# 有限元方法 2025 秋冬作业二

曾申昊 3220100701 *

电子科学与技术 *2202*，浙江大学

更新时间: 2025 年 10 月 12 日

## 1. 手算有限元刚度矩阵和局部刚度矩阵

先计算每个单元的局部刚度矩阵 $A_k$，其定义为

$$A_k = \begin{pmatrix} \int_{T_k} \nabla\phi_{k_1} \cdot \nabla\phi_{k_1} \mathrm{d}x & \int_{T_k} \nabla\phi_{k_1} \cdot \nabla\phi_{k_2} \mathrm{d}x & \int_{T_k} \nabla\phi_{k_1} \cdot \nabla\phi_{k_3} \mathrm{d}x \\ \int_{T_k} \nabla\phi_{k_2} \cdot \nabla\phi_{k_1} \mathrm{d}x & \int_{T_k} \nabla\phi_{k_2} \cdot \nabla\phi_{k_2} \mathrm{d}x & \int_{T_k} \nabla\phi_{k_2} \cdot \nabla\phi_{k_3} \mathrm{d}x \\ \int_{T_k} \nabla\phi_{k_3} \cdot \nabla\phi_{k_1} \mathrm{d}x & \int_{T_k} \nabla\phi_{k_3} \cdot \nabla\phi_{k_2} \mathrm{d}x & \int_{T_k} \nabla\phi_{k_3} \cdot \nabla\phi_{k_3} \mathrm{d}x \end{pmatrix} \tag{1}$$

根据对称性，我们只需计算三角形 ① 和 ② 的局部刚度矩阵。

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

将 8 个单元的局部刚度矩阵组装成全局刚度矩阵 $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

## 2. 二维区域中三角形网格 $\mathcal{T}_h$ 及分片一次有限元空间 $V_h$

(a) 我们知道有限元解 $u_h = \sum_{i=1}^{NV} u_i\phi_i$，其中 $\phi_i \in V_h$ 是与节点 $i$ 相关的基函数，$u_i$ 是通过解方程 $A\vec{U} = \vec{F}$ 得到的有限元解在节点 $i$ 处的值。

由题可知，三角形 $T$ 三个顶点处的取值均为 0。由于基函数的局部性以及线性插值的性质可知，

$$u_h\big|_T = \sum_{i=1}^{NV} u_i\phi_i\big|_T = \sum_{i=1}^{3} u_{a_i}\phi_{a_i} = \sum_{i=1}^{3} v(a_i)\phi_{a_i} = 0 \tag{4}$$

*邮箱: 3097714673@qq.com 或 3220100701@zju.edu.cn

(b) 有限元空间 $V_h$ 可以如下描述，易知为有限维的线性空间。

$$V_h = \left\{ v_h \in C(\overline{\Omega}) : v_h\big|_T \in \mathcal{P}_1(T), \forall\, T \in \mathcal{T}_h \right\} \tag{5}$$

下证 $\phi_i$ 构成有限元空间的一组基底，即

$$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \cdots + c_{NV}\phi_{NV} = 0 \tag{6}$$

其中 0 为零函数，由基函数的局部性 $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$，易得 $c_i = 0$，因此 $\phi_i$ 线性无关。
另一方面，对于任意 $v_h \in V_h$，由分片线性插值的性质可知

$$v_h = \sum_{i=1}^{NV} v_h(x_i)\phi_i \tag{7}$$

因此 $\phi_i$ 构成 $V_h$ 的一组基底。

# 3. 有限维的赋范线性空间及其线性映射

由于 $V$ 是有限维的赋范线性空间，由范数的等价性可知

$$C_1\|v\|_1 \le \|v\|_V \le C_2\|v\|_1 \tag{8}$$

设 $\{v_i\}_{1\le i\le n}$ 为 $V$ 的一组基，则 $\forall v \in V$，有 $v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$，并令 $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |c_i|$

$$\begin{aligned}
\frac{\ell(v)}{\|v\|_V} \le \frac{1}{C_1}\frac{|\ell(v)|}{\|v\|_1} &= \frac{1}{C_1}\frac{|\ell(\sum_{i=1}^n c_i v_i)|}{\|\sum_{i=1}^n c_i v_i\|_1} \\
&= \frac{1}{C_1}\frac{|\sum_{i=1}^n c_i \ell(v_i)|}{\sum_{i=1}^n |c_i|} \\
&\le \frac{1}{C_1}\frac{\sum_{i=1}^n |c_i||\ell(v_i)|}{\sum_{i=1}^n |c_i|} \\
&\le \frac{1}{C_1}\max_{1\le i\le n}|\ell(v_i)| < \infty
\end{aligned} \tag{9}$$

由此可知 $\|\ell\|_{V^*}$ 有界。

# 4. $L^2(\Omega)$ 空间中函数列的相关定理

由 Cauchy-Schwarz 不等式可得，

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega (u_n - u)v\mathrm{d}x\right)^2 &\le \int_\Omega (u_n - u)^2\mathrm{d}x \int_\Omega v^2\mathrm{d}x \\
&= \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}^2 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \to 0
\end{aligned} \tag{10}$$

该积分收敛到 0，是由 $u_n \to u$ 在 $L^2(\Omega)$ 意义下收敛和 $\|v\|_{L^2(\Omega)} < \infty$ 保证的，易得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n v\mathrm{d}x = \int_\Omega uv\mathrm{d}x \tag{11}$$

## 5. 绝对连续函数的相关概念

(a) 对 $\forall \epsilon > 0$，有 $\delta > 0$，使对 $[0,1]$ 上两两不相交的开区间 $\{(a_i, b_i)\}_{1\le i\le n}$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon \tag{12}$$

(b) 对 $[0,1]$ 上两两不相交且满足 $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ 的开区间 $\{(a_i, b_i)\}_{1\le i\le n}$ 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |u(b_i) - u(a_i)| &= \sum_{i=1}^{n} \left|\int_{a_i}^{b_i} v(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} |v(t)|\mathrm{d}t \\ &= \int_{\cup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)} |v(t)|\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{13}$$

由积分的绝对连续性可证 $u(x)$ 为绝对连续函数。

## 6. 绝对连续函数的相关定理

令 $f(x) = u(x)v(x)$，由于 $u, v$ 均为 $[0,1]$ 上的绝对连续函数，因此 $f$ 也是 $[0,1]$ 上的绝对连续函数。

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x \tag{14}$$

也就是

$$\begin{aligned}u(1)v(1) - u(0)v(0) &= \int_0^1 (uv)'\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 u'v\mathrm{d}x + \int_0^1 uv'\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{15}$$

## 7. Dirichlet 边界条件的 Poisson 方程

(a) 令 $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x$，验证其有界性和强制性。

$$|a(u,v)| \le \int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla v|\mathrm{d}x \le \int_\Omega |\nabla u||\nabla v|\mathrm{d}x \le \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = |u|_{H^1(\Omega)}|v|_{H^1(\Omega)} \tag{16}$$

$$|a(u,u)| = \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = |u|_{H^1(\Omega)}^2 \tag{17}$$

根据 Lax-Milgram 定理可知该问题有唯一解。

(b) 由定义知 $A_{ij} = \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j \mathrm{d}x$ 因此 $A_{ij} = A_{ji}$，所以 $A$ 是对称矩阵。
又由 (c) 可知 $\forall \vec{v_h} \ne \vec{0}$，有

$$\vec{v_h}^\top A \vec{v_h} = \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 > 0 \tag{18}$$

因此 $A$ 是正定矩阵。

(c) 令 $v_h = \sum_{i=1}^{NV} c_i\phi_i$，代入可得

$$\|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega \left[\nabla\left(\sum_{i=1}^{NV} c_i\phi_i\right)\right]^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{NV} c_i\nabla\phi_i\right)^2 \mathrm{d}x \tag{19}$$

$$\vec{v_h}^\top A\vec{v_h} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{NV} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_\Omega \nabla\phi_1\cdot\nabla\phi_1 \mathrm{d}x & \int_\Omega \nabla\phi_1\cdot\nabla\phi_2 \mathrm{d}x & \cdots & \int_\Omega \nabla\phi_1\cdot\nabla\phi_{NV} \mathrm{d}x \\ \int_\Omega \nabla\phi_2\cdot\nabla\phi_1 \mathrm{d}x & \int_\Omega \nabla\phi_2\cdot\nabla\phi_2 \mathrm{d}x & \cdots & \int_\Omega \nabla\phi_2\cdot\nabla\phi_{NV} \mathrm{d}x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_\Omega \nabla\phi_{NV}\cdot\nabla\phi_1 \mathrm{d}x & \int_\Omega \nabla\phi_{NV}\cdot\nabla\phi_2 \mathrm{d}x & \cdots & \int_\Omega \nabla\phi_{NV}\cdot\nabla\phi_{NV} \mathrm{d}x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{NV} \end{pmatrix} \tag{20}$$

比较可知，上面二者相等。

## 8. Robin 边界条件下的 Poisson 方程

(a) 该问题的有限元方法可以由以下推导得到

$$\begin{aligned} -\int_\Omega (\Delta u)v\mathrm{d}S &= \int_\Omega fv\mathrm{d}S \\ -\int_{\partial\Omega} (\nabla u\cdot\vec{n})v\mathrm{d}l + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}S &= \int_\Omega fv\mathrm{d}S \\ -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}v\mathrm{d}l + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}S &= \int_\Omega fv\mathrm{d}S \\ \int_{\partial\Omega} uv\mathrm{d}l + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}S &= \int_\Omega fv\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{21}$$

用分片线性函数空间 $V_h$ 近似，则有限元问题为：

$$\int_\Omega \nabla u_h\cdot\nabla v_h\mathrm{d}S = \int_\Omega fv_h\mathrm{d}S - \int_{\partial\Omega} u_hv_h\mathrm{d}l \tag{22}$$

(b) 定义 Robin 边界条件下的能量泛函为

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} v^2\mathrm{d}l - \int_\Omega fv\mathrm{d}S \tag{23}$$

该问题的 Ritz 方法为

$$u_h = \arg\min_{v_h\in V_h} E(v_h) \tag{24}$$

(c) 定义 $\varphi(\lambda) = E(u+\lambda v)$，接下来我们把 $\varphi(\lambda)$ 对 $\lambda$ 求导。

$$\begin{aligned} \varphi'(\lambda) &= \frac{1}{2}\int_\Omega 2\nabla(u+\lambda v)\cdot\nabla v\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} 2(u+\lambda v)v\mathrm{d}l - \int_\Omega fv\mathrm{d}S \\ &= \int_\Omega \nabla(u+\lambda v)\cdot\nabla v\mathrm{d}S + \int_{\partial\Omega}(u+\lambda v)v\mathrm{d}l - \int_\Omega fv\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{25}$$

由 $u$ 是该问题的解可知 $\varphi'(0) = 0$，也就是

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}S + \int_{\partial\Omega} uv\mathrm{d}l = \int_\Omega fv\mathrm{d}S \tag{26}$$

所以上述的有限元方法和 Ritz 方法是等价的。