第37卷,第6期
2020年12月

科学技术哲学研究
Studies in Philosophy of Science and Technology

Vol.37 No.6
Dec.,2020

数学认知中的具身进路及其哲学观初探

王 东[1],吴 彤[2]

(1.北京工商大学 马克思主义学院,北京 100048;2.清华大学 人文学院,北京 100084)

摘 要:数学认知中基于认知语言学的具身进路认为,数学是人基于天生的简单算术能力,通过概念隐喻以及概念混合等源于日常实践的基本认知机制,把日常身体实践经验中的推理结构以及物质世界的空间逻辑结构映射到抽象的概念域而形成的。该理论持有一种自然主义的反实在论,其核心在于把数学对象以及数学思想看作一种认知的过程而不是抽象的实体,这种认知过程与包含身体在内的物质世界的某些结构和过程同构。

关键词:具身数学认知;概念隐喻;认知过程同构

中图分类号:N02　　文献标识码:A　　文章编号:1674-7062(2020)06-0034-06

从数学思想史以及数学哲学的角度研究数学已有很久的历史,并获得了丰硕的成果。但是数学自古以来就被认为是人类心智思辨的产物,与实践无关。自20世纪中期认知科学大发展以来,人们又开始从认知科学的角度研究数学,以此提供关于数学本质的看法。但对数学认知的研究通常是运用心理学以及神经科学的方法,对个体在简单的数学活动中的行为表现和生理状态进行经验性研究,力图把数学认知现象与某些物质状态或过程(如大脑活动)联系起来,却很少研究复杂的数学思想的认知机制及其与数学实践的关系。一种基于认知语言学的具身的数学认知进路认为,可以通过研究日常的认知机制(即日常生活中用到的认知机制)在数学思想中的作用,研究数学思想与人的实践和具身的关系,从而讨论数学的发展机制。作者发现该理论的核心在于把数学对象及思想看作一种与物质世界同构的认知过程,以此来解释数学的各种性质。但由于其理论核心机制的构造缺乏足够的经验证据,因此还有待认知神经科学进一步的发展来验证,同时该理论的数学哲学观也面临着说明数学本身局限性的问题。

一 数学认知及其具身进路

数学认知是认知科学的一个子领域,主要研究人以及动物对于数、数学(针对人类)的认知过程及其神经基础。数学认知是高度跨学科的研究领域,相关学科有认知心理学、发展心理学、认知神经科学以及认知语言学。数学认知研究的主要问题包括动物如何进行数量表征,婴儿如何习得并理解数字,人类如何联系语言符号和数量(magnitude),数字(number)认知能力如何构成复杂的计算能力,人类对于数字的理解是如何扩展到更大更复杂的领域,数学结构如何在人脑中表征等等。

基于表征计算主义的第一代认知科学理论认为物质性的身体对于理解心灵和认知是次要的。而被称为第二代认知理论的具身认知则认为,包括脑在内的物质性身体在认知活动中有重要的因果性作用以及物质构成性作用。当前的具身数学认知研究可以分为两种,第一种是基于心理学和认知神经科学对数学认知能力进行经验性的研究,第二种是基于认知语言学中概念隐喻(concept metaphor)框架对数学思想本身的研究。经验性的研究主要通过行为

【收稿日期】 2019-04-12
【基金项目】 国家社会科学基金重大课题“科学实践哲学与地方性知识研究”(13&ZD068)
【作者简介】 王 东(1983-),男,安徽合肥人,哲学博士,北京工商大学马克思主义学院讲师,研究方向为认知科学哲学、人工智能哲学、复杂性科学哲学。
吴 彤(1954-),男,内蒙古通辽人,清华大学人文学院教授,研究方向为科学实践哲学、复杂性科学哲学。

观察，神经影像以及神经心理学等方法来研究人的基础数学能力以及数字操作能力，如数字识别和对比，简单的算术和代数等。例如，研究与“数数”（shǔ shù）这种简单认知活动相关的脑神经区域，与“手指活动”这类实践性活动相关的脑神经区域之间的联系。经验性的研究积累了大量关于数字处理能力的具身性证据，但是这类研究是分散的，研究对象是单个数学认知过程，目前还没有提出一个关于数学认知能力的统一理论[1]。第二种具身数学认知主要是借助于认知语言学中概念隐喻方法来研究数学认知的具身特性。斯法德（Anna Sfard）首先用这种方法来解释我们如何依赖日常的物理性的推理（physical inference）来理解数学概念[2]，其后拉科夫（G. Lakoff）和努茨（R. E. Nunez）系统的研究了概念隐喻在我们把基本的数学能力扩展到复杂的数学概念系统中的作用，通过概念隐喻这个认知机制把物理性质的源域（source domain）与抽象的概念域联系起来。从机制上看，这种概念隐喻是无意识的认知机制，从抽象意义上说，这是一种保持推理结构（inference structure）不变的映射，因此它可以让我们基于日常身体性的经验来创造和理解更加抽象的概念。运用这种方法，他们给出了一个解释从初等的数学能力到高阶的数学思想的“统一”理论，但这一理论同时被批评缺乏经验证实。

二　基于认知语言学的具身进路

认知语言学家拉科夫与心理学家努茨在《数学从哪里来——具身心智如何产生数学》一书及系列论文中认为，数学（至少是数字系统和算术）既不是人脑的一种功能，也不是外在于人的客观的抽象存在，而是人类两种认知机制交互作用的产物：一种是天生的简单算术能力；另一种是把日常活动的推理结构以及物理世界的空间逻辑结构映射到抽象概念结构上的能力，即数学是具身（embodied）的[3]。他们基于当代认知科学对于数字认知的研究成果，运用认知语言学的概念框架，使用概念分析的方法，逐步展现人类是如何从先天能力和实践发展出复杂的数学体系。

现代认知科学发现，我们日常的各种认知活动大部分是无意识的。在日常思维中，特别是在运用抽象概念系统的思维中，隐喻的思维方式起到关键的作用。通过隐喻，我们可以用相对具体的概念（可能是非符号化的）来构造和刻画相对抽象的概念。拉科夫和努茨认为数学概念作为一种抽象的概念同日常的抽象概念一样，也是基于隐喻的，而具身数学的任务就是研究数学概念及其思想用到多少以及如何使用像隐喻这样的无意识的认知机制。他们认为与数学相关的认知机制主要有如下几种：（1）意象图式（Image Schema），（2）体图式（Aspectual Schemas），（3）概念隐喻，（4）概念混合。这里先简单介绍和分析比较重要的意象图式与概念隐喻，以及如何基于先天算术能力，通过概念隐喻扩展到算术。

（一）意象图式

认知语言学研究发现，几乎所有的人类语言中，关于空间关系的概念都可以分解为一些普适的“概念原语”（conceptual primitives），它们是一种前语言的经验结构，既是知觉性的，又是概念性的，称之为意象图式。尽管不同语言中关于空间关系的表达方法不同，但是构成它们的意象图式却几乎是通用的。以表述“在……之上”的这个空间关系为例，德语中的“在墙上”和“在桌子上”使用的是不同的方位词，英语和汉语中则用的是同一个词，但这些语言中表达空间关系的概念原语是基本相同的。以英语中表达“在……之上”的方位介词“on”为例，其可以分解为“上图式”（书放在桌子上），“接触图式”（书与桌子接触），“支撑图式”（书被桌子支撑）。虽然英语中的“on”无法被准确地对应到其他语言中的一个词，但是构成它的三个图式却可以在任何语言的方位词中找到，即这些“意向图式”是通用的，人类对于空间方位的表达有一种共同的基础。很多意象图式对于数学认知能力的构成都非常重要，例如一个被称为“容器图式”的意象图式，在构成“内”和“外”这样的空间关系概念，以及“集合”这个概念中起到中心作用。此图式有三个部分：容器内部、容器外部和容器界限，人可以直接感知到空间中有类似于这种空间内部、外部和界限的结构，基于这种感知，我们才会有“在……之内”和“在……之外”这些概念。意向图式表达的是空间的逻辑关系，比如我们在空间中看到三个玻璃杯 A，B，C，如果 A 在 B 中，B 在 C 中，那么我们会直接得出 A 在 C 中，而不用进行推理。意向图式的这种认知机制让我们可以直接把握到物体的空间结构，更重要的是意向图式又是概念性的，是组成语言概念的成分，所以它连接了语言和空间感知，把“空间逻辑结构”带到了用语言表达的抽象概念中。

（二）概念隐喻

认知语言学中的隐喻，不仅是一种语言修辞现

象，更是一种思维方式，是把某一类事物的结构映射到另一类事物上的无意识的认知机制。比如我们常说“你的论证太跳跃”，但论证本身是一种认知活动，是不会“跳跃”的。这句话其实就是说这个论证过程中间省略了一些步骤，就类似我们通常“跳跃”一样，这种隐喻的说法用日常的身体“跳跃”的行为来刻画另一种行为[4]。隐喻之所以重要是因为它使抽象概念成为可能，通过隐喻我们可以用相对具体的、与人类日常生活实践相关的概念来构造和刻画相对抽象的概念。认知语言学详细地研究了这类认知机制，发现日常语言和思维中有各种各样的隐喻，且都是无意识的自动的被使用。而隐喻之所以有结构映射的能力，主要是因为类似意象图式的经验结构可以在概念隐喻的映射中被保持，这样通过意象图式得来的空间逻辑，就可以通过多重隐喻而仍保持推理结构，从而体现在抽象概念网络的结构中。

（三）从先天数字能力到算术

拉科夫与努茨认为数学是具身的，因为像意象图式和概念隐喻这类底层的认知机制在数学认知中起到关键作用，而它们又都与我们的感知运动系统及日常实践活动紧密联系。他们认为人类的数学认知能力是由天生的简单的数学认知能力，通过非数学的源于日常生活实践的认知机制扩展而来的。首先从天生的认知能力扩展到相对复杂的算术与代数，再把对于数字的使用（算术与代数）扩展到其他的数学领域（例如几何），从而扩展了其自身。例如对于平面几何中“角”的数量化研究产生了三角几何，对于“变化”的数量化的研究产生了微积分，对于几何形式的数量化研究产生了解析几何等。而数学之所以这么抽象，则是概念隐喻等机制多层次叠加的结果，这一过程在人类的数学发展史中历经了几个世纪。

同很多其他动物一样，人天生就有以下三个简单算术能力[5]51：

（1）感数（subitizing）的能力。感数的能力是指能迅速识别四以内的物体的数量。

（2）简单的算术能力（非语言）。即在感数的范围内（一般是小于等于四）对于简单形式的加和减的判断。

（3）数量表征（numerosity）的能力。即对于一个集合中的物体的数量有前后一致的粗略估计。

这些天生的认知能力只能在一定的数量范围发挥作用，人类婴儿出生后所发展出来的“数数”的能力可以使这种能力扩展到四以外。但是上述两种认知能力还只是算术的开始，真正的算术操作需要隐喻的能力和概念混合的能力。通过隐喻的能力，可以用各种日常经验来概念化基数（cardinal）和算术操作。这些日常经验包括对物体进行分组的经验，对物体的部分－整体这种结构的经验，对于空间（时间）上距离的经验以及对于移动和位置的经验等等，而这些均来自日常实践。在概念隐喻的作用下形成各种不同的概念系统之后，概念混合的能力可以在不同的概念系统之间形成联系和对应，把不同的概念隐喻结合在一起形成更复杂的隐喻。概念隐喻又可以分为两种，分别是基础隐喻（grounding metaphor）以及连接隐喻（linking metaphor）。基础隐喻把日常实践经验映射到抽象概念，例如把“使物体聚集成堆”这样的经验映射到“数量的加和”这样的抽象概念（非语言的概念）。连接隐喻则把算术与数学的其他分支连接，例如“数是直线上的点”这个隐喻，就是用空间术语概念化算术，从而连接几何和算术，这个连接隐喻把数字看成直线上的点从而形成了数轴的概念。

概念隐喻是一种可以保持推理结构的映射，其保持推理结构的主要方法是通过在映射中保持“意象图式”的结构。例如，我们要形成“物体的聚合”这个抽象概念，需要用到前文提到的“容器图式”，把物体的空间结构概念化为一个“容器”，即有内部、外部和边界的空间区域（无论是物理的还是想象的）。当我们用“物体的聚合”来概念化“数字”的时候，我们就把我们所感知到的空间中“物体的聚合”的逻辑结构投射到数字系统上。

根据拉科夫与努茨的理论，从天生的简单的算术能力到初等算术需要四种基本的隐喻能力：

（1）算术是物体的聚合

（2）算术是物体的建构

（3）作为测量尺的算术

（4）算术是沿某一路径的运动

以第一个隐喻“算术是物体的聚合”为例，这个隐喻是一个从物理对象的域到数字域的精确的映射，又由以下三部分组成：

（1）作为源域的物体的聚合（基于我们通常的对物体分组的经验）

（2）作为目标域的算术（由“感数”以及“数数”等能力非隐喻的构建）

（3）跨域映射（基于我们可以在各种物体的聚合中进行“感数”和“数数”）

具体的映射结构可见表 1[5]55：

表 1　隐喻映射

源域：物体的聚合	目标域：算术
相同数量物体的聚合	数字
聚合体的大小	数字的大小
聚合体更大	数字更多
聚合体更小	数字更小
最小的聚合体	数字单位
把聚合体再聚合	加
从一个大的聚合体中拿出一个小的聚合体	减

这个隐喻把我们日常经验中基于感知运动系统的推理结构，以及被我们感知到的物质空间的逻辑结构，映射到基于我们天生的数学能力所构建的算术化的概念域上。从这个概念隐喻的源域——物体的聚合，到目标域——算术，是一种精确的结构映射。这种映射可以发展出很多推论，产生各种数学定理和“真理”。例如，假设有两个聚合体 A 和 B，A 大于 B，那么如果把聚合体 C 分别加到 A 和 B 上，那么我们通过经验就可得出 A 与 C 的聚合大于 B 与 C 的聚合，这样的结构映射到数字上，就产生了我们一般所谓的算术定律 A + C 大于 B + C。算术中的大多数的定律都是这个隐喻的推论。

通过第一个隐喻我们得到了自然数的算术，接着通过第二个隐喻即算术是物体的建构，我们可以扩展出分数的概念，通过第三个测量尺隐喻可以把数域扩展到无理数，而第四个隐喻则帮助我们扩展到复数。此外这种基于认知语言学的具身数学理论中还有单独的构造性隐喻，用来构造像“零”以及“无穷”这样概念。该理论的思想框架可以简单归为下图（只包含从算术到解析几何部分）：

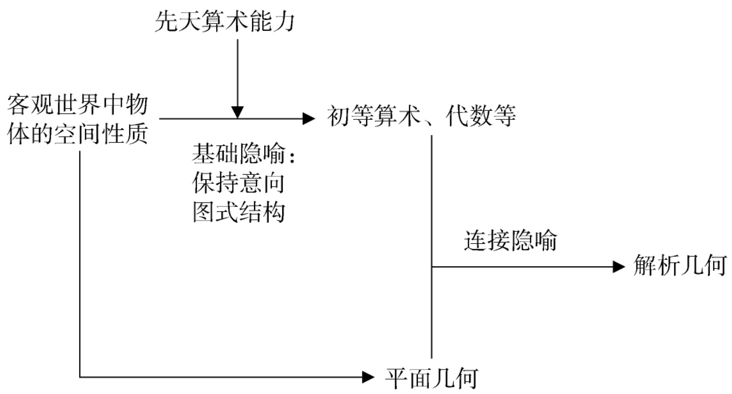

图 1：具身数学的构造

拉科夫与努茨的具身数学认知理论就是这样一步步地用概念隐喻和概念混合等认知机制，从初等的算术开始构建整个数学。当然这种理论也受到很多数学家批评，认为他们把隐喻的作用扩展得太广，虽然在初等算术的构建上引入认知语言学的方法是一种很好的尝试，但是不能继续扩展到整个数学体系。还有一种批评观点认为这种方法根本就是错误的，假造了很多不存在的数学概念，例如在阐释无穷概念的时候，就构造了一种叫作最初无穷小的概念（The first infinitesimal）[6]。

三　具身数学认知的哲学观——自然主义的反实在论

基于具身的数学认知理论，拉科夫与努茨发展了一种具身的数学哲学观，认为数学是依赖于具身的心智而存在的，大部分数学概念本质上隐喻性质的。他们认为从具身数学的角度可以解释数学的基本性质：稳定、精确、可符号化、跨文化通用、可计算、内部一致性、可应用到真实世界等。他们既不赞同持数学实在论的柏拉图主义的观点，也不赞同持数学反实在论的建构主义的观点。他们认为无法从科学上验证是否有客观的、存在于外部世界的数学对象和数学真理，即柏拉图主义的数学哲学观点并不成立[1]。他们同时认为建构主义错误的在于数学并不是纯主观的任意建构，也不仅仅是由社会以及历史文化的作用构建的（虽然历史以及文化的作用很重要），因为这两者都没法说明包含精确性和可应用性在内的数学的种种特性。具身数学认为数学对象就是具身性概念本身，这些概念本身是一种思想（ideas），是一种不但基于人类经验，而且还通过人类特有的概念化的认知机制而结合在一起的思想。他们认为数学真理同其他真理一样，并没有特殊性，一个数学陈述是否为真，在于我们理解该陈述的方式（具身的方式）是否契合我们理解被该陈述所描述的事物的方式（也是具身的方式）[5]364。

所有的数学哲学理论都要回答两个重要的本体

论问题，即抽象的数学对象是否存在以及是否独立于我们的思想。虽然具身的数学哲学理论没有直接回答第一个问题，但是通过分析可以看出该理论认为并不存在数学哲学意义上的抽象的数学对象。数学哲学意义上的抽象对象指的是那些不具有时间、空间特性，不存在于宇宙时空中的对象[2]。而具身的数学哲学虽然认为数学对象是“抽象”的概念，但因为该理论把数学概念本身也看作是物质性的人的认知活动中的一个环节，有其物理对应物，所以该理论否认那种没有时空特性的抽象的数学对象。同时该理论认为数学对象并不独立于人的思想，而是根植于人的具身心智之中的。由此可见该理论是一种数学反实在论，但不同于那些断言数学对象完全不存在的被称为唯名论的反实在论，该理论承认数学对象在某种意义上存在，是一种自然主义的反实在论观点。

这种基于具身数学认知的数学哲学的观点受到了来自数学家以及哲学家多方面的批评，主要集中在以下两点:

(1) 人类的数学基于人类的认知能力不代表这些认知能力不会让我们认识到超越的数学真理[2]。

(2) 对于数学认知的研究只能告诉我们如何做数学而不是数学是什么[1]。

上述两点批评主要集中在方法论与认识论、方法论与本体论的关系层面，认为就算通过经验的研究发现了数学认知过程的一些事实与规律，也无法肯定的得出关于数学本体论上的结论，如“数学对象不是超越人的存在”“数学不是永恒的真理”等结论，更别说具身的数学理论只是一个直接的经验证据还不多的认知科学的假说。这些批评的不足之处在于没有看到具身的数学哲学对于数学实在论与反实在论的困难的回答。数学实在论的难点在于无法很好地回答我们是如何认识到那些不存在于时空中的抽象数学对象，即可认识性问题。数学反实在论的难点在于无法很好地回答数学的可应用性问题。而作为一种自然主义的反实在论，具身数学的观点可以更好地解释各种数学哲学理论的难点。作者认为具身的数学哲学的真正的困难在于，在自然主义的框架下如何看待数学认知的局限问题，即作为一种数学反实在论不是去为数学的可应用性这个事实去做解释，而是去探索这个可应用性的限度。

四　数学作为同构的认知过程及其问题

通过前面的介绍和分析可以看出，基于认知语言学的具身数学认知把数、函数这样的数学对象，以及复杂的数学思想，看作是一种认知的过程和产物，而不是一种抽象的实体。例如，用符号表示的自然数本身，并不是一种抽象的东西，而是一种概念化的认知过程，这种认知过程把物质空间中同样数量或者大小的物体的聚合概念化为同样的“数”。再比如数学中一些被当作是实无穷的数学对象如无穷远的点、无穷小数、无穷集合、无穷数列等，也被同样认为是基于隐喻的，认为它们本身是没有终点的过程，只不过通过隐喻的作用给没有完成的过程一个“完成”的状态[5]155。该理论认为各种实无穷概念其实是一种被称为“基础无穷隐喻”的认知机制应用到各种潜无穷过程的结果。由此，复杂的数学思想和概念就可以看作是复杂的认知过程。例如根据具身数学对欧拉公式的解读，欧拉公式“$e^{yi} = \cos y + i \sin y$”等号两边的函数被看作是进行了同样操作的认知过程，即等号两边的函数都有以下性质:

(1) 把“和”映射到“乘积”

(2) 以相对于其自身大小同样的比率变化

(3) 都有周期性且自规整

所以虽然欧拉公式等号两边的函数被不同的概念所描述，但是从认知过程的角度看其“意义”却相同，所以可以画等号[5]446。但同时，作为认知过程的数学对象和思想并不是任意的，而是与物质世界的某些过程或者性质同构。意向图式、概念隐喻以及概念混合等认知机制使同构映射得以可能，这就很好地解释了数学的各种特性，例如精确性、稳定性以及可应用性等。

通过以上分析可以看出，具身数学认知的哲学前提是自然化的认识论，以及物理主义的本体论。根据这种观点，物理世界遵循其自身规律演化，最终演化出为了适应生存而进化出认知功能的人类，人类在进一步的发展中，用这些认知能力把物理世界中某些物质客体的性质(主要是空间拓扑结构)精确的映射到由其创造的抽象概念系统中，并用这种概念系统来把握世界。这些抽象的概念系统本身也是物质性的，也有其物理对应物。根据这种看法，数学认知过程(无论是人类个体的还是整个人类的)就可以看作是一种同构的过程，而数学本身就被可以看作是一种同构关系，即物质世界的某些性质与同样属于物质世界的人及其群体的某些性质之间的一种精确的同构关系，这种关系最终还是由物质性的世界所决定。这种具身数学认知所默认的哲学观是一种自然主义的数学反实在论，其难点不在于解

释数学的可应用性，而在于探索可应用性的限度问题。例如，如果数学是物质世界内部某些子系统之间的一种同构关系，那么这种关系是否适用于物质世界中所有子系统？我们通常认为的数学真理究竟是什么意义上的真理？对于目前自然科学所能探索到的物质世界各层次各尺度，数学都能够有很好的应用，但能否顺利的运用到更多的未知领域？这些问题都是具身数学认知所需要进一步探索的。

五 结论

基于认知语言学的具身数学认知作为一种理论，首次从认知科学角度提供了一种对整个数学（认知体系）的解释。作为一种对数学的自然主义的解释，该理论并不只是泛泛的谈论物质世界的时空性质与数学之间的联系，而是在认知科学的经验研究的基础上，提供了具体的技术性的细节，同时给我们在哲学上讨论数学对象的本体论问题提供了一个新的视角。通过对该理论的构造细节进行分析，可以看出其实质是把数学对象本身作为一种认知过程看待，而数学的本质就是这种认知过程所体现出来的同构关系，即人类的认知过程与物质世界之间的一种通过人的实践而联系起来的同构关系。该理论蕴含一种自然主义的数学反实在论，其优点是可以更好地解释经典的数学实在论以及反实在论的困难，其难点在于如何阐释数学可应用性的界限。具身的数学认知理论下面如何发展，仍然有很长的路。

【参 考 文 献】

[1] FIRAT S. Mathematical cognition as embodied simulation [J]. Proceedings of the annual conference of the cognitive science society, 2011, 33(33): 1212 - 1217.

[2] FARD A. Reification as the birth of metaphor [J]. For the learning of mathematics, 1994, 14(1): 44 - 55.

[3] UNEZ R. Numbers and arithmetic: neither hard - wired nor out there [J]. Biological theory, 2009, 4(1): 68 - 83.

[4] 陈嘉映. 语言哲学 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2003: 328 - 333.

[5] LAKOFF G, NUNEZ R. Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being [M]. New York: Basic Books, 2000.

[6] VOORHEES B. Embodied mathematics: comments on Lakoff & Núñez [J]. Journal of conousness studies, 2004, 11(9): 83 - 88.

An Embodied Approach to Mathematical Cognition and Its Philosophical View

WANG Dong[1], WU Tong[2]

(1. *School of Marxism*, *Beijing Technology and Business University*, *Beijing* 100048, *China*;
2. *Center of STS*, *Tsinghua University*, *Beijing* 100084, *China*)

Abstract: An embodied approach to mathematical cognition points out that mathematics is based on the natural ability of simple arithmetic, i. e., through conceptual metaphor and conceptual blending, which are derived from the basic cognitive mechanism of daily practice, mapping the reasoning structure of daily physical practice experience and the spatial logical structure of the material world to abstract domain. This theory holds a naturalistic anti - realism, the core of which is to regard mathematics as a cognitive process rather than an abstract entity. Furthermore, the process is isomorphic to some structures and processes in the physical world.

Key words: embodied mathematical cognition; conceptual metaphor; cognitive process isomorphism

（责任编辑 殷 杰）