENQ 2014.1). A questão era a seguinte:

Problema 6: O máximo divisor comum de dois inteiros positivos é 20. Para se chegar a esse resultado pelo processo das divisões sucessivas, os quocientes encontrados foram, pela ordem 1, 5, 3, 3, 1 e 3. Encontre os dois números.

Um estudante X, usando uma "abordagem burocrática", respondeu da seguinte forma:

Como $(a, b) = 20$, ou seja, o mdc dos dois números a e b é 20, Temos segundo o algoritmo de Euclides:

	1	5	3	3	1	3
a	b	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	

sendo $r_5 = 20$.

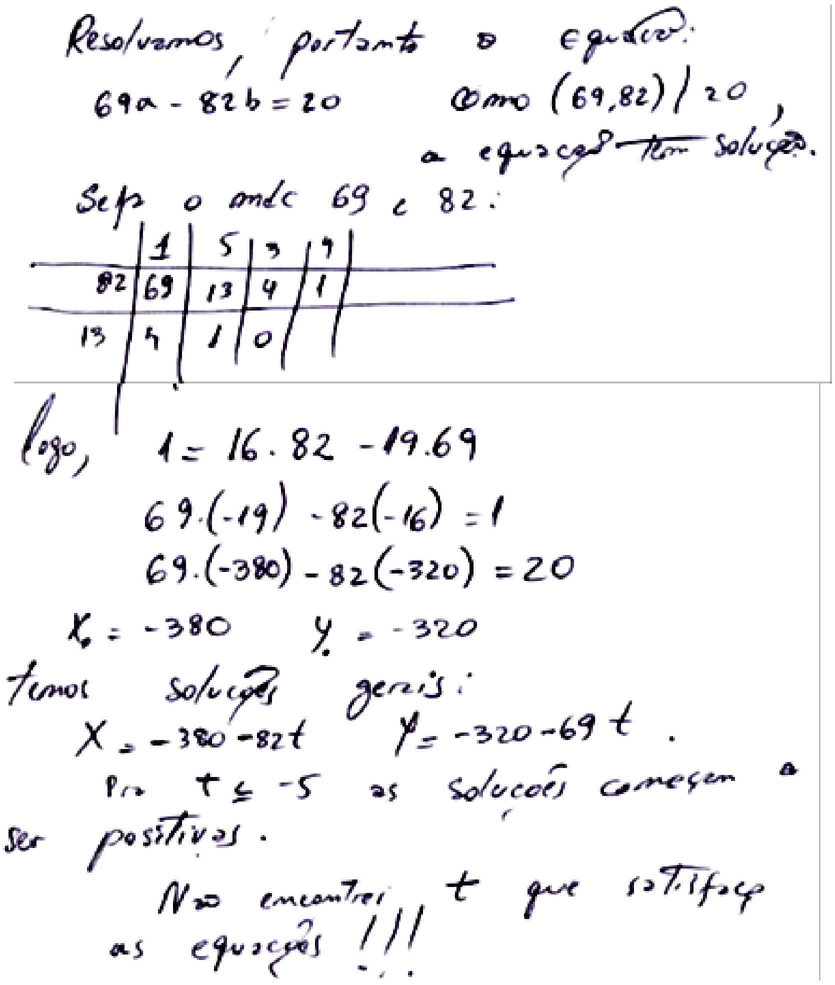
$$r_5 = r_3 - r_4$$
$$r_4 = r_2 - 3r_3$$
$$r_3 = r_1 - 3r_2$$
$$r_2 = b - 5r_1$$
$$r_1 = a - b$$

Calculemos r_2, r_3, ... com base nas igualdades ao lado.

$$r_2 = b - 5(a-b) = \boxed{-5a + 6b}$$
$$r_3 = r_1 - 3r_2 = \boxed{16a - 19b}$$
$$r_4 = r_2 - 3r_3 = \boxed{-53a + 63b}$$

$$r_5 = r_3 - r_4$$
$$r_5 = 16a - 19b - (-53a + 63b)$$
$$r_5 = 69a - 82b$$

Como $r_5 = 20$, $69a - 82b = 20$ que é uma equação diofantina.



Resolvamos, portanto a equação:

$69a - 82b = 20$ como $(69,82) \mid 20$, a equação tem solução.

Seja o mdc 69 e 82:

		1	5	3	4
	82	69	13	4	1
	13	4	1	0	

logo, $1 = 16.82 - 19.69$

$69.(-19) - 82(-16) = 1$

$69.(-380) - 82(-320) = 20$

$X_0 = -380 \quad y_0 = -320$

temos soluções gerais:

$X = -380 - 82t \quad y = -320 - 69t$.

Pra $t \leq -5$ as soluções começam a ser positivas.

Não encontrei t que satisfaça as equações !!!

Imagem 2: Solução pelo "método burocrático".
Fonte da imagem: Arquivo pessoal de aluno do PROFMAT.

Ele só não perdeu totalmente a questão porque o corretor identificou que, a pesar da complexidade da solução, a equação diofantina encontrada tinha fundamento e caso o estudante tivesse feito outra equação diofantina com a informação de que $r_6 = 0$ e resolvesse o sistema com as duas equações, teria encontrado a resposta. Assim, faltou o seguinte desenvolvimento:

$$r_6 = r_4 - 3r_5 = 0$$

$$r_4 - 3r_5 = 0$$

$$-53a + 63b - 3(69a - 82b) = 0$$

$$-53a + 63b - 207a + 246b = 0$$

$$-260a + 309b = 0 \tag{25}$$

E a resolução do sistema:

$$\begin{cases} 69a - 82b = 20 \\ -260a + 309b = 0 \end{cases} \qquad (26)$$

O que daria $a = 6180$ e $b = 5200$ que são os números procurados.

O problema maior neste processo de resolução foi tornar uma solução que seria extremamente fácil (para o nível de mestrado) em uma solução razoavelmente complicada. O pensamento complexo neste caso não ajudou. A formalização precoce do processo além da estratégia de usar equações diofantinas para atacar o problema foram, no mínimo, desnecessários.

Solução: Uma alternativa seria uma abordagem bastante simples. O estudante poderia ter feito a seguinte tabela, em que a e b são os números procurados e $r_1, r_2, r_3, \dots$ são os restos das respectivas divisões de a por b, b por r_1, de r_1 por r_2 e assim por diante:

	1	**5**	**3**	**3**	**1**	**3**	
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{r_1}$	$\boldsymbol{r_2}$	$\boldsymbol{r_3}$	$\boldsymbol{r_4}$	$\boldsymbol{r_5}$	
$\boldsymbol{r_1}$	$\boldsymbol{r_2}$	$\boldsymbol{r_3}$	$\boldsymbol{r_4}$	$\boldsymbol{r_5}$	$\boldsymbol{r_6}$		

E após isso, substituir o valor de r_5 que é 20 e de r_6 que é 0 (zero). Assim, teria a tabela:

	1	**5**	**3**	**3**	**1**	**3**	
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{r_1}$	$\boldsymbol{r_2}$	$\boldsymbol{r_3}$	$\boldsymbol{r_4}$	**20**	
$\boldsymbol{r_1}$	$\boldsymbol{r_2}$	$\boldsymbol{r_3}$	$\boldsymbol{r_4}$	**20**	**0**		

Só olhando para a tabela fica fácil perceber que $r_4 = 60$ (pois, r_4 é um número que dividido por 20 tem como quociente 3 e resto 0). E se $r_4 = 60$, então também é fácil perceber que $r_3 = 80$.

	1	**5**	**3**	**3**	**1**	**3**	
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{r_1}$	$\boldsymbol{r_2}$	**80**	**60**	**20**	
$\boldsymbol{r_1}$	$\boldsymbol{r_2}$	**80**	**60**	**20**	**0**		

E quase que de imediato conseguimos preencher os outros elementos da tabela, chegando a seguinte configuração:

	1	**5**	**3**	**3**	**1**	**3**	
6180	**5200**	**980**	**300**	**80**	**60**	**20**	
980	**300**	**80**	**60**	**20**	**0**		

Portanto, os números procurados seriam 6180 e 5200 e a solução se procederia com maior clareza e facilidade.

3.6.3 – Dificuldades na aplicação de problemas em sala de aula: rompendo com os pré-requisitos e o currículo linear.

A MRP implica uso mais sistemático - e como processo de aprendizagem - dos problemas. Certa dificuldade encontrada por muitos professores nesta perspectiva relaciona-se com sua postura em relação ao desenvolvimento curricular.

O que predominou por muito tempo no ensino da Matemática foi uma ideia de currículo rígido, altamente fragmentado em disciplinas e estas subdivididas em conteúdos dispostos em níveis hierárquicos bem definidos e com objetivos bem traçados de modo que a mobilidade entre disciplinas ou conteúdos se daria por meio da satisfação de certas condições como pré-requisitos. Acreditava-se que o conhecimento poderia ser adquirido de forma linear, numa perspectiva *cartesiana*, ou seja, poderia se "fatiar" uma situação complexa em pequenas porções e dispô-las ordenadamente para uma análise sequencial. Assim, com a junção dessas pequenas partes e o aprendizado delas resultaria, no final, o conhecimento amplo e geral da situação.

> Essa linearidade – que se concretiza numa sucessão de tópicos que devem ser apresentados numa certa ordem, embora possa parecer, a princípio, detalhe de pouca importância -, conduz a uma prática educativa excessivamente fechada, em que há pouco espaço para a criatividade, para a utilização de estratégias metodológicas como a resolução de problemas, para a abordagem interdisciplinar, para o estabelecimento de relações entre os diferentes campos matemáticos, enfim, para a consecução de metas colocadas para o ensino de Matemática pelas recentes propostas curriculares. (PIRES, 2000, p. 9)

Tal pensamento não se mostra plenamente coeso com pesquisas recentes sobre a aprendizagem. Uma vez que está ficando cada vez mais nítido que o processo de aprendizagem não se dá por meio de mecanismos lineares, mas sim em categorias aleatórias, interligadas.

Na verdade, quando se trabalha com situações não fragmentadas, ou seja, que estejam interligadas a outras há um aproveitamento maior. As novas teorias de educação enfocam a necessidade de utilizarmos cada vez mais recursos da interdisciplinaridade e até mesmo da transdisciplinaridade a fim de tornar o ensino mais significativo e eficaz.

Quando aplicamos um problema realmente rico numa aula é óbvio que ele exigirá uma série de "pré-requisitos" para ser solucionado. Daí o receio dos professores em aplicar problemas para conduzir a aprendizagem, pois estes poderiam não estar abordando estritamente aquela fração do conhecimento estudada. Há a impressão de que os estudantes não conseguiriam "acompanhar" o ensino desta forma e não haveria progresso. Um professor que está decisivamente dependente da estrutura curricular linear, da sequência do livro didático para ensinar ou "preso" à ideologia tradicional de ensino herdada há décadas certamente não conseguirá trabalhar realmente com resolução de problemas como metodologia condutora do processo. No máximo, tal profissional, continuará utilizando problemas como meros exercícios para ilustrar ou reforçar alguma exposição. Este é um uso pobre da resolução de problemas diante das suas imensas possibilidades.

É possível utilizar a resolução de problemas como metodologia e trabalhar com problemas até mesmo quando os estudantes não têm os famosos "pré-requisitos" para solucioná-los. Mas como fazer isso? Devemos adotar uma postura em que o estudante tem uma posição mais ativa em relação ao seu aprendizado. A situação proposta pode servir justamente como motivação para uma leitura, para uma pesquisa sobre os termos, sobre as teorias e fundamentações que já foram feitas acerca da problemática. Não é preciso que os estudantes já tenham tido horas e horas de aulas expositivas sobre um tema e várias fórmulas e supostas estratégias de resolução deste e daquele problema para depois propormos uma situação parecida. Nada mais artificial do que esta postura. Na vida real, no cotidiano, na natureza, na ciência não encontramos situações que venham com legenda ou que peçam licença para aparecer diante de nós apenas quando estivermos estudando ou estivermos vivenciando os "pré-requisitos" que elas requerem. Comumente, os problemas de verdade, científicos, não surgem assim, e são verdadeiros quebra-cabeças que obrigam o cientista a ter uma postura de pesquisa e investigação exaustiva em busca de luz para se alcançar uma solução adequada.

É exatamente esta postura que propomos ao se utilizar resolução de problemas como metodologia. Os problemas instigariam a investigação e justificariam o estudo das teorias e até mesmo o desenvolvimento de tais. Ao contrário do professor despejar uma gama de conteúdos matemáticos injustificados diante de seus estudantes, seria possível evocá-los mediante situações contextualizadas e que desafiassem realmente os estudantes, motivando-os a buscar informações para solução. Desta forma, romper-se-ia com a necessidade de pré-requisitos e com a prática curricular linearizada.

3.7 – A Resolução de Problemas e os sistemas nacionais e internacionais de avaliação da educação.

A importância da resolução de problemas é reconhecida por sistemas oficiais de avaliação da educação em nível nacional e internacional. A maioria deles, em suas avaliações de qualidade da educação utilizam a resolução de problemas para averiguar competências nas áreas de exatas. Desta forma, quando atentamos para esta metodologia estamos falando de uma perspectiva já bastante conceituada e consolidada em tais sistemas. Destacaremos algumas avaliações do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e um pouco do famoso teste do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (*Programme for Internacional Student Assessment* – PISA).

3.7.1 – A Resolução de Problemas no SAEB.

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) tem como função avaliar a educação básica brasileira e contribuir para melhoria da qualidade da mesma. Ele é composto por três avaliações externas que são: Avaliação Nacional da Educação Básica (ANEB), Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (ANRESC/PROVA BRASIL) e Avaliação Nacional da Alfabetização (ANA).

Imagem 3: Avaliações do SAEB
Fonte: http://portal.inep.gov.br/web/saeb/aneb-e-anresc

A Avaliação Nacional da Educação Básica (ANEB) avalia alunos da rede pública e privada de educação, em área urbana e rural, que estejam cursando o 5° ano, o 9° ano e o 3° ano do Ensino Médio. O objetivo é avaliar a qualidade, equidade e eficiência da educação brasileira.

A Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (ANRESC/PROVA BRASIL) trata-se de uma avaliação envolvendo alunos do ensino fundamental especificamente 5° e 9° ano das escolas públicas das redes federais, estaduais e municipais. O objetivo é também verificar a qualidade do ensino.

O que nos chama atenção é que em tais provas são exigidas basicamente a capacidade de resolver problemas. A resolução de problemas é o eixo condutor de todo o processo das disciplinas exatas. De acordo com (O QUE..., 2011), um texto do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) intitulado "O que cai na prova de Matemática", em relação à Prova Brasil e avaliações do SAEB é dito que o conhecimento deve ser demonstrado por meio de resolução de problemas. A partir dos itens da Prova Brasil e do SAEB é possível afirmar que o aluno desenvolveu uma habilidade quando ele é capaz de resolver uma situação problema a partir da aplicação de conceitos previamente firmados.

Mostraremos um exemplo de questão de Matemática do SAEB aplicada ao 3º ano do Ensino Médio e faremos alguns comentários.

Problema 7: Duas pessoas, partindo de um mesmo local, caminham em direções ortogonais. Uma pessoa caminhou 12 metros para o sul, a outra, 5 metros para o leste. Qual a distância que separa essas duas pessoas?

O item realmente tem as características de uma situação problema. Ele apresenta uma situação nova. Exige uma interpretação e busca de estratégias para solução.

Solução: Basicamente, se o estudante seguisse as etapas de Pólya deveria fazer o seguinte: 1) Compreender: o que significa direções ortogonais? São direções perpendiculares que forma entre si um ângulo de 90°. Qual é a variável? A distância d entre as pessoas. Qual a condicionante? As pessoas devem caminhar sempre em direção perpendicular entre si. Quais os dados? Distância da pessoa que caminhou para o sul, 12m e para o leste, 5m. Posso fazer uma representação para o fato? Sim.

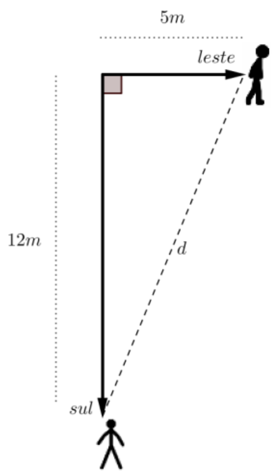


Figura 5: Representação problema de Matemática do SAEB

Pela representação percebemos que as trajetórias juntamente com a distância procurada formam um triângulo retângulo cuja hipotenusa é a distância *d*. 2) Estabelecimento de um plano. Já vi algum problema parecido? Sim, problemas que envolvem cálculos da hipotenusa de triângulos retângulos podem ser aplicados à situação. Assim, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras. 3) Execução do plano.

$$d^2 = 12^2 + 5^2$$
$$d^2 = 144 + 25$$
$$d^2 = 169$$
$$d = \sqrt{169}$$
$$d = 13$$

Logo, a distância entre as pessoas é de 13 metros.

4) Retrospecto. Nossa compreensão está correta? Sim, já fizemos revisão da mesma. O plano é adequado? Sim, a situação é bastante clara quanto à aplicação do Teorema de Pitágoras. Os cálculos estão corretos? Sim, foram revisados. Usamos também o programa *geogebra* para representar a situação e calcular os comprimentos. Desenhamos um triângulo retângulo com catetos de medidas 12 e 5, ou seja, proporcionais a 12m e 5m. A hipotenusa calculada foi de medida 13. O fato ajuda a nos convencermos de que a resposta está correta.

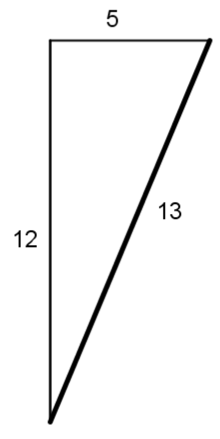


Figura 6: Representação no *geogebra* do problema de Matemática do SAEB.

3.7.2 – A Resolução de Problemas no ENEM.

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi criado em 1998, com o objetivo de avaliar o estudante concluinte do ensino médio, parte final da educação básica, a fim de buscar melhoria e qualidade para este nível de escolaridade, de acordo com (SOBRE O ENEM, 2011). A partir de 2009 o ENEM também passa a ser utilizado como mecanismo de seleção de alunos para a educação superior, o que, popularizou o exame a nível nacional.

Não diferente do que vimos anteriormente com o SAEB, as provas do ENEM também enfatizam muito a capacidade de resolução de problemas. Basicamente os estudantes tem que construir suas respostas a partir de conceitos previamente estabelecidos e aplicando-os em situações problema de ordem prática e contextualizada.

Os conteúdos das provas estão baseados na Matriz de Referência do ENEM, conforme (BRASIL, 2009), que lista alguns eixos cognitivos e o terceiro deles é: "Enfrentar situações-problema (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema".

Na Matriz de Referência de Matemática e Suas Tecnologias temos uma série de competências e habilidades que são abordadas, nelas vemos a prevalência da exigência de resolução de problemas.

Vejamos algumas: Competência de área 1 – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais. H3 – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos. Competência de área 2 – Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela. H8 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma. Competência de área 3 – Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano. H12 – Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas. Desta maneira, em todas as competências existentes na matriz, notamos a exigência de, pelo menos uma habilidade envolvendo a resolução de problemas.

Mostraremos uma questão do ENEM e sua resolução seguindo as etapas de Pólya conforme exemplo apresentado por Dante (2010, p. 176).

Problema 8: Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo **R** a rapidez de propagação, **P** o público-alvo e **x** o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se:

$$R(x) = k.x.(p - x)$$

Onde **k** é uma constante positiva característica do boato. Considerando o modelo acima descrito, se o público-alvo é de 44000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

a) 11000 b) 22000 c) 33000 d) 38000 e) 44000

Solução: Solução apresentada por Dante (2010, p. 176) para o problema.

1. Lendo e compreendendo.
   a) O que é dado no problema? É dada uma fórmula que relaciona a rapidez de propagação do boato com o número de pessoas que o conhecem, para determinado público-alvo.
   b) O que se pede? Um boato se espalha de forma devagar quando poucos o conhecem, e a velocidade de propagação do boato vai aumentando conforme mais gente o conheça e passe a propaga-lo. Entretanto, se muitas pessoas já sabem do boato, a sua velocidade de propagação também vai ser baixa, pois tanta gente sabe dele que fica mais raro encontrar quem não saiba. Assim, existe determinado número de pessoas que torna a velocidade de propagação máxima. Queremos determinar qual é esse número de pessoas.
2. Planejando a solução.

   Observando a fórmula dada, verificamos que ela é uma função quadrática:

$$R(x) = k.x.(p - x)$$

$$R(x) = -kx^2 + kpx \qquad (27)$$

Sabemos que, em funções quadráticas, o máximo (ou o mínimo) valor ocorre no vértice. Assim, para obter o valor que maximiza a rapidez de propagação do boato, basta obter o valor da abscissa do vértice, ou seja, de x_v.

3. Executando o que foi planejado.

   Para um público-alvo de 44000 pessoas, a função quadrática será:

$$R(x) = -kx^2 + 44000kx \qquad (28)$$

   Então temos a = -k, b = 44000k. O x_v é dado por $x_v = \frac{-b}{2a}$. Assim:

$$x_v = \frac{-44000k}{2(-k)}$$

$$x_v = 22000$$

   Então, a quantidade de pessoas que maximiza a propagação de boato, neste caso, é 22000.

4. Emitindo a resposta. A resposta é o item b.

3.7.3 – A Resolução de Problemas no PISA.

O *Programme for International Student Assessment (PISA)* – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – é uma iniciativa de avaliação comparada, aplicada a estudantes na faixa etária de 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países, de acordo com (O QUE É O PISA, 2011).

Historicamente o Brasil tem amargado péssimos resultados nesta avaliação. Na última edição da mesma, em 2012, ficamos entre as últimas classificações, mais especificamente na posição 58° de um total de 65 países participantes, conforme (PROGRAMME..., 2012, p. 9). Só conseguimos nos sair melhor do que Argentina, Tunísia, Jordânia, Colômbia, Qatar, Indonésia e Peru.

Na Matriz de Avaliação de Matemática – PISA 2012, conforme (MATRIZ..., 2012), encontramos o que o PISA considera fundamental para os alunos. Trata-se justamente da capacidade de serem ativos na resolução de problemas. Os alunos deverão dominar os processos de *Formular, Empregar e Interpretar* problemas.

> Um indivíduo quando trabalha na solução de um problema contextualizado ativas suas capacidades fundamentais da matemática simultaneamente e sucessivamente, recorrendo a conteúdos matemáticos até encontrar a solução. Nesse caso deverá se utilizar das Capacidades Fundamentais da Matemática, que o PISA estabelece como sendo as seguintes: Comunicação; "Matematização"; Representação; Razão e Argumentação; Delinear estratégias para resolver problemas; Utilizar linguagem e operações simbólicas, formal e técnica; e Utilizar ferramentas matemáticas. (MATRIZ..., 2012)

No Relatório Nacional do PISA 2012, temos alguns exemplos de itens da prova. Mostraremos e comentaremos um desses itens.

Problema 9: Garagem. As duas plantas abaixo mostram as dimensões, em metros, da garagem que Jorge escolheu.

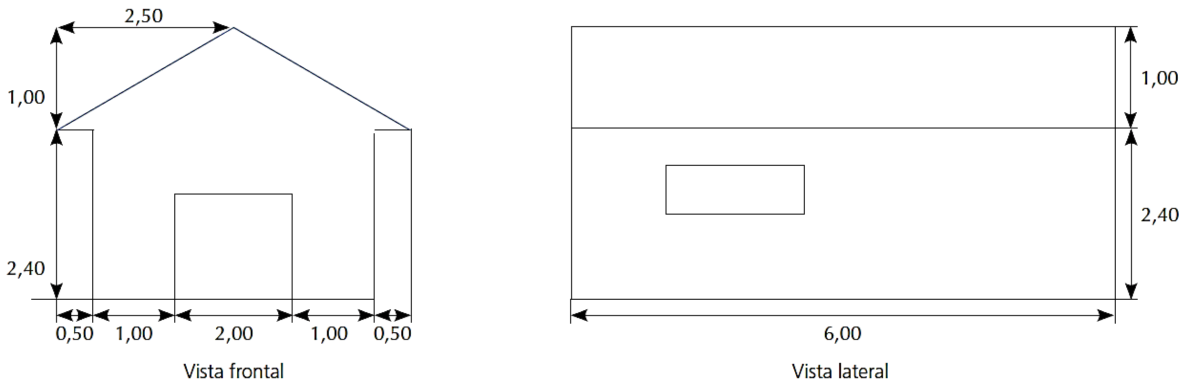


Imagem 4: Garagem, questão do PISA.

O telhado é feito de duas partes retangulares idênticas. Calcule a área total do telhado. Demonstre seu raciocínio.

Solução: As provas do teste do PISA também estão baseadas em resolução de problemas, como visto. Assim, quanto mais os estudantes estiverem familiarizados com esta perspectiva de abordagem e uso da Matemática, melhor se sairão em testes com tais características. A questão é bastante simples, contudo, deve ser adequadamente interpretada. Também percebemos a contextualização da mesma. Podemos, novamente, utilizar as etapas de resolução de problemas para nos conduzir no processo.

1) Compreender. Quais são os dados? Temos duas plantas de uma garagem, uma vista frontal e outra lateral. Diversas dimensões

estão explícitas nela. Qual a incógnita? Precisamos calcular a área total do telhado. Quais as condicionantes? O telhado é feito por duas partes retangulares idênticas. Não temos todas as dimensões do retângulo, o que, será preciso encontrar por outros meios.

2) Estabelecimento de um plano. O cálculo da área retangular é fácil de calcular e é dado pelo produto de suas dimensões. No telhado, temos que uma de suas partes é um retângulo de comprimento 6m. Será preciso calcular sua largura. Pela vista frontal da planta podemos pensar num triângulo retângulo cuja hipotenusa é *x*, conforme representação abaixo. Essa hipotenusa representa a largura procurada.

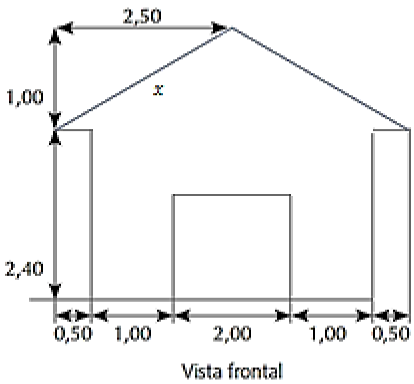


Imagem 5: Largura de uma parte do telhado da garagem, questão do PISA.

Assim, basta calcularmos essa largura e posteriormente calcularmos a área de uma parte do telhado, duplicando-a posteriormente para encontrarmos a área total do telhado.

3) Execução do plano. Por Pitágoras conseguimos calcular o valor de x. Assim, temos:

$$x^2 = 2{,}50^2 + 1{,}00^2$$

$$x^2 = 6{,}25 + 1$$

$$x^2 = 7{,}25$$

$$x = \sqrt{7{,}25}$$

$$x \cong 2{,}7$$

A área de uma parte do telhado pode ser calculada assim:

$$6.\ 2{,}7 = 16{,}2$$

Dobrando o valor para termos a área total do telhado, temos: 16,2 . 2 = 32,4.

Logo, a área total do telhado será de 32,4 m².

Os problemas 7, 8 e 9 de aplicação e utilização da resolução de problemas nos sistemas de avaliação da educação listados anteriormente serviram para reforçar a importância do uso de resolução de problemas e robustecer ainda mais a tese da necessidade de ampliar e consolidar a MRP em nossa prática educativa.

TÓPICOS DE MATEMÁTICA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O trabalho efetivo com a MRP, para ser inserido na prática docente, depende em grande parte da própria iniciativa do professor em adotar tal método[3]. Assim como outras ferramentas didáticas, esta também não é totalmente compreendida enquanto não for utilizada. Na verdade é ousando e tentando que se aprende ou se aperfeiçoa o processo de ensino e aprendizagem. Contudo, para ilustrar tal processo de trabalho com resolução de problemas mostraremos algumas sugestões de trabalho a fim de cristalizar a compreensão da prática com resolução de problemas no ensino de tópicos de Matemática na educação básica.

Uma sugestão interessante para o professor que utilizará a MRP será seguir alguns “passos” para orientar a atividade em sala de aula. Os quais podem estar de acordo com Onuchic; Allevato (2011, p. 83-85) *apud* Onuchic (2012, p.12):

1. Preparação do problema – Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento.
2. Leitura individual – Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.
3. Leitura em conjunto – Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.
4. Resolução do problema – De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, numa trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo.
5. Observar e incentivar – Nessa etapa o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento.

[3] Segundo estudos como TIMSS (*Third International Science and Mathematics Study)* e PISA (*Programme for International estudent Assessment*) são muito poucos os problemas que se trabalham ou se resolvem em sala de aula.

6. Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos analisem e discutam.
7. Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos para discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas.
8. Busca de consenso – Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor incentiva a classe a chegar num consenso sobre o resultado correto.
9. Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado "formalização", o professor registra na lousa uma apresentação "formal" – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

É oportuno observar que tais "etapas" estão sendo consideradas para balizar a aplicação da metodologia em questão em sala de aula. Não estamos desconsiderando as contribuições históricas de Pólya e outros quanto aos métodos de resolução de problemas. O que acontece é que as "etapas" de Pólya estão sendo contempladas nesta abordagem que facilita e amplia o trabalho em sala. Vejamos na imagem abaixo como as "etapas de Pólya" são igualmente contempladas, contudo "adaptadas" para um melhor trabalho em sala de aula.

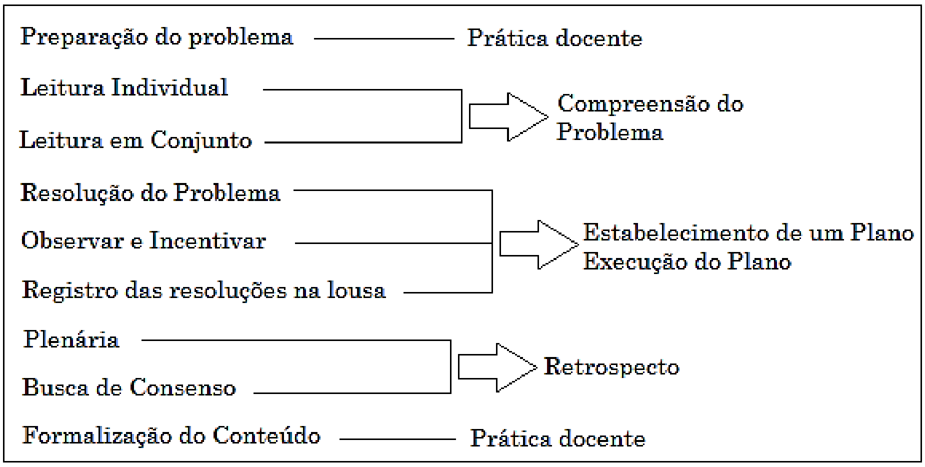


Imagem 6: Sugestão de Onuchic e as "etapas" de Pólya.

4.1 – A construção do conceito de função afim por problemas

Geralmente o ensino de funções numa perspectiva tradicional inicia-se com, nas melhores perspectivas, um exemplo de situação envolvendo o relacionamento de duas grandezas, normalmente espaço e tempo, quantidade e preço, tempo e temperatura e assim por diante. O passo seguinte é fazer uma tabela mostrando os valores respectivos de cada grandeza. Várias definições são feitas tais como: variável e a diferenciação de variável dependente e independente; domínio, contradomínio e imagem; a condição básica de existência da função: cada elemento do domínio estar associado a um único elemento do contradomínio e, por fim, faz-se uma expressão em termos de x e y da situação. A sequência desse ensino, que geralmente é feito numa aula expositiva, segue-se com outros exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos. O aluno ouve tudo, memoriza as definições e treina os procedimentos para fixação. A parte da aplicação fica a cargo do aluno por meio da resolução de "problemas".

Contudo, podemos desenvolver com os alunos conceitos de funções a partir da Metodologia da Resolução de Problemas que não seguem estas etapas rígidas. Vejamos um exemplo seguindo as orientações anteriores ("etapas" de 1 a 9) de Onuchic (2012) para desenvolver em sala de aula alguns elementos de função afim com resolução de problemas.

1- *Preparação do problema.* Se formos trabalhar com função afim necessitamos de situações que evoquem tal conteúdo para ser resolvido. O professor pode pesquisar por problemas criativos já existentes ou pode mesmo formulá-las ou adaptá-las especificamente para cada caso. O fato é que o problema deve abordar o conceito requerido para o momento.

Problema 10: Consumo da bateria do celular. Katy teve a curiosidade de observar o comportamento do consumo da bateria de seu celular. Ela percebeu que quando seu aparelho estava com 50% de carga, restavam 11h 11m de uso disponível. Quando essa carga passou a 49%, verificou que tinha, ainda, 10h 57m de uso e, por fim, aos 48% notou que tinha disponível 10h 43m de uso do celular antes de precisar recarregá-lo. Permanecendo estas características, quanto tempo Katy terá para usar seu celular quando este tiver 12% de carga de bateria?

2- *Leitura Individual.* Deve ser garantido que o aluno tenha acesso ao problema e consiga lê-lo. Uma cópia impressa e distribuída a eles resolveria essa demanda. Contudo, vemos ainda, pela precariedade de estrutura na educação, dificuldade até mesmo de levar ao aluno uma cópia de qualidade de determinada atividade. Vale lembrar que escrever no quadro um problema demasiadamente grande ou repassar um impresso de baixa qualidade, ilegível, impressão borrada e com outras imperfeições já traz uma grande desvantagem na aula e prejudica na resolução do problema, uma vez que já desestimula o estudante até mesmo a ler.

3- *Leitura em conjunto.* O professor pode ler o problema para a turma ou formar grupos para que façam uma nova leitura. O importante é que numa outra leitura mais ampla muitas dúvidas são esclarecidas.

4- *Resolução do problema.* Este é o momento em que o professor deixa a cargo dos alunos a tentativa e a resolução do problema. Os estudantes devem estar livres para pensar, sem nenhuma barreira ou limitação. Não devem pensar em pré-requisitos. Não devem se impor restrições como: “não posso fazer isso” e “não posso fazer deste modo”.

No caso específico, o problema sugere várias maneiras de resolução. Uma mais intuitiva por meio da “tentativa de erro” (método da inspeção), outra um pouco mais robusta que evoca uma modelagem. Mostraremos a possibilidade que envolve o primeiro caso, ou seja, apenas apoiando-se em noções intuitivas; mostraremos também uma alternativa subsidiada por ideias geométricas e, por fim, faremos uma solução baseada justamente no modelo de uma função afim. Vejamos.

***Solução 1*: Por “Inspeção” ou “Tentativa e Erro”**

Pode-se pensar em montar uma tabela e perceber algum padrão na sequência dos números. Assim, teríamos:

Consumo da Bateria do Celular	
Carga	**Tempo restante de uso**
50%	11h11m
49%	10h57m
48%	10h43m
...	...
12%	?

E o aluno poderia perceber que 1% da carga do celular equivale a 14 minutos de uso e que esta relação é fixa, ou seja, não importa o nível de carga da bateria, sempre que se utilizasse 1% de carga da mesma, se gastaria 14 minutos para tal. Assim, bastaria o aluno completar a tabela mediante este padrão até encontrar a solução.

Consumo da Bateria do Celular	
Carga	**Tempo restante de uso**
50%	11h11m
49%	10h57m
48%	10h43m
47%	10h29m
46%	10h15m
45%	10h01m
...	...
14%	2h47m
13%	2h33m
12%	2h19m

O aluno chegaria ao resultado de 2h 19m que seria o tempo restante de uso quando o celular apresentasse apenas 12% de carga na bateria. Claro que este processo não é nada prático. É bastante trabalhoso e não desafia o aluno a avançar em conhecimento matemático. Portanto, caso se resolva desta maneira é aconselhável, que se dê o devido crédito a este feito sim, mas que se proponha aos estudantes o desafio de resolver de outra maneira, buscando modelar a situação por meio de uma expressão Matemática. Com esta perspectiva o aluno estará adentrando no campo conceitual da função afim ou de geometria analítica básica.

***Solução 2*: Deduzindo uma expressão Matemática com subsídios da geometria**

O estudante deve perceber que há uma relação específica entre a carga do celular e seu tempo restante de uso, ou seja, o que fica nítido nesta relação é que para cada quantidade de carga do celular existe um e um só tempo de uso restante. Assim, caso o aluno compreenda que estes valores formam um par ordenado e que podem ser posicionados no plano cartesiano, ele poderia, então, dispor alguns pontos da seguinte forma:

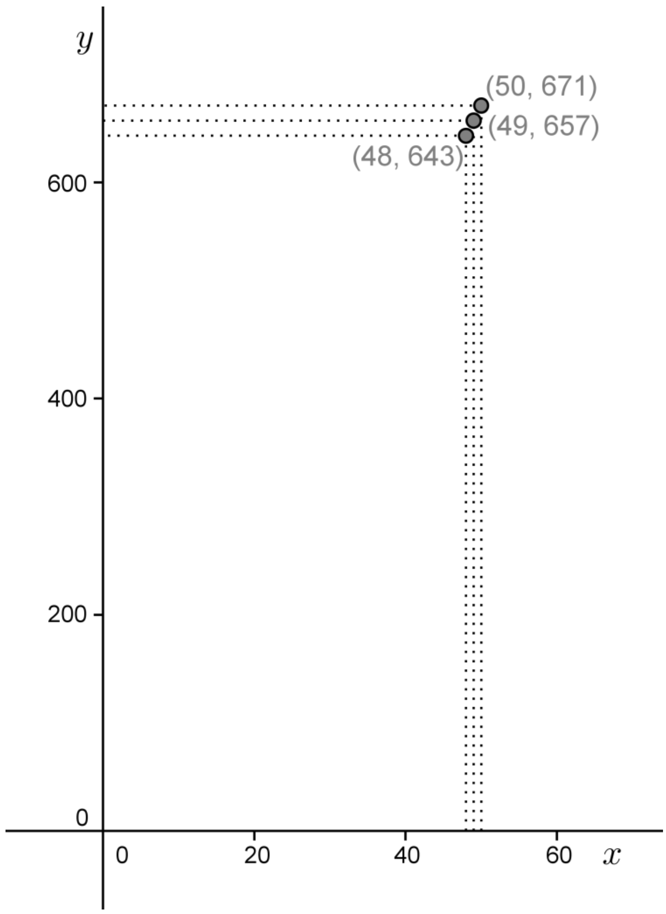


Figura 7: Pontos no plano cartesiano.

Lembrando que os pontos são da forma (x, y) em que x representa o percentual de bateria existente no celular e y representa o tempo restante de uso do celular, dado em minutos. Pode-se deduzir que os pontos estão alinhados. Contudo, é possível mostrar isso matematicamente. Iremos utilizar o conceito de distância. É quase intuitivo o fato de que a menor distância entre dois ponto é uma reta (demonstração desse fato sob o título de *desigualdade triangular,* anexo I). Assim, vamos analisar nosso gráfico com maior detalhe nos três pontos delineados.

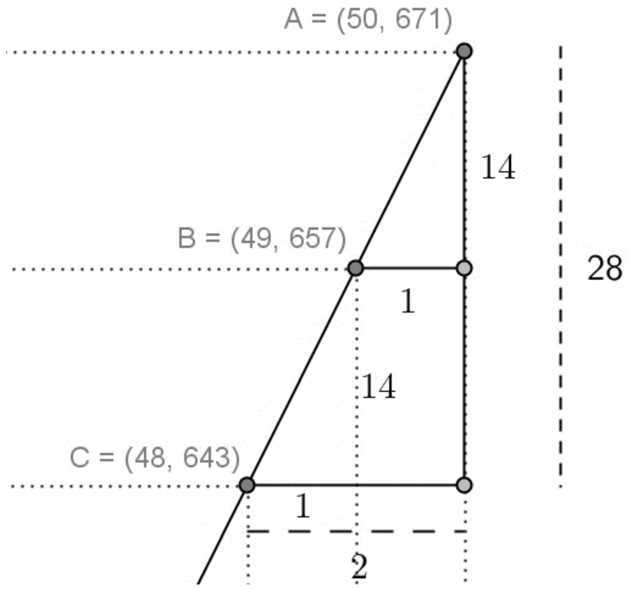


Figura 8: Pontos no plano cartesiano e triângulos retângulos.

Precisamos saber se a distância AC = AB + BC caso em que comprovaria ser o segmento AC uma reta, pois se não fosse reta AC ≠ AB + BC caso em que indicaria existir uma curva no segmento AC. A distância AB indicaremos por d(A, B). A distância de BC indicaremos por d(B, C) e a distância de AC, por d(A, C). Notemos ainda que essas distâncias são hipotenusas de triângulos retângulos. Logo, pelo Teorema de Pitágoras podemos calculá-las.

$$d(A, B)^2 = 14^2 + 1^2$$
$$d(A, B) = \sqrt{197} \tag{29}$$

$$d(B, C)^2 = 14^2 + 1^2$$
$$d(B, C) = \sqrt{197} \tag{30}$$
$$d(A, C)^2 = 28^2 + 2^2$$
$$d(A, C) = \sqrt{788}$$
$$d(A, C) = 2\sqrt{197} \tag{31}$$

Logo,

$$d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$$
$$2\sqrt{197} = \sqrt{197} + \sqrt{197}$$

A igualdade de equações: (31) = (30) + (29), é uma sentença verdadeira. Portanto, os três pontos pertencem a uma mesma reta. Como esta estrutura permanece, ou seja, para variações do percentual de carga da bateria iguais teremos sempre variações no tempo restante de duração da bateria também iguais, logo, todos os pontos que adicionarmos àquele plano estará alinhado aos demais.

De um modo mais fácil de perceber poderíamos fazer o seguinte. Caso introduzíssemos um ponto D que seria o próximo ponto (47, 629) da sequência, bastaria fazermos a mesma análise que fizemos anteriormente, contudo, agora para os pontos B, C e D. Esses três triângulos teriam as mesmas características dos anteriores. Logo, os três pontos B, C e D estariam alinhados. E assim, sucessivamente, conseguimos perceber que todos os pontos pertencem à mesma reta. Caso o aluno não consiga ver isso desta maneira não tem problema. Será possível até mesmo ele já deduzir que os pontos estão alinhados e a partir disso conduzir a sua solução. Caso ele faça isso e encontre o resultado o professor poderia instigá-lo a provar o passo anterior, ou seja, justamente o convencimento de que os pontos estão realmente alinhados.

A partir deste resultado, podemos deduzir que um ponto (x, y) qualquer que obedeça às características da situação está alinhado aos outros pontos e todos pertencem a uma mesma reta. Assim, podemos fazer o seguinte esquema gráfico.

Semelhança de Triângulos

"Dois triângulos são semelhantes se possuem lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes"

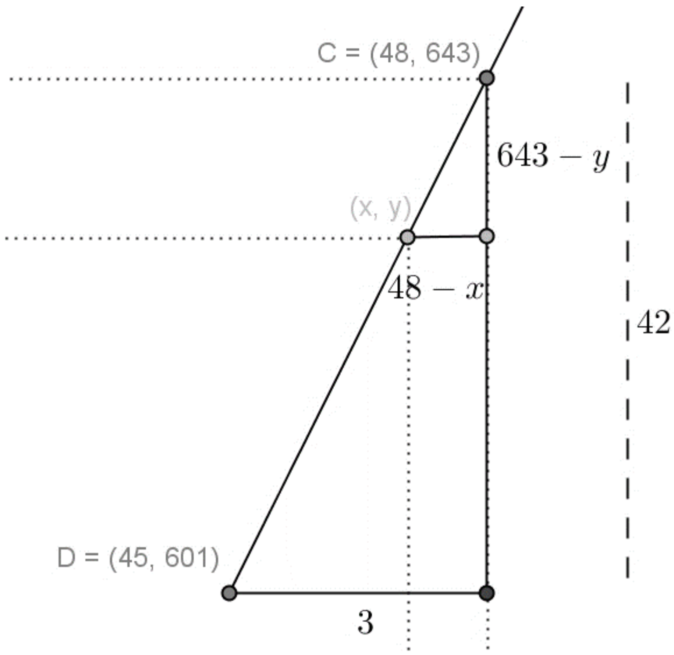


Figura 9: Pontos no plano cartesiano e equacionamento.

É fácil também concluir que os dois triângulos retângulos da figura (o que tem catetos 3 e 42, e o que tem catetos 48 – x e 643 – y) são semelhantes. Deste modo, tem lados proporcionais. Façamos então a seguinte proporção:

$$\frac{643-y}{42}=\frac{48-x}{3}$$
$$3.(643-y)=42.(48-x)$$
$$1929-3y=2016-42x$$
$$-3y=-42x+87 \quad :(-3)$$
$$y=14x-29 \qquad (32)$$

A expressão y = 14x – 29 representa um modelo adequado para nossa situação. Consequentemente se quisermos saber quanto tempo Katy terá de uso em seu celular quando este estiver com apenas 12% de carga da bateria, basta fazermos x = 12 e calcularmos y em (24), o que nos dá:

$$y=14x-29$$
$$y=14.12-29$$
$$y=168-29$$
$$y=168-29$$
$$y=139$$

Como y está em minutos, significa que a solução é 139 minutos de uso ou ainda, convertendo o valor para horas e minutos, 2 horas e 19 minutos.

***Solução 3*: Utilizando o conceito de função afim**

Para o aluno solucionar o problema com base nos conceitos de função afim é necessário ele perceber que o problema satisfaz as características de uma função afim. É necessário ele notar um fato importante na situação.

Primeiro que os números que representam o tempo de uso restante do celular estão igualmente espaçados, isto é, a "distância" de um deles para o seguinte é constante. Isto quer dizer que decréscimos iguais na porcentagem de carga de bateria restante no celular corresponderiam a decréscimos iguais no tempo restante de uso.

Assim, se o tempo precisar diminuir t minutos para que a porcentagem de consumo da bateria passe de 49% para 48%, assim ele precisará dos mesmos t minutos para passar de 44% para 43%. Isso nos dá a certeza de que a função que faz corresponder a cada porcentagem x restante de bateria no celular um tempo restante de uso $f(x)$ é uma função afim. (Conforme demonstrado na *Caracterização da Função Afim*, anexo II).

Logo, a função afim é dada por $f(x) = ax + b, com\ a, b \in R\ e\ a \neq 0$. Uma função dessa natureza é representada graficamente por uma reta. Em nossa situação temos ainda a particularidade de que x é inteiro.

Temos de observar então que a função por nós modelada será a função afim, e pelo fato dela estar definida para todo o número real não haverá problema quando utilizarmos valores inteiros da variável x para descobrirmos y. O problema surgiria se nossa função estivesse definida apenas para os inteiros e precisássemos fazer cálculos com os números reais.

Para modelar a função, então, precisamos de dois pontos. Lembrando que os pontos serão da forma *(x, y)* em que x representará o percentual de bateria existente no celular e y representará o tempo restante de uso do celular, dado em minutos. Podemos utilizar (50, 671) e (49, 657). Como ambos os pontos estão numa mesma reta eles satisfazem a função:

$$f(x) = ax + b \tag{33}$$

Logo, substituindo as coordenadas do primeiro ponto na função $f(x) = ax + b$, temos:

$$671 = 50a + b$$

Fazendo o mesmo para o segundo ponto, temos:

$$657 = 49a + b$$

É óbvio que temos, portanto, um sistema.

$$\begin{cases} 50a + b = 671 \\ 49a + b = 657 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $a = 14$ e $b = -29$.

Encontramos a função

$$f(x) = 14x - 29 \tag{34}$$

Para solucionarmos nosso problema, finalmente devemos calcular:

$$f(12) = 14 * 12 - 29$$
$$f(12) = 139$$

Portanto, quando a bateria do celular estiver com 12% de carga Katy terá 139 minutos ou 2 horas de 19 minutos de uso do celular disponível.

É natural que dificilmente algum aluno tratará o problema, *a priori,* desta forma. É natural que eles tenham pouca habilidade com função afim num primeiro momento. Contudo, a resolução de problemas serve justamente para que a partir de um problema aparentemente simples surjam possibilidades de tratamentos diversos, e o mais importante, possibilidades de aprofundamento e aprendizagem Matemática. A primeira solução apresentada a este problema poderia representar justamente a abordagem inicial dos alunos. Já esta última solução poderia representar o ponto ideal onde os alunos deveriam chegar. Entre estes dois extremos teríamos uma rica possibilidade de crescimento e amadurecimento em sala de aula.

5- *Observar e incentivar*. Nesta etapa o professor deve observar as atividades dos alunos. Contribuindo em casos pontuais com sugestões, apontamentos e dicas que norteiam as soluções dos estudantes. É preciso, contudo, que os professores não deem respostas, mas orientações que auxiliem os alunos caminharem "por si próprios".
6- *Registro das resoluções na lousa*. Após todos tentarem e tecerem suas resoluções elas devem ser apresentadas à turma; certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos analisem e discutam.
7- *Plenária*. Os alunos defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas.
8- *Busca de consenso*. O professor incentiva a classe a chegar num consenso sobre o resultado correto.
9- *Formalização do conteúdo*. Somente neste momento é que seria recomendado o professor formalizar alguns conceitos de função afim. Utilizando os resultados da problemática abordada e dando um significado Matemático para os procedimentos utilizados. As definições poderiam ser feitas tais como: variável e a diferenciação de variável dependente e independente; domínio, contradomínio e imagem; a condição básica de existência da função: cada elemento do domínio estar associado a um único elemento do contradomínio e, por fim, mostrar-se expressões em termos de x e y de várias funções.

A sequência desse ensino poderia ser feita numa aula expositiva dialogada, outros exemplos poderiam ser evocados e a parte da aplicação e fixação de ideias poderia ser reforçada com a resolução de outros problemas. Uma pequena advertência é que não há necessidade de se trabalhar tudo isso numa única aula. Principalmente a formalização dos conteúdos não precisa ser feita como um "despejar" na mente dos alunos.

A formalização poderia ser feita abordando alguns pontos específicos como a caracterização da função afim que foi a característica da função mais nítida no problema e também a "modelagem" do problema. Num outro momento e com outra situação ou utilizando a mesma poderia se falar sobre domínio, contradomínio e imagem da função e abordar o crescimento e decrescimento da função. Enfim, a formalização pode ser feita paulatinamente conforme os alunos vão descobrindo as realidades matemáticas por meio da resolução de problemas.

4.2 – Análise combinatória estruturada em problemas, por um curso "sem fórmulas"

O estudo de Análise Combinatória tem ganhado bastante atenção nos últimos anos principalmente pela sua importância prática. No Ensino Médio, de modo geral, a postura com que se ensina combinatória é, por vezes, extremamente limitada. Limitada no sentido de que se segue uma espécie de padrão para o ensino dessa matéria. Iniciasse mostrando o princípio fundamental de contagem em seguida é feita a definição de fatorial, depois se mostram fórmulas de arranjo, permutação e combinação. Por fim, faz-se uma série de exemplos. Exercícios de fixação são propostos aos alunos para fechar o ciclo.

O estudo enfatiza mais a definição e aplicação de fórmulas para a resolução de problemas de contagem do que o próprio raciocínio combinatório. Qual o problema em tal abordagem? O problema reside no fato de que os alunos tem um preparo limitado e conhecem a combinatória superficialmente. Tal conhecimento é útil para se resolver alguns exercícios prontos em sala de aula, mas, na maioria das vezes, é totalmente ineficaz para solucionar problemas mais criativos e que saiam da "cartilha" ensinada.

Um ensino de combinatória baseado na MRP pode auxiliar para que este problema seja sanado. Não que se tenha uma fórmula mágica para resolver os problemas da educação neste sentido, contudo, uma abordagem um pouco mais criativa e exigente tende a mudar desde o início como se aprende combinatória tornando a perspectiva do ensino e aprendizagem do tema mais focada no raciocínio combinatório do que em apresentação e utilização de fórmulas.

A sugestão das “etapas” mostradas anteriormente ainda são indicadas para a condução do trabalho em sala de aula. Contudo, não apresentaremos cada “etapa”, mas nos concentraremos em comentários sobre a proposta do problema, sua resolução e sua potencialidade em se abordar e construir o conhecimento combinatório.

Problema 11: As cidades no País das Maravilhas. No País das Maravilhas existem quatro cidades A, B, C e D. Existem seis estradas ligando A a B, quatro estradas ligando B a C, três ligando A a D e duas estradas ligando D a C conforme a figura abaixo. De quantas maneiras é possível dirigir de A a C? Problema publicado por Fomin (2010, p. 11-12).

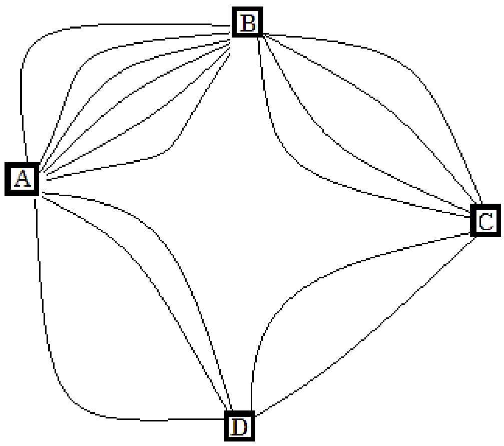


Figura 10: Cidades no País das Maravilhas.

Este problema, bastante simples, tem a potencialidade de se trabalhar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo de contagem, portanto, ideal para se iniciar o trabalho com combinatória.

Solução: Uma maneira fácil e intuitiva de resolvê-lo e que certamente será muito utilizado pelos alunos é a contagem direta. Esse processo é interessante e deve ser estimulado inicialmente para resolução de alguns problemas de contagem. Muitas vezes os alunos se “perdem” em fórmulas diante de problemas, vão direto ao *método burocrático*, sendo que bastaria contar alguns casos. Assim, poderíamos numerar as ruas para termos uma maior facilidade na contagem.

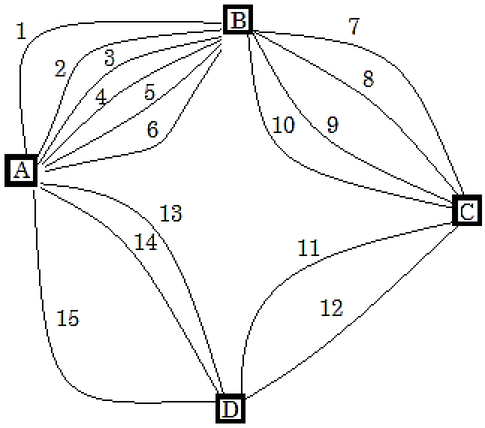


Figura 11: Cidades no País das Maravilhas com ruas numeradas.

O próximo passo seria literalmente contar cada caso. Vamos indicar 1-7 como sendo uma possibilidade de sair de A pelo caminho 1 e chegar em C pelo caminho 7. Assim, contando os casos teríamos as seguintes possibilidades de sair de A e chegar em C passando por B:

1-7; 1-8; 1-9; 1-10
2-7; 2-8; 2-9; 2-10
3-7; 3-8; 3-9; 3-10
4-7; 4-8; 4-9; 4-10
5-7; 5-8; 5-9; 5-10
6-7; 6-8; 6-9; 6-10

Num total de 6 x 4 = 24 possibilidades.

Agora contando as possibilidades de sair de A e chegar em C passando por D:

13-11; 13-12
14-11; 14-12
15-11; 15-12

Num total de 3 x 2 = 6 possibilidades.

O problema deixa claro que não é possível sair de A e chegar em C passando ao mesmo tempo por B e por D. Isso indica que as contagens devem ser separadas em dois casos. Os casos considerados anteriormente.

Assim, no caso de A até C passando por B encontramos 24 possibilidades. No caso de A até C passando por D encontramos 6 possibilidades. Portanto, o total de maneiras de sair de A e chegar até C é dado por 24 + 6 que é igual a 30.

Outro modo de resolver o problema envolve aplicar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo. Caso nenhum dos alunos tenha utilizado desses princípios para resolução do problema o professor poderia dar como sugestão algumas dicas para que eles percebessem essa possibilidade. O problema permite o professor ampliar aquela impressão inicial da resolução por mera contagem mostrando, posteriormente, a vantagem em se conhecer um princípio ou técnica que pode ser aplicada de modo mais generalizado. A deficiência em se trabalhar apenas com contagem reside justamente no fato de que o alcance de resolução de problemas com este método é limitado, ou seja, para problemas maiores, mais complexos, a contagem de caso a caso torna-se inviável.

É possível observar no problema que o total de possibilidades de sair de A e chegar até C pode ser dividido em dois casos (ou dois conjuntos de possibilidades). O primeiro deles relaciona-se com as possibilidades de sair de A e chegar até C passando por B. O segundo é sair de A e chegar até C passando por D. Os casos são independentes entre si, ou seja, formam conjuntos disjuntos. Isso significa que a contagem de A até C passando por B não conta nenhum caso em que A chega a C passando por D, pois não há ligação entre B e D e vice versa. Logo, para saber o total de possibilidades basta somarmos a quantidade de possibilidades do primeiro caso com a quantidade do segundo. Esta é a aplicação do que chamamos de Princípio Aditivo. Conforme Morgado (1991, p. 18) o Princípio Aditivo pode ser definido da seguinte forma:

$$Se\ A\ e\ B\ são\ dois\ conjuntos\ disjuntos, com\ p\ e\ q\ elementos, respectivamente,\ então\ A \cup B\ possui\ p + q\ elementos.$$

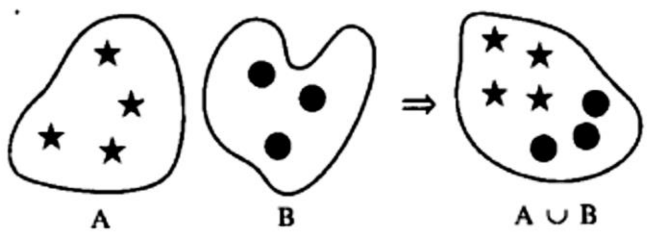


Figura 12: Princípio Aditivo.

Princípio Multiplicativo

"Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é x.y"

No nosso caso o conjunto "A" seria aquele que computa as "p" possibilidades de sair de A e chegar a C passando por B que são 24. O conjunto "B" seria aquele das "q" possibilidades de sair de A e chegar a C passando por D que são 6.

Por outro lado, a situação nos indica que de A até C passando por B, temos que cada caminho de A pode se ligar a todos os outros caminhos de B. Assim, o caminho 1 ligou-se com o caminho 7, 8, 9 e 10. Da mesma forma o caminho 2 se ligou com 7, 8, 9 e 10. Observando o padrão fica fácil deduzirmos que a quantidade total de possibilidades é 6x4, pois temos 6 caminhos de A e cada um deles tem a possibilidade de continuar por todos os caminhos de B que são 4. Quando há este acontecimento estamos diante do Princípio Multiplicativo. Conforme Morgado (1991, p. 18) o Princípio Multiplicativo pode ser definido da seguinte forma:

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy.

No nosso caso a decisão d_1 seria sair de A e chegar a B e ela poderia ser realizada de 6 modos, a decisão d_2 seria sair de B e chegar a C. Ela seria realizada de 4 modos. Logo as maneiras de d_1 e d_2 ocorrerem, ou seja, sair de A chegar a B e sair de B chegar a C, são 6 x 4 = 24.

O problema poderia ser solucionado com uma combinação do princípio aditivo e multiplicativo. Aplicaríamos o princípio multiplicativo para calcularmos as possibilidades de A até C passando por B, no caso 6 x 4 = 24, depois passando por D, 3 x 2 = 6. Por fim, utilizaríamos o princípio aditivo para calcularmos o total de possibilidades, 24 + 6 = 30. Logo o problema estaria resolvido. Haveria 30 maneiras de se dirigir de A a C.

Problema 12: O capitão e o vice. Um time de futebol com 11 jogadores precisa eleger um capitão e um vice-capitão. De quantas maneiras isto pode ser feito? Problema publicado por Fomin (2010, p. 11-12).

Solução: Novamente temos algumas possibilidades de resolução. Uma delas, bem trabalhosa é aquela de se contar os casos. Reafirmamos que em algumas situações tal postura é salutar. Portanto, o problema pode ser atacado num primeiro momento desta maneira.

Capitão	Vice-Capitão	Possibilidades
Jogador 1	Jogador 2 Jogador 3 Jogador 4 Jogador 5 Jogador 6 Jogador 7 Jogador 8 Jogador 9 Jogador 10 Jogador 11	10 ou n - 1, se n for o número de jogadores
Jogador 2	Jogador 1 Jogador 3 Jogador 4 Jogador 5 Jogador 6 Jogador 7 Jogador 8 Jogador 9 Jogador 10 Jogador 11	10 ou n - 1, se n for o número de jogadores
...	...	...

Figura 13: Princípio Aditivo e possibilidades.

Ou usando o que chamamos de árvore das possibilidades, temos:

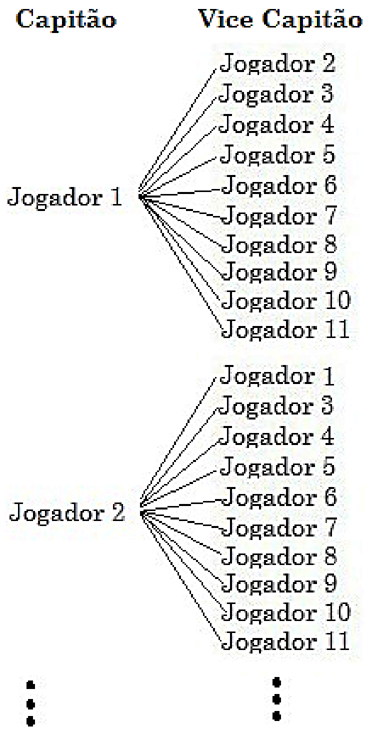


Figura 14: Árvore das possibilidades.

Contadas uma a uma as possibilidades, a solução para o problema seria um total de 110 maneiras distintas para se escolher um capitão e um vice. O problema é intuitivo ao induzir o estudante utilizar o princípio multiplicativo para sua solução. Esta deve ser uma das contribuições desta proposta. Assim, se tivermos n jogadores é perceptível que para cada jogador escolhido para a posição de capitão, jogador 1, por exemplo, sempre haverá $n - 1$ jogadores para a posição de vice. Assim, o total de possibilidades, pelo princípio fundamental de contagem (princípio multiplicativo) é:

$n.(n - 1)$, ou especificamente, $11 \, . \, 10 = 110$

Com esta situação apresentada poderíamos apresentar algumas definições em combinatória como, por exemplo, a definição de Arranjos Simples. Notemos que quando fazemos a seguinte junção (jogador1–jogador2) como capitão e vice estamos fazendo um agrupamento ordenado. Ordenado porque a ordem faz diferença, ou seja, (jogador1–jogador2) é diferente de (jogador2–jogador1), neste último caso o jogador 2 é que seria o capitão. O problema, dito de outra forma, quer saber quantos agrupamentos ordenados de duas pessoas podemos formar com as onze pessoas consideradas. Essa estrutura de contagem é conhecida como Arranjo Simples, simples porque não há repetição de elementos, não existe a possibilidade da relação (jogador1–jogador1) ser apresentada, pois o jogador1 só pode assumir uma única posição, capitão ou vice.

Vimos que neste caso, quando queremos arranjar de dois em dois os elementos temos $n.(n - 1)$ possibilidades. Mas, quando quisermos formar estes agrupamentos com 3 elementos o que podemos fazer? Se em nosso problema além de escolher um capitão e um vice quiséssemos ainda escolher um suplente de capitão quantas possibilidades teríamos (lembrando que cada jogador só pode assumir uma única função por vez)?

	Capitão	**Suplente**	**Vice Capitão**
Possibilidades	n	$n - 1$	$n - 2$

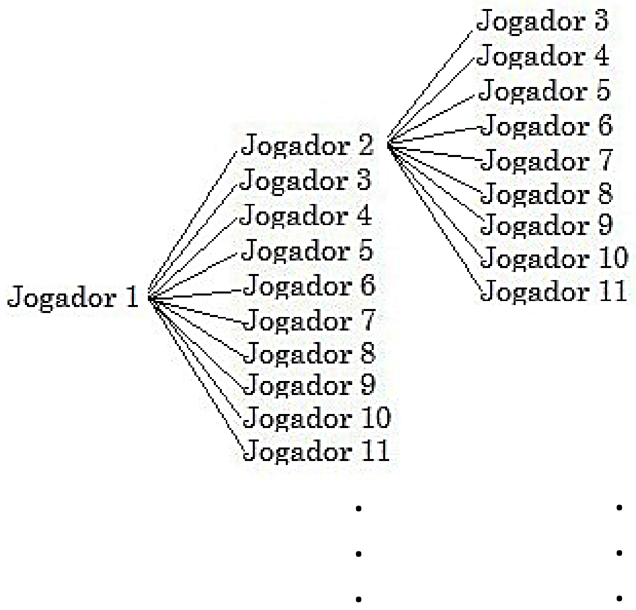


Figura 15: Árvore de possibilidades com "três ramos".

Assim, teríamos para capitão 11 possibilidades, para suplente 10 e para vice capitão 9 num total de 11 x 10 x 9 = 990 possibilidades. Em termos gerais, se n é a quantidade de jogadores, teríamos: $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$. E se agrupássemos de quatro em quatro? Quantas possibilidades teríamos? $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3)$. E assim sucessivamente. Esta sequência de produtos tem uma característica interessante e inspirou a conceituação da operação fatorial. Seja n um número inteiro positivo qualquer. Chamamos fatorial de n (indicado por $n!$) o seguinte resultado:

$$n! = \begin{cases} n.(n-1).(n-2).(n-3).\ldots.3.2.1, & para\, n > 0 \\ 1, & para\, n = 0. \end{cases} \qquad (35)$$

O fatorial é uma definição que tem sua importância na medida em que as fórmulas ou expressões em combinatória são geralmente simplificadas com esta notação.

Problema 13: A seleção de estudantes. Em um grupo de trinta estudantes, dois serão escolhidos para participar de uma competição matemática. De quantas maneiras isto pode ser feito? Problema publicado por Fomin (2010, p. 11-12).

O aluno, após ter resolvido o problema anterior, terá o ímpeto de repetir exatamente o mesmo raciocínio na solução deste novo problema, o que, acarretará em erro. O fato é sutil, mas é justamente o que diferencia os problemas conhecidos como de combinações daqueles conhecidos como arranjos. Neste momento é importante o professor deixar o aluno perceber claramente que o "x" da questão está no fato de a ordem dos elementos do agrupamento fazer ou não diferença. No problema anterior, o agrupamento (jogador1-jogador2) era totalmente diferente do agrupamento (jogador2-jogador1), ficou claro na situação.

Já neste novo problema não podemos dizer o mesmo. O agrupamento (estudante1-estudante2) é igual ao agrupamento (estudante2-estudante1), pois nesta situação a ordem não faz diferença, os dois estudantes participariam da competição da mesma forma. Em outras palavras, (estudante1-estudante2) ou (estudante2-estudante1) é a mesma escolha.

Uma ilustração pode deixar o entendimento mais claro. Imagine que dentre estes trinta alunos, dois seriam premiados com um milhão de reais. No sorteio ganharia a dupla (estudante1-estudante2), ora se tivesse sido a dupla (estudante2-estudante1) não seria a mesma coisa? Os ganhadores não seriam os mesmos? Logo, a ordem no agrupamento não faz diferença.

Assim nosso problema é ligeiramente diferente do problema do capitão e vice. Contudo, podemos fazer uma espécie de correção no método anterior para atender também a esta nova realidade. O que devemos fazer é apenas criar um mecanismo que "desconte" as possíveis contagens a mais. Assim, utilizando a ideia de Arranjo poderíamos pensar no seguinte.

Solução: O primeiro participante pode ser escolhido de n modos e o segundo de $(n - 1)$ modos. Logo, o total seria de $n \cdot (n - 1)$. Como $n = 30$, teríamos 30 . 29 = 870 maneiras. Mas, como sinalizado anteriormente, cada par foi contado exatamente duas vezes. Logo, a resposta pode ser melhorada para (30 . 29)/ 2 = 435. Desta forma, há 435 maneiras diferentes de se escolher dois estudantes para participar da competição.

Uma generalização deste problema é apresentada por Fomin (2010, p. 117).

> Suponha agora que precisamos escolher um time não com duas pessoas, mas com k, e que o grupo consiste em n estudantes, não em 30. O número de maneiras que isto pode ser feito é chamado o *número de combinações de k elementos escolhidos entre n elementos* e é denotado por $\binom{n}{k}$ (Lê-se "n escolhe k").

Uma pequena alteração no problema nos conduz ainda mais para o entendimento e resolução de problemas gerais dessa natureza. Se, ao invés de escolhermos dois, escolhêssemos três estudantes, nas mesmas condições. Quantas maneiras teríamos de selecionar os estudantes?

Seguindo o raciocínio até agora posto, teríamos n possibilidades para o primeiro, $(n - 1)$ possibilidades para o segundo e $(n - 2)$ possibilidades para o terceiro. Logo, $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24.360$, mas como vimos, este cálculo conta em excesso alguns agrupamentos. Mas, quantos em excesso? Note que anteriormente o agrupamento (estudante1-estudante2) poderia aparecer de duas maneiras apenas. Já o agrupamento (estudante1-estudante2-estudante3) pode aparecer de 6 maneiras. Ou (3! maneiras). Listando as possibilidades veremos com facilidade. Vejamos: (estudante1-estudante2-estudante3), (estudante1-estudante3-estudante2), (estudante2-estudante1-estudante3), (estudante2-

estudante3-estudante1), (estudante3-estudante1-estudante2), (estudante3-estudante2-estudante1).

Assim, contamos seis vezes mais do que deveríamos. Logo, o resultado anterior deve ser dividido por 6 (ou 3!) para encontrarmos a resposta correta. (30 . 29 . 28)/6 = 24.360/6 = 4.060. Assim, teríamos 4.060 maneiras de escolher os três estudantes para participar da competição. Ou [*n . (n – 1) . (n – 2)*] / *3!* maneiras, com *n = 30*. E se quiséssemos escolher quatro estudantes? [*n . (n – 1) . (n – 2) . (n – 3)*] / *4!*. E se quiséssemos escolher *k* estudantes de um conjunto de *n* (e não de 30)? [*n.(n – 1).(n – 2).(n – 3). ... .(n – (k – 1))]* / *k!* Multiplicando numerador e denominador desta fração por *(n – k)!*, temos:

$$\frac{n(n-1)(n-2).(n-3).\dots.(n-(k-1)).(n-k)!}{k!.(n-k)!}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2).(n-3).\dots.(n-(k-1)).(n-k)\dots.3.2.1}{k!.(n-k)!}$$

$$\frac{n!}{k!.(n-k)!} = C_{n,k} \tag{36}$$

Que é a famosa fórmula das combinações. Notemos que somente após uma longa abordagem do raciocínio das combinações por meio de problemas é que conduzimos a situação a nos fornecer uma expressão geral.

Finalizando, estes são alguns exemplos de como podemos utilizar a resolução de problemas no ensino de Matemática a fim de que os estudantes possam construir conceitos matemáticos de uma forma mais significativa, autônoma e útil. Em especial, na Análise Combinatória, o uso da MRP pode dar uma nova perspectiva ao ensino e aprendizagem, uma vez que com esta abordagem conseguiremos mudar o foco do ensino de uma apresentação de fórmulas para a construção do raciocínio combinatório.

4.3 – Problemas em geometria e a construção do conhecimento geométrico

Talvez a geometria seja o tema que mais facilmente possibilite o trabalho com a resolução de problemas, pois as figuras e formas geométricas são idealizações de elementos amplamente utilizados no cotidiano. Por modelar elementos tão vívidos de nossa realidade, a geometria tem essa vantagem prática inicial.

Desta forma, vamos propor um problema um pouco mais sofisticado nesta seção como ilustração de como podemos instigar nossos alunos a buscar métodos e alternativas mais sutis para lidar com problemas. Na verdade, o problema que será apresentado, publicado por Lima (2006, p. 95), é um típico problema *heurístico*, ou seja, uma situação não rotineira cuja resolução carece de uma construção criativa e aplicação adequada de princípios matemáticos. Alguns dos maiores problemas de nossa época ainda não foram solucionados porque até mesmo a Matemática deve avançar para fornecer instrumentos que subsidiem a solução.

Vejamos, então, à situação:

Problema 14: O muro de Afrânio. Em algum momento na primeira metade do século passado, uma pessoa chamada Afrânio tinha um valioso terreno desocupado perto do centro da cidade do Rio de Janeiro. Com a urbanização da cidade, ruas novas foram abertas e o terreno de Afrânio ficou reduzido a um triângulo ABC, retângulo em B, ainda de grande valor, pois o lado AB media 156 metros. Pois bem, Afrânio morreu e em seu testamento os advogados encontraram as instruções para dividir o terreno "igualmente" entre seus dois filhos. Era assim: "um muro deve ser construído perpendicularmente ao lado AB de forma que os dois terrenos resultantes da divisão tenham mesmo valor; o que tem a forma de um trapézio será do meu filho mais velho e o outro será do mais novo". Os advogados concluíram que os terrenos deviam ter mesma área, pois o testamento dizia que deveriam ter mesmo valor. Mas não foram capazes de decidir em que posição deveria ficar o muro. Em que posição relativamente ao lado AB do terreno o muro deve ser construído?

Solução: Os estudantes devem ser desafiados a primeiramente fazer uma representação da situação, um desenho simples mesmo. O professor conseguirá observar de imediato aqueles estudantes que já tem algum conhecimento e habilidade geométrica mediante seus desenhos. O aluno que tiver dificuldade em compreender o que é um triângulo retângulo deve ser orientado pelo professor para que consiga fazer seu desenho com a melhor aproximação possível da descrição.

Neste contexto existe a possibilidade de discutir com a turma sobre a decomposição de figuras geométricas, uma vez que o triângulo maior será "decomposto" em duas partes iguais. Os alunos devem estar atentos a isto. O trapézio foi mencionado, então o aluno conseguirá deduzir, mesmo que ainda não saiba ou que esteja esquecido, como é esta figura. Um conceito abordado no problema é o de perpendicularidade. Como deve ser este muro perpendicular? É uma boa pergunta assessória. Mas, vencida estas etapas o desenho resultante deve se assemelhar a este apresentado abaixo.

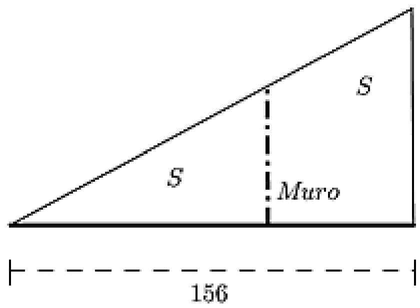


Figura 16: Muro de Afrânio.

Desafios como este causam inicialmente certo desconforto, pois parecem estar incompletos. A impressão é que está faltando alguma informação. É tão simples a enunciação, mas tão desafiador que deixa o solucionador numa condição por vezes desorientada. Exatamente nestas circunstâncias é que se deve pensar nas parcas informações disponíveis em busca de relações que produzam algum efeito proveitoso para o momento.

O professor deve dialogar com os alunos e conduzi-los em tais atividades de maior complexidade. A cada comentário, observação ou dica deve ser "correspondida" pela turma com reflexão, debates em grupo e análises. O professor só deve tomar cuidado para não deixar sua influência se tornar um "monólogo".

Na divisão excêntrica da história, duas informações se destacam e praticamente só as temos de relevante para a solução. As áreas dos terrenos (após a divisão devem ser iguais) que chamaremos de S e o lado AB que mede156 metros. Assim, precisamos relembrar ou criar alguma relação que envolva lados e áreas em triângulos ou trapézios.

Pólya nos instigaria a perguntar: "já vimos um problema correlato?", "Já vimos a relação lado/área em algum teorema?". Seria interessante usar o método *brainstorming* (tempestade cerebral) a fim de tentarmos escrever as relações lado/área que possivelmente tenhamos visto ou utilizado em algum momento. O professor poderia sugerir que os estudantes escrevessem no quadro. O importante é não fazermos críticas, não nos preocuparmos inicialmente com a exatidão da expressão, não limitarmos a participação dos alunos e produzirmos o máximo de sugestões possíveis. Então, eles poderiam sugerir o seguinte:

A área do triângulo ABC de base a e altura h:

$$S = \frac{ah}{2} \tag{37}$$

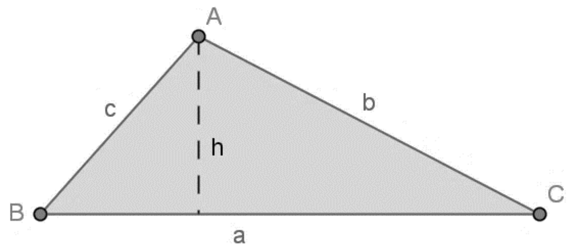


Figura 17: Triângulo de base a e altura h.

Área do trapézio MNOP de base maior B, base menor b e altura h:

$$S = \frac{(B+b).h}{2} \tag{38}$$

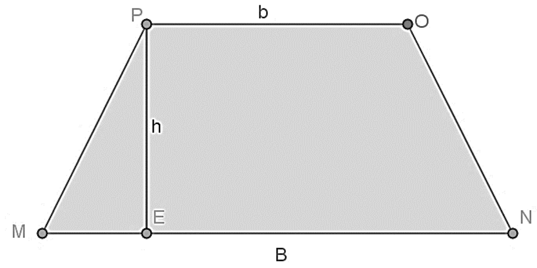


Figura 18: Trapézio de base maior B, base menor *b e* altura *h*.

Áreas do triângulo ABC envolvendo semi-perímetro p, apótema k e ângulo interno α:

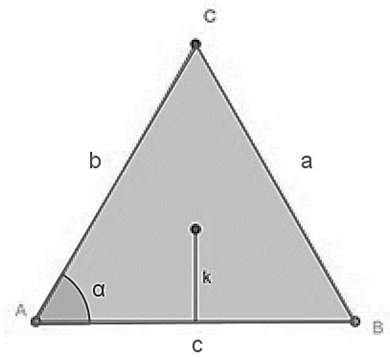


Figura 19: Triângulo de semi-perímetro p, apótema k e ângulo interno α.

- Em função do semi-perímetro e apótema:

$$S = p.\mathrm{k} \tag{39}$$

- Fórmula de Heron dado o triângulo ABC e semi-perímetro p:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{40}$$

- Área do triângulo ABC dependendo de dois lados e do seno do ângulo entre eles:

$$S = \frac{b.c.sen\alpha}{2} \tag{41}$$

Se tal exercício for difícil para a turma é possível o professor aproveitar o ensejo para trabalhar com pesquisa, consulta a obras em busca de subsídios. Infelizmente tais relações encontradas não se aplicam diretamente à nossa questão. Elas ainda são muito gerais e não temos todos os dados para alimentá-las. Portanto, temos que trabalhar a partir de outras perspectivas. Uma observação interessante é que na formação da figura além de termos o trapézio e o triângulo, podemos perceber dois triângulos retângulos semelhantes (triângulos semelhantes são aqueles que possuem os três ângulos congruentes e os lados proporcionais). ABC e AMN conforme a figura.

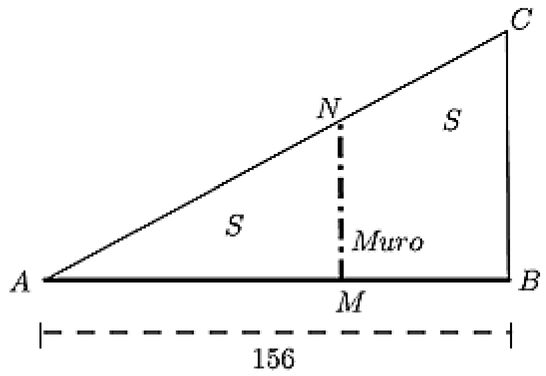


Figura 20: Triângulos retângulos semelhantes e o muro de Afrânio.

A partir disso pensaremos em trabalhar justamente com a semelhança de triângulos. Talvez esta abordagem nos renda mais a frente algum dividendo para a solução da questão. Façamos o seguinte, vamos dividir a área do triângulo AMN pela área do triângulo ABC.

$$\frac{S}{2S}$$

Como a área de um triângulo é $\frac{ah}{2}$, façamos:

$$\frac{S}{2S} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{a'h'}{2}}$$

Simplificando:

$$\frac{S}{2S} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{a'h'}{2}} = \frac{ah}{a'h'} = \frac{a}{a'} . \frac{h}{h'} \qquad (42)$$

Mas, $\frac{a}{a'}$ e $\frac{h}{h'}$ representam a constante de proporcionalidade da semelhança das figuras. Como os lados são proporcionais, então a divisão de qualquer lado pelo seu correspondente tem que ser igual. Chamaremos de k esta constante. Logo, temos:

$$\frac{S}{2S} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{a'h'}{2}} = \frac{ah}{a'h'} = \frac{a}{a'} . \frac{h}{h'} = k.k = k^2 \qquad (43)$$

Ou seja:

$$\frac{S}{2S} = k^2 \tag{44}$$

O resultado (I) é uma propriedade bastante conhecida: “a razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança”.

Digamos que a distância AM = x. Podemos então calcular a razão k de proporcionalidade de nossa figura:

$$k = \frac{x}{156} \tag{45}$$

Substituindo a equação (45) em (44), temos:

$$\frac{S}{2S} = \left(\frac{x}{156}\right)^2$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{x}{156}\right)^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{156}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{156}$$

$$\frac{\sqrt{2}.156}{2} = x$$

$$x = 78\sqrt{2} \cong 110$$

Temos a solução. O muro deve ser construído a 110 metros a partir de A.

4.4 – Aritmética criativa a partir de problemas

A Aritmética, parte da Matemática que atualmente integra a Teoria dos Números, alcançou grande desenvolvimento nos últimos séculos graças à genialidade de homens como Pierre de Fermat (1601-1665), Leonhard Euler (1707-1783) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Um dos principais objetivos da escola básica é o ensino de Aritmética que se inicia bem cedo com as ideias de número, contagem, agrupamentos, conjuntos numéricos e operações.

A pesar do valor atribuído à matéria e a importância que é dada ao tema, ainda nos ressentimos de não explorar um pouco mais a potencialidade da Aritmética no nível básico. Em nosso currículo, por exemplo, não é previsto no Ensino Básico em momento algum o trabalho com Aritmética Modular, uma ferramenta excelente para simplificar e ampliar a capacidade de resolução de alguns problemas.

O nível em que se trabalha com Aritmética na Educação Básica também é elementar, não abordando uma extensão considerável de conceitos de que dispomos há séculos. Claro que o ensino na Educação Básica não deve se dar num nível axiomático característico de uma Matemática universitária, contudo, não é salutar deixar um abismo entre o ensino de Aritmética na Educação Básica e as abordagens mais sofisticadas da Aritmética da Educação Superior.

Certos tópicos poderiam ser melhor desenvolvidos, mesmo que alcancem seu ápice no final do Ensino Médio. Temas como: Indução Matemática, Algorítmo de Euclides, Equações Diofantinas Lineares, Tópicos com números Primos, Primos de Fermat e Mersenne, Números Perfeitos além de Aritmética Modular. Tudo feito a partir da transposição didática para ter sua devida eficácia.

Considerando o que foi exposto, nos propomos a apresentar dois problemas que nos orientam no ensino da matéria em sala de aula. Um deles, com formulação bem clássica, é uma aplicação do Mínimo Múltiplo Comum (MMC), o outro, a exemplo do que dissemos anteriormente, já extrapola, de certa maneira, o currículo proposto para Educação Básica, por tratar-se de uma Equação Diofantina Linear. Contudo, tal situação pode ser proposta e comentada pelo professor uma vez que mune o estudante com uma ferramenta de fácil compreensão e útil na resolução de diversos outros problemas. Além de trazer certa novidade e dinâmica ao professor quando possibilita abordar outros tipos de desafios.

Problema 15: O pisca-pisca de Antônia. Dona Antônia possui um enfeite pisca-pisca, para árvores de Natal, que tem lâmpadas amarelas, vermelhas e azuis. As lâmpadas amarelas se acendem de 4 em 4 minutos; as vermelhas, de 3 em 3; e as azuis, de 6 em 6 minutos. Se às 20 horas e 15 minutos todas as lâmpadas se acenderem, a que horas elas voltarão a se acender novamente ao mesmo tempo?

Solução: A resolução do problema pode ser realizada de duas formas (a exemplo do que ocorreu anteriormente nos outros problemas). Uma delas a partir de uma iniciativa mais intuitiva, por meio de testes, a outra mais sofisticada que seria a aplicação direta do cálculo do MMC.

Na primeira perspectiva o aluno poderia construir uma espécie de tabela para pontuar o acendimento de cada lâmpada. Da seguinte forma:

Tempo / **Cor**	Início 20:15	+3 minutos (do início) 20:18	+4 minutos (do início) 20:19	+6 minutos (do início) 20:21	+8 minutos (do início) 20:23	+9 minutos (do início) 20:24	+10 minutos (do início) 20:25	+11 minutos (do início) 20:26	+12 minutos (do início) 20:27
Amarela	X	0	X	0	X	0	0	0	X
Vermelha	X	X	0	X	0	X	0	0	X
Axul	X	0	0	X	0	0	0	0	X

X – Lâmpada acesa
0 – Lâmpada apagada

Quadro 2: A intermitência das lâmpadas do pisca-pisca de Antônia

Assim, as lâmpadas acenderão juntas às 20 horas e 27 minutos. O professor pode se utilizar da atividade, no momento da formalização do conteúdo, e definir o que foi feito como justamente "encontrar" o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) de 3 números. MMC é o menor dos múltiplos comuns a vários números. No nosso caso, a lâmpada de cor amarela acendia de 4 em 4 minutos, logo seguia a sequência de acendimentos: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40,... que são os múltiplos de 4. Da mesma forma a lâmpada vermelha acendia de 3 em 3 minutos: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39,... que são os múltiplos de 3. Por fim, a lâmpada azul: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60,... múltiplos de 6. Poderíamos sublinhar os múltiplos comuns destes números e teríamos:

4, 8, **<u>12</u>**, 16, 20, **<u>24</u>**, 28, 32, **<u>36</u>**, 40,...

3, 6, 9, **<u>12</u>**, 15, 18, 21, **<u>24</u>**, 27, 30, 33, **<u>36</u>**, 39,...

6, **<u>12</u>**, 18, **<u>24</u>**, 30, **<u>36</u>**, 42, 48, 54, 60,...

Logo, 12, 24, 36, ..., são os múltiplos comuns, no entanto o aluno deve observar que os múltiplos comuns são vários, na verdade infinitos. Saber, portanto, qual é o menor deles, após ter feito este procedimento é tarefa fácil. O MMC dos números 4, 3, 6 é 12, ou ainda, MMC(3, 4, 6) = 12.

Nessa perspectiva acreditamos que os alunos conseguirão mais facilmente construir, de forma bem organizada e significativa, o conceito de MMC.

Problema 16: Quantos selos? Certo colecionador deseja comprar selos de R$ 5,00 e R$ 7,00. Quantos selos de cada valor ele poderá comprar se o total investido for R$ 100,00?

Esta situação não apresenta grandes dificuldades para sua resolução. Os alunos facilmente conseguirão encontrar algumas possibilidades de resposta. O desafio seria encontrar todas as respostas e conseguir argumentar matematicamente a unicidade delas. Claro que o método de tentativas (ou inspeção) será de pronto uma opção deles.

Solução 1: Uma alternativa para se pensar e para o professor explorar o conteúdo estaria relacionada a uma aplicação da ideia de múltiplos. Notemos que se o colecionador comprar somente selos de R$ 5,00 a quantidade deles será 20. Logo, temos uma solução. 20 selos de R$ 5,00 e nenhum selo de R$ 7,00. A partir disso é possível concluir que não será possível adquirir somente selos de R$ 7,00, pois R$ 100,00 não é um múltiplo de R$ 7,00. A partir da ideia de múltiplos, notamos que para a soma dar R$ 100,00 teremos que ter múltiplos de R$ 5,00 adicionados a múltiplos de R$ 7,00 que resultem em R$ 100,00. O professor pode trabalhar um pouco mais os conceitos de múltiplos. Vejamos alguns múltiplos de 5 e 7:

Múltiplos de 5:

M(5) = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100,...

Múltiplos de 7:

M(7) = 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, 105,...

Observemos que para ter soma R$ 100,00 precisamos somar um múltiplo de R$ 5,00 (que termina sempre em 0 ou 5) com um múltiplo de 7 (que termine também em 0 ou 5) caso contrário o total não terá a unidade 0 que é uma condição necessária para se obter resultado R$ 100,00. Os múltiplos de R$ 7,00 que terminam em 0 ou 5 (ou seja, que também sejam múltiplos de R$ 5,00) são: 35, 70, 105. A possibilidade 105 é descartada, pois ela ultrapassa soma R$ 100,00. Logo, as alternativas que ainda nos sobram são: 35 e 70, ou seja, gastar R$ 35,00 e R$ 70,00 com selos de R$ 7,00.

Se comprarmos R$ 35,00 em selos de R$ 7,00 cada, significa que compraríamos 5 selos. Faltariam comprar (100 – 35 = 65) R$ 65,00 em selos de R$ 5,00, ou seja, 13 selos de R$ 5,00. Portanto, nossa outra solução para o problema seria o colecionador comprar 5 selos de R$ 7,00 e 13 selos de R$ 5,00. A última possibilidade se dá quando são gastos R$ 70,00 em selos de R$ 7,00, ou seja, 10 selos de R$ 7,00 são comprados. Os R$ 30,00 reais restantes seriam gastos com selos de R$ 5,00, ou seja, 6 selos. Assim, nossa última possibilidade seria comprar 10 selos de R$ 7,00 e 6 selos de R$ 5,00.

Não existem outras possibilidades. O argumento matemático para isso é o fato de que para a soma dar R$ 100,00, o gasto com os selos de R$ 7,00 devem ser múltiplos de R$ 5,00, o que, nos daria as possibilidades: 35, 70, 105,... das quais as únicas viáveis seriam: 35 e 70 que foram adequadamente comutadas.

O problema é provocativo realmente. É simples, mas exige um bom raciocínio.

Solução 2: Sugerimos ainda utilizar esta situação como um problema gerador. A partir do mesmo seria possível o professor instigar os alunos a buscar outra forma de solução, desta vez tentando equacionar a situação. O professor conduz a sala a tentar se convencer de que o problema pode ser modelado da forma: $5x + 7y = 100$.

Esta expressão pode ser definida como Equação Diofantina Linear. Segundo Hefez (2006, p. 66) equações do tipo $aX - bY = c$ ou $aX + bY = c$

com $a, b, c \in N$ são chamadas de Equações Diofantinas Lineares em homenagem a Diofanto de Alexandria (aprox.. 300 D.C.).

Nem sempre as equações diofantinas tem solução. A condição básica para tal é que (a, b) | c, ou seja, o máximo divisor comum de a e b deve dividir c. É claro que nas equações diofantinas podemos encontrar diversas soluções. Para equações do tipo $aX + bY = c$ elas são da forma:

$$x = x_0 + tb \; e \; y = y_0 - ta \; com \; t \in N. \tag{46}$$

Onde x_0 e y_0 são soluções minimais (os menores valores possíveis que satisfazem a equação). Logo, o essencial é saber como encontrar uma solução minimal de uma equação e teremos uma expressão para as demais soluções.

Se a menor solução é chamada minimal, uma outra solução qualquer é chamada de solução particular. Esta solução particular é mais fácil de encontrar e utilizamos basicamente MDC (Máximo Divisor Comum) para isso. A partir de uma solução particular conseguimos encontrar a solução minimal e, consequentemente, uma expressão geral para todas as outras soluções. Vejamos como seria em nosso caso.

$$5x + 7y = 100 \tag{47}$$

É fácil perceber que:

$$7 = 5 + 2$$

$$7 - 5 = 2$$

$$5(-1) + 7(1) = 2 \quad (x50)$$

$$5(-50) + 7(50) = 100$$

Logo, temos $x_1 = -50$ e um $y_1 = 50$ como solução particular. Mas, $x_1 = -50$ não representa uma possibilidade para nossa situação, pois as quantidades devem ser positivas. Logo, nossa solução minimal será da forma: $x_0 = x_1 + 7t$, ou seja, a solução negativa somada com um adequado múltiplo de 7 para torná-la a menor possível positiva. Temos:

$$x_1 + 7t \geq 0 \rightarrow -50 + 7t \geq 0 \rightarrow 7t \geq 50 \rightarrow t \geq \frac{50}{7} \rightarrow t > 7$$

Por outro lado, $y_1 = 50$ representa um valor muito alto e precisamos do menor valor possível, logo nossa solução minimal será da forma: $y_0 = y_1 - 5t$, logo:

$$y_1 - 5t \geq 0 \to 50 - 5t \geq 0 \to 50 \geq 5t \to t \leq \frac{50}{5} \to t \leq 10.$$

Deste modo, a solução minimal surge quando $t = 8$ e temos:

$$x_0 = 6 \; e \; y_0 = 10$$

As soluções gerais são:

$$x = x_0 + tb$$

$$x = 6 + 7t \quad para \; t \in N \tag{48}$$

$$y = y_0 - ta$$

$$y = 10 - 5t \quad para \; t \in N \tag{49}$$

As soluções são positivas quando: $6 + 7t \geq 0 \to t \geq \frac{-6}{7} \to t \geq 0$ e quando $10 - 5t \geq 0 \to t \leq 2$. Os possíveis valores de t são: 0, 1 e 2.

Para $t = 0$, temos:

$$x = 6 + 7t \to x = 6$$

$$y = 10 - 5t \to y = 10$$

Dito de outra forma, esta possibilidade representa a compra de seis (6) selos de R$ 5,00 e dez (10) selos de R$ 7,00.

Para $t = 1$, temos:

$$x = 6 + 7.1 \to x = 13$$

$$y = 10 - 5.1 \to y = 5$$

Esta possibilidade representa a compra de treze (13) selos de R$ 5,00 e cinco (5) selos de R$ 7,00.

Para $t = 2$, temos:

$x = 6 + 7.2 \to x = 20 \;\; y = 10 - 5.2 \to y = 0.$

Neste caso temos a compra de vinte (20) selos de R$ 5,00 e zero (0) selos de R$ 7,00. Como não há mais possibilidades para t não temos mais soluções.

Procuramos retomar neste trabalho, de forma sucinta, a análise da trajetória histórica da educação; caracterizando o momento em que a mesma estava pautada em princípios de retransmissão do conhecimento, numa postura de formação linear do ser humano. Tais posturas educativas se justificavam na época uma vez que o conhecimento do mundo e do próprio ser humano ainda era limitado.

Contudo, o que ficou nítido é que com as novas descobertas e com o avanço das ciências, em todos os níveis e áreas, (Filosofia, Sociologia, Psicologia, Biologia, etc...) e ainda com o próprio desenvolvimento da sociedade (sociedade pós-moderna baseada na tecnologia e informação), os paradigmas educacionais de postura conhecida hoje como tradicional não correspondiam mais com as demandas e a complexidade da sociedade pós-moderna. Assim, foi premente a mudança de paradigma para que a educação continuasse realizando adequadamente sua função, de formar integralmente o cidadão para os desafios presentes e futuros da humanidade.

Verificamos que a educação pautada nos novos princípios educacionais, aqueles que, dentre outras coisas, "enxergaram" o ser de modo mais holístico, dando ao estudante maior responsabilidade e autonomia na sua própria formação, bem como evidenciando a construção do conhecimento em oposição a uma mera retransmissão, ganhou aceitação por sua coerência. Deste modo, o ensino de Matemática acompanhou a reboque tais tendências, ora se estribando numa postura tradicional e posteriormente tentando se adequar também a uma postura de educação renovada. No contexto de educação renovada surge a Educação Matemática que pesquisa e trabalha justamente para avançar o ensino de Matemática atendendo as condições do homem e da sociedade atual.

A partir dos estudos realizados, entendemos que ensinar Matemática em nossa época, deve ser basicamente uma ação de propor a construção do conhecimento matemático. A teoria de Piaget a qual analisamos rapidamente nos trouxe num relance as vantagens e, na verdade, a obrigação mesmo de se construir o conhecimento de forma geral e o conhecimento lógico-matemático de modo específico. Vimos que a construção do conhecimento matemático é diferenciada por tratar-se de uma abstração reflexiva cuja fonte do conhecimento é interna e não externa como em outras ciências. Esta especificidade deve ser adequadamente considerada, visto que negligenciar este detalhe pode implicar numa educação inconsistente desde o princípio.

A partir da postura de construção do conhecimento, verifica-se que muitas metodologias para o ensino de Matemática contribuem para que haja uma educação nestes parâmetros. Investigamos a Metodologia de Resolução de Problemas (MRP) e, dentre outros benefícios, encontramos que ela efetivamente: Faz o estudante pensar produtivamente; desenvolve o raciocínio; ensina o estudante a enfrentar situações novas; dá oportunidade de o estudante se envolver com aplicações da Matemática; torna as aulas de Matemática mais dinâmicas e desafiadoras; equipa o estudante com estratégias para resolver problemas e dá uma boa base Matemática às pessoas. Logo, uma alternativa para o ensino de Matemática.

Com o suporte da MRP as etapas da resolução de problemas estabelecidas por Pólya foram revistas, foi definido o que seja um problema na perspectiva da MRP, como se resolve um problema e ainda formulação e resolução de problemas. Especificamente no item formulação de problemas verificamos grades erros advindos da má formulação dos problemas. Tais erros na formulação de problemas são graves, pois atrapalham o processo de avaliação e/ou ensino e aprendizagem do aluno.

Percebeu-se a valorização atribuída à resolução de problemas uma vez que os sistemas de avaliação da qualidade da educação, tanto em nível nacional como internacional, tais como SAEB, ENEM, PISA, estão baseados, e utilizam como instrumento para verificar competências e habilidades, a resolução de problemas.

Por fim, verificou-se uma grande possibilidade de trabalho com tópicos de Matemática na MRP. A mudança de postura na sala de aula, no trabalho do professor e na ação do estudante é marcante dando espaço à liberdade de pensamento, à participação, à criatividade e mesmo à motivação em se estudar e efetivamente pesquisar em Matemática. Notou-se que os problemas utilizados não foram corriqueiros e nem mesmo serviram para um adestramento, mas sim como geradores do conhecimento. Através deles se estimula o pensar, a construção de “saídas”, à pesquisa em busca de respostas e, por fim, e mais importante, conduz à construção do conhecimento matemático.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matriz de Referência para o ENEM 2009.** Brasil, 2009. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?Itemid=310&id=13318&option=com_content&view=article>. Acesso em: 02 out. 2015.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BROLEZZI, Antônio Carlos. **Criatividade e Resolução de Problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. **Metodologia do Ensino da Matemática.** São Paulo: Cortez Editora, 1995.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e Resolução de Problemas de Matemática**: Teoria e Prática. 1. ed. São Paulo: Ática, 2009.

_______________. **Matemática:** contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

FOMIN, Dmitri. GENKIN, Sergey, ITENBERG, Ilia. **Círculos Matemáticos**, a experiência russa. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

FURASTÉ, Pedro Augusto. **Normas Técnicas para o Trabalho Científico**: Elaboração e Formatação. Explicitação das Normas da ABNT. 14. ed. Porto Alegre: s.n., 2008.

GROENWALD, Cláudia Lisete Oliveira, SILVA, Carmen Kaiber da, MORA, Castor David. **Perspectivas em Educação Matemática**. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, Recife. ***Anais.*** Recife: UFPE, 2004. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/02/MC23993901053.pdf> Acesso em: 14 abr. 2015.

GUIMARÃES, Karina Perez. **Desafios e perspectivas para o ensino de matemática.** [livro eletrônico]. Curitiba: InterSaberes, 2012.

HAIDT, Regina Célia Cazaux. **Curso de Didática Geral**. 7. ed. São Paulo: Editora Ática, 1999.

HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética**. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

HIRATSUKA, Paulo Isamo. **Mudança prática do professor e a construção do conhecimento matemático,** 2004. Disponível em:

<http://www.unesp.br/prograd/PDFNE2004/artigos/eixo3/amudancadapraticadoprofessor.pdf> Acesso em: 23 jun. 2015.

LAKATOS, Eva Maria. **Metodologia do Trabalho Científico:** procedimentos básicos, pesquisa bibliográfica, projeto e relatório, publicações e trabalhos científicos**.** 4 ed. São Paulo: Atlas, 1992.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1994.

LIMA, Elon Lages. Et al. **Temas e problemas elementares**. 12 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006a.

_______________. **A matemática do ensino médio**. Vols 1, 2, 3. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MATRIZ de avaliação de Matemática – PISA 2012. 2012. Disponível em: < http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf>. Acesso em: 02 out. 2015.

MORGADO, Augusto César, et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar**: geometria euclidiana plana. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

NETO, Ernesto Rosa. **Didática da Matemática.** 11. ed. São Paulo: Editora Ática, 1998.

OLIVEIRA JR, V. F. **Resolução de problemas**: uma metodologia comprometida com a construção do conhecimento matemático. 2015. 110 f. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Rondônia - UNIR, Porto Velho. 2015.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. **A resolução de problemas na Educação Matemática: onde estamos e para onde iremos?** In: IV Jornada Nacional de Educação Matemática e XVII Jornada Regional de Educação Matemática, 2012, Passo Fundo. ***Anais***. Passo Fundo: UPF, 2012. Disponível em: <http://www.upf.br/anaisjem/download/cmp-14-onuchic.pdf> Acesso em: 08 abr. 2015.

O QUE cai na prova de Matemática? c2011. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/saeb/a-prova-de-matematica>. Acesso em: 02 out. 2015.

O QUE É O PISA? c2011. Disponível em: < http://portal.inep.gov.br/pisa-programa-internacional-de-avaliacao-de-alunos>. Acesso em: 02 out. 2015.

PARRA, Cecilia, SAIZ, Irma (orgs). [et al]. **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

PILETTI, Claudino. **Didática Geral.** São Paulo: Editora Ática, 2004.

PIRES, Célia Maria Carolino. **Currículos de Matemática**: da organização linear à ideia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

PÓLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo enfoque do método matemático. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

PRICE, Julius Mendes. **A pedagogia de Jesus**, o mestre por excelência. 3 ed. Rio de Janeiro: JUERP, 1980.

PROGRAMME for International Student Assessment (PISA), Results from PISA 2012, BRAZIL. 2012. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2013/country_note_brazil_pisa_2012.pdf>. Acesso em: 02 out. 2015.

SOBRE O ENEM. c2011. Disponível em: < http://portal.inep.gov.br/web/enem/sobre-o-enem>. Acesso em: 02 out. 2015.

TAO, Terence. **Como Resolver Problemas Matemáticos,** Uma perspectiva pessoal. Trad. Paulo Ventura. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

WACHILINSKI, Marcelo. **Didática e avaliação: algumas perspectivas da educação matemática**. [livro eletrônico]. Curitiba: InterSaberes, 2012.

Desigualdade Triangular

Entendemos que seria desnecessário fazer esta demonstração de próprio "punho" uma vez que ela já foi apresentada por Muniz Neto (2013, p. 60). Logo, segue sua apresentação.

Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Prova. Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB}$ = c, $\overline{AC}$ = b e $\overline{BC}$= a. Mostremos que $a < b + c$, sendo a prova das demais desigualdades totalmente análoga. Marque (figura 16) o ponto D sobre a semirreta $\overline{CA}$ tal que A∈ $\overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{AB}$.

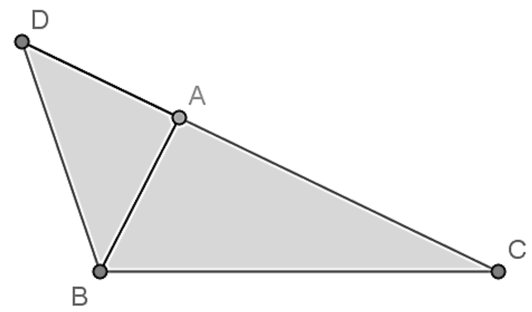


Figura 21: Desigualdade triangular.

Uma vez que

$\overline{CD} = \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB}$ = b + c, é suficiente mostrarmos que $B\hat{D}C < D\hat{B}C$. Mas, desde que $B\hat{D}A = D\hat{B}A$, basta observarmos que

$$B\hat{D}C = B\hat{D}A = D\hat{B}A < D\hat{B}A + A\hat{B}C = D\hat{B}C$$

Sendo a, b e c os comprimentos dos lados de um triângulo, segue da desigualdade triangular que

$$a < b + c, \qquad b < a + c, \qquad c < a + b$$

Reciprocamente, dados segmentos cujos comprimentos a, b e c satisfazem as desigualdades acima, não é difícil provar que é sempre possível construirmos um triângulo tendo tais segmentos como lados.

Podemos nos perguntar o que esse teorema tem a ver com o fato de que a menor distância entre dois pontos é uma reta. Tem tudo a ver. Na verdade ele pode ser aplicado para mostrar esse fato. Vejamos.

Imagine que a menor distância entre dois pontos A e B não seja uma reta. Logo, podemos marcar um ponto C na curva que liga A a B que seja supostamente a menor distância entre os pontos. Conforme a figura 17.

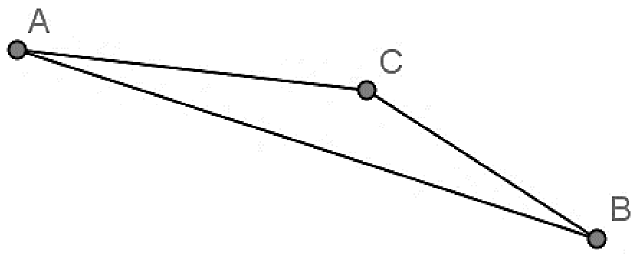


Figura 22: Aplicação desigualdade triangular.

Mas, pela desigualdade triangular, temos que $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}$, o que torna absurdo afirmar que a linha poligonal ACB é a menor distância entre os pontos A e B. Logo, a menor distância entre A e B é o segmento de reta que liga o ponto A ao ponto B.

Caracterização da Função Afim

Nosso mestre Elon Lages Lima fez essa demonstração que ora apresentamos e publicou em Lima (2012, p. 112). Como o teorema utiliza-se de outro teorema, o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, também apresentaremos este teorema como um corolário para nossos fins. Este último Teorema também foi demonstrado por Lima (2012, p. 107).

Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

$Seja\ f: R$

$\rightarrow R\ uma\ função\ crescente. As\ seguintes\ afirmações\ são\ equivalentes.$

$$(1) f(nx) = nf(x)\ para\ todo\ n \in Z\ e\ todo\ x \in R$$

$$(2) Pondo\ a = f(1), tem - se\ f(x) = ax\ \ para\ todo\ x \in R.$$

$$(3) f(x + y) = f(x) + f(y)\ \ para\ quaisquer\ x, y \in R$$

Demonstração.

Provaremos as implicações (1)→(2), (2)→(3) e (3)→(1). A fim de mostrar que (1)→(2), provemos inicialmente que, para todo número racional $r = m/n$, a hipótese (1) acarreta que $f(rx) = rf(x)$, seja qual for $x \in R$. Com efeito, como $nr = m$, tem-se:

$$n.f(rx) = f(nrx) = f(mx) = m.f(x),$$

Logo,

$$f(rx) = \frac{m}{n} f(x) = r.f(x)$$

Seja $a = f(1)$. Como $f(0) = f(0.0) = 0.f(0)$, a monotonicidade de f nos dá $a = f(1) > f(0) = 0$. Assim, a é positivo. Além disso, temos $f(r) = f(r.1) = r.f(1) = r.a = ar$ para todo $r \in Q$.

Mostremos agora que se tem $f(x) = ax$ para todo $x \in R$.

Suponha, por absurdo, que exista algum número real x (necessariamente irracional) tal que tal que $f(x) \neq ax$. Para fixar ideias, admitamos $f(x) < ax$. (O caso $f(x) > ax$ seria tratado de modo análogo.) Temos

$$\frac{f(x)}{a} < x.$$

Tomemos um número racional r tal que

$$\frac{f(x)}{a} < r < x.$$

Então $f(x) < ar < ax$, ou seja, $f(x) < f(r) < ax$. Mais isto é absurdo, pois f é crescente logo, como $r < x$, deveríamos ter $f(r) < f(x)$. Esta contradição completa a prova de que (1)→(2). As implicações (2)→(3) e (3)→(1) são óbvias.

Teorema: Caracterização da Função Afim.

$Seja\ f{:}\,R$
$\rightarrow R\ uma\ função\ monótona\ injetiva. Se\ o\ acréscimo\ f(x+h) - f(x)$
$=\ \varphi(h) depender\ apenas\ de\ h, mas\ não\ de\ x, então\ f\ é\ uma\ função\ afim.$

A demonstração deste teorema, que faremos agora, é uma aplicação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Para fixar ideias, suporemos que a função $f$seja crescente. Então $\varphi{:}\,R \rightarrow R$ também é crescente, com $\varphi(0) = 0$. Além disso, para quaisquer $h, k \in R$ temos

$$\begin{aligned}\varphi(h+k) &= f(x+h+k) - f(x)\\ &= f\big((x+k)+h\big) - f(x+k) + f(x+k) - f(x)\\ &= \varphi(h) + \varphi(k).\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, pondo-se $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = a.h$ para todo $h \in R$. Isto quer dizer que $f(x+h) - f(x) = ah$. Chamando $F(0)$ de b, resulta $f(h) = ah + b$, ou seja, $f(x) = ax + b$ para todo $x \in R$.