H18T3A5

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y_1' = \frac{y_1}{2(1+t)} \\ y_2' = \frac{t}{t^2-1} y_2 + \alpha y_1 \end{cases}$$

mit $(y_1(0), y_2(0)) = (2,1)$ für den Fall $\alpha = 1$, indem zunächst der Fall $\alpha = 0$ betrachtet wird.

Lösung:

Die erste Gleichung ist eine lineare skalare Differentialgleichung der Form

$$y_1' = a_1(t) y_1(t) \text{ mit } a_1 :]-1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{1}{2(t+1)}$$

Da a_1 zudem stetig ist, lässt sich Trennen der Variablen anwenden:

$$\int_2^{\lambda_1(t)} \frac{1}{y} dy = \ln(y)\Big|_2^{\lambda_1(t)} = \ln(\lambda_1(t)) - \ln(2)$$

$$\int_0^t \frac{1}{2(1+s)} ds = \frac{1}{2}\ln(1+s)\Big|_0^t = \frac{1}{2}\ln(1+t)$$

$$\Rightarrow \lambda_1(t) = 2e^{\frac{1}{2}\ln(1+t)} = 2\sqrt{1+t}$$

$$\text{Probe: } \lambda_1'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} = \frac{\lambda_1(t)}{2(1+t)}$$

Damit ist $\lambda_1(t)$ eine Lösung von $y_1' = a_1(t) y_1(t)$, $y_1(0) = 2$. Eingesetzt in die zweite Gleichung gibt dies

$$y_2' = \frac{t}{t^2-1} y_2 + 2\alpha\sqrt{1+t}, \quad y_2(0) = 1$$

Dies ist eine inhomogene, skalare lineare Differentialgleichung der Form

$$y_2' = a_2(t) y_2(t) + b_2(t) \text{ mit } a_2 :]-1, 1[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{t}{t^2-1} = \frac{t}{(t+1)(t-1)}$$

und $b_2 :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto 2\alpha\sqrt{1+t}$ stetig, also gibt die allgemeine Lösungsformel

$$\lambda_2 :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \exp\Big(\int\limits_0^t a_2(s)ds\Big)\Big(1 + \int_0^t \exp(-\int\limits_0^s a_2(r)dr) b_2(s)ds\Big)$$

die maximale Lösung von $y_2' = a_2(t)y_2 + b_2(t)$, $y_2(0) = 1$

$$\exp\Big(\frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{2s}{s^2-1}ds\Big) = \exp\Big(\frac{1}{2}\ln(|s^2-1|)\Big|_{s=0}^{s=t}\Big) = \exp\Big(\frac{1}{2}\ln(1-t^2)\Big) = \sqrt{1-t^2}$$

$$\exp\Big(\int\limits_0^t \frac{s}{s^2-1}ds\Big)\int\limits_0^t \exp\Big(-\int\limits_0^s \frac{r}{r^2-1}dr\Big)2\alpha\sqrt{1+s}ds = \sqrt{1-t^2}\int\limits_0^t \frac{2\alpha\sqrt{1+s}}{\sqrt{1-s^2}}ds =$$

$$2\alpha\sqrt{1-t^2}\int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{1-s}}ds = 2\alpha\sqrt{1-t^2}(-2\sqrt{1-s}\Big|_{s=0}^{s=t}) = -4\alpha\sqrt{1-t^2}(\sqrt{1-t}-1)$$

Also ist das Ergebnis für den Fall $\alpha = 1$:

$$\lambda_2(t) = -4\sqrt{1-t^2}(\sqrt{1-t}-1)$$