

H19T1A3

- a) Sei $B(0, \frac{3}{2})$ die offene Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius $\frac{3}{2}$ in der komplexen Ebene. Bestimme alle holomorphen Funktionen $f : B(0, \frac{3}{2}) \rightarrow \mathbb{C}$, die in allen $n \in \mathbb{N}$ die Werte $f(\frac{1}{n}) = \frac{2n}{2n+1}$ annehmen.
- b) Formuliere das Maximumsprinzip für beschränkte Gebiete (auch Rand-maximumsprinzip für holomorphe Funktionen genannt) und beweise damit folgende Aussage: Für $c \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ bezeichne $B(c, r)$ die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt c und Radius r in der komplexen Ebene. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein offenes Gebiet und $B = B(c, r)$ eine Kreisscheibe mit $\overline{B} \subseteq D$. Weiter sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit

$$\min\{|f(z)| : z \in \partial B\} > |f(c)|$$

Dann besitzt f eine Nullstelle in B .

Zu a):

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{1}{n}} = \frac{2}{2 + \frac{1}{n}}$$

$$g : \mathbb{C} \setminus \{z\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{2}{2+z}; \quad \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \left\{z \in B(0, \frac{3}{2}) : f(z) = g(z)\right\}$$

$(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ hat paarweise verschiedene Folgenglieder, $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow 0$ ist Häufungspunkt von $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, also auch von $\left\{z \in B(0, \frac{3}{2}) : f(z) = g(z)\right\}$

$$\xRightarrow{\text{Identitätssatz}} f = g|_{B(0, \frac{3}{2})}$$

Zu b):

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $f|_U : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann nimmt $|f|$ (und $\Re(f)$, $\Im(f)$) auf dem Rand ∂U ein Maximum an.

Behauptung: $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $D \subseteq \mathbb{C}$ offenes Gebiet,

$$\overline{B(c, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| \leq r\} \subseteq D$$

$f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $\min\{|f(z)| : z \in \partial B(c, r)\} > |f(c)|$
 $\Rightarrow f$ hat eine Nullstelle in $B(c, r)$.

Bild

Angenommen f hat in $B(c, r)$ keine Nullstelle. Dann ist

$$0 < |f(c)| < \min\{|f(z)| : z \in \partial B(c, r)\}$$

$\Rightarrow f$ hat in $\overline{B(c, r)}$ keine Nullstelle

$$\Rightarrow \frac{1}{f} : \overline{B(c, r)} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{f(z)} \text{ ist stetig und } \frac{1}{f} \Big|_{B(c, r)} \text{ holomorph}$$

(als Quotient von stetigen bzw. holomorphen Funktionen mit nullstellenfreiem Nenner). Nach dem Maximumsprinzip für beschränkte Gebiete gibt es ein

$$\xi \in \partial(B(c, r)) = \{z \in \mathbb{C} : |c - z| = r\} \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{f} \right|(\xi) &= \frac{1}{|f(\xi)|} = \max \left\{ \frac{1}{|f(z)|} : z \in \overline{B(c, r)} \right\} = \frac{1}{\min \left\{ |f(z)| : z \in \overline{B(c, r)} \right\}} = \\ &= \frac{1}{\min \left\{ |f(z)| : z \in \partial B(c, r) \right\}} < \frac{1}{|f(c)|} \quad \text{Widerspruch, da } c \in \overline{B(c, r)} \end{aligned}$$

Das Maximum wird auf $\partial B(c, r)$ angenommen, d.h. $\max \left\{ \frac{1}{|f(z)|} : z \in \partial B(c, r) \right\}$.
(Dies ist ein Beweis für einen Spezialfall des Minimumsprinzip - damit könnte man die Behauptung auch zeigen)

[Mit Minimumsprinzip hat $|f|$ oder f eine Nullstelle in $U...$]