Frühjahr 25 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C}\backslash\{0, 1, -1\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{1-z^2} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

a) Bestimmen Sie die Art jeder isolierten Singularität von f und berechnen Sie die Residuen.

b) Berechnen Sie für

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\backslash\{0, -1, 1\}, \quad t \mapsto -1 + \frac{1}{2}e^{-it}$$

das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$.

c) Zeigen Sie, dass f sich auf $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 1\}$ nicht lokal gleichmäßig durch Polynome approximieren lässt.

Lösungsvorschlag:

a) Die Singularitäten ± 1 sind einfache Nullstellen des Nenners bei nicht verschwindendem Zähler, also Pole erster Ordnung. (Mit Zähler ist der letzte Faktor $\exp(\frac{1}{z^2})$ gemeint.) Mit der Residuenformel für Pole erster Ordnung folgt $\mathrm{Res}_f(\pm 1) = \frac{e}{\mp 2}$.
0 ist eine wesentliche Singularität, um das zu zeigen entwickeln wir f in eine Laurentreihe um 0. Der erste Faktor ist holomorph auf $B_1(0)$ und lässt sich dort in eine geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$ entwickeln. Den zweiten Faktor schreiben wir mittels der Reihendarstellung der Exponentialfunktion als $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-2n}}{n!}$. Mit dem Cauchyprodukt erhalten wir die Laurentreihe der Funktion. Weil alle Koeffizienten reelle nichtnegative Zahlen sind, bricht der Hauptteil nie ab und die Singularität ist wesentlich. Weil beide Reihenentwicklungen nur Monome mit geraden Exponenten aufweisen, verschwinden auch in der Entwicklung vom Produkt alle Koeffizienten bei ungeraden Exponenten. Insbesondere verschwindet der Koeffizient von z^{-1}, welcher gerade durch das Residuum in 0 gegeben ist. Daher ist $\mathrm{Res}_f(0) = 0$.

b) Wir betrachten die holomorphe Funktion $g(z) = \frac{1}{1-z}\exp(z^{-2})$ auf dem Sterngebiet $B_1(-1)$. Der Weg γ verläuft vollständig in $B_1(-1)$ und umkreist -1 einmal in negativer Orientierung. Es ist $f(z) = \frac{g(z)}{z+1}$ für $z \in B_1(-1)$, nach Cauchys Integralformel gilt also $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{g(z)}{z-(-1)}\,\mathrm{d}z = -2\pi i g(-1) = -e\pi i$.

c) Angenommen es gäbe eine Folge von Polynomen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die f lokal gleichmäßig approximiert, dann konvergiert $p_n \to f$ gleichmäßig auf der kompakten Menge $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{4} \leq |z+1| \leq \frac{3}{4}\}$, in welcher die Spur von γ vollständig enthalten ist. Dann konvergiert auch $(p_n \circ \gamma)\cdot\gamma'$ auf $[0, 2\pi]$ gleichmäßig gegen $(f \circ \gamma)\cdot\gamma'$ und wir dürfen

Integration und Limesbildung vertauschen. Aus der Holomorphie von p_n folgt aus Cauchy Integralsatz dann $0 = \lim\limits_{n\to\infty} 0 =$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\gamma} p_n(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} p_n(\gamma(z))\gamma'(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(\gamma(z))\gamma'(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z,$$

ein Widerspruch zu b) und $0 \neq -e\pi i$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$