H06T2A3

Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ zwei C^∞-Funktionen. Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$\dot{x} = f(t)g(x)$$

Sei x_0 eine Zahl zwischen zwei Nullstellen von g, dh. $x_1 < x_0 < x_2$ und $g(x_1) = g(x_2) = 0$. Folgt aus diesen Angaben bereits, dass die maximale Lösung von

$$\dot{x} = f(t)g(x) \quad x(0) = x_0$$

auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist? Beweise deine Antwort.

Lösung:

$$h : \mathbb{R}\times]a,b[\to \mathbb{R}, \quad (t,x) \mapsto f(t)\cdot g(x) \quad \in C^1(\underbrace{\mathbb{R}\times]a,b[}_{\text{offen, zusammenhängend}}), \quad (0,x_0) \in \mathbb{R}\times]a,b[$$

Nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz hat $\dot{x} = h(t,x) = f(t)g(x)$, $x(0) = x_0$ eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_{(0,x_0)} : I_{(0,x_0)} \to \mathbb{R}$ (mit offenem Intervall $I_{(0,x_0)}$, $0 \in I_{(0,x_0)}$)
(Linear beschränkte rechte Seite kann hier nicht angewendet werden, da das Definitionsintervall von x nicht ganz $\mathbb{R}$ ist und zudem haben wir gar keine Informationen zu $g(x)$)
Da $g(x_1) = 0 = g(x_2)$ sind $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x_1$ und $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x_2$ Lösungen von $\dot{x} = f(t)g(x)$ zu den Anfangsbedingungen $x(0) = x_1$ bzw. $x(0) = x_2$, sind auf $\mathbb{R}$ definiert und haben somit Randverhalten einer maximalen Lösung, also gilt $\lambda_{(0,x_1)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x_1$ und $\lambda_{(0,x_2)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x_2$

(Bild 1)

Der Graph ist $\Gamma(\lambda_{(0,x_0)}) = \{(t, \lambda_{(0,x_0)}(t)) : t \in I_{(0,x_0)}\} \subseteq \mathbb{R}\times]x_1,x_2[$, denn sobald es ein $T \in I_{(0,x_0)}$ mit $\lambda_{(0,x_0)}(T) \in]x_1,x_2[$ gibt (dann ist $T \neq 0$) und laut Zwischenwertsatz werden auch alle Werte zwischen $x_0 = \lambda_{(0,x_0)}(0)$ und $\lambda_{(0,x_0)}(T)$ angenommen, was einen Schnittpunkt des Graphen $\Gamma(\lambda_{(0,x_0)})$ mit $\Gamma(\lambda_{(0,x_1)})$ oder $\Gamma(\lambda_{(0,x_2)})$ gibt und dies widerspricht dem Eindeutigkeitssatz!
Ist $I_{(0,x_0)} =]c,d[$

Angenommen $d < \infty$, dann ist

$$\Gamma_+(\lambda_{(0,x_0)}) = \{(t, \lambda_{(0,x_0)}(t)) : t \geq 0,\, t \in I_{(0,x_0)}\} \subseteq [0, d[\times]x_1, x_2[$$

$\Rightarrow \overline{\Gamma_+(\lambda_{(0,x_0)})} \subseteq [0, d[\times[x_1, x_2]$ ist relativ kompakt in $\mathbb{R}\times]a, b[$ im Widerspruch zur Charakterisierung maximaler Lösungen.
Angenommen $c > -\infty$,

$$\Rightarrow \Gamma_-(\lambda_{(0,x_0)}) = \{(t, \lambda_{(0,x_0)}(t)) : t \leq 0,\, t \in I_{(0,x_0)}\} \subseteq]c, 0]\times]x_1, x_2[$$

$\Rightarrow \overline{\Gamma_-(\lambda_{(0,x_0)})} \subseteq [c, 0[\times[x_1, x_2]$ ist relativ kompakt in $\mathbb{R}\times]a, b[$ im Widerspruch zur Charakterisierung maximaler Lösungen.

$$\Rightarrow I_{(0,x_0)} = \mathbb{R}$$