目次

第 I 部
基礎の確認

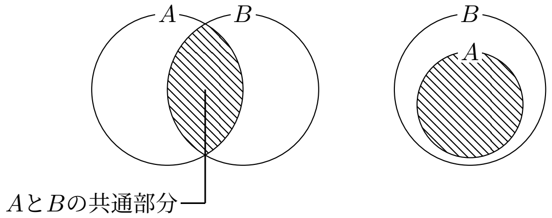
1　集合論

数学でモデルを扱うとき集合論的に思考すると上手にそのモデルを扱うことができる。これは数学の問題を解く場合も同様である。では集合論とは何か、概要を確認しておこう。

1.1　集合の定義

集合とはその名の通り、いくつかのものをひとまとめにして考えた「ものの集まりのこと」である。特に集合論では「もの」のことを要素という。

またある集合 A は他の集合 B と共通部分を持ったり、はたまたその集合 A 自体が他の集合 B の一部分となるケースも考えられる。そのような場合順に「AとB の共通部分」、「AはBの 部分集合」という。



1.1.1　集合の例

例として「原子」という集合を考えてみよう。(ここでいう原子は化学の原子を指すものとする)

原子には様々な種類があり、例えば水素原子 ${}_{1}\mathrm{H}$ や酸素原子 ${}_{8}\mathrm{O}$ などがある。このとき ${}_{1}\mathrm{H}$ や ${}_{8}\mathrm{O}$ は原子集合の要素であるといえる。

またさらに水素元素 H や酸素元素 O はそれぞれ水素原子 ${}_{1}\mathrm{H}$ の全同位体を含んだ集合、酸素原子 ${}_{8}\mathrm{O}$ の全同位体を含んだ集合ゆえ原子集合の部分集合である。

1.2　集合論の記号

ここまでは言葉を用いて集合について少し語ってきた。しかしいちいち言葉で説明するのは少々面倒であり、しかも読みづらい。そこで記号を導入してみよう。

1.2.1　基本的な記法

例えば A という集合を自然数 $1 \sim 5$ を要素に持つ集合として定義したい場合 $A \overset{\text{def}}{=} \{1, 2, 3, 4, 5\}$ と書く。つまり要素を $\{\}$ で囲むことでそれらを要素に持つという意味を表すのである。この記法を外延的記法という。

ついでこの場合 1 は A の要素であるから、これを $1 \in A$ と書く。

また、同じ意味の定義で

$A \overset{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 5\}$ と表すこともできる。この場合は具体的に要素を書き出すことをせずに、

$\{n \in ($ 母体となる集合 $) \mid n$ が満たす条件 $\}$ といった具合に条件を満たすもので集合を定義する記法である。この記法は内包的記法という。

■内包的記法の例

例えば次のように偶数全体の集合として A を定義してみる。

$$A \overset{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists_{m \in \mathbb{Z}}[n = 2m]\}$$

このように存在記号や全称記号を用いた条件で定義されることはよくあるしとても簡潔でわかりやすい。[*1]

以上の記号以外もまとめれば以下。

$x \in X$	$\cdots x$ は X の要素である
$x \notin X$	$\cdots x$ は X の要素でない
$X \subset Y$	$\cdots X$ は Y の部分集合である
$X \not\subset Y$	$\cdots X$ は Y の部分集合でない
$X \cap Y$	$\cdots X$ と Y の共通部分
$X \cup Y$	$\cdots X$ と Y の和集合
$\varnothing$	$\cdots$空集合
$\|A\|, \mathrm{Card}(A)$	$\cdots A$ の要素数・濃度
$A = B$	$\cdots A$ と B は同じ集合
$A \times B$	$\cdots A$ と B の直積・デカルト積
A^n	$\cdots A$ を自身で n 回直積をとったもの

[*2]

*1 他の例として次のようなものがある
開区間 $(a, b) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, 閉区間 $[a, b] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

*2 要素を持たない集合を空集合という。

1.3　集合同士の積

実数に積という演算があるのと同じように集合間にも積の演算がある。それを直積、またはデカルト積という。ここではそれについてみておこう。

1.3.1　直積の定義

$A, B \neq \varnothing$ なる集合に対し、それらの要素 $a \in A, b \in B$ を対にとった集合 (a, b) を直積と定義する。この対には「順序」があるため特に「順序対」という。式で定義すれば以下。

$A \times B \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

直積は「それぞれの要素を対にとった集合」として定義されているので、この演算には一般に交換法則が成立しないことがわかる。

[*3]

■交換法則が成立しない一つの例

$$A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{a, b, c\}, B \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{1, 2\}$$

とする。A と B の直積 $A \times B$ を計算してみよう。

例えば $a \in A, 1 \in B$ であるから求めるべき直積には積の順と同順の順序対 $(a, 1)$ が要素として存在する。

では逆に $B \times A$ の場合は $(1, a)$ が要素として存在する。しかしこの場合 $(a, 1)$ は要素として存在しない。順序対は対の順序を考慮するから $(a, 1) \neq (1, a)$ である。

ゆえに $A \times B = B \times A$ はこの場合成り立たない。

以上のように一般に直積は $A \times B \neq B \times A$ である。

しかし、特例としてこれが成立する場合もある。その例は次のような場合である。

■交換法則が成立する特例

$$A, B \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{1, 2\}$$

とする。ここで $A \times B$ を考えてみると

$$1 \in A, 1 \in B$$

であるから考えている直積には順序対 $(1, 1)$ が要素として存在する。

実際にすべて書き出して計算すると

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

となっている。もしこれをひっくり返したとしても結果は同じである。

よってこの場合 $A \times B = B \times A$ が成立する。

この場合なぜ交換法則が成立するのか考えてみると、直積をとった集合同士が全く同じ要素を持つ集合同士であったことが要因であることがわかる。

(また、自身で直積をとった場合 $A \times A = A^2$ と表し、一般に n 回直積をとった時 A^n と表す。)

ゆえにこれを一般化すると次のように言える。(ただし有限集合の場合に限る)

$$(A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B) \Longleftrightarrow A \times B = B \times A \tag{1.1}$$

これは対偶をとってもわかる通り直積に持っていてほしい特性が論理的に正しく保持されていることも確認できる。

$$(1.1) \Longleftrightarrow (A \times B \neq B \times A \Longleftrightarrow (A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing \wedge A \neq B))$$

1.3.2　直積の要素の個数 (濃度)

直積の要素の個数はどのように求まるか、先ほどの積の交換法則が成立しない例の状況で考えてみよう。

このとき $A \times B$ を計算してみると

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

直積の要素は「順序対」であったからこの場合の要素数は 6 である。

これを一般の集合 (有限集合のとき) の場合にも適用できるように考えてみよう。次のように表にしてみるとわかりやすいだろう。

	a	b	c
1	$(a, 1)$	$(b, 1)$	$(c, 1)$
2	$(a, 2)$	$(b, 2)$	$(c, 2)$

つまり要素数はこの表で順序対が作る長方形の面積のようなものと対応していることがわかる。

よって一般に

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

と表せることがわかる。(ただし有限集合同士の直積の場合のみ)

[*3] 直積をとる集合の片方または両者が空集合の場合順序対の作りようがないためその結果は空集合として定義されている。
$A = \varnothing \vee B = \varnothing$ のとき $A \times B \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varnothing$

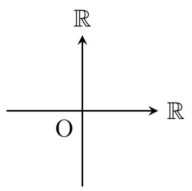
1.4 実数平面や実数空間の表現

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は他の視点から見ると実数の数直線を表す集合と考えられる。

では実数平面や実数空間などは集合を使ってどのように表せるだろうか。ここで次のような直積を考えてみる。

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

これは幾何的に解釈すると、実数の数直線同士を平行でない向きに並べたときにできる平面のすべての点を要素に持つ集合である。それはまさに実数平面のことである。



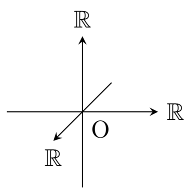
このことを意識して直積を書き直すと

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

と書ける。

同様の議論で実数空間 (3 次元空間) も次のような直積で表せる。

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$



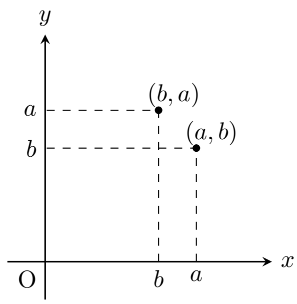
これを用いれば直積の交換法則が不成立な理由も次のように考えて直観的に理解できる。

1.4.1 幾何的に直積の交換法則が不成立であることを確認してみる

ある点 (a, b) を考えてみよう。(ただし $a \neq b$ とする。)

二次元平面上では $a \neq b$ ならば $(a, b) \neq (b, a)$ である。

これは順序対が反転すると幾何的に異なる量へ変化するためである。



すなわちこれは幾何的に順序対が異なるものであることを説明しており、直積の順序で順序対が変化することが異なる量へ変化していることの根拠である。

実際このことは直積 (特に順序対) の定義であった。それに対しこの幾何的説明は、順序対が対の順序を考慮することの合理性を示していると考えられる。

1.5 参考: ユークリッド空間

先ほど $\mathbb{R}$ の直積を積み立てることで $2, 3$ 次元空間を集合で表現することができた。ではここでこれの一般化をしてみよう。

次のように $N \in \mathbb{N}$ 個の直積を考えてみる。

$$\mathbb{R}^N = \{(x_1, x_2, \cdots, x_N) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \cdots, x_N \in \mathbb{R}\}$$

ここに得られた集合 $\mathbb{R}^N$ をユークリッド空間という。

つまり任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して呼ぶので $\mathbb{R}^2$ の 2 次元平面や $\mathbb{R}^3$ の 3 次元空間もユークリッド空間である。

2　写像

前節では集合論の概要を説明した。ついでここでは集合間を関係づける概念、写像についてみておこう。

2.1　写像の定義

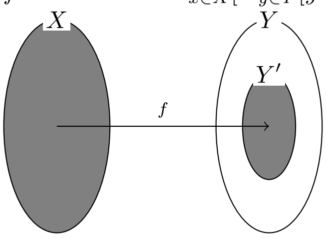
X, Y を空でない集合とする。

任意の $x \in X$ に対し、ある $y \in Y$ が一意に定まるとき、このような対応規則を「X から Y への写像」と呼ぶ。

また X, Y が数を要素とする集合の場合特に関数と呼ぶ。つまり 関数 $\subset$ 写像 である。

簡潔に表現すれば以下。

$$f : X \mapsto Y \overset{\text{def}}{\iff} \forall_{x \in X}[\exists!_{y \in Y}[y = f(x)]]$$



2.2　定義域・値域

$f : X \mapsto Y$ において

$$\begin{cases} X \text{ を } f \text{ の定義域} \\ Y'(\subset Y) \text{ を } f \text{ の値域} \end{cases} \text{という。}$$

値域 R_f の具体的な定義は以下。

$$R_f \overset{\text{def}}{\iff} \{y \in Y \mid \exists_x[x \in X \land y = f(x)]\}$$

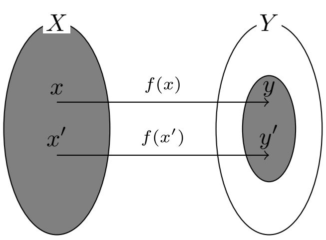
2.3　単射（行先がかぶらない写像）

写像にはいくつか特性が存在する。その特性の一つを有する写像が単射と呼ばれるものである。

$f : X \mapsto Y$ が単射であるとは、任意の $x, x' \in X$ に対して「$x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$」が成立することである。

つまり簡潔に表せば以下。

$$\begin{aligned} f : X \mapsto Y\text{が単射} &\overset{\text{def}}{\iff} \forall_{x,x' \in X}[x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')] \\ &\iff \forall_{x,x' \in X}[f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'] \end{aligned}$$



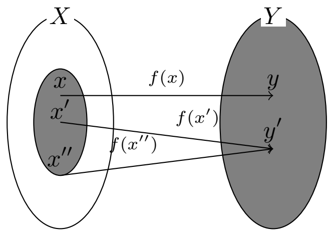
2.4　全射

写像の特使の一つを有するものを単射と言った。他にも全射と呼ばれるものもある。

$f : X \mapsto Y$ が全射であるとは、任意の $y \in Y$ に対して、ある $x \in X$ が存在し $f(x) = y$ となることである。

つまり簡潔に表せば以下。

$$f : X \mapsto Y\text{が全射} \overset{\text{def}}{\iff} \forall_{y \in Y}[\exists_{x \in X}[f(x) = y]]$$



2.5　全単射（1 対 1 対応、変換）

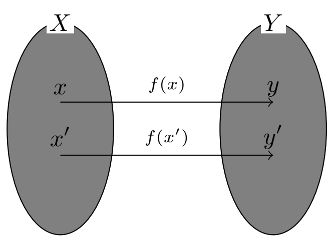
既に写像の特性を持つものを 2 つ紹介したが、これらの特性を同時に有するものも存在する。それを全単射といい、単射と全射それぞれの定義から成る合成命題で定義される。

$f : X \mapsto Y$ が全単射であるとは、f が単射かつ全射であるときをいう。

また、定義域と値域が等しいことよりこの対応を 1 対 1 対応とも呼び、さらに互いの集合間をすべての要素が行き来できることより変換とも呼ぶ。(ただし変換に関しては必ずしも 1 対 1 対応でなくてもよい。)

つまり簡潔に表せば以下。

$$\begin{aligned} f : X \mapsto Y\text{が全単射} \overset{\text{def}}{\iff} &\forall_{x,x' \in X}[f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'] \\ &\land \forall_{y \in Y}[\exists_{x \in X}[f(x) = y]] \end{aligned}$$



3　対称式

対称式とは変数を入れ替えても形が変わらない多項式のことである。まず多項式がどんなものか確認して、次に対称式の性質や対称式の基本定理について議論しよう。

3.1　多項式・整式の定義

多項式 (整式) とは「数」と「変数」を和と積によって作られる (線形結合[*4]と言ったりする) 式のことである。

たとえば $3x^3+5x^2-x+10$ は x を変数とする多項式である。また、多項式は変数を複数持つ場合も言う。

変数が 1 つの場合の多項式の一般形を書くと

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0(=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k)$$

ここに各々の x_k において a_kx^k のようにして積で結ばれる。この積で結ばれた塊を項と呼び、a_k を x^k の係数と呼ぶ。特に 0 次の項を定数項と呼ぶ。

また、一般には和を持たない多項式 (例えば $4x^2$ など) も存在し、それらを単項式と呼ぶ。

ゆえに 単項式 $\subset$ 多項式 $=$ 整式 である。

3.1.1　多項式・整式でないもの

紛らわしいものに次のようなものがある。

$$\cdot\frac{1}{x}=x^{-1}$$
$$\cdot x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$$
$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots$$

これらはすべて多項式・整式ではない。(ゆえに単項式でもない)

これらは x 上から順に「有利式・分数式」、(名前なし)、「級数」という。

3.2　対称式の定義

先に述べたように対称式とは変数を入れ替えても変わらない多項式のことである。例えば次のような 2 変数の多項式のようなものをいう。

$$f(x,y)\coloneqq x^2+xy+y^2$$

この式で x,y を入れ替えてみても次の通り

$$\begin{aligned}f(y,x)&=y^2+yx+x^2\\&=f(x,y)\end{aligned}$$

これらは全く同じ多項式である。

今見たものは 2 変数のものであったが、さらには例として次のような n 変数の対称式を考えられる。

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\coloneqq\sum_{k=1}^{n}x_k^7$$

これも任意の $x_k(1\leq k\leq n)$ を任意の分だけ入れ変えてもすべての場合で同じ多項式となる。

例えば x_2 と x_n を入れ替えてみても

$$\begin{aligned}f(x_1,x_n,\cdots,x_2)&=x_1^7+x_n^7+\sum_{k=3}^{n-1}x_k^7+x_2^7\\&=x_1^7+x_2^7+\sum_{k=3}^{n-1}x_k^7+x_n^7\\&=\sum_{k=1}^{n}x_k^7\\&=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

のように成立する。

[*4] 線形結合の具体的な定義は「体 $\mathbb{F}$ 上の線形空間 $\boldsymbol{V}$ に対する $\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\cdots,\boldsymbol{v_n}\in\boldsymbol{V}$ の線形結合とは $c_1\boldsymbol{v_1}+c_2\boldsymbol{v_2}+\cdots+c_n\boldsymbol{v_n}(c_1,c_2,\cdots,c_n\in\mathbb{F})$ で表されるベクトルのこと」

3.3 基本対称式の定義

基本対称式とは n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ らを要素にもつ集合 X、つまり $X \coloneqq \{x_k \mid k \in \mathbb{N} \land 1 \leq k \leq n\}$ なる集合 X から $1 \leq k \leq n$ を満たす異なる k 個の変数を掛け合わせたものをすべての場合で作り、それらの和をとってできる対称式のことをいう。この基本対称式は後に議論する「対称式の基本定理」に登場し、対称式に関してとても重要な役割を果たすため天から降ってきたようなやり方だがここでとりあえず定義しておく。

この k 個の変数の場合の基本対称式を $\sigma_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とすると以下すべてが該当する。

$$
\begin{cases}
\begin{aligned}
\sigma_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \\
\sigma_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= x_1x_2 + x_1x_3 + \\
&\quad \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \\
&\quad \cdots + x_{n-1}x_n \\
&= \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=2}^{n} x_{k_1}x_{k_2} \\
\sigma_3(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \\
&\quad \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n \\
&= \sum_{k_1=1}^{n-2} \sum_{k_2=2}^{n-1} \sum_{k_3=3}^{n} x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3} \\
&= \sum_{k_1=1}^{n-2} \sum_{k_2=2}^{n-1} \sum_{k_3=3}^{n} \prod_{m=1}^{3} x_{k_m} \\
&\vdots \\
\sigma_l(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \sum_{k_1=1}^{n-l+1} \cdots \sum_{k_{l-1}=l-1}^{n-1} \sum_{k_l=l}^{n} \prod_{m=1}^{l} x_{k_m} \\
&\vdots \\
\sigma_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= x_1x_2x_3 \cdots x_n \\
&= \prod_{k=1}^{n} x_k
\end{aligned}
\end{cases}
$$

3.3.1 基本対称式の具体例

これだけ見てもピンとこないだろうから簡単に $n = 2, 3$ の場合を見てみよう。

■具体例 1

$n = 2$ の場合対称式の説明をしたときと照らせ合わせるように $x_1 = x, x_2 = y$ とすると

$$
\begin{cases}
\sigma_1(x, y) = x + y \\
\sigma_2(x, y) = xy
\end{cases}
$$

確かにこれらは対称式である。

類似: 2 次方程式の解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0 (\Longleftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0)$ の 2 解を $x = \alpha, \beta$ としたとき、解と係数の関係として

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \land \alpha\beta = \frac{c}{a} \Longleftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

が成立する。

■具体例 2

次に $n = 3$ の場合も同様に $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ として

$$
\begin{cases}
\sigma_1(x, y, z) = x + y + z \\
\sigma_2(x, y, z) = xy + yz + zx \\
\sigma_3(x, y, z) = xyz
\end{cases}
$$

これも対称式であることが確認できた。

類似: 3 次方程式の解と係数の関係

3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (\Longleftrightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0)$

の 3 解を $x = \alpha, \beta, \gamma$ としたとき、解と係数の関係として

$$
\begin{aligned}
&\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \land \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} \land \alpha\beta\gamma = \frac{d}{a} \\
&\quad \Longleftrightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0
\end{aligned}
$$

が成立する。

3.4 類似: 解と係数の関係と対称式

具体例 1, 2 の類似で見たように、2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 解を $x = \alpha, \beta$ としたとき

$$
\begin{cases}
\sigma_1(\alpha, \beta) = -\frac{b}{a} \\
\sigma_2(\alpha, \beta) = \frac{c}{a}
\end{cases}
$$

同様に 3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の 3 解を $x = \alpha, \beta, \gamma$ としたとき

$$
\begin{cases}
\sigma_1(\alpha, \beta, \gamma) = -\frac{b}{a} \\
\sigma_2(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{c}{a} \\
\sigma_3(\alpha, \beta, \gamma) = -\frac{d}{a}
\end{cases}
$$

これを一般化すれば $n (\in \mathbb{N}\ )$ 次方程式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$ の n 解を $x = x_1, x_2, \cdots, x_n$ とするとき

$$
\begin{cases}
\sigma_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\
\sigma_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\
\vdots \\
\sigma_k(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n} \\
\vdots \\
\sigma_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

が言える。

3.5 多項式の辞書式順序の定義

単項式 X, Y を

$$
\begin{cases}
X \coloneqq Ax_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n} = A\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k^{p_k} \\
Y \coloneqq Bx_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n} = B\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k^{q_k}
\end{cases}
$$

と定義する。このとき次のような並べ方を辞書式順序と定義する。

> X は Y より強い (Y は X より弱い)
>
> $$
> \overset{\text{def}}{\iff}
> \begin{cases}
> p_1 > q_1 \\
> p_1 = q_1 \wedge p_2 > q_2 \\
> p_1 = q_1 \wedge p_2 = q_2 \wedge p_3 > q_3 \\
> \vdots \\
> p_1 = q_1 \wedge p_2 = q_2 \wedge \\
> \quad \cdots \wedge p_{n-1} = q_{n-1} \wedge p_n > q_n
> \end{cases}
> $$

*5

具体的には、多項式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n), g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ において

$$
f \text{ が } g \text{ より強い} \iff \begin{matrix} f \text{ の項のうち最も強い項が} \\ g \text{ の項のうち最も強い項より強い} \end{matrix}
$$

3.6 対称式の基本定理

対称式には次のような定理がある。

> $x_1, x_2, \cdots, x_n$ についての対称式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ は基本対称式$\sigma_1, \sigma 2, \cdots, \sigma_n$ に関する多項式 $g(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ として一意に表せる。

3.6.1 対称式の基本定理を利用した具体例

例えば x, y に関する対称式 x^2+y^2 は

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \\
&= \sigma_1^2 - 2\sigma_2
\end{aligned}
$$

また、$\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$ の場合も

$$
\begin{aligned}
\frac{y}{x} + \frac{x}{y} &= \frac{x^2+y^2}{xy} \\
&= \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} \\
&= \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_2}{\sigma_2}
\end{aligned}
$$

と基本対称式で一意に表せた。

3.6.2 対称式の基本定理の証明

任意の対称式が基本対称式で一意に表せるのはなぜか。証明してみよう。

対称式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ に関して先ほど定義した辞書式順序的に最も強い項を

$$
Ax_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{3.2}
$$

とおく。辞書式順序の強弱の定義より

$$
p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n
$$

である。また、n 個の x に関する基本対称式を $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ として

$$
\begin{aligned}
g_1(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n) &\coloneqq A\sigma_1^{p_1-p_2}\sigma_2^{p_2-p_3}\cdots\sigma_n^{p_n} \\
&= A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{p_1-p_2} \left(\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n} x_i x_j\right)^{p_2-p_3} \\
&\qquad \cdots (x_1x_2\cdots x_n)^{p_n}
\end{aligned}
$$

のようにして基本対称式より作られる対称式 g_1 を定義する。

---

*5 $\begin{cases} P_1(x) \\ P_2(x) \end{cases}$ は $P_1(x) \vee P_2(x)$ の意味

今、f と g_1 を独立に定義した。ただ、どちらも $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する対称式として定義しているので両者とも最も強い項は (3.2) と表される項である。

ゆえに

$$f_1 \coloneqq f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - g_1(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) \tag{3.3}$$

とすれば f より弱い対称式 f_1 が定義できる。

次に f_1 の最強の項について同様の操作をする。先ほど f に対する対称式 g_1 を定義したときと同様に今度は f_1 に対する対称式 g_2 を定義して

$$f_2 \coloneqq f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) - g_2(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$$

のようにすることで f_1 より弱い対称式 f_2 を定義する。

これを繰り返してゆくと一般に $n (\in \mathbb{N})$ に対して f_n は弱くなる、つまり $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \cdots$ となってゆくので最終的に f のすべての項を g_m の和で表せる。$(m \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}
(3.3) \iff f &= g_1(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) + f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&= g_1(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) + g_2(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) \\
&\qquad + f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&\vdots \\
&= g_1(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) + g_2(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) + \\
&\qquad \cdots + g_m(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)
\end{aligned}$$

これにて一般に $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する対称式 f が同対象に関する基本対称式のみで表せることが示されたが、基本対称式が一意に定まるか否かについての証明をしていないので、次にそれを示そう。

f を基本対称式より作られる対称式が複数あると仮定、つまり

$$\exists_{g,g'} \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) \\ f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g'(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) \end{cases} \\ g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq g'(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{array} \right. \tag{3.4}$$

を仮定する。

ここで

$$\begin{aligned}
h(x_1, x_2, \cdots, x_n) \coloneqq\, & g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
& - g'(x_1, x_2, \cdots, x_n)
\end{aligned}$$

と置くと仮定より

$$\begin{cases} h(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0 & (3.5) \\ h(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) = 0 & (3.6) \end{cases}$$

である。

一方で次のような ω の n 次方程式

$$\omega^n - x_1\omega^{n-1} + x_2\omega^{n-2} - \cdots + (-1)^n x_n = 0$$

の解を $\omega = \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ とすると解と係数の関係より

$$\begin{cases} \sigma_1(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) = x_1 \\ \sigma_2(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) = x_2 \\ \vdots \\ \sigma_n(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) = x_n \end{cases}$$

$$(\because (3.1))$$

これを (3.6) に代入すると

$$h(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) = h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

となり、これは $(3.5) \land (3.6)$ に反する。

よって仮定 (3.4) が誤りで f を基本対称式で表す式は一意に定まる。$Q.E.D$