Mie 散射理论

zsh945 *

更新时间: 2026 年 1 月 20 日

1 散射截面 [bohren2008absorption]

散射截面是描述散射体散射能力的一个重要参数，在叙述 Mie 散射理论之前需要介绍一下其定义。

2 经典理论 [bohren2008absorption]

先推导矢量波方程，然后在球坐标系和柱坐标系下分别求解。

2.1 矢量波方程

假设介质是线性、各向同性和均匀的，我们要研究的方程有矢量波方程：

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + k^2 \boldsymbol{H} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

其中 $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$，以及 Maxwell 方程组：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = i\omega\mu \boldsymbol{H}, \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = -i\omega\varepsilon \boldsymbol{E} \tag{4}$$

下面构造上述方程的猜测解，令 $\boldsymbol{M} = \nabla \times (\boldsymbol{c}\psi)$，以及 $\boldsymbol{N} = \dfrac{\nabla \times \boldsymbol{M}}{k}$，其中 $\boldsymbol{c}$ 是一个常数矢量，ψ 是一个标量函数。显然 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 是无散的，并且有

$$\nabla^2 \boldsymbol{M} + k^2 \boldsymbol{M} = \nabla \times \left[\boldsymbol{c}\left(\nabla^2\psi + k^2\psi\right)\right] \tag{5}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{N} + k^2 \boldsymbol{N} = \nabla \times \left[\frac{1}{k}\left(\nabla^2 \boldsymbol{M} + k^2 \boldsymbol{M}\right)\right] \tag{6}$$

可以约束 ψ 使得 $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$，这样 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 便满足矢量波方程。

$$\nabla \times \boldsymbol{M} = k\boldsymbol{N} \tag{7}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{N} = \frac{\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{M}}{k} = \frac{\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{M}) - \nabla^2 \boldsymbol{M}}{k} = k\boldsymbol{M} \tag{8}$$

因此我们只需找到 $\boldsymbol{c}$ 和 ψ 就可以得到矢量波方程的解。

*邮箱: 3097714673@qq.com

2.2 球坐标系

2.2.1 生成函数

在球坐标系下 ψ 的波方程可以具体写为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+k^2\psi=0 \tag{9}$$

利用分离变量法，设 $\psi(r,\theta,\phi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ 代入可得

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+m\phi^2=0 \tag{10}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0 \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[k^2r^2-n(n+1)\right]R=0 \tag{12}$$

- 方位角函数

  对于式 (??)，解为

$$\Phi_e(\phi)=\cos m\phi \tag{13}$$

$$\Phi_o(\phi)=\sin m\phi \tag{14}$$

  为了使得 $\Phi(\phi)$ 在 ϕ 方向上是周期为 2π 的函数，m 必须是整数。由于 m 和 $-m$ 对应的解是等价的，只需考虑 m 为非负整数。

- 连带勒让德函数

  对于式 (??)，解为连带勒让德函数 $P_n^m(\cos\theta)$，其中 $n=m,m+1,\cdots$。连带勒让德函数具有正交性：

$$\int_{-1}^{1}P_n^m(x)P_{n'}^m(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nn'} \tag{15}$$

  其中 $x=\cos\theta$。

- 球贝塞尔函数

  定义变量 $\rho=kr$ 和函数 $Z=R\sqrt{\rho}$，式 (??) 可写为

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left[\rho^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]Z=0 \tag{16}$$

  该方程的解为半整数阶贝塞尔函数，记为 J_v 和 Y_v，其中 $v=n+\frac{1}{2}$。定义球贝塞尔函数为

$$j_n(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}J_{n+\frac{1}{2}}(\rho) \tag{17}$$

$$y_n(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}Y_{n+\frac{1}{2}}(\rho) \tag{18}$$

  另外定义球汉克尔函数为

$$h_n^{(1)}(\rho)=j_n(\rho)+iy_n(\rho) \tag{19}$$

$$h_n^{(2)}(\rho)=j_n(\rho)-iy_n(\rho) \tag{20}$$

  这两者同样是互相等价的。

现在终于可以给出生成函数了，定义

$$\psi_{emn} = \cos m\phi P_n^m(\cos\theta) z_n(kr) \tag{21}$$

$$\psi_{omn} = \sin m\phi P_n^m(\cos\theta) z_n(kr) \tag{22}$$

其中 z_n 可以是任意一种球贝塞尔函数。取 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{r}$ 于是可以得到矢量波方程的解：

$$\boldsymbol{M}_{emn} = \nabla \times (\boldsymbol{r}\psi_{emn}), \qquad \boldsymbol{M}_{omn} = \nabla \times (\boldsymbol{r}\psi_{omn}) \tag{23}$$

$$\boldsymbol{N}_{emn} = \frac{\nabla \times \boldsymbol{M}_{emn}}{k}, \qquad \boldsymbol{N}_{omn} = \frac{\nabla \times \boldsymbol{M}_{omn}}{k} \tag{24}$$

通过球坐标系下的旋度算子，可以计算得到具体形式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{emn} = {} & \frac{-m}{\sin\theta} \sin m\phi P_n^m(\cos\theta) z_n(\rho) \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} \\ & - \cos m\phi \frac{\mathrm{d}P_n^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} z_n(\rho) \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{omn} = {} & \frac{m}{\sin\theta} \cos m\phi P_n^m(\cos\theta) z_n(\rho) \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} \\ & - \sin m\phi \frac{\mathrm{d}P_n^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} z_n(\rho) \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_{emn} = {} & n(n+1) \cos m\phi \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\rho} z_n(\rho) \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} \\ & + \cos m\phi \frac{\mathrm{d}P_n^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} \\ & - m \sin m\phi \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_{omn} = {} & n(n+1) \sin m\phi \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\rho} z_n(\rho) \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} \\ & + \sin m\phi \frac{\mathrm{d}P_n^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} \\ & + m \cos m\phi \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned} \tag{28}$$

2.2.2 级数展开

考虑一个平面波沿 z 方向传播，电场极化方向为 x 方向的情况：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_i &= E_0 e^{ikr\cos\theta} \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} \\ &= E_0 e^{ikr\cos\theta} (\sin\theta\cos\phi \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\cos\phi \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi \hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}})\end{aligned} \tag{29}$$

对其进行级数展开，有

$$\boldsymbol{E}_i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (B_{emn} \boldsymbol{M}_{emn} + B_{omn} \boldsymbol{M}_{omn} + A_{emn} \boldsymbol{N}_{emn} + A_{omn} \boldsymbol{N}_{omn}) \tag{30}$$

需要证明上面的基函数组满足正交关系：

- 由于 $\sin m\phi$ 和 $\cos m\phi$ 在 $[0, 2\pi]$ 上正交，有

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \boldsymbol{M}_{emn} \cdot \boldsymbol{M}_{om'n'} \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = 0 \qquad \text{对于所有的 } m, n, m', n' \tag{31}$$

  类似地可以证明 $(\boldsymbol{N}_{emn}, \boldsymbol{N}_{omn})$，$(\boldsymbol{M}_{emn}, \boldsymbol{N}_{emn})$，$(\boldsymbol{M}_{omn}, \boldsymbol{N}_{omn})$ 的正交性。

- 另外需要证明 $(\boldsymbol{M}_{emn},\boldsymbol{N}_{omn})$ 和 $(\boldsymbol{M}_{omn},\boldsymbol{N}_{emn})$ 的正交性，以前者为例即证明

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\boldsymbol{M}_{emn}\cdot\boldsymbol{N}_{om'n'}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=0\qquad\text{对于所有的 } m,n,m',n' \tag{32}$$

  由于当 $m\neq m'$ 时，$\sin m\phi$ 和 $\sin m'\phi$，$\cos m\phi$ 和 $\cos m'\phi$ 正交，因此只需考虑 $m=m'$ 的情况。通过具体计算，可以发现关于 θ 的积分为

$$m\int_0^{\pi}\left(P_n^m(\cos\theta)\frac{\mathrm{d}P_{n'}^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}+P_{n'}^m(\cos\theta)\frac{\mathrm{d}P_n^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)\mathrm{d}\theta=P_n^m(\cos\theta)P_{n'}^m(\cos\theta)\Big|_0^{\pi} \tag{33}$$

  由于上式左边有 m 的乘积因子，当 $m=0$ 时式子为 0。当 $m\neq 0$ 时，根据连带勒让德函数的微分公式有

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^mP_n(x)}{\mathrm{d}x^m} \tag{34}$$

  其中 $x=\cos\theta$。当 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$ 时，$x=\pm1$，因此 $P_n^m(\cos\theta)=0$。

- 还剩下需要证明，对于 $m\neq m'$ 或者 $n\neq n'$ 基函数与自身的积分为 0，同样用于三角函数族的正交性，只需要证明 $n\neq n'$ 的情况

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\boldsymbol{M}_{emn}\cdot\boldsymbol{M}_{emn'}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\boldsymbol{M}_{omn}\cdot\boldsymbol{M}_{omn'}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=0 \tag{35}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\boldsymbol{N}_{emn}\cdot\boldsymbol{N}_{emn'}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\boldsymbol{N}_{omn}\cdot\boldsymbol{N}_{omn'}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=0 \tag{36}$$

  以第一个式子为例，通过具体计算，可以发现关于 θ 的积分为

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{m^2}{\sin^2\theta}P_n^mP_{n'}^m+\frac{\mathrm{d}P_n^m}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}P_{n'}^m}{\mathrm{d}\theta}\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{37}$$

  当 $m\neq 0$ 时，利用连带勒让德函数的微分方程 (**??**)，可以将上式化简为

$$\int_0^{\pi}n(n+1)P_n^m(\cos\theta)P_{n'}^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P_{n'}^m}{\mathrm{d}\theta}P_n^m+\sin\theta\frac{\mathrm{d}P_n^m}{\mathrm{d}\theta}P_{n'}^m\right)\mathrm{d}\theta \tag{38}$$

  由连带勒让德函数的正交性可知第一个积分为 0, 第二个积分也容易计算得到为 0。当 $m=0$ 时有 $\boldsymbol{M}_{omn}=\boldsymbol{N}_{omn}=\boldsymbol{0}$，而 $\boldsymbol{M}_{emn}$ 和 $\boldsymbol{N}_{emn}$ 的正交性的证明与 $m\neq 0$ 时类似。

得到了上述正交关系后，可以计算展开系数：

$$B_{emn}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{M}_{emn}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|\boldsymbol{M}_{emn}|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi} \tag{39}$$

注意到式 (**??**) 中带有 $\cos\phi$ 和 $\sin\phi$，因此只有当 $m=1$ 时积分不为 0。

$$\boldsymbol{E}_i=\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{o1n}\boldsymbol{M}_{o1n}^{(1)}+A_{e1n}\boldsymbol{N}_{e1n}^{(1)}\right) \tag{40}$$

这里上标 (1) 表示选取球贝塞尔函数 j_n，这是由物理含义决定的，因为只有 $j_n(kr)$ 在 $r=0$ 处为有限值，而另外三种球函数在 $r=0$ 处发散。

通过一系列繁琐的计算，可以得到展开系数为

$$B_{o1n}=i^nE_0\frac{2n+1}{n(n+1)} \tag{41}$$

$$A_{e1n}=-iE_0i^n\frac{2n+1}{n(n+1)} \tag{42}$$

于是最终的平面波展开式为

$$\boldsymbol{E}_i=E_0\sum_{n=1}^{\infty}i^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\left(\boldsymbol{M}_{o1n}^{(1)}-i\boldsymbol{N}_{e1n}^{(1)}\right) \tag{43}$$

2.2.3 散射场与内部场计算

假设散射体是一个半径为 a 的均匀球体，入射波为上面的平面波，其磁场为:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_i = \frac{1}{i\omega\mu}\nabla\times\boldsymbol{E}_i &= \frac{1}{i\omega\mu}E_0\sum_{n=1}^{\infty}i^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\left(\nabla\times\boldsymbol{M}_{o1n}^{(1)} - i\nabla\times\boldsymbol{N}_{e1n}^{(1)}\right)\\ &= \frac{-k}{\omega\mu}E_0\sum_{n=1}^{\infty}i^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\left(\boldsymbol{M}_{e1n}^{(1)} + i\boldsymbol{N}_{o1n}^{(1)}\right)\end{aligned}\tag{44}$$

在分界面处有边界条件:

$$(\boldsymbol{E}_i + \boldsymbol{E}_s - \boldsymbol{E}_1)\times\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{H}_i + \boldsymbol{H}_s - \boldsymbol{H}_1)\times\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} = 0 \tag{45}$$

根据正交性条件，可以假定散射场和内部场的级数展开式:

$$\boldsymbol{E}_1 = \sum_{n=1}^{\infty}E_n\left(c_n\boldsymbol{M}_{o1n}^{(1)} - id_n\boldsymbol{N}_{e1n}^{(1)}\right) \tag{46}$$

$$\boldsymbol{H}_1 = \frac{-k_1}{\omega\mu_1}\sum_{n=1}^{\infty}E_n\left(d_n\boldsymbol{M}_{e1n}^{(1)} + ic_n\boldsymbol{N}_{o1n}^{(1)}\right) \tag{47}$$

其中 k_1 和 μ_1 是球体内部的波数和磁导率，$E_n = i^nE_0\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$。这里上标 (1) 表示选取球贝塞尔函数 j_n，同样是由物理含义决定的。

$$\boldsymbol{E}_s = \sum_{n=1}^{\infty}E_n\left(ia_n\boldsymbol{N}_{e1n}^{(3)} - b_n\boldsymbol{M}_{o1n}^{(3)}\right) \tag{48}$$

$$\boldsymbol{H}_s = \frac{k}{\omega\mu}\sum_{n=1}^{\infty}E_n\left(ib_n\boldsymbol{N}_{o1n}^{(3)} + a_n\boldsymbol{M}_{e1n}^{(3)}\right) \tag{49}$$

这里上标 (3) 表示选取球汉克尔函数 $h_n^{(1)}$。对于球外区域，$j_n(kr)$ 和 $y_n(kr)$ 均是良定义的，因此 $h_n^{(1)}(kr)$ 和 $h_n^{(2)}(kr)$ 也是良定义的，所以可以选取球汉克尔函数作为基函数。$h_n^{(1)}(kr)$ 在无穷远处表现为向外辐射的球面波，而 $h_n^{(2)}(kr)$ 则表现为向内辐射的球面波，因此只能选取 $h_n^{(1)}(kr)$。

为了方便起见，记 $\pi_n = \dfrac{P_n^1}{\sin\theta}$ 和 $\tau_n = \dfrac{\mathrm{d}P_n^1}{\mathrm{d}\theta}$，写出基函数的具体分量:

$$\boldsymbol{M}_{e1n} = -\sin\phi\pi_n(\cos\theta)z_n(\rho)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} - \cos\phi\tau_n(\cos\theta)z_n(\rho)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} \tag{50}$$

$$\boldsymbol{M}_{o1n} = \cos\phi\pi_n(\cos\theta)z_n(\rho)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi\tau_n(\cos\theta)z_n(\rho)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} \tag{51}$$

$$\boldsymbol{N}_{e1n} = n(n+1)\cos\phi\sin\theta\pi_n(\cos\theta)\frac{z_n(\rho)}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} + \cos\phi\tau_n(\cos\theta)\frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi\pi_n(\cos\theta)\frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} \tag{52}$$

$$\boldsymbol{N}_{o1n} = n(n+1)\sin\phi\sin\theta\pi_n(\cos\theta)\frac{z_n(\rho)}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} + \sin\phi\tau_n(\cos\theta)\frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\theta}} - \cos\phi\pi_n(\cos\theta)\frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\phi}} \tag{53}$$

为了解出系数 a_n, b_n, c_n, d_n，将上述场代入边界条件中，并利用基函数的正交性，可以得到在 $r = a$ 处有以下式子成立:

$$E_{i\theta} + E_{s\theta} = E_{1\theta}, \qquad E_{i\phi} + E_{s\phi} = E_{1\phi} \tag{54}$$

$$H_{i\theta} + H_{s\theta} = H_{1\theta}, \qquad H_{i\phi} + H_{s\phi} = H_{1\phi} \tag{55}$$

通过具体计算，可以得到四个方程:

$$j_n(rx)c_n + h_n^{(1)}(x)b_n = j_n(x) \tag{56}$$

$$\mu\left[rxj_n(rx)\right]'c_n + \mu_1\left[xh_n^{(1)}(x)\right]'c_n = \mu_1\left[xj_n(x)\right]' \tag{57}$$

$$\mu rj_n(rx)d_n + \mu_1h_n^{(1)}(x)a_n = \mu_1j_n(x) \tag{58}$$

$$\left[rxj_n(rx)\right]'d_n + r\left[xh_n^{(1)}(x)\right]'a_n = r\left[xj_n(x)\right]' \tag{59}$$

其中 $x=ka$，$r=\dfrac{k_1}{k}$。利用线性代数的知识可以解出系数：

$$a_n=\frac{\mu r^2 j_n(rx)\left[xj_n(x)\right]'-\mu_1 j_n(x)\left[rxj_n(rx)\right]'}{\mu r^2 j_n(rx)\left[xh_n^{(1)}(x)\right]'-\mu_1 h_n^{(1)}(x)\left[rxj_n(rx)\right]'} \tag{60}$$

$$b_n=\frac{\mu_1 j_n(rx)\left[xj_n(x)\right]'-\mu j_n(x)\left[rxj_n(rx)\right]'}{\mu_1 j_n(rx)\left[xh_n^{(1)}(x)\right]'-\mu h_n^{(1)}(x)\left[rxj_n(rx)\right]'} \tag{61}$$

$$c_n=\frac{\mu_1 j_n(x)\left[xh_n^{(1)}(x)\right]'-\mu_1 h_n^{(1)}(x)\left[xj_n(x)\right]' j_n(x)}{\mu_1 j_n(rx)\left[xh_n^{(1)}(x)\right]'-\mu h_n^{(1)}(x)\left[rxj_n(rx)\right]'} \tag{62}$$

$$d_n=\frac{\mu_1 r j_n(rx)\left[xh_n^{(1)}(x)\right]' j_n(x)-\mu_1 h_n^{(1)}(x)\left[xj_n(x)\right]'}{\mu r^2 j_n(rx)\left[xh_n^{(1)}(x)\right]'-\mu_1 h_n^{(1)}(x)\left[rxj_n(rx)\right]'} \tag{63}$$

2.3 柱坐标系