有限元方法 2025 秋冬作业一

曾申昊 3220100701 *

电子科学与技术 *2202*，浙江大学

更新时间: 2025 年 9 月 24 日

1. 验证恒等式

(a)

$$\nabla \cdot (u\vec{v}) = \partial_i \cdot (uv_i) = (\partial_i u)v_i + u(\partial_i v_i) = (\nabla u) \cdot v + u\nabla \cdot \vec{v} \tag{1}$$

(b)

$$\begin{aligned} &[\nabla \times (u\vec{v})]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j(uv_k) = \varepsilon_{ijk}(\partial_j u)v_k + u\varepsilon_{ijk}\partial_j v_k \\ &\Rightarrow \nabla \times (u\vec{v}) = (\nabla u) \times \vec{v} + u\nabla \times \vec{v} \end{aligned} \tag{2}$$

(c)

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\nabla \times \vec{u})]_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{kmn}\partial_m u_n = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\partial_j\partial_m u_n \\ &= (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})\partial_j\partial_m u_n = \partial_j\partial_i u_j - \partial_j\partial_j u_i \\ \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) &= \nabla(\nabla \times \vec{u}) - \Delta\vec{u} \end{aligned} \tag{3}$$

2. 二维区域中的格林公式和散度定理

(a) 若函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在区域 Ω 上连续，且具有连续的一阶偏导数，则有

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \tag{4}$$

(b) 若 $\vec{F}(x,y)$ 是定义在 Ω 中和 $\partial\Omega$ 上连续可微的向量场，则有

$$\int_\Omega \nabla \cdot \vec{F}\mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}\mathrm{d}l \tag{5}$$

(c) 令 $\vec{F}(x,y) = (Q(x,y), -P(x,y))$，易知二者等价

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla \cdot \vec{F}\mathrm{d}S = \int_\Omega (\partial_x, \partial_y) \cdot (Q, -P)\mathrm{d}S = \int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}S \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}\mathrm{d}l = \int_{\partial\Omega} (Q, -P) \cdot (\sin\theta, -\cos\theta)\mathrm{d}l = \int_{\partial\Omega} P\cos\theta\mathrm{d}l + Q\sin\theta\mathrm{d}l = \int_{\partial\Omega} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \end{cases} \tag{6}$$

*邮箱: 3097714673@qq.com 或 3220100701@zju.edu.cn

3. 三维区域中旋度的分部积分公式

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} (\vec{n} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} \mathrm{d}S &= \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{ijk} n_j u_k v_i \mathrm{d}S \\
&= \int_{\Omega} \partial_j (\varepsilon_{ijk} u_k v_i) \mathrm{d}\Omega \\
&= \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk} (\partial_j u_k) v_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk} u_k (\partial_j v_i) \mathrm{d}\Omega \\
&= \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{v} \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{v}) \mathrm{d}\Omega
\end{aligned}
\tag{7}
$$

4. 二维区域中 Neumann 边界条件的 Poisson 方程

$$
-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \tag{8}
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \tag{9}
$$

(a) 对式 (8) 两边积分，应用散度定理，带入边界条件可得

$$
\int_{\Omega} f \mathrm{d}S = -\int_{\Omega} \Delta u \mathrm{d}S = -\int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla u \mathrm{d}S = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}l = 0 \tag{10}
$$

(b) 若 u_0 为该方程的一个解，那么对于任意 $C \in R$，$u_0 + C$ 同样是方程的解。

(c) 该问题的有限元方法可以由以下推导得到

$$
\begin{gathered}
-\int_{\Omega} (\Delta u) v \mathrm{d}S = \int_{\Omega} f v \mathrm{d}S \\
-\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \vec{n}) v \mathrm{d}l + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}S = \int_{\Omega} f v \mathrm{d}S \\
-\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \mathrm{d}l + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}S = \int_{\Omega} f v \mathrm{d}S \\
\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}S = \int_{\Omega} f v \mathrm{d}S
\end{gathered}
\tag{11}
$$

用分片线性函数空间 V_h 近似，则有限元问题为：

$$
\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \mathrm{d}S = \int_{\Omega} f v_h \mathrm{d}S \tag{12}
$$

代入 $u_h = u_1\phi_1 + \cdots + u_{NV}\phi_{NV}$ 并令 $v_h = \phi_j$ 可得线性方程组

$$
\sum_{i=1}^{NV} u_i \int_{\Omega} \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j \mathrm{d}S = \int_{\Omega} f\phi_j \mathrm{d}S \qquad j = 1, 2, \ldots, NV \tag{13}
$$

(d) 参照讲义中用于生成矩阵 A 的算法，考虑其局部刚度矩阵 A_k

$$
A_k = \begin{pmatrix}
\int_{T_k} \nabla\phi_{k1} \cdot \nabla\phi_{k1} \mathrm{d}x & \int_{T_k} \nabla\phi_{k1} \cdot \nabla\phi_{k2} \mathrm{d}x & \int_{T_k} \nabla\phi_{k1} \cdot \nabla\phi_{k3} \mathrm{d}x \\
\int_{T_k} \nabla\phi_{k2} \cdot \nabla\phi_{k1} \mathrm{d}x & \int_{T_k} \nabla\phi_{k2} \cdot \nabla\phi_{k2} \mathrm{d}x & \int_{T_k} \nabla\phi_{k2} \cdot \nabla\phi_{k3} \mathrm{d}x \\
\int_{T_k} \nabla\phi_{k3} \cdot \nabla\phi_{k1} \mathrm{d}x & \int_{T_k} \nabla\phi_{k3} \cdot \nabla\phi_{k2} \mathrm{d}x & \int_{T_k} \nabla\phi_{k3} \cdot \nabla\phi_{k3} \mathrm{d}x
\end{pmatrix} \tag{14}
$$

考虑式 (14) 与列向量 $(1,1,1)^T$ 的乘积

$$
A_k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\int_{T_k} \nabla\phi_{k1} \cdot (\nabla\phi_{k1} + \nabla\phi_{k2} + \nabla\phi_{k3}) \mathrm{d}x \\
\int_{T_k} \nabla\phi_{k2} \cdot (\nabla\phi_{k1} + \nabla\phi_{k2} + \nabla\phi_{k3}) \mathrm{d}x \\
\int_{T_k} \nabla\phi_{k3} \cdot (\nabla\phi_{k1} + \nabla\phi_{k2} + \nabla\phi_{k3}) \mathrm{d}x
\end{pmatrix} \tag{15}
$$

易知 $\nabla\phi_{k1}+\nabla\phi_{k2}+\nabla\phi_{k3}=0$，故 $(1,1,1)^T\in\ker(A_k)$，矩阵 A_k 是奇异的。因为矩阵 A 是由 A_k 组装而成的，故矩阵 A 也是奇异的。