向量

向量的本质：线性空间中的**运动**
向量的**加法**：多次运动的累积
向量的**数乘**：标量用于缩放向量

线性组合、张成的空间和基

向量的**线性组合**：$a\vec{u}+b\vec{v}$，即多个**向量数乘之和**

如果固定a，改变b，那么会得到一条直线与 $\vec{v}$ 平行

若随机改变a,b，那么会有三种情况：

- $\vec{v},\vec{w}=0$：原点；
- $\vec{v}=k*\vec{w}(k\neq 0)$，即两个向量共线：张成一条直线；
- $\vec{v},\vec{w}$不共线：**张成一个二维空间**

在**三维**情况下：

$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$： （$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$均是三维向量）

如果这三个向量**不共面**，当 c 变化时：$a\vec{u}+b\vec{v}$ 张成的平面垂直于 $\vec{w}$ 来回移动，覆盖整个空间

线性相关与线性无关

对于多个向量的线性组合，$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$

如果其中存在任意一个向量可以被其他向量的线性组合表示，即 $\vec{w}=m\vec{u}+n\vec{v}$，

即 $\vec{w}$ 已经落在了 其他向量张成的空间中，

即**这里的 $\vec{w}$ 对张成的空间没有做出任何贡献**，即使将其删除也不会影响张成的空间，

此时我们称这一组向量是**线性相关**的

相反，如果一组向量中的所有向量都给空间增加了新的维度，则我们称这一组向量是**线性无关**的

最后，我们可以得到定义：

向量空间的一组基是张成该空间的一个线性无关的向量集

矩阵与线性变换

矩阵如同空间中的线性变换

线性变换：保持网格平行且等距分布的变换

- 原点位置不变
- 直线在变换后仍然保持为直线，不能弯曲

$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$,

线性变换本质上是坐标基 $\vec{i}$和$\vec{j}$ 在空间中的位置发生了变换，但是变换后 a, b 保持不变

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$
$$\text{即} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

在发生了线性变换后，$\vec{i} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$，$\vec{j} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$

则

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x\prime \\ y\prime \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

由此可见，**矩阵的本质就是一个空间中的线性变换**，

例如：逆时针旋转 $90°$: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

沿着X轴方向错切：$\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，（$\vec{i}$不变，$\vec{j}$沿着$x$轴方向移动了$m$个单位)

特殊的，如果**变换后的$\vec{i}, \vec{j}$共线**，即矩阵内的向量线性相关，则经过线性变化，**二维平面会坍缩到一维直线**

矩阵乘法和线性复合的联系

有两个矩$M_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$，

则$M_2 * M_1$的本质是先对空间进行 M_1 变换，然后进行 M_2变换，

经过了 M_1 变换，$\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

再经过 M_2 变换，$\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$,即分别对$M_1$变换后的 $\vec{i}, \vec{j}$ 执行了 M_2 变换，

其中

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e \\ g \end{bmatrix} = e * \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + g * \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg \\ ce + dg \end{bmatrix}$$
$$\vec{j} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f \\ h \end{bmatrix} = f * \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + h * \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} af + bh \\ cf + dh \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} \end{bmatrix} = \vec{M_2} * \vec{M_1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

由此可见，矩阵乘法的本质是**线性复合变换**，或者说是从右向左多个线性变换的叠加

矩阵乘法**不满足交换律**：

$$M_2 * M_1 \neq M_1 * M_2$$

线性变换的顺序改变，会引起结果的改变，例如：

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\text{逆时针旋转} 90^\circ)$$
$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (\text{沿} x \text{轴正方向错切})$$

则

$$M_1 * M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{（先错切后旋转）}$$
$$M_2 * M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{（先旋转后错切）}$$
$$M_1 * M_2 \neq M_2 * M_1$$

矩阵乘法**满足结合律**：

$$(A * B) * C = A * (B * C)$$

因为这两个都是先进行 C 变换，然后进行 B 变换，最后进行 A 变换

行列式

线性变换会对空间产生拉伸或者挤压，

在**二维空间**中，即测量一个**图形面积在变换后的变换比例**

一个矩阵可以表示单位二维空间在经过线性变换后的**单位方格。**

线性变换作用于标准基向量 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$，从而改变单位方格的形状和大小。通过这种变换，原本的单位方格可能会被拉伸、缩放、旋转或剪切，形成一个新的平行四边形。

而这个矩阵对应的**行列式**即为**单位方格面积的缩放比例**

特殊的，如果$det(M) = 0$，则表示一个二维平面被压缩为了一条直线或者一个点，平面上所有图形的面积都变成了 0

即表示：检查一个矩阵的行列式是否为0，即可检查该线性变换可否将空间的维度降低；

如果$det(M) < 0$ ，即表示一个二维空间的**空间定向**发生了改变，就是平面发生了**翻转** 。

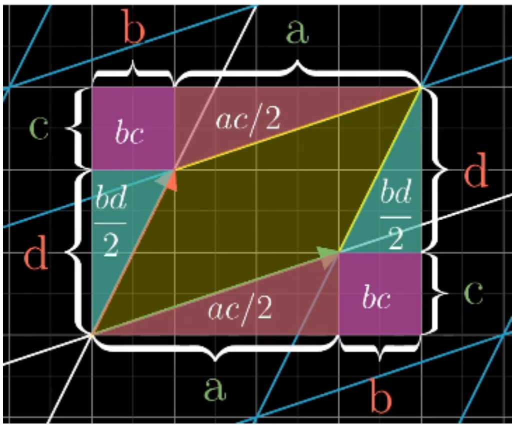
三维空间中，行列式即为**体积的缩放比例**

如果$det(M) = 0$ ，则表示一个三维空间被压缩为了二维平面或者直线或者一个点

所以：**如果一个矩阵的行列式为0，那么它必然是线性相关的**

如果$det(M) < 0$ ，则表示这个三维空间定向发生了改变：常规的三维空间可以通过右手定则表示出来，但是定向改变后只有左手可以做到了

行列式公式推导:



$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$det(M) = (a+b)*(c+d) - ac - bd - 2bc = ad - bc$$

三维空间中:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$det(M) = a*det(\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix}) - b*det(\begin{bmatrix} d & g \\ f & i \end{bmatrix}) + c*det(\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix})$$

这个其实是**拉普拉斯展开式**的三维形式:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

一个重要的结论:

两个线性变换连续作用所得到空间区域缩放比例 $=$ 这两个线性变换依次作用后所得到缩放比例的乘积

$$det(M_1M_2) = det(M_1) * det(M_2)$$

逆矩阵、列空间、秩和零空间

(只有方阵才有逆矩阵)(非方阵没有逆矩阵,但存在列空间、秩和零空间。)

线性方程组对应一个矩阵向量乘法

$$A\vec{x}=\vec{b} \iff \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$\text{其中}A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\vec{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

所以解方程组的实质就是寻找一个 $\vec{x}$ 使其经过 A 的线性变换后，与 $\vec{b}$ 重合；

- 当 $det(A)\neq 0$ 时，空间没有被挤压为零面积，此时有且仅有一个向量在变换后与 $\vec{b}$ 重合，可以通过逆变换得到解，即 $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$；
- 当 $det(A)=0$ 时，A 不存在逆变换（A^{-1}不存在）， 空间会被降维，此时有两种情况：
  - 当 $\vec{b}$ 落在 **被降维后的空间内**（例如：一个标准二维空间被降维到了一条直线上，而 $\vec{v}$ 在这条直线上），则有无数个解；（无数个高维向量对应一个低维向量）
  - 当 $\vec{b}$ 没有落在 **被降维后的空间内**（例如：一个标准二维空间被降维到了一条直线上，而 $\vec{v}$ 不在这条直线上），则无解；

矩阵的秩：变换后空间的维数

列空间：矩阵的列向量张成的空间

对于一个**非满秩**的矩阵，意味着无数个**高维向量被压缩到零向量**， 例如三维空间压缩到一个平面时，有**一条直线**压缩到了原点；三维空间压缩为一条直线时，有**一个平面**被压缩到了原点；

零空间（核）：变换后落在原点的向量的集合构成的空间；

当 $\vec{b}=\vec{0}$ 时，零空间即为方程组的解

非方阵 不同维度空间之间的线性变换

3×2 矩阵：列空间是三维空间中过原点的一个二维平面；

几何意义是将一个二维空间映射到三维空间上

2×3 矩阵：几何意义是将一个三维空间映射到一个二维平面上；

点积与对偶性

点积的几何意义： $\vec{v}\cdot\vec{w}=\|\vec{v}\|*\|\vec{w}\|*cos\theta$ ，将$\vec{v}$ 投影到 $\vec{w}$ 上，然后两者的长度相乘；

对于一个单位向量 $\vec{u}=\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$ ，将 $\vec{i}$ 投影到 $\vec{u}$ 上的坐标为 x ，将 $\vec{j}$ 投影到 $\vec{u}$ 上的坐标为 y ，即 $[\vec{i} \quad \vec{j}]$ 投影后变换为了 $[u_x \quad u_y]$；

向量也可以理解为一种线性运算：

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v}^{\mathrm{T}} * \vec{w}$$

即两个向量进行点积运算时，其中一个向量可以看做一种线性变换：将一个高维向量映射为一维直线上的一个点；

特殊的，当 $||\vec{v}|| = 1$ 时，这里的 $\vec{v}$ 即为**投影变换**；

综上，点积可以看为：将一个高维向量 $\vec{v}$ 在 $\vec{w}$ 上投影，然后乘 $\vec{w}$ 长度。

叉积

$\vec{p} = \vec{v} \times \vec{w}$,其中 $\vec{p}$ 的大小为 $\vec{v}$ **和** $\vec{w}$ **张成的平行四边形的面积**，方向由右手螺旋定则确定；

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = det\left(\begin{bmatrix} \vec{i} & v_1 & w_1 \\ \vec{j} & v_2 & w_2 \\ \vec{k} & v_3 & w_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_3w_1 \end{bmatrix}$$

定义一个线性变换（满足加法封闭性和数乘封闭性（根据拉普拉斯展开式证明））：

$$f(\vec{x}) = det([\vec{x} \quad \vec{v} \quad \vec{w}]) = det\left(\begin{bmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{bmatrix}\right)$$

即求变量 $\vec{x}$ 和常量 $\vec{v}, \vec{w}$ 组成的平行六面体的体积：

$$\vec{v}, \vec{w}\text{组成的平行四边形}\mathcal{P}(\vec{v}, \vec{w})\text{的面积} \quad * \quad \vec{x}\text{在}\mathcal{P}\text{上的高}$$

而这样的几何意义恰好与点乘的定义有相似之处，于是我们可以构造出一个向量 $\vec{p}$ （长度= $\mathcal{P}(\vec{v}, \vec{w})$ 的面积，方向恰好与其垂直且满足右手定则），于是：

$$f(\vec{x}) = \vec{p} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = det\left(\begin{bmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{bmatrix}\right)$$

求得：

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_3w_1 \end{bmatrix}$$

于是我们便称：$\vec{p} = \vec{v} \times \vec{w}$

$\vec{p}$：与任意的 $\vec{x}$ 点乘，得到的值 $=\vec{x}$ 和常量 $\vec{v}, \vec{w}$ 组成的平行六面体的体积

基变换

不同人的视角下的坐标系不同，即选取的基向量不同；

假设我们甲的默认视角下的基是 $\vec{i}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$和$\vec{j}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,而乙的则是 $\vec{x}$和$\vec{y}$, 那么对于同一个向量 $\vec{u}$，在乙的视角下的坐标和甲的视角下的坐标是不同的，如何对 $\vec{u}$ 进行坐标视角的转换呢：**基变换**。

假设我们甲视角下的 $\vec{x}$和$\vec{y}$ 的坐标为：$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$，即矩阵 $P=\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{bmatrix}$，

且 $\vec{u}$ 在乙视角下的坐标为 $\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$，

则该向量 $\vec{u}$ 在甲视角下的坐标为 $\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$,即 $P\vec{u}$，

这里的 P 起到了将同一个向量的坐标从乙的视角到甲的视角的转换 。

那么如果 $\vec{u}$ 在甲视角下的坐标为 $\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$，如何转换到乙视角呢：$P^{-1}\vec{u}$；

综上：

P 将乙基下的坐标转换为甲基下的坐标；

P^{-1} 则执行相反的操作，即将甲基下的坐标转换为乙基下的坐标。

通常将这里的 P^{-1} **称为基变换矩阵**

对于同一个线性变换，如何求他在不同坐标基下面的矩阵呢？

假设空间中有任意向量 $\vec{u}$，需要对其进行线性变换 M （矩阵的坐标是甲空间或标准空间中定义的），已知$\vec{u}$ 在乙空间中的坐标，如何求得经过甲空间中的线性变换 M 后的坐标：

首先将其坐标转换为甲空间中的坐标： $P\vec{u}$，

然后进行线性变换：$MP\vec{u}$，

最后再将甲空间中的坐标转换为乙空间中的坐标：$P^{-1}MP\vec{u}$，

所以对于标准坐标系下的线性变换 M，在以 P 为基的坐标系下的表示方式为：

$$P^{-1}MP$$

对于标准坐标系下的线性变换 M，在以基 P 表示的坐标系下，它的矩阵形式就是 $P^{-1}MP$ 。

这个过程叫做**相似变换**，**在不同基下对同一个线性变换进行了重新表示。**

特征向量与特征值

对于线性空间中的任意向量 $\vec{u}$，经过线性变换 A，大部分情况下都会发生一定程度的旋转，即偏离自己原来所在的直线；

但是有一部分向量在变换后仍然在原来的直线上，只是长度发生了改变，即：

$$A\vec{u}=\lambda\vec{u}$$

这里的 $\vec{u}$ 即称为 A 的特征向量，λ 即为对应的特征值（长度变化的比例）

例如 $\lambda = -\frac{1}{2}$ 时，即特征向量经过 A 变换后，反向且长度变为原来的 $\frac{1}{2}$.
考虑三维空间中的旋转变换，如果找到了旋转矩阵的特征向量，即为：找到了线性变换的旋转轴。

下面进行公式推导：

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} = \lambda E\vec{u}$$
$$(A - \lambda E)\vec{u} = \vec{0}$$
$$\text{即}\vec{u}\text{经过}(A - \lambda E)\text{的线性变换后变为了}\vec{0}$$
$$\text{已知：当且仅当}(A - \lambda E)\text{对空间进行降维时才存在非}0\text{向量}\vec{u}\text{使得上式成立}$$
$$\text{所以：}A - \lambda E\text{一定对空间进行了降维压缩，即}A - \lambda E\text{的秩一定小于}n\text{，}$$
$$\text{即}det(A - \lambda E) = 0$$

即我们需要寻找一个 λ 使得 $det(A - \lambda E) = det\left(\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$，在

二维空间中，不是所有的线性变换都有特征向量，例如旋转：所有向量都偏离了自己原来所在直线。

一个特征值可能有多个特征向量，例如 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，只有一个特征值2，但其实平面上所有向量都是特征向量。

特征基

对于**对角矩阵**，他的每一个基向量都是特征向量，且对角线上的元素就是特征值。

对角矩阵的性质：

$$A^n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_{11}^n & 0 \\ 0 & a_{22}^n \end{bmatrix}$$

如果任意一个方阵 A 有 n 个特征向量，可以张成整个空间，

那么我们可以变换坐标系，使得这些特征向量成为坐标基，得到对角矩阵 D ，

$$D = P^{-1}AP,$$
$$P\text{即为特征向量构成的变换矩阵}$$

这里的 D 一定是对角矩阵，因为在特征基的坐标系中，对于线性变换 A ，两个基向量只是进行了缩放。

D 的对角线上即为特征值。

则此时求 A^n:

先求A的特征向量和特征值，得到特征基矩阵P、新坐标下线性变换A对应的对角矩阵D

对于空间中任意的$\vec{u}$，求进行A^n线性变换后的向量：

先将其放到以特征向量为基的P空间中，$P^{-1}\vec{u}$

然后进行n次线性变换D，$D^nP^{-1}\vec{u}$，

最后回到原空间：$PD^nP^{-1}\vec{u}$,

$$A^n\vec{u} = PD^nP^{-1}\vec{u}$$

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

并不是所有线性变换都可以这样，例如错切矩阵，只有一个特征向量，无法张成整个空间，就无法进行上述操作。

抽象向量空间

对于一个变换 L ，如果满足：

- $L(\vec{v}+\vec{w}) = L(\vec{v}) + L(\vec{w})$ ：**加法封闭性**
- $L(c\vec{v}) = cL(\vec{v})$ ：**数乘封闭性**

则称 L 就是线性变换。

线性变换类似于线性算子（也满足加法封闭性和乘法封闭性）：

常见的线性算子有：

- 梯度算子：

  一个向量运算符，将一个标量函数的每个变量的偏导数组合成一个向量，表示函数在各个方向的变化率，

  $$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

- 拉普拉斯算子：

  $$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f$$

- 微分算子：

  通常是一阶或高阶导数运算，可以作用于一个函数的一个变量。微分算子可以是偏导数算子（例如 $\frac{\partial}{\partial x}$ ），表示在某一特定方向的变化，

  $$D_x f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad D_y f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

  在**多项式函数空间**中，微分算子可以用矩阵的线性变换表示：

微分算子$D = \frac{d}{dx}$是一个线性算子，作用于多项式上，可以用一个矩阵来表示。

具体地，我们需要找到微分算子作用于基向量$[1, x, x^2]$时的结果：

$$\frac{d}{dx}(1) = 0$$
$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$
$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

用矩阵表示，这个变换可以写成一个矩阵D，其作用方式为：

$$D \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

因此，微分算子D在这个多项式空间中的矩阵表示为：

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于任意阶的多项式空间，微分算子的矩阵表示可以推广到更高维度。例如，若考虑多项式空间

$$V = \text{span}\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

微分算子的矩阵表示为一个$(n+1) \times (n+1)$的上三角矩阵，其主对角线上方的元素为各阶导数系

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

如果希望将理论适用于一个向量空间，则需要满足8条公理：

1. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
2. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
3. 存在零向量$\vec{0}$使得对于任意$\vec{u}$，有$\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
4. 对于每一个向量$\vec{v}$都有一个$-\vec{v}$，使得$-\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$
5. $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$
6. $1\vec{v} = \vec{v}$
7. $a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$
8. $(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$