H14T1A4

Für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ ist dieses Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}, \quad x(0) = x_0$$

lokal eindeutig lösbar? Für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ ist es global eindeutig lösbar?

Lösung:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$ ist stetig, bei 0 nicht Lipschitzstetig

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \text{ für } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \qquad \text{(Bild)}$$

$$0 < x < y \Rightarrow |f(y) - f(x)| = \left| \int\limits_x^y f'(s) ds \right| \geq |y - x| \cdot |f'(y)|$$

Betrachte $x_0 = 0$: $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 0$ löst $\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}$, $x(0) = 0$
Versuch mit Trennen der Variablen:

$$3\mu(t)^{\frac{1}{3}} = 3x^{\frac{1}{3}} \Big|_0^{\mu(t)} = \int\limits_0^{\mu(t)} x^{-\frac{2}{3}} dx = \int\limits_0^t ds = t$$

$$\mu(t) = \frac{t^3}{27}; \quad \mu'(t) = \frac{t^2}{9}$$

$\Rightarrow \mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{t^3}{27}$ eine weitere Lösung zu $\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}$, $x(0) = 0$, was also nicht lokal eindeutig lösbar ist.
Betrachte $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x^2} \in C^1(]0, \infty[)$
Daher hat $\dot{x} = h(x)$, $x(0) = x_0 > 0$ nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz eine maximale Lösung $\lambda_{x_0} : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ mit offenem Intervall I_{x_0}; $0 \in I_{x_0}$.

$$\int\limits_0^{\lambda_{x_0}(t)} x^{-\frac{2}{3}} dx = 3x^{\frac{1}{3}} \Big|_{x_0}^{\lambda_{x_0}(t)} = 3(\lambda_{x_0}(t))^{\frac{1}{3}} - 3x_0^{\frac{1}{3}} = t$$

$$(\lambda_{x_0}(t))^{\frac{1}{3}} = \frac{t}{3} + x_0^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{x_0}(t) = \left(\frac{t}{3} + x_0^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$\lambda'(t) = 3\left(\frac{t}{3} + x_0^{\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \sqrt[3]{\lambda(t)^2}$$

$$\Rightarrow \lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \left(\frac{t}{3} + x_0^{\frac{1}{3}}\right)^3 \text{ löst } \dot{x} = \sqrt[3]{x^2}\ ,\ x(0) = x_0 > 0$$

$$\frac{t}{3} + x_0^{\frac{1}{3}} > 0 \Leftrightarrow \frac{t}{3} > -x_0^{\frac{1}{3}} \text{ also ist nur } \lambda_{x_0} :]-x_0^{\frac{1}{3}}, \infty[\to \mathbb{R}$$

Lösung von $\dot{x} = h(x)$, $x(0) = x_0 > 0$; dies ist die maximale Lösung, da

$$\lambda_{x_0}(t) \xrightarrow[t \searrow -x_0^{\frac{1}{3}}]{} 0 \quad \text{also} \quad \lim_{t \searrow -x_0^{\frac{1}{3}}} dist((t, \lambda_{x_0}(t)), \mathbb{R} \times \{0\}) = 0 \text{ (Bild)}$$

Da jede Lösung von $\dot{x} = h(x)$, $x(0) = x_0 > 0$ auch $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0 > 0$ löst, sind die Lösungen von $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0 > 0$ lokal eindeutig - hier ganz konkret auf $]-3x_0^{\frac{1}{3}}, \infty[$, aber auf $]-\infty, -3x_0^{\frac{1}{3}}]$ lassen sich (wie bei Fall $x_0 = 0$) verschiedene Lösungen angeben z.B. λ oder $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ für } t \in]-\infty, -3x_0^{\frac{1}{3}}] \\ \lambda_{x_0}(t) \text{ für } t > -3x_0^{\frac{1}{3}} \end{cases}$