



计算电磁学

学习笔记

作者：曾申昊

组织：浙江大学

时间：February 5, 2025

目标：完成三种数值方法的学习

正在施工中！

目录

第一章 方程建立

定理 1.1 (Maxwell 方程组)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.4)$$



第二章 有限差分法

2.1 有限差分公式

有限差分法要求我们近似微分算子。为了计算函数在 x 点的一阶导数，我们有三种选择。

定理 2.1 (前向差分公式)

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.1)$$

定理 2.2 (后向差分公式)

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.2)$$


定理 2.3 (中心差分公式)

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2.3)$$

同样，我们可以用类似的方法来近似二阶导数。

定理 2.4 (中心差分公式)

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (2.4)$$

 **练习 2.1** 证明上述公式，并估计其精度。

解 基于一个非常朴素的想法，将 $f'(x)$ 代入定理 ??，就可以得到二阶导数的中心差分公式。

$$\begin{aligned} f''(x) &\approx \frac{f'(x + \frac{\Delta x}{2}) - f'(x - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} \\ &\approx \frac{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

由 Taylor 展开，我们有

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}(\Delta x)^2 + \frac{f'''(x)}{6}(\Delta x)^3 + \dots \\ f(x - \Delta x) &= f(x) - f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}(\Delta x)^2 - \frac{f'''(x)}{6}(\Delta x)^3 + \dots \end{aligned}$$

两式相加，我们有

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = 2f(x) + f''(x)(\Delta x)^2 + O((\Delta x)^4)$$

故

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)$$

因此该公式具有二阶精度。

对于其他差分公式，我们同样可以利用 Taylor 展开来估计精度。

2.2 一维问题分析

以一维波动方程和波动方程为例，简要介绍有限差分法的具体求解操作，并对其稳定性和数值色散进行分析。

2.2.1 扩散方程的求解

定理 2.5 (扩散方程)

当媒质有很大的导体损耗时，其中的传导电流远大于位移电流，因此可忽略位移电流，由此得到电场所满足的二阶偏微分方程为

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{J}}_i}{\partial t} \quad (2.5)$$

对于一维情况，假设 \mathcal{J}_i 和 \mathcal{E} 只有 z 方向分量且只在 x 方向上有变化，我们有

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial x^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} = \mu \frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial t} \quad (2.6)$$

 **练习 2.2** 推导上述方程。

定义 2.1

首先将 x 轴均分成许多小段，记为 $x = i\Delta x$ ，其中 $i = 0, 1, 2, \dots, M$ 。类似的，将时间轴均分成许多小段，记为 $t = n\Delta t$ ，其中 $n = 0, 1, 2, \dots, N$ 。 $\mathcal{E}_z(x, t)$ 可以写为

$$\mathcal{E}_z(x, t) = \mathcal{E}_z(i\Delta x, n\Delta t) \equiv \mathcal{E}_z^n(i) \quad (2.7)$$

定理 2.6 (时间步进公式)

对 x 的二阶导数应用中心差分公式，并对时间的一阶导数应用前向差分公式，我们有

$$\mathcal{E}_z^{n+1}(i) = \mathcal{E}_z^n(i) + \frac{\Delta t}{\mu\sigma(\Delta x)^2} \left[\mathcal{E}_z^n(i+1) - 2\mathcal{E}_z^n(i) + \mathcal{E}_z^n(i-1) \right] - \frac{1}{\sigma} \left[\mathcal{J}_z^{n+1}(i) - \mathcal{J}_z^n(i) \right] \quad (2.8)$$

 **练习 2.3** 推导上述方程。

解 由式(??)，我们有

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial x^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} = \mu \frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial t}$$

对 x 的二阶导数应用中心差分公式，对时间的一阶导数应用前向差分公式，我们有

$$\frac{\mathcal{E}_z^n(i+1) - 2\mathcal{E}_z^n(i) + \mathcal{E}_z^n(i-1)}{(\Delta x)^2} - \mu\sigma \frac{\mathcal{E}_z^{n+1}(i) - \mathcal{E}_z^n(i)}{\Delta t} = \mu \frac{\mathcal{J}_z^{n+1}(i) - \mathcal{J}_z^n(i)}{\Delta t}$$

整理得

$$\mathcal{E}_z^{n+1}(i) = \mathcal{E}_z^n(i) + \frac{\Delta t}{\mu\sigma(\Delta x)^2} \left[\mathcal{E}_z^n(i+1) - 2\mathcal{E}_z^n(i) + \mathcal{E}_z^n(i-1) \right] - \frac{1}{\sigma} \left[\mathcal{J}_z^{n+1}(i) - \mathcal{J}_z^n(i) \right]$$

由于在时间维上使用的是前向差分公式，所以该公式具有一阶精度。

为了通过定理 ?? 求解扩散方程，我们还需要关于边界条件的信息。通常遇到的边界条件为 Dirichlet 条件和 Neumann 条件。

定理 2.7 (Dirichlet 条件)

Dirichlet 条件给定了边界处的场值，如在本例中， $x = 0$ 处的值给定为

$$\mathcal{E}_z(x = 0, t) = p(t) \quad (2.9)$$

对于此条件，边界值已知，无须计算。

定理 2.8 (Neumann 条件)

Neumann 条件规定了边界处的法向导数值，可表示为

$$\left. \frac{\partial \mathcal{E}_z(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = q(t) \quad (2.10)$$

使用中心差分离散，其结果为

$$\mathcal{E}_z^n(-1) = \mathcal{E}_z^n(1) - 2\Delta x q^n \quad (2.11)$$

它可以用来计算 $\mathcal{E}_z^{n+1}(0)$ 。

**2.2.2 波动方程的求解****定理 2.9 (波动方程)**

当介质为无耗的时，其电场满足下面的二阶偏微分方程

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{J}}_i}{\partial t} \quad (2.12)$$

对于一维情况，假设 \mathcal{J}_i 和 \mathcal{E} 只有 z 方向分量且只在 x 方向上有变化，我们有

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial x^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial t} \quad (2.13)$$



练习 2.4 推导上述方程。

定理 2.10 (时间步进公式)

将空间和时间按照前面描述的方法均匀离散，并对空间和时间导数应用中心差分，则可以得到

$$\mathcal{E}_z^{n+1}(i) = 2\mathcal{E}_z^n(i) - \mathcal{E}_z^{n-1}(i) + \frac{(\Delta t)^2}{\mu \epsilon (\Delta x)^2} \left[\mathcal{E}_z^n(i+1) - 2\mathcal{E}_z^n(i) + \mathcal{E}_z^n(i-1) \right] - \frac{\Delta t}{2\epsilon} \left[\mathcal{J}_z^{n+1}(i) - \mathcal{J}_z^{n-1}(i) \right] \quad (2.14)$$



练习 2.5 推导上述方程。

解 由式(??)，我们有

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial x^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial t}$$

对 x 和时间的二阶导数应用中心差分公式，我们有

$$\frac{\mathcal{E}_z^n(i+1) - 2\mathcal{E}_z^n(i) + \mathcal{E}_z^n(i-1)}{(\Delta x)^2} - \mu \epsilon \frac{\mathcal{E}_z^{n+1}(i) - 2\mathcal{E}_z^n(i) + \mathcal{E}_z^{n-1}(i)}{(\Delta t)^2} = \mu \frac{\mathcal{J}_z^{n+1}(i) - \mathcal{J}_z^{n-1}(i)}{2\Delta t}$$

整理得

$$\mathcal{E}_z^{n+1}(i) = 2\mathcal{E}_z^n(i) - \mathcal{E}_z^{n-1}(i) + \frac{(\Delta t)^2}{\mu \epsilon (\Delta x)^2} \left[\mathcal{E}_z^n(i+1) - 2\mathcal{E}_z^n(i) + \mathcal{E}_z^n(i-1) \right] - \frac{\Delta t}{2\epsilon} \left[\mathcal{J}_z^{n+1}(i) - \mathcal{J}_z^{n-1}(i) \right]$$

由于所有数值微分都使用了中心差分公式，因此该公式具有二阶精度。

2.2.3 稳定性分析

从前面介绍的扩散方程和波动方程的有限差分公式中不难看出，在有限差分中，需要选择合适的 Δx 和 Δt ，因此必要对时间步进公式进行稳定性分析。

笔记 通常来说，若关注的最高频率为 f_{\max} ，其相应波长为 $\lambda_{\min} = \frac{c}{f_{\max}}$ ，周期为 $T_{\min} = \frac{1}{f_{\max}}$ ，则 Δx 和 Δt 的选择应满足 $\Delta x < \frac{\lambda_{\min}}{20}$ 和 $\Delta t < \frac{T_{\min}}{20}$ 。当然，这些值的具体选择应根据特定的问题及所需的精度确定。

为了说明稳定性分析的过程，以定理 ?? 为例。若丢掉源项，则由能量守恒得知，求解区域中的场的能量不应该随时间增加。实际上，由于介质损耗，其能量应该减少。这一点是**稳定性分析**的基础。

为了考察场的能量，首先把场展开为 Fourier 级数

$$\mathcal{E}_z^n(i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^n e^{jk_m i \Delta x}, \quad k_m = \frac{m\pi}{L} \quad (2.15)$$

式中, $L = M\Delta x$ 表示求解区域的长度。众所周知, 场的能量正比于各 Fourier 模式幅度的平方和。因此, 为了确保能量不随 n 的增加而增加, 可以检查 Fourier 模式的幅度。

定义 2.2

定义一个放大因子 g_m , 用于描述场的幅度经过一个时间步长后的变化

$$g_m = \frac{A_m^{n+1}}{A_m^n} \quad (2.16)$$

定理 2.11 (稳定性条件)

为了保证场的能量不随时间增加, 对所有 k_m , 均有 $|g_m| \leq 1$ 。在此条件下, 场的能量可保证不会随 n 的增加而增加, 因而时间步进过程将是稳定的。

定理 2.12 (扩散方程稳定性条件)

对于定理 ?? 给出的公式, 我们有以下稳定性条件

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \mu \sigma (\Delta x)^2 \quad (2.17)$$

练习 2.6 证明上述稳定性条件。

解 由定理 ??, 我们可以得到其无源项的形式

$$\mathcal{E}_z^{n+1}(i) = \mathcal{E}_z^n(i) + \frac{\Delta t}{\mu \sigma (\Delta x)^2} \left[\mathcal{E}_z^n(i+1) - 2\mathcal{E}_z^n(i) + \mathcal{E}_z^n(i-1) \right]$$

将其代入式 (??), 我们有

$$A_m^{n+1} = A_m^n + \frac{\Delta t}{\mu \sigma (\Delta x)^2} \left[e^{jk_m \Delta x} - 2 + e^{-jk_m \Delta x} \right] A_m^n$$

整理得

$$\begin{aligned} g_m &= 1 + \frac{\Delta t}{\mu \sigma (\Delta x)^2} \left[2 \cos(k_m \Delta x) - 2 \right] \\ &= 1 - 4 \frac{\Delta t}{\mu \sigma (\Delta x)^2} \sin^2 \left(\frac{k_m \Delta x}{2} \right) \\ &\in \left[1 - 4 \frac{\Delta t}{\mu \sigma (\Delta x)^2}, 1 \right] \end{aligned}$$

因此, 为保证 $|g_m| \leq 1$, 必须有

$$1 - 4 \frac{\Delta t}{\mu \sigma (\Delta x)^2} \geq -1 \quad \text{即} \quad \Delta t \leq \frac{1}{2} \mu \sigma (\Delta x)^2$$

定理 2.13 (波动方程稳定性条件)

对于定理 ?? 给出的公式, 我们有以下稳定性条件

$$\Delta t \leq \Delta x \sqrt{\mu \epsilon} \quad (2.18)$$

练习 2.7 证明上述稳定性条件。

解 由定理 ??, 我们可以得到其无源项的形式

$$\mathcal{E}_z^{n+1}(i) = 2\mathcal{E}_z^n(i) - \mathcal{E}_z^{n-1}(i) + \frac{(\Delta t)^2}{\mu \epsilon (\Delta x)^2} \left[\mathcal{E}_z^n(i+1) - 2\mathcal{E}_z^n(i) + \mathcal{E}_z^n(i-1) \right]$$

将其代入式 (??)，我们有

$$\begin{aligned} A_m^{n+1} &= 2A_m^n - A_m^{n-1} + \frac{(\Delta t)^2}{\mu\epsilon(\Delta x)^2} [2\cos(k_m\Delta x) - 2]A_m^n \\ &= 2A_m^n - A_m^{n-1} - 4\frac{(\Delta t)^2}{\mu\epsilon(\Delta x)^2} \sin^2\left(\frac{k_m\Delta x}{2}\right)A_m^n \end{aligned}$$

我们作以下假设

$$g_m = \frac{A_m^{n+1}}{A_m^n} = \frac{A_m^n}{A_m^{n-1}}$$

代入得

$$\begin{aligned} g_m &= 2 - \frac{1}{g_m} - 4\frac{(\Delta t)^2}{\mu\epsilon(\Delta x)^2} \sin^2\left(\frac{k_m\Delta x}{2}\right) \\ g_m^2 - 2\alpha_m g_m + 1 &= 0 \quad \text{其中 } \alpha_m = 1 - 2\frac{(\Delta t)^2}{\mu\epsilon(\Delta x)^2} \\ g_m &= \alpha_m \pm \sqrt{\alpha_m^2 - 1} \end{aligned}$$

因此，为保证 $|g_m| \leq 1$ ，必须有 $\alpha_m^2 \leq 1$

$$1 - 2\frac{(\Delta t)^2}{\mu\epsilon(\Delta x)^2} \geq -1 \quad \text{即 } \Delta t \leq \Delta x\sqrt{\mu\epsilon}$$

命题 2.1

如果在定理 ?? 中对时间的导数使用中心差分近似，我们可以获得二阶精度的时间步进公式，即

$$\mathcal{E}_z^{n+1}(i) = \mathcal{E}_z^{n-1}(i) + \frac{2\Delta t}{\mu\sigma(\Delta x)^2} \left[\mathcal{E}_z^n(i+1) - 2\mathcal{E}_z^n(i) + \mathcal{E}_z^n(i-1) \right] - \frac{1}{\sigma} \left[\mathcal{J}_z^{n+1}(i) - \mathcal{J}_z^{n-1}(i) \right] \quad (2.19)$$

但该公式在任意步长下都是不稳定的。

 **练习 2.8** 证明上述命题。

解 通过相似的推导，我们可以得到

$$g_m^2 + 2\alpha_m g_m - 1 = 0 \quad \text{其中 } \alpha_m = \frac{4\Delta t}{\mu\sigma(\Delta x)^2} \sin^2\left(\frac{k_m\Delta x}{2}\right)$$

其解为

$$g_m = -\alpha_m \pm \sqrt{\alpha_m^2 + 1}$$

对于任意 α_m ，总有 $|g_m| > 1$ ，说明该公式总是不稳定的。

2.2.4 数值色散分析

当有限差分法用于模拟波的传播时，由于数值离散，模拟的波速与波速的物理真实值略有不同。这将导致波解的相位出现误差，这种现象称为**数值色散**，其造成的误差称为数值相位误差。

定理 2.14 (一维数值色散)

对于一维波动方程，假设平面波沿 x 方向传播，其解析表达式为

$$\mathcal{E}_z(x, t) = \text{Re} \left[E_0 e^{j(\omega t - kx)} \right] \quad (2.20)$$

在有限差分网格上，数值离散的波可以表示为

$$\mathcal{E}_z^n(i) = \text{Re} \left[E_0 e^{j(\omega n\Delta t - \tilde{k}i\Delta x)} \right] \quad (2.21)$$

则该公式的数值相位误差为

$$\frac{\tilde{k} - k}{k} \approx \frac{1}{24} \left[(k\Delta x)^2 - (\omega\Delta t)^2 \right] \quad (2.22)$$

 **练习 2.9** 证明上述定理。

解 将式 (??) 代入定理 ?? 中的无源项形式

$$\mathcal{E}_z^{n+1}(i) = 2\mathcal{E}_z^n(i) - \mathcal{E}_z^{n-1}(i) + \frac{(\Delta t)^2}{\mu\epsilon(\Delta x)^2} \left[\mathcal{E}_z^n(i+1) - 2\mathcal{E}_z^n(i) + \mathcal{E}_z^n(i-1) \right]$$

我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_z^{n+1}(i) + \mathcal{E}_z^{n-1}(i) &= 2\mathcal{E}_z^n(i) - 2\frac{(\Delta t)^2}{\mu\epsilon(\Delta x)^2} \mathcal{E}_z^n(i) + \frac{(\Delta t)^2}{\mu\epsilon(\Delta x)^2} \left[\mathcal{E}_z^n(i+1) + \mathcal{E}_z^n(i-1) \right] \\ \begin{cases} \text{LHS} = \text{Re} \left[E_0 e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{k} i \Delta x)} \right] 2 \cos(\omega \Delta t) \\ \text{RHS} = \text{Re} \left[E_0 e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{k} i \Delta x)} \right] \left[2 - 2\frac{(\Delta t)^2}{\mu\epsilon(\Delta x)^2} + 2\frac{(\Delta t)^2}{\mu\epsilon(\Delta x)^2} \cos(\tilde{k} \Delta x) \right] \end{cases} \end{aligned}$$

整理得

$$\cos(\omega \Delta t) = (1 - r) + r \cos(\tilde{k} \Delta x) \quad \text{其中 } r = \frac{(\Delta t)^2}{\mu\epsilon(\Delta x)^2}$$

解方程可得到数值波数的精确解

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta x} \arccos \left(1 - \frac{2}{r} \sin^2 \frac{\omega \Delta t}{2} \right)$$

为了得到更明确的表达式, 可把余弦函数用级数展开式的前三项近似表示, 得到


$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2}(\omega \Delta t)^2 + \frac{1}{24}(\omega \Delta t)^4 &\approx (1 - r) + r \left(1 - \frac{1}{2}(\tilde{k} \Delta x)^2 + \frac{1}{24}(\tilde{k} \Delta x)^4 \right) \\ -\frac{1}{2}(\omega \Delta t)^2 + \frac{1}{24}(\omega \Delta t)^4 &\approx r \left(-\frac{1}{2}(\tilde{k} \Delta x)^2 + \frac{1}{24}(\tilde{k} \Delta x)^4 \right) \\ k^2 - \frac{1}{12}k^2(\omega \Delta t)^2 &\approx \tilde{k}^2 - \frac{1}{12}\tilde{k}^2(\tilde{k} \Delta x)^2 \\ \frac{\tilde{k} - k}{k} &\approx \frac{1}{24} \left[(k \Delta x)^2 - (\omega \Delta t)^2 \right] \end{aligned}$$

例题 2.1 若选择 $\Delta t = \Delta x \sqrt{\mu\epsilon}$, 则数值波数 \tilde{k} 将与波数真实值 k 相同。

例题 2.2 若选择 $\Delta t = 0.5 \Delta x \sqrt{\mu\epsilon}$, 这两个波数之间将有微小的差别

$$\frac{\tilde{k} - k}{k} \approx \frac{1}{32} (k \Delta x)^2 = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\Delta x}{\lambda} \right)^2$$

上式表明此误差随着 $\frac{\Delta x}{\lambda}$ 二次衰减, 误差二阶收敛。

 **笔记** 另外需要指出, 一维的波传播是一个特殊问题, 因为此时的波传播方向是固定的。在这种情况下, 我们总是可以选择适当的 Δt , 以消除相位误差。而对于二维和三维的问题, 情况则完全不同, 此时的波传播方向通常是未知的且随空间位置而变化, 因此一般不能通过调整 Δt 来消除相位误差。

2.3 二维分析

2.3.1 时域分析

定理 2.15 (电场方程)

一般情形下, 电场所满足的二阶微分方程为

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{J}}_i}{\partial t} \quad (2.23)$$

对于二维情况，假设源和媒质沿轴是均匀的，因此源所产生的场在 z 方向上没有变化。若源是 z 方向的电流源，则其产生的电场只有 z 分量。由此，我们有

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial y^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} = \mu \frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial t} \quad (2.24)$$

定义 2.3

将求解区域用矩形框围住，再把它划分成尺寸为 $\Delta x \times \Delta y$ 的许多小矩形，每个网格点可以用一对整数 (i, j) 表示。类似一维情形，我们作以下简写

$$\mathcal{E}_z(x, y, t) = \mathcal{E}_z(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t) \equiv \mathcal{E}_z^n(i, j) \quad (2.25)$$

定理 2.16 (时间步进公式)

对 x 和 y 的二阶导数应用中心差分公式，对时间的一阶和二阶导数应用中心差分公式，我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_z^{n+1}(i, j) = & \left[\frac{\mu\sigma_{ij}}{2\Delta t} + \frac{\mu\epsilon_{ij}}{(\Delta t)^2} \right]^{-1} \left\{ 2\mathcal{E}_z^n(i, j) \left[\frac{\mu\epsilon_{ij}}{(\Delta t)^2} - \frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{(\Delta y)^2} \right] \right. \\ & + \mathcal{E}_z^{n-1}(i, j) \left[\frac{\mu\sigma_{ij}}{2\Delta t} - \frac{\mu\epsilon_{ij}}{(\Delta t)^2} \right] + \frac{1}{(\Delta x)^2} [\mathcal{E}_z^n(i+1, j) + \mathcal{E}_z^n(i-1, j)] \\ & + \frac{1}{(\Delta y)^2} [\mathcal{E}_z^n(i, j+1) + \mathcal{E}_z^n(i, j-1)] \\ & \left. - \frac{\mu}{2\Delta t} [\mathcal{J}_z^{n+1}(i, j) - \mathcal{J}_z^{n-1}(i, j)] \right\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

 **练习 2.10** 推导上述方程。

解 由式(??)，我们有

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial y^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} = \mu \frac{\partial \mathcal{J}_z}{\partial t}$$

对 x 和 y 的二阶导数应用中心差分公式，对时间的一阶和二阶导数应用中心差分公式，我们有

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{E}_z^n(i+1, j) - 2\mathcal{E}_z^n(i, j) + \mathcal{E}_z^n(i-1, j)}{(\Delta x)^2} + \frac{\mathcal{E}_z^n(i, j+1) - 2\mathcal{E}_z^n(i, j) + \mathcal{E}_z^n(i, j-1)}{(\Delta y)^2} \\ & - \mu\epsilon_{ij} \frac{\mathcal{E}_z^{n+1}(i, j) - 2\mathcal{E}_z^n(i, j) + \mathcal{E}_z^{n-1}(i, j)}{(\Delta t)^2} - \mu\sigma_{ij} \frac{\mathcal{E}_z^{n+1}(i, j) - \mathcal{E}_z^{n-1}(i, j)}{2\Delta t} \\ & = \mu \frac{\mathcal{J}_z^{n+1}(i, j) - \mathcal{J}_z^{n-1}(i, j)}{2\Delta t} \end{aligned}$$

整理后可得到时间步进公式。由于所有数值微分都使用了中心差分公式，因此该公式具有二阶精度。

定理 2.17 (稳定性条件)

对于定理 ?? 给出的公式，我们有以下稳定性条件

$$\Delta t \leq \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}}} \quad (2.27)$$

 **练习 2.11** 证明上述定理。

定理 2.18 (二维数值色散)

对于定理 ?? 给出的公式，其数值相位误差为

$$\frac{\tilde{k} - k}{k} \approx \frac{1}{24} \left[(k\Delta x)^2 \cos^4 \phi^i + (k\Delta y)^2 \sin^4 \phi^i - (\omega\Delta t)^2 \right] \quad (2.28)$$

其中 ϕ^i 为波传播方向与 x 轴的夹角。

 **练习 2.12** 证明上述定理。

例题 2.3 若选择 $\Delta x = \Delta y = h$ 和 $\Delta t = \frac{0.5h}{c}$, 则数值相位误差为

$$\frac{\tilde{k} - k}{k} \approx \frac{(kh)^2}{24} \left[\cos^4 \phi^i + \sin^4 \phi^i - \frac{1}{4} \right] = \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 \left[2 + \cos(4\phi^i) \right]$$

显然, 此相位误差是传播角度的函数。当波沿对角线方向传播时, 该误差最小。

2.3.2 频域分析

有限差分法也可以用于求解频域 Maxwell 方程组。

定理 2.19 (电场方程)

对定理 ?? 中给出的公式作 Fourier 变化, 可以得到电场满足的频域表达式

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} + j\omega \mu \sigma \vec{E} = -j\omega \mu \vec{J}_i \quad (2.29)$$

对于二维情况, 对源和媒质作与上述定理中同样的假设, 我们有

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \omega^2 \mu \epsilon E_z - j\omega \mu \sigma E_z = j\omega \mu J_z \quad (2.30)$$

定义记号 $g = j\omega \mu J_z$ 和 $\epsilon_c = 1 - \frac{j\sigma}{\omega \epsilon}$, 方程可简化为

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k^2 \epsilon_c E_z = g \quad (2.31)$$


 **练习 2.13** 推导上述方程。

定理 2.20

对于定理 ?? 给出的公式作中心差分可以得到五点差分格式的方程

$$\frac{E_z(i+1, j) - 2E_z(i, j) + E_z(i-1, j))}{(\Delta x)^2} + \frac{E_z(i, j-1) - 2E_z(i, j) + E_z(i, j+1))}{(\Delta y)^2} + k^2 \epsilon_c E_z(i, j) = g(i, j) \quad (2.32)$$

对于每个网格点, 我们都可以得到类似的方程, 其场值均可以采用式 (??) 表示。由此得到一组线性方程组, 在给定的边界条件下同时求解整个线性方程组, 即可求得网格点的场值。

 **笔记** 由于 Fourier 变换消除了时间变量, 因此我们得到的是一个仅和位置有关的式子, 可以直接求解线性方程组, 而不需要通过时间步进公式迭代。

线性方程组的求解一般有两类方法。

- 直接法
 - Gauss 消元法
 - LU 分解法
 - Cholesky 分解法
- 迭代法
 - Jacobi 迭代法
 - Gauss-Seidel 迭代法
 - SOR 迭代法
 - 共轭梯度法

2.4 Yee 网格

虽然上节中所描述的有限差分法扩展到三维问题会遇到一些严重的问题。这些问题的产生来自于传统的有限差分法在网格点的采样。

- 当网格点位于两种不同媒质的分界面上时，为了保证切向场的连续和法向场的不连续，需要进行相当烦琐的处理。
- 当一个网格点位于导体或媒质的边缘或拐角时，这一点的法向没有明确的定义，而其场分量可能是无限大的，即奇异的，因此这个网格点处的场值无法精确描述。

而 Yee 网格作为一种独特的离散方法，成功地解决了这些问题。

2.4.1 二维分析

定理 2.21

重新考虑二维电磁问题。对于源为 $\vec{J}_i = \vec{z} J_z$ 的二维问题，其 Maxwell 方程组可简化为

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial t} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial t} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} = \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} + \sigma \mathcal{E}_z + J_z \quad (2.35)$$

把求解区域围在一个矩形区域内，然后把区域均匀离散成许多小矩形单元。每个单元的中心用一对整数 (i, j) 表示，在这个点上采样 \mathcal{E}_z 。而磁场分量则沿着矩形单元的边采样。通过在 $t = n\Delta t$ 时刻采样电场，而在 $t = (n + \frac{1}{2})\Delta t$ 时刻采样磁场。

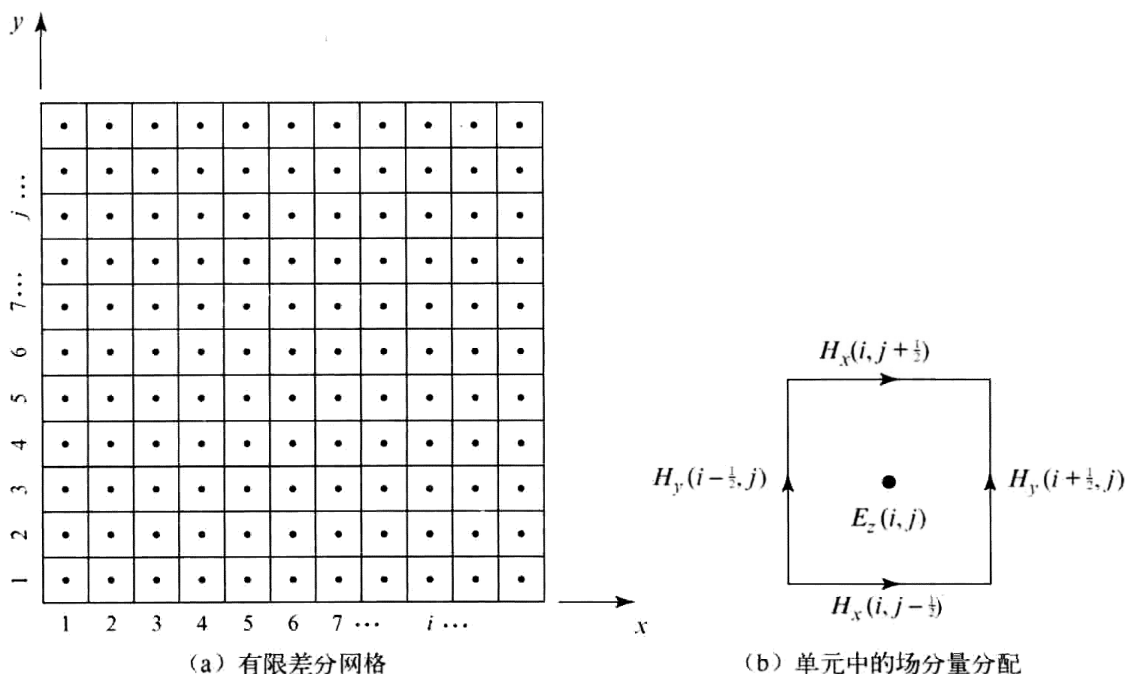


图 2.1: Yee 网格有限差分算法

定理 2.22

对于 Yee 网格，式 (??)，式 (??) 和式 (??) 的时间步进公式分别为

$$\mathcal{H}_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right)=\mathcal{H}_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right)-\frac{\Delta t}{\mu \Delta y}\left[\mathcal{E}_z^n(i, j+1)-\mathcal{E}_z^n(i, j)\right] \quad (2.36)$$

$$\mathcal{H}_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right)=\mathcal{H}_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right)-\frac{\Delta t}{\mu \Delta y}\left[\mathcal{E}_z^n(i+1, j)-\mathcal{E}_z^n(i, j)\right] \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_z^{n+1}(i, j)=\frac{1}{\beta(i, j)}\left\{\alpha(i, j) \mathcal{E}_z^n(i, j)+\frac{1}{\Delta x}\left[\mathcal{H}_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right)-\mathcal{H}_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j\right)\right]\right. \\ \left.-\frac{1}{\Delta y}\left[\mathcal{H}_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right)-\mathcal{H}_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}\right)\right]-\mathcal{J}_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j)\right\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

其中 $\alpha(i, j)=\frac{\epsilon}{\Delta t}-\frac{\sigma}{2}$, $\beta(i, j)=\frac{\epsilon}{\Delta t}+\frac{\sigma}{2}$ 。



 **练习 2.14** 推导上述方程。


解 以式 (??) 为例，对时间采用中心差分，我们有

$$\frac{\mathcal{E}_z^n(i, j+1)-\mathcal{E}_z^n(i, j)}{\Delta y}=-\mu \frac{\mathcal{H}_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right)-\mathcal{H}_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t}$$


整理得

$$\mathcal{H}_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right)=\mathcal{H}_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right)-\frac{\Delta t}{\mu \Delta y}\left[\mathcal{E}_z^n(i, j+1)-\mathcal{E}_z^n(i, j)\right]$$

对于给定 \mathcal{E}_z 、 \mathcal{H}_x 及 \mathcal{H}_y 的初值和适当的边界条件，可以用式 (??) 和式 (??) 计算 \mathcal{H}_x 和 \mathcal{H}_y ，然后用式 (??) 计算 \mathcal{E}_z 。

 **笔记** Yee 网格的一个重要特点是，场和磁场的空间网格错开了半个网格点，在时间采样点上也错开半个时间步。更重要的是，磁场分量的采样在矩形单元的边缘： \mathcal{H}_x 在与 x 平行的边缘上采样； \mathcal{H}_y 在与 y 平行的边缘上采样。这种采样方式保证了场的唯一定义，并且自动确保了切向场的连续性。

基于式 (??) 和式 (??) 的时间步进公式称为蛙跳时间积分。

 **练习 2.15** 从积分形式的 Maxwell 方程组出发，推导 Yee 网格的时间步进公式。

2.4.2 三维分析

Yee 网格有限差分算法可直接从二维扩展到三维。

定理 2.23

考虑时域 Maxwell 方程组

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}=-\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \quad (2.39)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}}=\epsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}+\sigma \vec{\mathcal{E}}+\vec{\mathcal{J}}_i \quad (2.40)$$

这两个矢量方程可以写成 6 个标量方程

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial t} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial t} \quad (2.42)$$

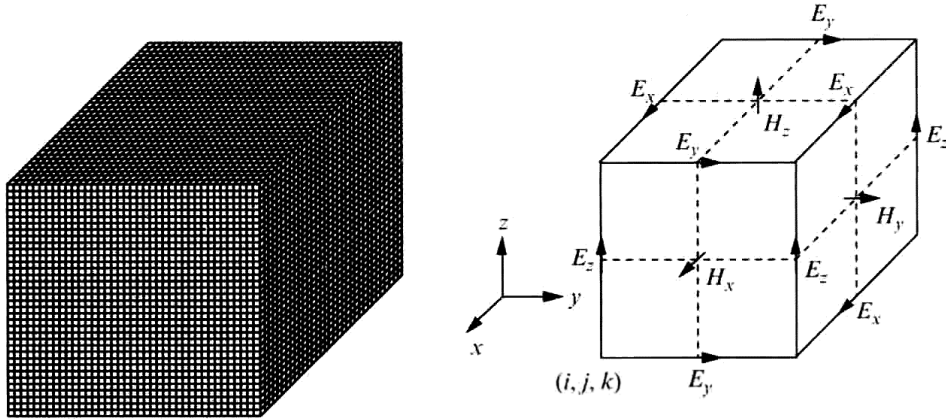
$$\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial t} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} + \sigma \mathcal{E}_x + \mathcal{J}_x \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t} + \sigma \mathcal{E}_y + \mathcal{J}_y \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} = \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} + \sigma \mathcal{E}_z + \mathcal{J}_z \quad (2.46)$$

用一个立方体包围体积 V ，再把这个立方体盒子分成许多小立方体单元。然后，在单元每条边的中心位置对电场分量采样，在单元每个面的中心位置对磁场分量采样。若将整个网格在每个方向上偏移半个单元，则磁场分量的采样点将在单元每条边的中心，而电场分量的采样点将在单元每个面的中心。



(a) 计算区域离散为多个小立方体网格

(b) 网格单元上的场分量的采样

图 2.2: Yee 网格有限差分算法

定理 2.24

待完成

定理 2.25 (稳定性条件)

保证时间步进的稳定性，其时间步长应满足稳定性条件

$$\Delta t \leq \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \quad (2.47)$$

定理 2.26 (三维数值色散)

将数值色散误差公式拓展到三维情况，其表达式为

$$\frac{\tilde{k} - k}{k} \approx \frac{1}{24} \left\{ \left[(k\Delta x)^2 \cos^4 \phi^i + (k\Delta y)^2 \sin^4 \phi^i \right] \sin^4 \theta^i + (k\Delta z)^2 \cos^4 \theta^i - (\omega\Delta t)^2 \right\} \quad (2.48)$$

其中 (ϕ^i, θ^i) 表示波的传播方向。

例题 2.4 若选择 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$ 和 $\Delta t = \frac{0.5h}{c}$, 则数值相位误差为

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{k} - k}{k} &\approx \frac{(kh)^2}{24} \left\{ \left[\cos^4 \phi^i + \sin^4 \phi^i \right] \sin^4 \theta^i + \cos^4 \theta^i - \frac{1}{4} \right\} \\ &= \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 \left\{ \left[\cos^4 \phi^i + \sin^4 \phi^i \right] \sin^4 \theta^i + \cos^4 \theta^i - \frac{1}{4} \right\}\end{aligned}$$

2.5 吸收边界条件

使用有限差分法求解无界电磁问题时需要将无限的计算空间截断成有限的计算区域。为了实现这种截断, 我们一般引入一个人工表面以包围所感兴趣的计算区域, 该人工截断面应该尽可能地吸收入射到截断面的波, 以减少任何人为造成的反射。

2.5.1 一维吸收边界条件

假定求解区域无界 $-\infty < x < \infty$, 但源限定在有限的区域内 ($a \leq x \leq b$)。该源将在 $x > b$ 区域产生沿 x 正方向传播的波, 在 $x < a$ 区域产生沿 x 负方向传播的波。

使用有限差分求解这个问题, 我们将无限求解区域截断为有限区域 $[A, B]$, 其中 $A < a$ 且 $B > b$ 。接下来, 我们希望建立一个边界条件, 使得波能透过 $x = A$ 和 $x = B$ 这两个人为设置的截断面而没有任何反射。

定理 2.27 (一维吸收边界条件)

以 $x = B$ 点为例, 一维吸收边界条件为

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_z(x, t)}{\partial t} \quad (2.49)$$

练习 2.16 证明上述公式。

解 在 $x = B$ 处, 波向 x 正方向传播, 其频域方程为

$$E_z(x) = E_0 e^{-jkx}$$

其中, E_0 为未知量, $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$, 对其求导得

$$\frac{\partial E_z(x)}{\partial x} = -jk E_0 e^{-jkx} = -jk E_z(x) = -\frac{j\omega}{c} E_z(x)$$

作 Fourier 逆变换, 得到

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_z(x, t)}{\partial t}$$

定理 2.28 (边界时间步进公式)

以 $x = B$ 点为例, 使用后向差分离散对 x 的导数, 而使用前向差分离散对 t 的导数, 得到

$$\mathcal{E}_z^{n+1}(M) = \mathcal{E}_z^n(M) - \frac{c \Delta t}{\Delta x} \left[\mathcal{E}_z^n(M) - \mathcal{E}_z^n(M-1) \right] \quad (2.50)$$

其稳定性条件为 $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}$ 。

练习 2.17 证明上述公式。

解 由定理 ??, 我们有

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_z(x, t)}{\partial t}$$

使用后向差分离散对 x 的导数, 而使用前向差分离散对 t 的导数, 得到

$$\frac{\mathcal{E}_z^n(M) - \mathcal{E}_z^n(M-1)}{\Delta x} = -\frac{1}{c} \frac{\mathcal{E}_z^{n+1}(M) - \mathcal{E}_z^n(M)}{\Delta t}$$

整理得

$$\mathcal{E}_z^{n+1}(M) = \mathcal{E}_z^n(M) - \frac{c\Delta t}{\Delta x} \left[\mathcal{E}_z^n(M) - \mathcal{E}_z^n(M-1) \right]$$

定理 2.29 (边界时间步进公式)

以 $x = B$ 点为例, 使用中心差分离散对 x 和 t 的导数, 得到

$$\mathcal{E}_z^{n+1}(M) = \mathcal{E}_z^n(M-1) - \frac{\Delta x - c\Delta t}{\Delta x + c\Delta t} \left[\mathcal{E}_z^n(M) - \mathcal{E}_z^{n+1}(M-1) \right] \quad (2.51)$$

此式是无条件稳定的。

练习 2.18 证明上述公式。

解 由定理 ??, 我们有

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_z(x, t)}{\partial t}$$

在 $x = \left(M - \frac{1}{2}\right) \Delta x$ 和 $t = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta t$ 处采用具有二阶精度的中心差分, 得到

$$\frac{\mathcal{E}_z^{n+\frac{1}{2}}(M) - \mathcal{E}_z^{n+\frac{1}{2}}(M-1)}{\Delta x} = -\frac{1}{c} \frac{\mathcal{E}_z^{n+1}\left(M - \frac{1}{2}\right) - \mathcal{E}_z^n\left(M - \frac{1}{2}\right)}{\Delta t}$$

使用场值在半网格点及半时间步的平均值, 可以得到二阶精度的时间步进公式

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}_z^{n+1}(M) - \mathcal{E}_z^{n+1}(M-1)}{\Delta x} + \frac{\mathcal{E}_z^n(M) - \mathcal{E}_z^n(M-1)}{\Delta x} \right) = -\frac{1}{c} \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}_z^{n+1}(M-1) - \mathcal{E}_z^n(M-1)}{\Delta t} + \frac{\mathcal{E}_z^{n+1}(M) - \mathcal{E}_z^n(M)}{\Delta t} \right)$$

整理得

$$\mathcal{E}_z^{n+1}(M) = \mathcal{E}_z^n(M-1) - \frac{\Delta x - c\Delta t}{\Delta x + c\Delta t} \left[\mathcal{E}_z^n(M) - \mathcal{E}_z^{n+1}(M-1) \right]$$

2.5.2 二维吸收边界条件

考虑在沿 y 轴方向的边界上, 有一个平面波入射到此边界。若此边界是完全透明的, 则波将向前传播而无任何反射。此时, 波可表示为

$$\varphi(x, y) = A e^{-j(k_x x + k_y y)} \quad (2.52)$$

定理 2.30 (二维吸收边界条件)

二维吸收边界条件为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -j k_x A e^{-j(k_x x + k_y y)} = -j k_x \varphi = -j k \cos \theta \varphi \quad (2.53)$$

定理 ?? 中给出的边界条件可以完全吸收与 x 轴成 θ 角入射的平面波。然而, 对于一般的问题, 入射到吸收边界的通常不是平面波, 并且入射角通常是未知的。因此, 一个实际可用的边界条件必须与人射角无关。

定理 2.31 (一阶吸收边界条件)

若在式 (??) 中设 $\theta = 0$, 则得到一个近似的边界条件为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx -j k \varphi \quad (2.54)$$

这种边界条件对应的反射系数为

$$R = \frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta + 1} \quad (2.55)$$

定理 2.32 (二阶吸收边界条件)

二阶吸收边界条件为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx -jk\varphi - \frac{j}{2k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad (2.56)$$

这种边界条件对应的反射系数为

$$R = \frac{\cos \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta - 1}{\cos \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta + 1} \quad (2.57)$$

 **练习 2.19** 证明上述公式。

解 将式 (??) 重写为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -jk_x \varphi = -j\sqrt{k^2 - k_y^2} \varphi = -jk\sqrt{1 - \left(\frac{k_y}{k}\right)^2} \varphi$$

将 $\sqrt{1 - \left(\frac{k_y}{k}\right)^2}$ 作 Taylor 展开, 保留前两项, 得到

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx -jk \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_y}{k}\right)^2 \right] \varphi = -jk\varphi + \frac{j}{2k} k_y^2 \varphi$$

由于 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -k_y^2 \varphi$, 上式可写为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx -jk\varphi - \frac{j}{2k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

 **练习 2.20** 证明上述公式。

定理 2.33 (Engquist-Majda 吸收边界条件)

将定理 ?? 中的边界条件转化到时域, 得到

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} \approx -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad (2.58)$$

 **练习 2.21** 证明上述公式。

解 将式 (??) 中的边界条件转化到时域, 首先用 $k = \frac{\omega}{c}$ 将其重写

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &\approx -j \frac{\omega}{c} \varphi - \frac{jc}{2\omega} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ j\omega \frac{\partial \varphi}{\partial x} &\approx \frac{\omega^2}{c} \varphi + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \end{aligned}$$

作 Fourier 逆变换, 得到

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} \approx -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

定理 2.34 (时间步进公式)

对式 (??) 左边使用前向差分离散, 右边使用中心差分离散, 得到

$$\begin{aligned} \varphi^{n+1}(M, j) = & \left[\frac{1}{\Delta x \Delta t} + \frac{1}{c(\Delta t)^2} \right]^{-1} \left\{ \frac{1}{\Delta x \Delta t} \left[\varphi^{n+1}(M-1, j) - \varphi^n(M-1, j) \right] \right. \\ & + \left[\frac{1}{\Delta x \Delta t} + \frac{2}{c(\Delta t)^2} - \frac{c}{(\Delta y)^2} \right] \varphi^n(M, j) - \frac{1}{c(\Delta t)^2} \varphi^{n-1}(M, j) \\ & \left. + \frac{c}{2(\Delta y)^2} \left[\varphi^n(M, j-1) + \varphi^n(M, j+1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.59)$$

2.5.3 理想匹配层

第三章 有限元法

第四章 矩量法