Herbst 24 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben Sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t) + \beta \int_0^t x(s)\, \mathrm{d}s = \sin(t), \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad x(0) = \gamma, \tag{3}$$

mit Parametern $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem (3) für jede Wahl von $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ genau eine stetig differenzierbare Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems (3) für

$$\text{(i)} \quad \alpha = -1, \beta = \gamma = 0 \quad \text{und} \quad \text{(ii)} \quad \alpha = 0, \beta = \gamma = 1.$$

Lösungsvorschlag:

a) Die Differentialgleichung lässt sich zu einer expliziten Differentialgleichung erster Ordnung umformen, mittels

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) - \beta \int_0^t x(s)\, \mathrm{d}s + \sin(t).$$

Sei $x(t)$ eine Lösung dieser Gleichung, dann ist $\dot{x}(0) = -\alpha\gamma$ und x ist differenzierbar und stetig. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist dann auch $\dot{x}$ differenzierbar als Linearkombination differenzierbarer Funktionen. Wir leiten nach t ab und erhalten $\ddot{x}(t) = -\alpha\dot{x}(t) - \beta x(t) + \cos(t)$. Dies ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, zur Anfangsbedingung $x(0) = \gamma, \dot{x}(0) = -\alpha\gamma$ existiert also eine eindeutige, global definierte Lösung. Sei umgekehrt $x(t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems $\ddot{x}(t) = -\alpha\dot{x}(t) - \beta x(t) + \cos(t), x(0) = \gamma, \dot{x}(0) = -\alpha\gamma$. Diese existiert, ist eindeutig bestimmt und global definiert, wir zeigen, dass sie auch (3) löst:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) - \dot{x}(0) = \int_0^t \ddot{x}(s)\, \mathrm{d}s &= \int_0^t -\alpha\dot{x}(s) - \beta x(s) + \cos(s)\, \mathrm{d}s \\
&= -\alpha x(t) + \alpha\gamma - \beta \int_0^t x(s)\, \mathrm{d}s + \sin(t) \\
&= -\alpha x(t) - \dot{x}(0) - \beta \int_0^t x(s)\, \mathrm{d}s + \sin(t)
\end{aligned}$$

Nach Subtraktion von $\dot{x}(0)$ folgt, dass x auch eine Lösung von (3) ist. Damit existiert eine eindeutige Lösung von (3) auf $\mathbb{R}$ für jedes Parametertripel $(\alpha, \beta, \gamma)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$.

b) (i): Das Problem wird zu $\dot{x}(t) = x(t) + \sin(t), x(0) = 0$. Die allgemeine homogene Lösung ist c exp(t). Wir machen den Ansatz $(a\sin(t) + b\cos(t))$ um die allgemeine inhomogene Lösung zu bestimmen. Durch Ableiten und Vorfaktorvergleich erhalten wir $a = \frac{1}{2} = b$ also $\frac{\sin(t)+\cos(t)}{2}$, als Lösung. Die allgemeine inhomogene Lösung hat nun die Form $ce^t + \frac{\sin(t)+\cos(t)}{2}$. Das Einsetzen der Anfangsbedingung liefert $c + \frac{1}{2} = 0$, also $c = -\frac{1}{2}$. Damit ist die gesuchte Lösung

$$x(t) = \frac{\cos t + \sin(t) - e^t}{2}.$$

(ii): In a) wurde gezeigt, dass (3) äquivalent zum Anfangswertproblem

$$\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + \beta x(t) = \cos(t), x(0) = \gamma, \dot{x}(0) = -\alpha\gamma$$

ist. Daher werden wir dieses lösen. Es ergibt sich also das zu lösende Problem

$$\ddot{x}(t) = -x(t) + \cos(t), x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0.$$

Die allgemeine homogene Lösung ist $a\sin(t) + b\cos(t)$, für die allgemeine inhomogene Lösung wählen wir den Ansatz $at\sin(t)$ und erhalten $a = \frac{1}{2}$, also ist die Funktion $\frac{t}{2}\sin(t)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist also von der Form $a\cos(t) + b\sin(t) + \frac{t}{2}\sin(t)$. Die Anfangsbedingung führt nun auf $a = 1$ und $b = 0$, also ist $\cos(t) + \frac{t}{2}\sin(t)$, die Lösung des Anfangswertproblems (3).

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$