有限元方法 2025 秋冬作业五

曾申昊 3220100701 *

电子科学与技术 *2202*，浙江大学

更新时间: 2025 年 11 月 22 日

1. $\mathcal{P}_3$ 有限元空间的构造与编程

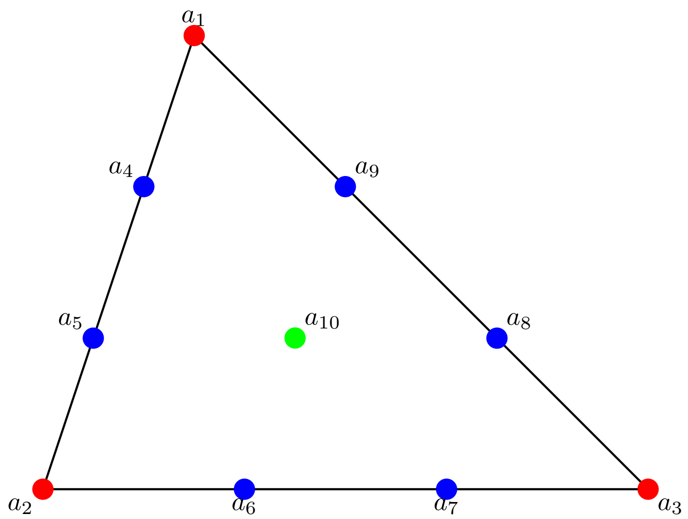


图 1: $\mathcal{P}_3$ 有限元空间单位三角形

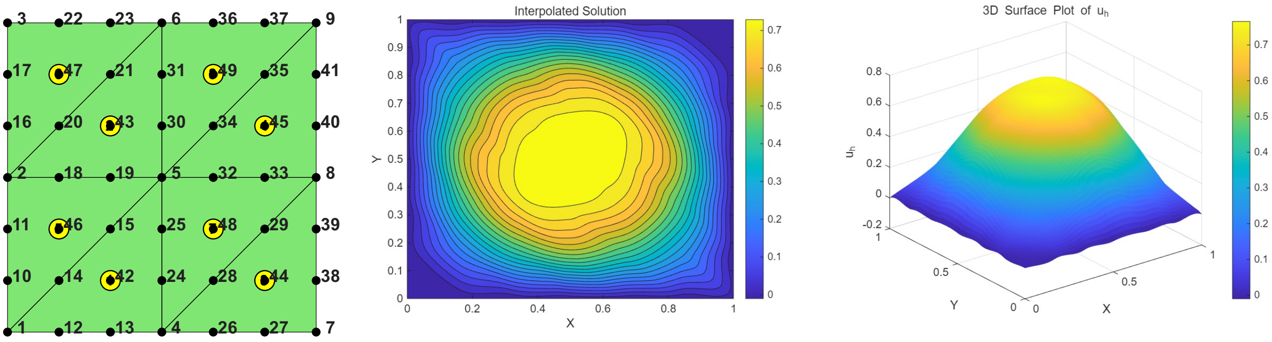
(a) 对于 $\mathcal{P}_3$ 有限元空间，可以将点分为顶点、边上三等分点和内部点三种，如图 1 所示。对于顶点，以 a_1 为例进行计算，由几何关系可由 $\mathcal{P}_1$ 空间的基函数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 构造出满足约束条件的基函数

$$\psi_1 = c\lambda_1(3\lambda_1 - 1)(3\lambda_1 - 2) \tag{1}$$

代入约束条件 $\psi_1(a_1) = 1$，解得 $c = \frac{1}{2}$，利用同样的思路可以得到

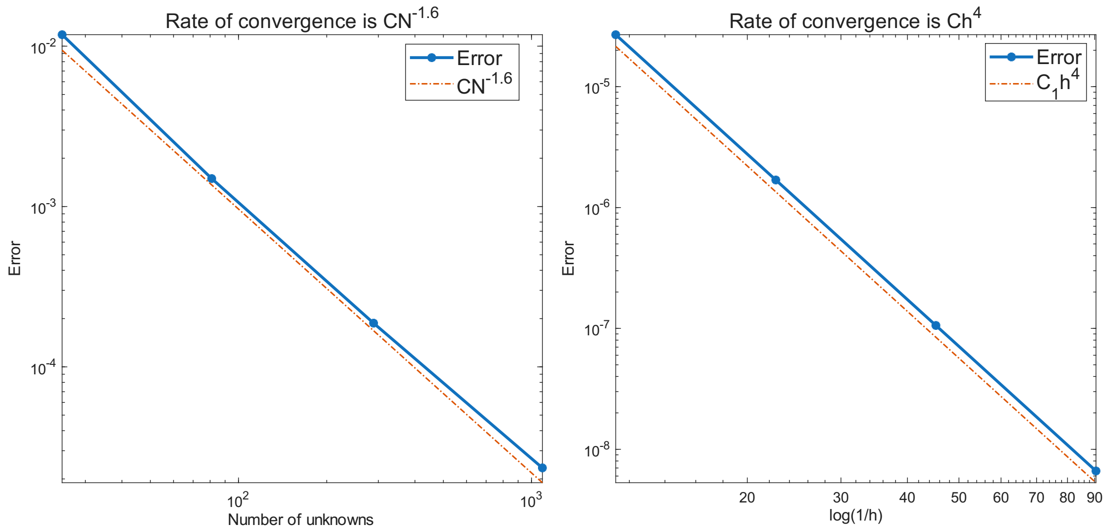
$$\begin{cases} \psi_i = \dfrac{1}{2}\lambda_1(3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2) \qquad i = 1, 2, 3 \\ \psi_4 = 9\lambda_1\lambda_2(3\lambda_1 - 1) \\ \quad\vdots \\ \psi_9 = 9\lambda_1\lambda_3(3\lambda_1 - 1) \\ \psi_{10} = 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{cases} \tag{2}$$

*邮箱: 3097714673@qq.com 或 3220100701@zju.edu.cn



(a) 网格 (b) 云图 (c) 三维图

图 2: $h = 0.5$ 时有限元解的图像



(a) H^1 范数下的误差 (b) L^2 范数下的误差

图 3: $h = 0.5$ 时有限元解的误差

(b) 显然 dim V_h 对应了基函数的个数，每个顶点对应一个基函数，每条边对应两个基函数，内部对应一个基函数，因此

$$\dim\ V_h = \#\mathcal{N}_h^I + 2\#\mathcal{E}_h^I + \#\mathcal{T}_h \tag{3}$$

V_h 的一组基函数已经在 (a) 小问中给出。

(c) $\mathcal{P}_3$ 有限元程序的结果如图 2 和图 3 所示。

2. Hermite 有限元空间的构造与分析

(a) 根据 Hermite 有限元空间定义

$$V_h = \{v \in C^1(0,1) : v\big|_{(x_i, x_{i+1})} \in \mathcal{P}_3(K),\ i = 0, 1, \cdots, N\} \tag{4}$$

考虑区间 (x_i,x_{i+1}) 上的插值算子 $\phi_i\in\mathcal{P}_3$，其基函数 $\{H_{i,1},H_{i,2},H_{i,3},H_{i,4}\}$ 满足的约束为

$$\begin{cases}H_{i,1}(x_i)=1\\H'_{i,1}(x_i)=0\\H_{i,1}(x_{i+1})=0\\H'_{i,1}(x_{i+1})=0\end{cases}\quad\begin{cases}H_{i,2}(x_i)=0\\H'_{i,2}(x_i)=1\\H_{i,2}(x_{i+1})=0\\H'_{i,2}(x_{i+1})=0\end{cases}\quad\begin{cases}H_{i,3}(x_i)=0\\H'_{i,3}(x_i)=0\\H_{i,3}(x_{i+1})=1\\H'_{i,3}(x_{i+1})=0\end{cases}\quad\begin{cases}H_{i,4}(x_i)=0\\H'_{i,4}(x_i)=0\\H_{i,4}(x_{i+1})=0\\H'_{i,4}(x_{i+1})=1\end{cases}\tag{5}$$

以 $H_{i,1}$ 为例进行计算，由于 $H_{i,1}(x_{i+1})=H'_{i,1}(x_{i+1})=0$，设 $H_{i,1}=(x-x_{i+1})^2(\alpha x+\beta)$，代入约束方程得到

$$\begin{cases}(x_i-x_{i+1})^2(\alpha x_i+\beta)=1\\2(x_i-x_{i+1})(\alpha x_i+\beta)+(x_i-x_{i+1})^2\alpha=0\end{cases}\tag{6}$$

解得

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{2}{h_i^3}\\\beta=-\dfrac{x_{i+1}+x_i}{h_i^3}\end{cases}\qquad\text{其中 } h_i=x_{i+1}-x_i\tag{7}$$

对其他基函数进行类似计算，整理得到

$$\begin{cases}H_{i,1}=\dfrac{1}{h_i^3}(2x-x_{i+1}-x_i)(x-x_{i+1})^2\\H_{i,2}=\dfrac{1}{h_i^2}(x-x_i)(x-x_{i+1})^2\\H_{i,3}=\dfrac{1}{h_i^3}(x-x_i)^2(2x-x_{i+1}-x_i)\\H_{i,4}=\dfrac{1}{h_i^2}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})\end{cases}\tag{8}$$

由此可见，Hermite 有限元空间 $V_h=\operatorname{span}\left\{H_{0,1},H_{0,2},H_{0,3},H_{0,4},\cdots,H_{N,1},H_{N,2},H_{N,3},H_{N,4}\right\}$ 。

(b) 由 (a) 小问可得，区间 (x_i,x_{i+1}) 上的插值算子可表示为

$$I_h(v)\Big|_{(x_i,x_{i+1})}=v(x_i)H_{i,1}+v'(x_i)H_{i,2}+v(x_{i+1})H_{i,3}+v'(x_{i+1})H_{i,4}\tag{9}$$

(c) 该问题的有限元方法可以由以下推导得到

$$\begin{gathered}\int_0^1 u''''v\mathrm{d}x=\int_0^1 fv\mathrm{d}x\\u'''v\Big|_0^1-\int_0^1 u'''v'\mathrm{d}x=\int_0^1 fv\mathrm{d}x\end{gathered}\tag{10}$$

考虑 $v(0)=v(1)=0$，继续推导

$$\begin{gathered}-\int_0^1 u'''v'\mathrm{d}x=\int_0^1 fv\mathrm{d}x\\-u''v'\Big|_0^1+\int_0^1 u''v''\mathrm{d}x=\int_0^1 fv\mathrm{d}x\end{gathered}\tag{11}$$

考虑 $v'(0)=v'(1)=0$ ，最终得到该问题的弱形式为

$$\int_0^1 u''v''\mathrm{d}x=\int_0^1 fv\mathrm{d}x\tag{12}$$

由 Céa 引理知 $|u-u_h|_{H^2(0,1)} \le \frac{\alpha}{\beta}|u-I_hu|_{H^2(0,1)}$，因此我们只需证明 $|u-I_hu|_{H^2(0,1)} \le C_1h^2|u|_{H^4(0,1)}$，下面的证明中我们先观察区间 (x_i,x_{i+1}) 上的 $u(x)$

$$\begin{cases} u(x_i)=u(x)+u'(x)(x_i-x)+\frac{1}{2}u''(x)(x_i-x)^2+\frac{1}{6}u'''(x)(x_i-x)^3+\frac{1}{6}\int_x^{x_i}u''''(t)(x_i-t)^3\mathrm{d}t \\ u'(x_i)=u'(x)+u''(x)(x_i-x)+\frac{1}{2}u'''(x)(x_i-x)^2+\frac{1}{2}\int_x^{x_i}u''''(t)(x_i-t)^2\mathrm{d}t \\ u(x_{i+1})=u(x)+u'(x)(x_{i+1}-x)+\frac{1}{2}u''(x)(x_{i+1}-x)^2+\frac{1}{6}u'''(x)(x_{i+1}-x)^3+\frac{1}{6}\int_x^{x_{i+1}}u''''(t)(x_{i+1}-t)^3\mathrm{d}t \\ u'(x_{i+1})=u'(x)+u''(x)(x_{i+1}-x)+\frac{1}{2}u'''(x)(x_{i+1}-x)^2+\frac{1}{2}\int_x^{x_{i+1}}u''''(t)(x_{i+1}-t)^2\mathrm{d}t \end{cases} \tag{13}$$

代入插值算子表达式，整理得到

$$\begin{aligned} I_h(u) &= u(x_i)H_{i,1}+u'(x_i)H_{i,2}+u(x_{i+1})H_{i,3}+u'(x_{i+1})H_{i,4} \\ &= u(x)\left[H_{i,1}+H_{i,3}\right]+u'(x)\left[(x_i-x)H_{i,1}+H_{i,2}+(x_{i+1}-x)H_{i,3}+H_{i,4}\right] \\ &\quad +u''(x)\left[\frac{1}{2}(x_i-x)^2H_{i,1}+(x_i-x)H_{i,2}+\frac{1}{2}(x_{i+1}-x)^2H_{i,3}+(x_{i+1}-x)H_{i,4}\right] \\ &\quad +u'''(x)\left[\frac{1}{6}(x_i-x)^3H_{i,1}+\frac{1}{2}(x_i-x)^2H_{i,2}+\frac{1}{6}(x_{i+1}-x)^3H_{i,3}+\frac{1}{2}(x_{i+1}-x)^2H_{i,4}\right] \\ &\quad +H_{i,1}g_{i,1}+H_{i,2}g_{i,2}+H_{i,3}g_{i,3}+H_{i,4}g_{i,4} \\ &= u(x)+\sum_{j=1}^{4}H_{i,j}g_{i,j} \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $g_{i,j}$ 为积分余项，下面可以计算 $|u-I_hu|_{H^2(0,1)}$ 我们不难得到等式

$$\begin{aligned} |u''-(I_hu)''| &= \left|\sum_{j=1}^{4}(H_{i,j}g_{i,j})''\right| = \left|\sum_{j=1}^{4}\left(H'_{i,j}g_{i,j}+H_{i,j}g'_{i,j}\right)'\right| = \left|\sum_{j=1}^{4}\left(H'_{i,j}g_{i,j}\right)'\right| \\ &= \left|\sum_{j=1}^{4}H''_{i,j}g_{i,j}+H_{i,j}g'_{i,j}\right| = \left|\sum_{j=1}^{4}H''_{i,j}g_{i,j}\right| \end{aligned} \tag{15}$$

然后我们可以对误差进行估计

$$\begin{aligned} |u''-(I_hu)''| \le \sum_{j=1}^{4}\left|H''_{i,j}g_{i,j}\right| &= \sum_{j=1,3}\left|H''_{i,j}g_{i,j}\right|+\sum_{j=2,4}\left|H''_{i,j}g_{i,j}\right| \\ &\le \tilde{B}_1\sum_{j=1,3}\left|\frac{1}{h_i^2}\int_x^{x_{i+1}}|u''''(t)|h_i^3\mathrm{d}t\right|+\tilde{B}_2\sum_{j=2,4}\left|\frac{1}{h_i}\int_x^{x_{i+1}}|u''''(t)|h_i^2\mathrm{d}t\right| \\ &\le \tilde{C}_1h_i^2|u''''| \end{aligned} \tag{16}$$

取 $h=\max h_i$，两边平方并积分可得结论。

3. 双调和方程的有限元方法

该问题的有限元方法可以由以下推导得到

$$\begin{gathered} \int_\Omega(\Delta^2u)v\mathrm{d}S=\int_\Omega fv\mathrm{d}S \\ \int_\Omega\left[\nabla\cdot\nabla(\Delta u)\right]v\mathrm{d}S=\int_\Omega fv\mathrm{d}S \\ \int_\Omega\nabla\cdot\left[v\nabla(\Delta u)\right]\mathrm{d}S-\int_\Omega\nabla(\Delta u)\cdot\nabla v\mathrm{d}S=\int_\Omega fv\mathrm{d}S \\ \int_{\partial\Omega}\vec{n}\cdot\left[v\nabla(\Delta u)\right]\mathrm{d}l-\int_\Omega\nabla(\Delta u)\cdot\nabla v\mathrm{d}S=\int_\Omega fv\mathrm{d}S \end{gathered} \tag{17}$$

考虑 v 在边界 $\partial\Omega$ 上的值为零，继续推导

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Omega}\nabla(\Delta u)\cdot\nabla v\mathrm{d}S &= \int_{\Omega} fv\mathrm{d}S \\
-\int_{\Omega}\nabla\cdot(\Delta u\nabla v)\mathrm{d}S + \int_{\Omega}\Delta u(\nabla\cdot\nabla v)\mathrm{d}S &= \int_{\Omega} fv\mathrm{d}S \\
-\int_{\partial\Omega}\vec{n}\cdot(\Delta u\nabla v)\mathrm{d}l + \int_{\Omega}\Delta u\Delta v\mathrm{d}S &= \int_{\Omega} fv\mathrm{d}S \\
-\int_{\partial\Omega}\Delta u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}l + \int_{\Omega}\Delta u\Delta v\mathrm{d}S &= \int_{\Omega} fv\mathrm{d}S
\end{aligned}
\tag{18}
$$

考虑 v 在边界 $\partial\Omega$ 上的法向导数也为零，最终得到该问题的弱形式为

$$
\int_{\Omega}\Delta u\Delta v\mathrm{d}S = \int_{\Omega} fv\mathrm{d}S \tag{19}
$$

利用 u 的光滑性交换求导指标，然后利用紧支集的性质，分部积分后产生的边界项在无穷远处消失，可以验证得到

$$
\int_{\Omega}\Delta u\Delta v\mathrm{d}S = \int_{\Omega}\nabla^2 u : \nabla^2 v\mathrm{d}S \tag{20}
$$