F17T2A1

Sei $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$. Seien

$$f_n,\ g_n : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := x^n e^{-nx}, \quad g_n(x) := x^n e^{-x^n}$$

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Untersuche, ob die Funktionen f_n und g_n auf $[0, \infty[$ Maximum und Minimum annehmen.

b) Zeige, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0, \infty[$ punktweise konvergieren. Bestimme die jeweilige Grenzfunktion f bzw. g.

c) Welche der Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren auf $[0, \infty[$ gleichmäßig?

zu a):

$$f_n(x) := x^n e^{-nx} \quad \Rightarrow \quad f_n(0) = 0$$

$$f_n'(x) := nx^{n-1}e^{-nx} - nx^n e^{-nx} = nx^{n-1}e^{-nx}(1-x) \quad \Rightarrow \quad f_n'(1) = 0$$

$$g_n(x) := x^n e^{-x^n} \quad \Rightarrow \quad g_n(0) = 0$$

$$g_n'(x) := nx^{n-1}e^{-x^n} - nx^{n-1}x^n e^{-x^n} = nx^{n-1}e^{-x^n}(1-x^n) \quad \Rightarrow \quad g_n'(1) = 0$$

Da $f_n(0) = g_n(0) = 0$ und $f_n,\ g_n > 0$ ist 0 das Minimum für beide Funktionen. Extrema liegen bei $f_n'(x) = g_n'(x) = 0$. $f_n'(x)$ hat bei $x = 1$ eine Nullstelle. Da $nx^{n-1}e^{-nx}$ stets positiv ist, gilt $f_n'(x) > 0$ für $x < 1$ und $f_n'(x) < 0$ für $x > 1$.

$\Rightarrow$ Bei $x = 1$ liegt ein Maximum $\Rightarrow$ $f_n(1) = e^{-n}$

$g_n'(x)$ hat bei $x = 1$ eine Nullstelle. Es gilt dieselbe Begründung wie für $f_n'(x)$, also liegt auch hier bei $x = 1$ ein Maximum vor. $\Rightarrow$ $g_n(1) = e^{-1}$

zu b):

Sei $x \in [0, \infty[$. Es gilt nach Teil a) $f_n(x) \leq e^{-n}$, da dies das Maximum ist. Somit gilt $f_1(x) = xe^{-x} \leq e^{-n} < 1$. Also erhält man

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n e^{-nx} = \lim_{n\to\infty} (xe^{-x})^n \leq \lim_{n\to\infty} e^{-n^2} = 0$$

$\Rightarrow$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion.

Für g_n gelten 3 Fälle:

1. $\underline{x = 1}$: $g_n(1) = e^{-1}$
2. $\underline{x < 1}$: Also $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n e^{-x^n} \leq \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

3. $\underline{x > 1}$: Also $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n e^{-x^n} = \lim_{n\to\infty} x e^{-x} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Grenzwert } g : [0,\infty[\to \mathbb{R},\, x \mapsto \begin{cases} e^{-1} & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zu c):

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig. Sei $\varepsilon > 0$, wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $e{-}N < \varepsilon$. Es gilt dann für $x \in [0,\infty[$ und $n \geq N$

$$f_n(x) \leq f_n(1) = e{-}n \leq e{-}N < \varepsilon$$

Würde $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergieren, so wäre g_n stetig und damit auch ihre Grenzfunktion g. Da g aber nach Teil b) nicht stetig ist, folgt: $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht gleichmäßig konvergent.