

H04T1A2

Seien p und q stetige reelle Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

- a) Zeige, dass durch eine geeignete Transformation jeder positiven Lösung y der nichtlinearen Gleichung

$$y' + p(x)y + q(x)y^\alpha = 0$$

eindeutig eine positive Lösung z der linearen Gleichung

$$z' + (1 - \alpha)p(x)z + (1 - \alpha)q(x) = 0$$

zugeordnet werden kann.

- b) Berechne die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + y - x\sqrt{y} = 0, \quad y(0) = 0$$

Ist die gefundene Lösung eindeutig?

Zu a):

Bei dieser Differentialgleichung handelt es sich um eine Bernoulli Differentialgleichung. Nutze daher die Transformation:

$$z(x) := y(x)^{1-\alpha}$$

$$\begin{aligned} z'(x) &= (1 - \alpha)y(x)^{-\alpha}y'(x) = (1 - \alpha)y(x)^{-\alpha}(-p(x)y(x) - q(x)(y(x))^\alpha) = \\ &= -(1 - \alpha)p(x)y(x)^{1-\alpha} - (1 - \alpha)q(x) = (1 - \alpha)p(x)z(x) - (1 - \alpha)q(x) \end{aligned}$$

Zu b):

$$z(x) := y(x)^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y(x)}$$

Transformation wie in Teil a):

$$z'(x) = \frac{1}{2}z - \frac{x}{2} = 0, \quad z(0) = 0$$

hat laut Lösungsformel für lineare skalare Differentialgleichungen die Lösung

$$\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \int_0^x e^{\frac{s}{2}} \frac{s}{2} ds = \dots = x - 2 + 2e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{Rücktransformation}} \lambda(x) = (x - 2 + 2e^{-\frac{x}{2}})^2, \quad \lambda(0) = 0$$

$$\lambda'(x) = 2(x - 2 + 2e^{-\frac{x}{2}})(1 - e^{-\frac{x}{2}})$$

$$\lambda'(x) + \lambda(x) - x\sqrt{\lambda(x)} = \dots = 0 \Leftrightarrow \mu(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x - 2 + 2e^{-\frac{x}{2}})^2 \text{ löst } y' + y - x\sqrt{y} = 0, \quad y(0) = 0$$

$$\text{ebenso wie } \nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad 0 \mapsto 0$$