H18T1A5

Gebe jeweils entweder ein Beispiel an (ohne Begründung) oder begründe, warum es ein solches nicht geben kann.

a) Eine holomorphe Funktion $h : \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\} \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{z\to 0} h(z) \cdot \sqrt{|z|} = 1$.

b) Eine stetig differenzierbare Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit den Eigenschaften (i)-(iii):

(i) $F(0) = 0$

(ii) Die Realteile der Eigenwerte der Ableitung $DF(0)$ sind kleiner oder gleich 0.

(iii) 0 ist keine stabile Ruhelage der Differentialgleichung $y' = F(y)$.

c) Ein Polynom $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Differentialgleichung $y' = P(y)$ keine globale Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

Zu a):

So eine Funktion kann es nicht geben:
Angenommen, es gäbe eine solche Funktion, so wäre die nicht im Definitionsbereich liegende Stelle 0 entweder eine hebbare oder eine wesentliche Singularität oder eine Polstelle. Ist 0 eine hebbare Singularität von h, so existiert $\lim_{z\to 0} h(z) \in \mathbb{C}$, und es folgt

$$1 = \lim_{z\to 0} h(z) \cdot \sqrt{|z|} = \left(\lim_{z\to 0} h(z)\right) \cdot \left(\lim_{z\to 0} \sqrt{|z|}\right) = 0$$

Widerspruch.

Ist 0 Pol von h, so existiert $\lim_{z\to 0} z^m \cdot h(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ für ein $m \in \mathbb{N}$, und es folgt für $z \neq 0$

$$\left|h(z) \cdot \sqrt{|z|}\right| = |z^m h(z)| \cdot \frac{\sqrt{|z|}}{|z|^m} = |z^m h(z)| \cdot \frac{1}{|z|^{m-1/2}}$$

Weil $z^m \cdot h(z)$ für hinreichend kleine $|z|$ von Null verschieden ist (sonst wäre $\lim z^m \cdot h(z) = 0$), ist der Ausdruck wegen der Unbeschränkheit von $\frac{1}{|z|^{m-1/2}}$ unbeschränkt; $1 = \lim_{z\to 0} h(z) \cdot \sqrt{|z|}$ ist damit nicht möglich. Widerspruch.

Ist 0 wesentliche Singularität von h, so gibt es z.B. wegen des Satzes von Casorati-Weierstraß eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert 0 und $\lim_{n\to\infty} f(z_n) \in \mathbb{C}$ und es folgt

$$1 = \lim_{n\to\infty} h(z) \cdot \sqrt{|z|} = \left(\lim_{n\to\infty} h(z)\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt{|z|}\right) = 0$$

Widerspruch. Damit ist die isolierte Singularität 0 weder hebbar, noch wesentlich, noch ein Pol. Die Funktion h kann damit nicht holomorph sein.

Zu b):

Die Funktion $\begin{array}{cccc} F: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$ ist ein Beispiel für die genannte Funktion, da der Eigenwert 0 von $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ algebraische Vielfachheit zwei, aber geometrische Vielfachheit eins aufweist.

Zu c):

Es ist beispielsweise

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Daher ist $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ eine nicht globale Lösung der Differentialgleichung

$$y' = P(y), \quad P(y) = 1 + y^2 \in \mathbb{R}[x].$$