H19T1A3

a) Sei $B(0, \frac{3}{2})$ die offene Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius $\frac{3}{2}$ in der komplexen Ebene. Bestimme alle holomorphen Funktionen $f : B(0, \frac{3}{2}) \to \mathbb{C}$, die in allen $n \in \mathbb{N}$ die Werte $f(\frac{1}{n}) = \frac{2n}{2n+1}$ annehmen.

b) Formuliere das Maximumsprinzip für beschränkte Gebiete (auch Randmaximumsprinzip für holomorphe Funktionen genannt) und beweise damit folgende Aussage: Für $c \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ bezeichne $B(c, r)$ die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt c und Radius r in der komplexen Ebene. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein offenes Gebiet und $B = B(c, r)$ eine Kreisscheibe mit $\overline{B} \subseteq D$. Weiter sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$\min\{|f(z)| : z \in^{\partial} B\} > |f(c)|$$

Dann besitzt f eine Nullstelle in B.

Zu a):

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n}} = \frac{2}{2 + \frac{1}{n}}$$

$$g : \mathbb{C}\backslash\{-2\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{2}{2+z}; \qquad \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \left\{z \in B\left(0, \frac{3}{2}\right) : f(z) = g(z)\right\}$$

$(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ hat paarweise verschiedene Folgenglieder, $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow 0$ ist Häufungspunkt von $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, also auch von $\left\{z \in B(0, \frac{3}{2}) : f(z) = g(z)\right\}$

$$\overset{\text{Identitätssatz}}{\Rightarrow} \quad f = g\big|_{B(0,\frac{3}{2})}$$

Zu b):

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ stetig, $f\big|_U : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann nimmt $|f|$ (und $\Re e(f)$, $\Im m(f)$) auf dem Rand ∂U ein Maximum an.

Behauptung: $\quad c \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $D \subseteq \mathbb{C}$ offenes Gebiet,

$$\overline{B(c,r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| \le r\} \subseteq D$$

$f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\min\{|f(z)| : z \in \partial B(c,r)\} > |f(c)|$
$\Rightarrow f$ hat eine Nullstelle in $B(c, r)$.

Bild

Angenommen f hat in $B(c, r)$ keine Nullstelle. Dann ist

$$0 < |f(c)| < \min\{|f(z)| : z \in \partial B(c,r)\}$$

$\Rightarrow f$ hat in $\overline{B(c,r)}$ keine Nullstelle

$$\Rightarrow \frac{1}{f} : \overline{B(c,r)} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{f(z)} \text{ ist stetig und } \frac{1}{f}\Big|_{B(c,r)} \text{ holomorph}$$

(als Quotient von stetigen bzw. holomorphen Funktionen mit nullstellenfreiem Nenner). Nach dem Maximumsprinzip für beschränkte Gebiete gibt es ein

$$\xi \in \partial(B(c,r)) = \{z \in \mathbb{C} : |c - z| = r\} \text{ mit}$$

$$\left|\frac{1}{f}\right|(\xi) = \frac{1}{|f(\xi)|} = \max\left\{\frac{1}{|f(z)|} : z \in \overline{B(c,r)}\right\} = \frac{1}{\min\left\{|f(z)| : z \in \overline{B(c,r)}\right\}} =$$

$$= \frac{1}{\min\left\{|f(z)| : z \in \partial B(c,r)\right\}} < \frac{1}{|f(c)|} \quad \text{Widerspruch, da } c \in \overline{B(c,r)}$$

Das Maximum wird auf $\partial B(c,r)$ angenommen, d.h. $\max\left\{\frac{1}{|f(z)|} : z \in \partial B(c,r)\right\}$. (Dies ist ein Beweis für einen Spezialfall des Minimumsprizip - damit könnte man die Behauptung auch zeigen)

[Mit Minimumsprinzip hat $|f|$ oder f eine Nullstelle in U...]