

## F14T2A1

$$x' = \frac{xt}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x(0) = 1$$

Zeige:

- a) Das obige Anfangswertproblem hat eine eindeutige maximale Lösung  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ .
- b) Für das maximale Lösungsintervall gilt:  $I = \mathbb{R}$ .
- c) Für alle  $t \geq 0$  ist  $\lambda(t) \in [1, 1 + \frac{t^2}{2}]$ .

**Zu a):**

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto \frac{xt}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

stetig (partiell) differenzierbar, also stetig und lokal Lipschitzstetig bzgl. der 2. Variablen  $x$ . Also hat die Differentialgleichung laut globalem Existenz- und Eindeutigkeitssatz eine eindeutige maximale Lösung  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Zu b):**

$$|f(t, x)| = \frac{|xt|}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq |t|$$

ist linear beschränkt, daher hat das Anfangswertproblem  $x' = f(t, x)$ ,  $x(\tau) = \xi$  das maximale Lösungsintervall  $= \mathbb{R}$  nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz mit linear beschränkter rechter Seite.

**Zu c):**

$$\lambda(t) = \lambda(0) + \int_0^t \lambda'(s) ds = 1 + \int_0^t \frac{\lambda(s) \cdot s}{\sqrt{(\lambda(s))^2 + 1}} ds$$

$\lambda_{(0,0)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto 0$  ist maximale Lösung zu  $x' = f(t, x)$ ,  $x(0) = 0$ .

Die Graphen von  $\lambda$  und  $\lambda_{(0,0)}$  sind disjunkt, also gilt laut Zwischenwertsatz  $\lambda(t) > 0$ .

$$\Rightarrow 0 < \frac{\lambda(s)}{\sqrt{(\lambda(s))^2 + 1}} \leq 1 \Rightarrow \lambda(t) \in \left[1, 1 + \frac{t^2}{2}\right]$$