# H16T1A5

Betrachte das Differentialgleichungssystem

$$x' = -x^3 + 2x^2y - xy^2$$

$$y' = -2x^3 - y^3 + x^2y + 2y^4$$

Bestimme alle Ruhelagen des Systems und untersuche diese auf Stabilität.

**Lösung:**

Um die Ruhelagen bestimmen zu können, müssen $x' = 0$ und $y' = 0$ gesetzt werden.

$$-x^3 + 2x^2y - xy^2 = 0 \tag{1}$$

$$-2x^3 - y^3 + x^2y + 2y^4 = 0 \tag{2}$$

Löse zunächst die Gleichung (1):

Betrachte das Differentialgleichungssystem

$$-x^3 + 2x^2y - xy^2 = \Leftrightarrow -x(x^2 - 2xy + y^2) = 0 \Leftrightarrow -x(x-y)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x = y$$

Für $x = 0$ liefert die Gleichung (2):

$$-y^3 + 2y^4 = 0 \quad \Rightarrow \text{Ruhelage bei } (0,0)$$

Für $x = y$ liefert die Gleichung (2):

$$-2x^3 - x^3 + x^3 + 2x^4 = 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 2x^4 = 0 \Leftrightarrow -2x^3(1-x)$$

$$\Rightarrow \text{Ruhelage bei } (0,0) \text{ und } (1,1)$$

Stabilitätsuntersuchung der Ruhelagen durch Linearisieren:

Bezeichne $f(x,y)$ die rechte Seite der Gleichungen, so ist

$$(Jf)(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 + 4xy - y^2 & 2x^2 - 2xy \\ -6x^2 + 2xy & -3y^2 + x^2 + 8y^3 \end{pmatrix}$$

die erste Ableitung (Jacobi-Matrix) von $f(x,y)$.

Für die Ruhelage $(1,1)$ gilt:

$$(Jf)(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \chi_f = \det \begin{pmatrix} -X & 0 \\ -4 & 6-X \end{pmatrix} = X^2 - 6X + 4$$

$$\Rightarrow \quad X_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}$$

$\Rightarrow$ Daraus ergeben sich Eigenwerte mit positivem Realteil. Somit ist die Ruhelage $(1,1)$, nach dem Kriterium für linearisierte Stabilität, instabil.