

**Herbst 23 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Gegeben sei das ebene Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}x' &= y(1 - x^2), \\y' &= -x(1 - y^2).\end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie ein erstes Integral für dieses System, d.h. eine nicht-konstante Funktion $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die entlang jeder Lösungskurve $t \mapsto (x(t), y(t))$ konstant ist
- b) Entscheiden Sie, ob die Ruhelage in $(0, 0)$ stabil, asymptotisch stabil beziehungsweise instabil ist. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.
- c) Neben dem Ursprung besitzt dieses System vier weitere Ruhelagen. Bestimmen Sie eine davon und diskutieren Sie deren Stabilitätseigenschaften.

Lösungsvorschlag:

- a) Eine derartige Abbildung H erfüllt

$$\partial_x H(x, y) y(1 - x^2) - \partial_y H(x, y) x(1 - y^2) = 0$$

für alle $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$, falls sie differenzierbar ist. Etwa kann man $\partial_x H(x, y) = x(1 - y^2)$ und $\partial_y H(x, y) = y(1 - x^2)$ ansetzen. Integrieren und vergleichen gibt $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - x^2 y^2)$ für alle $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$ als mögliche Wahl.

- b) Es sei H wie in a). Man berechnet

$$\nabla H(x, y) = \begin{pmatrix} x(1 - y^2) \\ y(1 - x^2) \end{pmatrix}, \quad \text{Hess}(H)(x, y) = \begin{pmatrix} (1 - y^2) & -2xy \\ -2xy & 1 - x^2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\nabla H(0, 0) = 0$ und $\text{Hess}(H)(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - also positiv definit (das liest man leicht am doppelten Eigenwert 1 ab). Damit ist $(0, 0)^\top$ ein striktes lokales Minimum von H . Nach a) ist H entlang von Lösungskurven konstant. Damit ist H eine Lyapunov-Funktion der Ruhelage. Wir folgern Lyapunov-Stabilität von $(0, 0)^\top$.

Aber: Die Ruhelage ist nicht asymptotisch stabil! Wäre dem so, dann gäbe es $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sehr nahe an 0 und eine Lösung $(x, y)^\top : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, sodass die folgenden drei Bedingungen gelten:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t))^\top &= 0 \\H(x(t), y(t)) &= H(x_0, y_0) \neq 0 \quad \forall t \in [0, \infty) \\(x(0), y(0)) &= x_0.\end{aligned}$$

Die zweite Bedingung folgt aus a). Lässt man jetzt in dieser zweiten Bedingung $t \rightarrow \infty$ laufen, dann konvergieren $x(t)$ und $y(t)$ beide gegen 0 (erste Bedingung) und damit mit der Stetigkeit von H auch $\lim_{t \rightarrow \infty} H(x(t), y(t)) = 0$. Das ist ein Widerspruch zur zweiten Bedingung.

c) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} y(1 - x^2) \\ -x(1 - y^2) \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$ definiert. Also ist

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} -2xy & 1 - x^2 \\ y^2 - 1 & 2xy \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$.

Eine Ruhelage des Systems ist $(1, 1)^\top$. Es ist $Df(1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Daraus ergeben sich die Eigenwerte 2 und -2 von $Df(1, 1)$. Da $-2 < 0$, ist die Ruhelage $(1, 1)^\top$ nach den bekannten Resultaten über die Linearisierung instabil.

(JR)