

Maximum und Minimum reellwertiger Funktionen

0 Definitionen und grundlegende Eigenschaften:

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte, nichtleere Teilmenge der reellen Zahlen.

- Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt obere (untere) Schranke von M , falls die Ungleichung $s \geq m$ ($s \leq m$) für alle $m \in M$ erfüllt ist. Die kleinstmögliche obere (größtmögliche untere) Schranke von M heißt Supremum (Infimum) von M . Es gilt also

$$\sup M = \min\{s \in \mathbb{R} : s \text{ ist obere Schranke von } M\},$$

beziehungsweise

$$\inf M = \max\{s \in \mathbb{R} : s \text{ ist untere Schranke von } M\}.$$

- Falls das Supremum (Infimum) ein Element der Menge M ist, spricht man vom Maximum (Minimum) der Menge M . Das Vollständigkeitsaxiom besagt, dass **jede** beschränkte, nichtleere Teilmenge von \mathbb{R} sowohl ein **reelles** Supremum, als auch ein **reelles** Infimum besitzt. Maximum und Minimum müssen hingegen nicht existieren. Ist $m \in M$ eine obere (untere) Schranke, so handelt es sich bereits um das Maximum (Minimum) und folglich Supremum (Infimum).
- Weit verbreitet sind die Konventionen $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$ für die leere Menge und $\sup M = +\infty$ ($\inf M = -\infty$) für nach oben (unten) unbeschränkte Mengen.
- Es ist häufig leicht zu beweisen, dass eine reelle Zahl s eine obere oder untere Schranke von M darstellt; der Nachweis von Supremum und Infimum ist häufig schwieriger. Betrachtet man $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ als metrischen Raum mit der Betragsfunktion, so kann man aber konvergente Folgen zum Beweis benutzen:

Lemma 0.1. *Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte, nichtleere Menge. Dann gilt:*

(i) *Es gibt Folgen $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}, (m_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ mit Werten in M , die in \mathbb{R} gegen Supremum und Infimum konvergieren, d. h.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \sup M, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \inf M.$$

(ii) *Ist $s \in \mathbb{R}$ eine obere (untere) Schranke von M , so handelt es sich genau dann um das Supremum (Infimum), wenn $s \in \overline{M}$ ist, es also eine M -wertige Folge gibt, die gegen s konvergiert.*

- Völlig analog kann man auch einseitig beschränkte Mengen behandeln oder unbeschränkte Mengen behandeln, wenn man bestimmte Divergenz beziehungsweise uneigentliche Konvergenz gegen $\pm\infty$ betrachtet.
- Wir wenden uns nun Funktionen zu. Sei X eine nichtleere Menge und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Bildmenge, definiert durch $f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subset \mathbb{R}$, ist eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{R} . Wir nennen $\sup f(X)$ ($\inf f(X)$) das Supremum (Infimum) der Funktion und $\max f(X)$ ($\min f(X)$) das Maximum (Minimum) der Funktion, sofern diese existieren. Wir beschränken uns fast immer auf Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^n$ und auf beschränkte Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

1 (Nicht-)Existenzkriterien

Sei wie gerade X eine nichtleere Menge und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls $f(X)$ (nach oben/unten) beschränkt ist, nennen wir auch f (nach oben/unten) beschränkt. In diesem Fall existieren immer ein Supremum und ein Infimum in \mathbb{R} , sonst wenigstens in $\{-\infty, +\infty\} \cup \mathbb{R}$.

Wesentlich interessanter ist daher die Frage, ob f ein Minimum und/oder ein Maximum besitzt. Nach Lemma 0.1(ii) ist dafür hinreichend, dass $f(X)$ eine abgeschlossene, beschränkte Menge ist, d. h. wenn $f(X)$ kompakt ist. Im Folgenden wird es daher sinnvoll sein, statt einer beliebigen Menge X einen metrischen (oder topologischen) Raum zu betrachten. Wer nicht mit Metriken arbeiten will (oder muss) kann im Folgenden auch immer an einen normierten Raum, wie den \mathbb{R}^n , denken.

- Falls f (nach oben/unten) **unbeschränkt** ist, dann besitzt f **kein** Maximum/Minimum.
- Der Satz vom Maximum und Minimum (auch bekannt als Satz von Weierstraß) liefert ein hilfreiches hinreichendes Kriterium für die Kompaktheit von $f(X)$. Falls (X, d) ein kompakter metrischer Raum ist (oder äquivalent: X kompakte Teilmenge eines metrischen Raums (S, d) ist) und $f : (X, d) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ stetig ist, dann besitzt f sowohl ein Maximum als auch ein Minimum. Hier ist wesentlich, dass $X \neq \emptyset$ ist!

Besonders hilfreich ist dieses Kriterium für Teilmengen des \mathbb{R}^n , weil für $X \subset \mathbb{R}^n$ die Äquivalenz

$$X \text{ kompakt} \iff X \text{ abgeschlossen und beschränkt}$$

gilt. (Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, falls $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ und damit $\|\cdot\|(X) = \{\|x\| : x \in X\}$ beschränkt ist, wobei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm auf \mathbb{R}^n bezeichne.)

- Obige Formulierung ist in Anwendungen oft zu stark, es gibt aber eine äußerst hilfreiche Verallgemeinerung: Für $x_0 \in X$ definieren wir $\mathcal{N}_+^f(x_0) = \{x \in X : f(x) \geq f(x_0)\}$ die Superniveaumenge und $\mathcal{N}_-^f(x_0) = \{x \in X : f(x) \leq f(x_0)\}$ die Subniveaumenge von f bezüglich x_0 . Es gilt dann:

Lemma 1.1. *Sei (X, d) ein nichtleerer, metrischer Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.*

- (i) *Falls für ein $x_0 \in X$ die Superniveaumenge $\mathcal{N}_+^f(x_0)$ kompakt ist, und f darauf eingeschränkt stetig ist, dann besitzt f ein Maximum auf X .*
- (ii) *Falls für ein $x_0 \in X$ die Subniveaumenge $\mathcal{N}_-^f(x_0)$ kompakt ist, und f darauf eingeschränkt stetig ist, dann besitzt f ein Minimum auf X .*

2 Auffinden von Extremstellen

Die nächste Aufgabe, die sich stellt, ist es Maximum und Minimum einer Funktion zu finden und die Stellen zu bestimmen an denen diese angenommen werden. Im Allgemeinen ist dies ein ziemlich schwieriges Problem, es gibt aber für differenzierbare Funktionen auf dem \mathbb{R}^n einige Techniken, die dabei helfen, diese Aufgabe zu bewältigen. Wir schränken uns im Folgenden daher auf Teilmengen des \mathbb{R}^n mit einer natürlichen Zahl n und auf differenzierbare Funktionen ein.

2.1 Offene Teilmengen

Sei $O \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, nichtleere Menge und $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

- Ist $x_0 \in O$ eine lokale Extremstelle von f , dann gilt $\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$, wobei $\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))^T = \text{grad } f(x) = Jf(x)^T$ den Gradienten von f bezeichnet. Nullstellen des Gradienten bezeichnet man als stationäre oder kritische Punkte.

Falls f sogar zweimal stetig (partiell) differenzierbar ist (Stetige Differenzierbarkeit ist wesentlich, zweimal differenzierbar zu sein genügt im Allgemeinen nicht!), können mittels der Hessematrix $Hf(x)_{ij} = \partial_{ij} f(x)$ weitere Aussagen getroffen werden:

- Falls $Hf(x_0)$ indefinit ist, so ist x_0 **kein** lokales Extremum.
- Falls x_0 ein stationärer Punkt und $Hf(x_0)$ negativ (positiv) definit ist, so ist x_0 ein **lokales** Maximum (Minimum) von f .
- Falls x_0 ein lokales Maximum (Minimum) von f ist, dann ist $Hf(x_0)$ negativ (positiv) semidefinit.

Für keine der Aussagen ist die Umkehrung im Allgemeinen korrekt!

2.2 Definitheit symmetrischer Matrizen

Um die vorherigen Kriterien verwenden zu können, muss man in der Lage sein Definitheit von Hessematrizen zu überprüfen. Weil für eine C^2 -Funktion die Hessematrix in jedem Punkt symmetrisch ist (Satz von Schwarz), genügt es sich auf die Untersuchung symmetrischer Matrizen zu beschränken. Nach dem Spektralsatz ist jede symmetrische $n \times n$ -Matrix diagonalisierbar über \mathbb{R} , besitzt also nur reelle Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \leq \lambda_n$, wobei manche Eigenwerte gegebenenfalls mehrfach auftreten. Sei nun A eine solche Matrix (symmetrisch, quadratisch) mit reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ wie oben geordnet, dann besagt das **Eigenwertkriterium**:

- A heißt negativ (positiv) semidefinit, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung $x^T A x \leq 0$ ($x^T A x \geq 0$) erfüllt ist, beziehungsweise negativ (positiv) definit, falls die Ungleichung für $x \neq (0, \dots, 0)$ strikt ist. Ansonsten nennt man A indefinit.
- A ist genau dann negativ (semi)definit, wenn alle Eigenwerte negativ (nichtpositiv) sind, d. h. wenn $\lambda_n < 0$ ($\lambda_n \leq 0$) gilt.
- A ist genau dann positiv (semi)definit, wenn alle Eigenwerte positiv (nichtnegativ) sind, d. h. wenn $\lambda_1 > 0$ ($\lambda_1 \geq 0$) gilt.
- A ist genau dann indefinit, wenn es (mindestens) einen positiven und einen negativen Eigenwert gibt, d. h. wenn $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$ gilt.

Mittels der Eigenwerte, also den Nullstellen des charakteristischen Polynoms $q(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$ kann man die Definitheit also immer nachweisen. Für Polynome hohen Grades ist die exakte Bestimmung der Nullstellen aber nicht unkompliziert. Für definite Matrizen gibt es allerdings ein weiteres Kriterium, das **Determinantenkriterium** (oft auch Sylvester- oder Hurwitz-Kriterium genannt). Für $1 \leq j \leq n$ bezeichnen wir mit A_j die $j \times j$ -Matrix die aus A durch Streichen der letzten $n - j$ Zeilen und Spalten entsteht, also die Matrix mit $(A_j)_{kl} = A_{kl}$ für $1 \leq k, l \leq j$. Außerdem bezeichnen wir $\Delta_j = \det(A_j)$. Es gilt:

- A ist genau dann negativ definit, wenn $(-1)^j \Delta_j > 0$ (strikte Ungleichung!) für alle $1 \leq j \leq n$ gilt, also alle Δ_j negativ für ungerade j und positiv für gerade j sind.
- A ist genau dann positiv definit, wenn $\Delta_j > 0$ (strikte Ungleichung!) für alle $1 \leq j \leq n$ gilt, also alle Δ_j positiv sind.

Für Indefinitheit oder Semidefinitheit genügt es nicht nur die Matrizen A_j zu betrachten, hier müssen **alle** möglichen Streichungen von Zeilen und Spalten berücksichtigt werden, was das Determinantenkriterium in diesen Fällen zu aufwändig werden lässt!

Gerade für kleine Matrizen lassen sich auch Aussagen mittels Spur und Determinante der Matrix treffen. Zur Erinnerung: Die Spur einer quadratischen $n \times n$ -Matrix ist definiert als die Summe der Diagonaleinträge, $\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n A_{kk}$. Es gilt dann

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i,$$

wobei λ_i wieder die Eigenwerte von A sind. Für 2×2 -Matrizen beispielsweise lässt sich aus Spur und Determinante sofort die Definitheit ablesen ohne die Eigenwerte explizit berechnen zu müssen. Wir fassen ein paar Aussagen beispielhaft zusammen:

Lemma 2.1. *Sei A eine symmetrische $n \times n$ -Matrix mit Determinante $d = \det(A)$, Spur $s = \operatorname{tr}(A)$ und j -tem Diagonaleintrag $a_j = A_{jj}$. Es gilt:*

- (i) Falls A negativ definit ist, so folgt $a_j < 0 \ \forall \ 1 \leq j \leq n$,
 $s < 0$, $d > 0$ für gerade n und $d < 0$ für ungerade n .*
- (ii) Falls A positiv definit ist, so folgt $a_j > 0 \ \forall \ 1 \leq j \leq n$,
 $s > 0$, $d > 0$.*
- (iii) Falls n gerade und $d < 0$ ist, so ist A indefinit.*
- (iv) Falls $a_j = 0$ für ein $1 \leq j \leq n$ gilt, so ist A semidefinit oder indefinit.*
- (v) Für $n = 2$ gilt:*
 - $d < 0 \implies A$ indefinit.*
 - $d > 0 \implies A$ definit. A ist negativ (positiv) definit, genau dann, wenn s negativ (positiv) ist.*
 - $d = 0 \implies A$ semidefinit. A ist negativ (positiv) semidefinit, genau dann, wenn s negativ (positiv) ist und die Nullmatrix, falls $s = 0$ ist.*

Die meisten Aussagen sind (ggf. mittels Kontraposition) hilfreich um Definitheit auszuschließen, (iii) liefert ein Kriterium, um Indefinitheit zu beweisen (und im Fall von Hessematrizen lokale Optimalität zu widerlegen). Für $n = 3$ sind ähnliche Aussagen wie in (v) möglich, es wären aber einige zusätzliche Fälle zu unterscheiden und Betrachtungen von a_j nötig. Alle genannten Aussagen sind sehr schnell (in Prüfungen) zu beweisen. Es gibt noch einige weitere Aussagen, die zwar ähnlich aber schwieriger zu beweisen sind. Z. B. folgt aus $a_j = 0$ für ein $1 \leq j \leq n$ bereits Indefinitheit oder $d = 0$ und $A_{jk} = 0 = A_{kj}$ für alle $1 \leq k \leq n$, also Semidefinitheit. Auf diese soll hier nicht weiter eingegangen werden, weil diese in Prüfungen wahrscheinlich weder benötigt werden, noch angewendet werden können.

2.3 Gleichheitsnebenbedingungen

Für offene Mengen liefern Gradient und Hessematrix praktische Kriterien um lokale Extrema aufzuspüren, für andere Mengen funktionieren diese Kriterien allerdings **nicht**! Damit haben wir zwar Möglichkeiten das Innere einer Menge X zu untersuchen, können aber noch keine Extrema am Rand finden. Wir betrachten daher jetzt Mengen der Form $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ für eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und untersuchen Extrema von Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Sei $O \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g_1, \dots, g_m : O \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $X := \{x \in O : g_j(x) = 0 \ \forall \ 1 \leq j \leq m\}$.

- Oft kann man solche Probleme vereinfachen: Manchmal kann man die Nebenbedingungen $g_j(x) = 0$ nach den Variablen x_k oder anderen geeigneten Termen auflösen, die in der Definition von f auftauchen. Setzt man so erhaltene Formeln in die Funktionsvorschrift von f ein, so erhält man oft eine neue Funktion \tilde{f} , die von weniger Variablen abhängt oder eine neue Menge \tilde{X} , die durch weniger Bedingungen beschrieben ist. Es kann auch sinnvoll sein die Menge X 'umzuparametrisieren' und die Bedingungen $g_j(x) = 0$ durch andere einfachere oder besser geeignete Bedingungen $h_j(x) = 0$ ersetzen oder f geeignet abzuwandeln, z. B. durch Verkettung mit monotonen Funktionen ohne Vorzeichenwechsel. Sofern möglich, sollte dies immer als Erstes getan werden! Sonst hilft die Methode von Lagrange weiter:
- Ist $x_0 \in X$ ein lokales Maximum (Minimum) von f auf X , sodass die Vektoren $\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_m(x_0)$ **linear unabhängig** sind, so ist $\nabla L(x_0, \lambda) = 0$. Dabei bezeichnet

$$L : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{k=1}^m \lambda_k g_k(x)$$

die Lagrangefunktion mit $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m$.

- Aussagen über Extremalität über die Hessematrix von L zu treffen ist hier sehr viel komplizierter und an Bedingungen geknüpft! Im Allgemeinen erhält man wirklich nur stationäre Punkte, wobei die lineare Unabhängigkeit der Gradienten wesentlich ist! Weitere Aussagen über die Hessematrix oder über Extrema auf Mengen der Form $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \geq 0 \ \forall \ 1 \leq j \leq m\}$ sind mittels KKT-Theorie zwar möglich aber viel komplizierter anzuwenden und zu beweisen. Auf solche Methoden wird hier daher nicht eingegangen.

2.4 Weitere Methoden

In einigen Fällen kann es einfacher sein, nicht dem Standardvorgehen zu folgen, sondern kreativ zu werden. Wir sammeln hier noch ein paar abschließende Bemerkungen.

- Manchmal kann man Funktionen direkt abschätzen um Extrema zu finden. Ist eine Funktion beispielsweise offensichtlich als nichtpositiv (nichtnegativ) identifizierbar, so sind die Nullstellen der Funktion bereits die globalen Maximalstellen (Minimalstellen). Auch durch die Betrachtung der Menge X kann die Funktion f manchmal direkt abgeschätzt werden, falls (Un-)Gleichungen, die die Menge X beschreiben, direkten Einfluss auf den Funktionswert von f haben.
- Falls $O \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex ist und $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ auf der Menge konkav (konvex) ist, so ist jedes lokale Maximum (Minimum) bereits ein globales Maximum (Minimum). Falls f zudem differenzierbar ist, sind die Extremalstellen von f genau die stationären Punkte.

Um Konkavität (Konvexität) von f zu überprüfen, muss man oft wieder die Definitheit der Hessematrix untersuchen. Der Vorteil obiger Aussage ist allerdings, dass man bereits auf **globale** Extrema schließen kann, statt nur auf lokale Extrema wie bisher.

- Grundsätzlich genügt es sich auf die Bestimmung von Supremum und Maximum zu beschränken. Für jede nichtleere Menge $X \subset \mathbb{R}$ gilt nämlich $\inf X = -\sup(-X)$, wobei $-X = \{-x : x \in X\}$ ist. Betrachtet man also $-f$ statt f , so sind die Minimalstellen von f genau die Maximalstellen von $-f$.
- Für Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf reellen Teilmengen $X \subset \mathbb{R}$ sind oft noch bessere Resultate erzielbar, indem man Monotonieeigenschaften der Funktion f untersucht, was zum Beispiel durch Kurvendiskussion möglich ist. Auch alternative Darstellungen von f über Taylor-, Fourier- oder andere (Reihen-)Entwicklungen können hier hilfreich sein. Das ist zwar auch für multivariate Funktionen möglich, aber es ist deutlich einfacher Funktionen auf \mathbb{R} in höhere Taylorpolynome zu entwickeln und den Satz von Taylor zu verwenden, als es in \mathbb{R}^n für $n \gg 1$ der Fall ist. Zwei Aussagen über Extrema univariater Funktionen sind im Folgenden zusammengestellt.

Lemma 2.2. *Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.*

- (i) *Falls f monoton und beschränkt auf X ist, so werden die Extrema am Rand von X angenommen, d. h. Infimum und Supremum liegen in der Menge*

$$\left\{ f(\min X), f(\max X), \lim_{x \rightarrow \inf X} f(x), \lim_{x \rightarrow \sup X} f(x) \right\}.$$

- (ii) *Sei $x_0 \in X$ ein innerer Punkt und f n -mal stetig differenzierbar auf einer Umgebung $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ von x_0 , wobei $\delta > 0$ ist. Weiter sei $1 \leq m \leq n$ eine natürliche Zahl mit $f^{(m)}(x_0) \neq 0$ und $f^{(k)}(x_0) = 0$ für alle $1 \leq k < m$. Dann gilt:*

Falls m ungerade ist, ist x_0 kein lokales Extremum.

Falls m gerade ist, ist x_0 ein lokales Extremum.

Für $f^{(m)}(x_0) < 0$ handelt es sich um ein lokales Maximum und für $f^{(m)}(x_0) > 0$ um ein lokales Minimum.

3 Kurzanleitung Extremwertprobleme

Gegeben seien eine nichtleere Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ und eine (beschränkte) Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Falls im Folgenden Gradienten oder Hessematrizen berechnet werden, nehmen wir an, dass f auf einer (nicht näher spezifizierten) offenen Obermenge von X (zweimal stetig) differenzierbar ist (genauso für g). Die Fragestellung lautet, ob f auf X Maximum und Minimum besitzt, gegebenenfalls diese zu berechnen und alle Punkte in X zu finden, an denen f die Extremwerte annimmt.

Schritt 1: Teste, ob f nach oben und unten beschränkt ist. Falls f nach oben unbeschränkt ist, besitzt f kein Maximum, falls f nach unten unbeschränkt ist, besitzt f kein Minimum.

Schritt 2: Bestimme das Innere X° und die Randpunkte $\partial X \cap X$ der Menge X , diese werden getrennt untersucht. Wir beginnen mit X° :

Schritt 3a: Berechne den Gradienten von f und bestimme die Nullstellen des Gradienten ∇f in X° (Nullstellen am Rand sind hier unerheblich!).

Schritt 3b: Berechne für jede Nullstelle des Gradienten x_0 die Hessematrix $Hf(x_0)$ und untersuche deren Definitheit (siehe 2.2):

Punkte mit indefiniter Hessematrix sind keine Extremalstellen.

Stationäre Punkte mit negativ (positiv) definiter Hessematrix sind lokale Maximalstellen (Minimalstellen).

Über stationäre Punkte mit indefiniter Matrix ist keine allgemeine Aussage möglich, diese müssen näher untersucht werden! Stationäre Punkte mit negativ (positiv) semidefiniter Hessematrix können lokale Maximalstellen (Minimalstellen) oder Sattelpunkte sein (also keine Extremalstellen).

Schritt 3c: Berechne für alle gefundenen **lokalen** Extremalstellen die Funktionswerte und bestimme den größten und kleinsten Wert.

Schritt 4a: Parametrisiere die Menge der Randpunkte von f als $\{x \in X : g(x) = 0\}$ mit einer geeigneten Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und untersuche, ob sich die Parametrisierungen in die Funktionsvorschrift von f einsetzen lassen. Untersuche diese neue Funktion auf einer geeigneten Menge (direkt oder wie in dieser Anleitung beschrieben) und bestimme deren lokale Extrema und Extremalstellen.

Schritt 4b: Für die restlichen Randpunkte benutze die Methode von Lagrange: Bestimme alle Punkte für die die Jacobimatrix Jg von g vollen Rang hat.

Bestimme die Lagrangefunktion $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$ und anschließend die Nullstellen des Gradienten ∇L (siehe 2.3).

Schritt 4c: Berechne für alle lokalen Extremalstellen aus Schritt 4a, alle Punkte aus Schritt 4b und alle restlichen Randpunkte x_0 in X , für die $Jg(x_0)$ keinen vollen Rang hat, den Funktionswert $f(x_0)$ und bestimme den größten und kleinsten Wert.

Schritt 5a: Untersuche, ob f auf X Maximum und Minimum annimmt (siehe 1). Falls ja, sind diejenigen bestimmten Punkte, für die der Funktionswert am größten oder am kleinsten wird, alle globalen Extremalstellen und deren Funktionswerte das Maximum bzw. Minimum von f auf X .

Schritt 5b: Ist unbekannt, ob f ein globales Maximum oder Minimum besitzt untersuche die bestimmten Punkten mit größtem und kleinstem Funktionswert, ob es sich um die globalen Extremalstellen handelt oder, ob es keine Extrema gibt.

Hier gibt es kein Standardvorgehen und meistens muss die Funktion direkt abgeschätzt werden. Findet man Punkte in X mit größerem oder kleinerem Funktionswert als die bisherigen Kandidaten, so gibt es kein Maximum bzw. Minimum. Sonst muss man direkt zeigen, dass f keine größeren oder kleineren Funktionswerte (in einer Umgebung) annehmen kann.

4 Anhang

4.1 Ausblick und Anwendungen

Eine etwas systematischere Vorgehensweise zur Bestimmung von Extrema liefert das KKT-Kalkül, indem die hier behandelten Kriterien noch etwas verfeinert werden. Wer sich für einen (noch) tieferen Einblick in diese Thematik interessiert, kann dafür Standardwerke der Nichtlinearen Optimierung zu Rate ziehen. Im Allgemeinen bleibt die exakte Bestimmung von globalen Extrema und zugehörigen Extremalstellen allerdings ein schwieriges Problem, weshalb in der Praxis Näherungsverfahren (Gradientenabstiegsverfahren, Newton-Methode) benutzt werden. Auch hierfür sei auf geeignete Literatur verwiesen.

Die Berechnung von Extrema ist aber nicht nur ein praxisrelevantes Problem, sondern besitzt auch Anwendungen innerhalb der Mathematik. Durch die Bestimmung von Extrema können Ungleichungen gezeigt werden, gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen bestimmt werden, holomorphe Funktionen untersucht werden (Maximumsprinzip bzw. Minimumsprinzip, Liouville, Rouché) oder Stabilitätsaussagen über Ruhelagen von autonomen Differentialgleichungen (Lyapunov) sowie Aussagen über globale Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen getroffen werden (Charakterisierung des Randverhaltens).

4.2 Beweise

Beweis Lemma 0.1:

- (i) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, dann ist $\frac{1}{n} > 0$ und nach der Definition von Infimum und Supremum gibt es $M_n, m_n \in M$ mit $M_n > \sup M - \frac{1}{n}$ und $m_n < \inf M + \frac{1}{n}$, sonst wäre nämlich $\sup M - \frac{1}{n}$ eine obere Schranke, die strikt kleiner als das Supremum ist oder $\inf M + \frac{1}{n}$ wäre eine untere Schranke, die strikt größer als das Infimum ist. Beides ist durch die Definition ausgeschlossen. Die Folgen $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren nun nach dem Einschnürungssatz gegen die behaupteten Grenzwerte, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten die Ungleichungen

$$\sup M - \frac{1}{n} \leq M_n \leq \sup M, \quad \inf m \leq m_n \leq \inf M + \frac{1}{n},$$

$(M_n, m_n \text{ sind Elemente von } M)$ und $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

- (ii) Der erste Teil der Aussage folgt direkt aus der Definition und aus (i), es bleibt nur zu zeigen, dass eine obere (untere) Schranke, die im Abschluss von M liegt, bereits das Supremum (Infimum) ist. Sei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige obere (untere) Schranke von M und sei weiter $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus M , die gegen s konvergiert, wobei s ebenfalls eine obere (untere) Schranke von M ist. Dann folgt $s = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n \leq (\geq) \lim_{n \rightarrow \infty} c = c$, also $s \leq c$ ($s \geq c$) für jede obere (untere) Schranke von M . Weil s selbst eine obere (untere) Schranke ist und jede weitere obere (untere) Schranke mindestens (höchstens) so groß wie s ist, handelt es sich bei s per definitionem um das Supremum (Infimum) der Menge M . Dies beendet den Beweis. ■

Beweis Lemma 1.1:

- (i) Falls die Superniveaumenge $\mathcal{N}_+^f(x_0)$ von f bezüglich x_0 kompakt ist und f darauf stetig ist, nimmt f auf dieser Menge Maximum und Minimum an. Beachte, dass diese Menge nichtleer ist, weil sie x_0 enthält. Sei $y_0 \in \mathcal{N}_+^f(x_0)$ die Maximalstelle von f , es gelte also $f(x) \leq f(y_0)$ für alle $x \in \mathcal{N}_+^f(x_0)$ und damit insbesondere für x_0 . Dann gilt diese Ungleichung auch für alle $x \in X$, dies ist nur noch für alle $x \in X \setminus \mathcal{N}_+^f(x_0)$ zu zeigen. Für diese gilt nach der Definition der Superniveaumenge aber $f(x) < f(x_0) \leq f(y_0)$ und f nimmt ein Maximum auf X in $y_0 \in X$ an.
- (ii) Falls die Subniveaumenge $\mathcal{N}_-^f(x_0)$ von f bezüglich x_0 kompakt ist und f darauf stetig ist, nimmt f auf dieser Menge Maximum und Minimum an. Beachte, dass diese Menge nichtleer ist, weil sie x_0 enthält. Sei $y_0 \in \mathcal{N}_-^f(x_0)$ die Minimalstelle von f , es gelte also $f(x) \geq f(y_0)$ für alle $x \in \mathcal{N}_-^f(x_0)$ und damit insbesondere für x_0 . Dann gilt diese Ungleichung auch für alle $x \in X$, dies ist nur noch für alle $x \in X \setminus \mathcal{N}_-^f(x_0)$ zu zeigen. Für diese gilt nach der Definition der Superniveaumenge aber $f(x) > f(x_0) \geq f(y_0)$ und f nimmt ein Minimum auf X in $y_0 \in X$ an.

■

Beweis Lemma 2.1:

- (i) Wir bezeichnen mit e_j den j -ten Vektor der Standardbasis, d. h. den Vektor dessen k -ter Eintrag $(e_j)_k$ durch das Kronecker- δ δ_{jk} gegeben ist und berechnen

$$0 > e_j^T A e_j = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (e_j)_k A_{kl} (e_j)_l = A_{jj} = a_j$$

für alle $1 \leq j \leq n$. Weiter ist $s = \sum_{i=1}^n \lambda_i < \sum_{i=1}^n 0 = 0$ und $\text{sgn}(d) = \text{sgn}(\Delta_n) = \text{sgn}((-1)^n) > 0$ für gerade und < 0 für ungerade n .

- (ii) Wir bezeichnen mit e_j den j -ten Vektor der Standardbasis, d. h. den Vektor dessen k -ter Eintrag $(e_j)_k$ durch das Kronecker- δ δ_{jk} gegeben ist und berechnen

$$0 < e_j^T A e_j = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (e_j)_k A_{kl} (e_j)_l = A_{jj} = a_j$$

für alle $1 \leq j \leq n$. Weiter ist $s = \sum_{i=1}^n \lambda_i > \sum_{i=1}^n 0 = 0$ und $d =$

$\prod_{i=1}^n \lambda_i > \prod_{i=1}^n 0 = 0$, weil jeder Faktor positiv ist (oder $d = \Delta_n > 0$).

- (iii) Aus (i) und (ii) folgt, dass A nicht negativ oder positiv definit ist. Wäre 0 ein Eigenwert von A so wäre die Determinante 0 und nicht negativ. A kann also nur von 0 verschiedene Eigenwerte haben und muss sowohl negative als auch positive Eigenwerte besitzen und ist folglich indefinit.

- (iv) Folgt sofort aus (i) und (ii) durch Kontraposition.

- (v) Die erste Implikation folgt aus (iii), weil 2 gerade ist. Ein Produkt zweier reeller Zahlen ist genau dann positiv, wenn beide Faktoren das gleiche Vorzeichen haben, also folgt aus $0 < d = \lambda_1 \cdot \lambda_2$, dass beide und damit alle Eigenwerte von A positiv oder negativ sind. Mit $s = \lambda_1 + \lambda_2$ folgt dann der Rest der zweiten Implikation, weil beide Summanden das gleiche Vorzeichen haben und somit auch die Summe das gleiche Vorzeichen wie die Summanden hat. Falls $d = 0$ ist, muss 0 ein Eigenwert von A sein, der andere ist dann genau s . Daraus folgt sofort die Aussage, wenn $s \neq 0$ ist. Falls $s = 0$ ist, sind beide, also alle Eigenwerte 0. A ist aber diagonalisierbar und daher ähnlich zur Nullmatrix M_0 , es gibt also eine invertierbare Matrix S mit $A = S M_0 S^{-1} = M_0$ und A ist die Nullmatrix.



Beweis Lemma 2.2:

- (i) Wir zeigen die Aussage zunächst für den Fall, dass X Maximum und Minimum annimmt. Falls f monoton wächst, folgt dann für alle $x \in X$ aus $\min X \leq x \leq \max X$ auch $f(\min X) \leq f(x) \leq f(\max X)$ und falls f monoton fällt, folgt $f(\min X) \geq f(x) \geq f(\max X)$. In beiden Fällen liegen also Minimum und Maximum von f in der Menge $\{f(\min X), f(\max X)\}$. Falls X kein Maximum besitzt, setzen wir f in $\sup X$ durch $f(\sup X) = \lim_{x \rightarrow \sup X} f(x)$ fort und falls X kein Minimum besitzt setzen wir f in $\inf X$ durch $f(\inf X) = \lim_{x \rightarrow \inf X} f(x)$ fort und nehmen $\sup X$ und $\inf X$ zu X hinzu. Die so gewonnene Funktion auf der so erhaltenen Menge ist immer noch monoton und die neue Menge nimmt ihr Minimum und Maximum an. Der erste Teil liefert nun das Gewünschte. Das Argument gilt auch falls $\inf X = -\infty$ oder $\sup X = +\infty$ sein sollte, wenn man $-\infty < x < +\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ setzt.

- (ii) Wir verwenden den Satz von Taylor. Für $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n$$

mit einem $\xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ist $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, so ist der Wert negativ oder positiv. Wegen der Stetigkeit von $f^{(n)}$ können wir $\delta > 0$ wählen, sodass $f^{(n)}$ negativ (positiv) auf $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ist. Falls n gerade ist folgt $f(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n < (>) f(x_0)$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Die gleiche Formel zeigt, dass für ungerades n und negatives (positives) $f^{(n)}(x_0)$ die Ungleichung $f(x) > (<) f(x_0)$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ und $f(x) < (>) f(x_0)$ für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ gilt. Aus diesen Formeln lässt sich jeweils ablesen, dass f in x_0 ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder gar kein lokales Extremum annimmt. ■

J.F.B.