有限元方法 2025 秋冬作业四

曾申昊 3220100701 *

电子科学与技术 *2202*，浙江大学

更新时间: 2025 年 10 月 30 日

1. Sobolev 空间和弱导数的相关性质

(a) 取 $\phi \in C_c^\infty(-1,1)$，根据定义有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0}(1+x)\phi'(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(1-x)\phi'(x)\mathrm{d}x \\ &= (1+x)\phi(x)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 1\cdot\phi(x)\mathrm{d}x + (1-x)\phi(x)\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1}(-1)\cdot\phi(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-1}^{1} u'(x)\phi(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{1}$$

其中定义弱导数 $u'(x) = \begin{cases} 1, & x\in(-1,0) \\ -1, & x\in(0,1)\end{cases}$。

(b) 取 $\phi \in C_c^\infty(-1,1)$，根据定义有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} u''(x)\phi(x)\mathrm{d}x &= -\int_{-1}^{1} u'(x)\phi'(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-1}^{0} 1\cdot\phi'(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{1}(-1)\cdot\phi'(x)\mathrm{d}x \\ &= -\phi(x)\Big|_{-1}^{0} + \phi(x)\Big|_{0}^{1} \\ &= -2\phi(0)\end{aligned} \tag{2}$$

利用反证法, 现在假设 $u'' \in L^1(-1,1)$, 取 $\phi_n \in C_c^\infty(-1,1)$ 满足 $\phi_n(0)=1$, 支集在 $[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$ 上, 且 $|\varphi_n| \le 1$, 则有

$$\int_{-1}^{1} u''(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x = -2\phi_n(0) = -2 \tag{3}$$

另一方面，根据积分的绝对连续性，有

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^{1} u''(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x\right| &\le \int_{-1}^{1}|u''(x)||\phi_n(x)|\mathrm{d}x \\ &\le \int_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}|u''(x)|\mathrm{d}x \to 0\end{aligned} \tag{4}$$

当 $n\to\infty$ 时产生矛盾，因此 $u'' \notin L^2(-1,1)$。

*邮箱: 3097714673@qq.com 或 3220100701@zju.edu.cn

(c) 证明下面二者定义等价：

$$\begin{cases} v(x) = v(0) + \int_0^x v'(t)\mathrm{d}t \\ \int_0^1 (v'(t))^2 \mathrm{d}t < \infty \\ v'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(x+h)-v(x)}{h} \end{cases} \iff \begin{cases} \int_0^1 (v(t))^2 \mathrm{d}t < \infty \\ \int_0^1 (v'(t))^2 \mathrm{d}t < \infty \\ \int_0^1 v'(t)\phi(t)\mathrm{d}t = -\int_0^1 v(t)\phi'(t)\mathrm{d}t \end{cases} \tag{5}$$

- “⇒”
  根据 Minkowski 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$\begin{aligned} \|v(x)\|_{L^2(0,1)} &\le \|v(x)-v(0)\|_{L^2(0,1)} + \|v(0)\|_{L^2(0,1)} \\ &= \left(\int_0^1 \left(\int_0^t v'(s)\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} + |v(0)| \\ &\le \left(\int_0^1 \left[\int_0^t (v'(s))^2\mathrm{d}s \cdot \int_0^t 1^2 \mathrm{d}s\right] \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} + |v(0)| \\ &\le \left(\int_0^1 C_0 t \ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} + |v(0)| \\ &\le \sqrt{\frac{C_0}{2}} + |v(0)| < \infty \end{aligned} \tag{6}$$

  另一方面，经典导数 $v'(x)$ 自然满足弱导数定义。

- “⇐”
  令 $u(x) = \int_0^x v'(t)\mathrm{d}t$，则 $u(x) \in \mathrm{AC}[0,1]$ 且 $u'(x) \overset{a.e.}{=} v'(x)$。令 $w(x) = u(x) - v(x)$，计算 $w(x)$ 的弱导数有

$$\begin{aligned} \int_0^1 w(x)\phi'(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 (u(x)-v(x))\phi'(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 v(x)\phi'(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 u'(x)\phi(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 v'(x)\phi(x)\mathrm{d}x \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

  由于 $\phi(x)$ 的任意性可得，$w'(x) \overset{a.e.}{=} 0$，即 $w(x) \overset{a.e.}{=} C$。因此有 $w(x) \in \mathrm{AC}[0,1]$，故 $v(x) = u(x) - w(x)$ 也是绝对连续函数，其经典导数几乎处处存在。

2. 二维区域 Ω 上的向量场

(a)
- “⇒”
  由 $\varepsilon(\vec{u}) = O$ 可得

$$\begin{cases} \partial_1 u_1 + \partial_1 u_1 = 0, \\ \partial_2 u_2 + \partial_2 u_2 = 0, \\ \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

  由前两个方程可得 $u_1 = f(y)$ 且 $u_2 = g(x)$，将其代入第三个方程可得

$$\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y} = 0. \tag{9}$$

根据 x 和 y 的独立性可令

$$\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = a \qquad \frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y} = -a \tag{10}$$

其中 a 为常数。由此可得

$$\begin{cases} u_1(x,y) = -ay + b, \\ u_2(x,y) = ax + c, \end{cases} \tag{11}$$

其中 b, c 为常数。

- "$\Leftarrow$"
  将 $\vec{u}(x,y) = (-ay+b, ax+c)$ 代入 $\varepsilon(\vec{u})_{ij}$ 的定义可得

$$\begin{cases} \varepsilon(\vec{u})_{11} = \frac{1}{2}(\partial_1 u_1 + \partial_1 u_1) = 0, \\ \varepsilon(\vec{u})_{22} = \frac{1}{2}(\partial_2 u_2 + \partial_2 u_2) = 0, \\ \varepsilon(\vec{u})_{12} = \varepsilon(\vec{u})_{21} = \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) = \frac{1}{2}(a - a) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

  由此可知 $\varepsilon(\vec{u}) = O$.

(b)
- 预紧集合定义
  (E, d) 是一个 Banach 空间，$S \subset E$ 被称为是一个预紧集合，如果满足对 $\forall \varepsilon > 0$，S 能被有限个半径为 ε 的开球覆盖。
- 紧算子定义
  一个算子 $T : E \to F$，其中 E, F 均为 Banach 空间，被称为是紧算子的，如果作用于 E 中的单位球得到的像集是预紧的。

(c) 类似讲义中 Poincaré 不等式的证明过程。假设 Korn 不等式不成立，则存在 $\{\vec{u}_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ 满足

$$\|\vec{u}_n\|_{L^2(\Omega)} \geq n\|\varepsilon(\vec{u}_n)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{13}$$

单位化 $\vec{u}_n$，令 $\vec{v}_n = \frac{\vec{u}_n}{\|\vec{u}_n\|_{L^2(\Omega)}}$，则有

$$\|\varepsilon(\vec{v}_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{n} \tag{14}$$

由此可得 $\vec{v}_n$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的有界序列，也是 $L^2(\Omega)$ 中的预紧集合。因此存在子列 $\{\vec{v}_{n_k}\}$ 使得

$$\|\vec{v}_{n_k} - \vec{v}\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \tag{15}$$

$$\|\vec{v}_{n_k} - \vec{w}\|_{H^1(\Omega)} \to 0 \tag{16}$$

并且可知 $v \overset{a.e.}{=} w$。取 $n \to \infty$ 后可以得到 $\varepsilon(\vec{v}) = O$，由 (a) 小问可知

$$\begin{cases} v_1(x,y) = -ay + b, \\ v_2(x,y) = ax + c, \end{cases} \tag{17}$$

由于 $\vec{v} \in H_0^1(\Omega)$，所以 $a = b = c = 0$，即 $\vec{v} = O$。这与 $\|\vec{v}\|_{L^2(\Omega)} = 1$ 矛盾。

3. 三角形 T 上 Lagrange 插值的误差估计

(a) 写出基于 T 的顶点的一次 Lagrange 插值

$$I_T u = \sum_{i=1}^{3} u(\boldsymbol{a_i})\phi_i \tag{18}$$

利用多点 Taylor 展开式，有

$$u(\boldsymbol{a_i})=u(\boldsymbol{x})+\nabla u(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})+\int_0^1(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})^T\nabla^2u(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})(1-t)\mathrm{d}t \tag{19}$$

将其代入 I_Tu 可得

$$\begin{aligned}I_Tu&=\sum_{i=1}^3u(\boldsymbol{a_i})\phi_i\\&=\sum_{i=1}^3\left(u(\boldsymbol{x})+\nabla u(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})+\int_0^1(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})^T\nabla^2u(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})(1-t)\mathrm{d}t\right)\phi_i\\&=u(\boldsymbol{x})\sum_{i=1}^3\phi_i+\nabla u(\boldsymbol{x})\cdot\sum_{i=1}^3(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})\phi_i+\sum_{i=1}^3\phi_i\left(\int_0^1(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})^T\nabla^2u(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})(1-t)\mathrm{d}t\right)\\&=u(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^3\phi_i\left(\int_0^1(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})^T\nabla^2u(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})(1-t)\mathrm{d}t\right)\end{aligned} \tag{20}$$

- 证明 $\|u-I_Tu\|_{L^p(T)}\le C_1h_T^2|u|_{W^{2,p}(T)}$

$$\begin{aligned}\|u-I_Tu\|_{L^p(T)}&=\left\|\sum_{i=1}^3\phi_i\left(\int_0^1(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})^T\nabla^2u(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})(1-t)\mathrm{d}t\right)\right\|_{L^p(T)}\\&\le\left\|\sum_{i=1}^3\left(\int_0^1(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})^T\nabla^2u(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})(1-t)\mathrm{d}t\right)\right\|_{L^p(T)}\\&\le h_T^2\sum_{i=1}^3\left(\int_0^1\left\|\nabla^2u(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x}))\right\|_{L^p(T)}(1-t)\mathrm{d}t\right)\end{aligned} \tag{21}$$

对 $L^p(T)$ 进行估计

$$\begin{aligned}\left\|\nabla^2u(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x}))\right\|_{L^p(T)}&=\left(\int_T\left(\nabla^2u(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x}))\right)^p\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\int_T\left(\nabla^2u(\boldsymbol{z})\right)^p(1-t)^{-2}\mathrm{d}\boldsymbol{z}\right)^{\frac{1}{p}}\\&=(1-t)^{-\frac{2}{p}}\left(\int_T\left(\nabla^2u(\boldsymbol{z})\right)^p\mathrm{d}\boldsymbol{z}\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned} \tag{22}$$

将式 (**??**) 代入式 (**??**) 可得

$$\begin{aligned}\|u-I_Tu\|_{L^p(T)}&\le 3h_T^2\left(\int_0^1(1-t)^{1-\frac{2}{p}}\mathrm{d}t\right)|u|_{W^{2,p}(T)}\\&=C_1h_T^2|u|_{W^{2,p}(T)}\end{aligned} \tag{23}$$

- 证明 $|u-I_Tu|_{W^{1,p}(T)}\le C_2h_T|u|_{W^{2,p}(T)}$

$$\begin{aligned}\nabla I_Tu-\nabla u&=\nabla\left(\sum_{i=1}^3\phi_i\left(\int_0^1(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})^T\nabla^2u(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})(1-t)\mathrm{d}t\right)\right)\\&=\sum_{i=1}^3\nabla\phi_i\left(\int_0^1(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})^T\nabla^2u(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})(1-t)\mathrm{d}t\right)\\&\quad+\sum_{i=1}^3\phi_i\nabla\left(\int_0^1(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})^T\nabla^2u(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})(1-t)\mathrm{d}t\right)\\&=\sum_{i=1}^3\nabla\phi_i\left(\int_0^1(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})^T\nabla^2u(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{a_i}-\boldsymbol{x})(1-t)\mathrm{d}t\right)\end{aligned} \tag{24}$$

$$
\begin{aligned}
|u - I_T u|_{W^{1,p}(T)} &= \left\| \left(\sum_{i=1}^{3} \nabla \phi_i \left(\int_0^1 (\boldsymbol{a_i} - \boldsymbol{x})^T \nabla^2 u(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{a_i} - \boldsymbol{x}))(\boldsymbol{a_i} - \boldsymbol{x})(1-t)\mathrm{d}t \right) \right) \right\|_{L^p(T)} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{d_i} \left(\int_0^1 \|\nabla^2 u(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{a_i} - \boldsymbol{x}))\|_{L^p(T)} (1-t)\mathrm{d}t \right) \\
&\leq \frac{3h_T}{\min\{d_1, d_2, d_3\}} h_T \left(\int_0^1 (1-t)^{1-\frac{2}{p}} \mathrm{d}t \right) |u|_{W^{2,p}(T)} \\
&= C_2 h_T |u|_{W^{2,p}(T)}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

(b) C_1 的一个明确上界为

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 3 \int_0^1 (1-t)^{1-\frac{2}{p}} \mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2 - \frac{2}{p}}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

当 $\frac{h_T}{\min\{d_1,d_2,d_3\}}$ 较大时，也就是三角形 T 较为扁平时，C_2 较大；反之当 $\frac{h_T}{\min\{d_1,d_2,d_3\}}$ 较小时，也就是三角形 T 较为匀称，即接近等边三角形时，C_2 较小。

(c)

- 证明 $\|u - I_T u\|_{L^2(T)} \leq C_3 h_T^3 |u|_{H^3(T)}$

  根据 Bramble-Hilbert 定理有

$$
\|\hat{u} - \hat{I}_T \hat{u}\|_{L^2(\hat{T})} \leq \tilde{C}_1 |\hat{u}|_{H^3(\hat{T})} \tag{27}
$$

  其中 $\hat{T}$ 代表仿射变换后的参考三角形。根据仿射变换的性质，有

$$
\begin{aligned}
\|u - I_T u\|_{L^2(T)} &= |\det(B)|^{\frac{1}{2}} \|\hat{u} - \hat{I}\hat{u}\|_{L^2(\hat{T})} \\
&\leq \tilde{C}_1 |\det(B)|^{\frac{1}{2}} |\hat{u}|_{H^3(\hat{T})} \\
&\leq \tilde{C}_1 |\det(B)|^{\frac{1}{2}} \tilde{C}_2 \|B\|^3 |\det(B)|^{-\frac{1}{2}} |u|_{H^3(T)} \\
&\leq \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \tilde{C}_3^3 h_T^3 |u|_{H^3(T)}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

  最后一个不等式是因为三角形 T 是形状规则的，故存在常数 $\tilde{C}_3$ 使得 $\|B\| \leq \tilde{C}_3 h_T$。令 $C_3 = \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \tilde{C}_3^3$ 即证毕。

- 证明 $|u - I_T u|_{H^1(T)} \leq C_4 h_T^2 |u|_{H^3(T)}$

  根据讲义中的 **Lemma 1.2** 和 **Lemma 1.3** 有

$$
\begin{aligned}
|v - I_T v|_{H^1(T)} &\leq |\det(B)|^{\frac{1}{2}} \|B^{-1}\| |\widehat{v - I_T v}|_{H^1(\widehat{T})} \\
&= |\det(B)|^{\frac{1}{2}} \|B^{-1}\| |\hat{v} - I_{\widehat{T}} \hat{v}|_{H^1(\widehat{T})} \\
&= |\det(B)|^{\frac{1}{2}} \|B^{-1}\| |\hat{v} - p - I_{\widehat{T}}(\hat{v} - p)|_{H^1(\widehat{T})} \\
&\leq \tilde{C}_4 |\det(B)|^{\frac{1}{2}} \|B^{-1}\| \|\hat{v} - p\|_{H^3(\widehat{T})}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

  根据 $p \in \mathcal{P}_m$ 的任意性，有

$$
\begin{aligned}
|v - I_T v|_{H^1(T)} &\leq \tilde{C}_4 |\det(B)|^{\frac{1}{2}} \|B^{-1}\| |\hat{v}|_{H^3(\widehat{T})} \\
&\leq \tilde{C}_4 \|B^{-1}\| \|B\|^3 |v|_{H^3(T)} \\
&\leq \tilde{C}_4 \left(\frac{h_{\widehat{T}}}{\rho_T} \right) h_T^2 |v|_{H^3(T)}.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

  令 $C_4 = \tilde{C}_4 \frac{h_{\hat{T}}}{\rho_T}$ 即证毕。

4. $\mathbb{R}^2$ 上的空间 $H^k(\mathbb{R}^2)$ 的相关不等式

(a) 根据讲义的定义有 $\hat{u}(\omega) = (\mathscr{F}u(\omega)) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)e^{-2\pi i\omega\cdot x}\mathrm{d}x$ 由此可得

$$\begin{cases} |u(x)|_{H^1(\mathbb{R}^2)} = \|\nabla u(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 2\pi\|\omega\hat{u}(\omega)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ |u(x)|_{H^2(\mathbb{R}^2)} = \|\nabla^2 u(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 4\pi^2\|\omega^2\hat{u}(\omega)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} \|u(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|\hat{u}(\omega)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ \|u(x)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} = \left(\|\hat{u}(\omega)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|2\pi\omega\hat{u}(\omega)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \|u(x)\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} = \left(\|\hat{u}(\omega)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2\|2\pi\omega\hat{u}(\omega)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|4\pi^2\omega^2\hat{u}(\omega)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{32}$$

(b) 根据 $\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^2)}$ 的定义

$$\begin{aligned} \|u(x)\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} &= \left(\|\hat{u}(\omega)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2\|2\pi\omega\hat{u}(\omega)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|4\pi^2\omega^2\hat{u}(\omega)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^2}(1+4\pi^2\omega^2)^2\hat{u}^2(\omega)\mathrm{d}\omega\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|(1+4\pi^2\omega^2)\hat{u}(\omega)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\le \|\hat{u}(\omega)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|4\pi^2\omega^2\hat{u}(\omega)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &= \|u(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + |u(x)|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \end{aligned} \tag{33}$$

(c) 根据 Fourier 逆变换有

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^2}\hat{u}(\omega)e^{2\pi i\omega\cdot x}\mathrm{d}\omega\right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^2}|\hat{u}(\omega)|\mathrm{d}\omega \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^2}(1+4\pi^2\omega^2)^{-2}\mathrm{d}\omega\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^2}(1+4\pi^2\omega^2)^2\hat{u}^2(\omega)\mathrm{d}\omega\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C\|u(x)\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \end{aligned} \tag{34}$$

两边取最大值可得

$$\|u(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \le C\|u(x)\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \tag{35}$$