H16T3A2

Es sei $\alpha > 0$ ein gegebener Parameter. Betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(n^\alpha x)}{nx} & \text{falls} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0. \end{cases}$$

Beweise:

a) Jede Funktion f_n ist stetig.

b) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion.

c) Falls $\alpha < \frac{1}{2}$, so konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig.
Hinweis: Es gilt $|\sin(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{R}$.

d) Falls $\alpha \geq 1$, so konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig.

zu a):

$f_n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ist als Komposition stetiger Funktionen stetig.

Prüfe Stetigkeit im Punkt 0. f_n ist stetig in 0, wenn $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(n^\alpha x)}{nx} \underset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(n^\alpha x)\cos(n^\alpha x)n^\alpha}{n} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 2n^{\alpha-1}\sin(n^\alpha x)\cos(n^\alpha x) = 0$$

zu b):

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen f, wenn $\forall x \in \mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Mittels Fallunterscheidung:

$x = 0$: offensichtlich ist der Grenzwert 0.

$x \neq 0$: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2(n^\alpha x)}{nx} = 0$, das $|nx| \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, $\sin^2(n^\alpha x) \in [0,1]$ für $n \to \infty$.

zu c):

Sei $\alpha < \frac{1}{2}$, f wie in 2.

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent $\Leftrightarrow \limsup\limits_{\substack{n\to\infty\\ x\in\mathbb{R}}} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$$\limsup_{\substack{n\to\infty\\ x\in\mathbb{R}}} |f_n(x) - f(x)| = \limsup_{\substack{n\to\infty\\ x\in\mathbb{R}}} \left|\frac{\sin^2(n^\alpha x)}{nx} - 0\right| = \limsup_{\substack{n\to\infty\\ x\in\mathbb{R}}} \left|\frac{\sin^2(n^\alpha x)}{nx}\right| \underset{\text{Hinweis}}{\leq}$$

$$\leq \limsup_{\substack{n\to\infty\\ x\in\mathbb{R}}} \frac{|n^\alpha x|^2}{nx} = \limsup_{\substack{n\to\infty\\ x\in\mathbb{R}}} |n^{2\alpha-1}x| \underset{2\alpha<1}{=} 0$$

zu d):

Sei $\alpha \geq 1$; Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, genügt es zu zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert. Ein gleichmäßiger Limes der Folge, wenn er existiert, müsste nämlich auch der punktweise Limes, also die Nullfunktion, sein. Zu zeigen ist also das Gegenteil der Aussage

$$\forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x)| < \epsilon),$$

also

$$\exists\epsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \land |f_n(x)| \geq \epsilon).$$

Hierzu nehmen wir $\epsilon = \frac{2}{\pi} > 0$. Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir nehmen $x = n_0^{-\alpha}\frac{2}{\pi} \in \mathbb{R}$ und $n = n_0 \in \mathbb{N}$. Dann folgt einerseits trivialerweise $n \geq n_0$. Andererseits gilt $\sin(n^\alpha x) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, also

$$|f_n(x)| = \frac{1}{|nx|} = n^{\alpha-1}\frac{2}{\pi} \geq \frac{2}{\pi} = \epsilon$$

wie zu zeigen war. Wir haben verwendet, dass $n^{\alpha-1} \geq 1$ wegen $\alpha \geq 1$ und $n \geq 1$ gilt.