F18T1A4

a) Gebe eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten an, die folgende Lösungen besitzen.

$$\begin{aligned}
y_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2\exp(3x) + \sin(3x) \\
y_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3\exp(-2x) + \sin(3x) \\
y_3 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(-2x) + 5\exp(3x) + \sin(3x)
\end{aligned}$$

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die Differentialgleichung

$$y''(x) + 9y(x) = \sin(ax) + a\cos(x)$$

mindestens eine unbeschränkte Lösung?

Zu a):

Es gilt

$$\begin{aligned}
y_1''(x) &= 2 \cdot 3^2 \cdot \exp(3x) - 9\sin(3x) = 9y_1(x) - 18\sin(3x) \\
y_2''(x) &= 4 \cdot 3\exp(-2x) + 9\sin(3x) = 4y_2(x) + 5\sin(3x) \\
y_3''(x) &= 4\exp(-2x) + 9 \cdot 5\exp(3x) + 9\sin(3x) = 9y_3(x) - 5\exp(-2x).
\end{aligned}$$

Demnach sind $y_{1/2/3}$ Lösungen der folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$$\begin{aligned}
y_1 &: \quad y''(x) - 9y(x) = -18\sin(3x) \\
y_2 &: \quad y''(x) - 4y(x) = 5\sin(3x) \\
y_3 &: \quad y''(x) - 9y(x) = 5\exp(-2x)
\end{aligned}$$

Zu b):

Die homogene Differentialgleichung wird gelöst von den beiden Funktionen

$$x \mapsto \sin(3x) \qquad\qquad x \mapsto \cos(3x).$$

die gleichzeitig auch ein reelles Fundamentalmentalsystem zur homogenen Differentialgleichung bilden. Für die partikuläre Lösung mache den Ansatz

$$x \mapsto A\sin(ax) + B\cos(ax) + C\sin(x) + D\cos(x)$$

Einsetzen führt auf

$$(9 - a^2)A\sin(ax) + (9 - a^2)B\cos(ax) + 8C\sin(x) + 8D\cos(x) \overset{!}{=} \sin(ax) + a\cos(x)$$

- also für $a \neq \pm 3$ zu $A = \frac{1}{9-a^2}, D = \frac{a}{8}, B = C = 0$. Daher hat im Fall $a \neq \pm 3$ jede beliebige Lösung der Differentialgleichung die Form

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & c_1 \sin(3x) + c_2 \cos(3x) + \frac{1}{9-a^2} \sin(ax) + \frac{a}{8} \cos(x) \end{array}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und ist daher beschränkt. In den Fällen $a = \pm 3$ machen wir zunächst den Ansatz $\varphi : x \mapsto x\,(A \sin(ax) + B \cos(ax))$. Dann ist:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= (A \sin(ax) + B \cos(x)) + x\,(Aa \cos(ax) - Ba \sin(ax)) \\ &= \sin(ax) \cdot (A - Bax) + \cos(ax) \cdot (B + Aax) \\ \varphi''(x) &= a \cos(ax)(A - Bax) - \sin(ax) \cdot Ba - a \sin(ax)(B + Aax) + \cos(ax) \cdot Aa \\ &= \sin(ax) \cdot \left(-Ba - aB - Aa^2 x\right) + \cos(ax) \cdot (aA - Ba^2 x + Aa) \\ &= -2Ba \sin(ax) + 2Aa \cos(ax) - a^2(A \sin(ax) + B \cos(ax) \\ &= -2Ba \sin(ax) + 2Aa \cos(ax) - 9\varphi(x) \\ &\stackrel{!}{=} \sin(ax) - 9\varphi(x) \end{aligned}$$

Also ist $A = 0, B = \frac{-1}{2a} = \mp\frac{1}{6}$. Insgesamt lautet die partikuläre Lösung also $x \mapsto \mp\frac{x}{6} \cdot \cos(ax) + \frac{a}{8} \cos(x)$. Eine beliebige Lösung der Differentialgleichung hat also die Form

$$\begin{array}{rccc} \lambda: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & c_1 \sin(3x) + c_2 \cos(3x) \mp \frac{x}{6} \cdot \cos(3x) \pm \frac{3}{8} \cos(x) \end{array}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und ist damit unbeschränkt. Zur obigen Differentialgleichung gibt es also genau in den Fällen $a = \pm 3$ eine unbeschränkte Lösung.