H16T1A3

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \arctan(y)e^y, \quad y(0) = -1$$

a) Zeige, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung auf $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$ besitzt.

b) Bestimme $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$.

Zu a):
Die Differentialgleichung hat eine eindeutige Lösung auf $[0, \infty[$

$$g:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R},\ y \mapsto -\tan(y)e^y \quad \in C^1(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[),\ -1 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

(Bild 1)

$\Rightarrow y' = g(y)$, $y(0) = -1$ hat eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_{-1}: I_{-1} \to \mathbb{R}$ mit I_{-1} offen und $0 \in I_{-1}$ ($\to$ zz. $[0, \infty[\subseteq I_{-1}$)
$\lambda_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 0$ löst $y' = g(y)$, $y(0) = 0$, ist auf $\mathbb{R}$ definiert und damit die maximale Lösung dazu.
Laut Zwischenwertsatz gilt $\lambda_{-1}(t) < 0$ für alle $t \in I_{-1}$ (denn sonst gibt es ein $T \in I_{-1}$ mit $\lambda_{-1}(T) \geq 0$ und eine Nullstelle in $[0, T]$ (bzw. $[T, 0]$) im Widerspruch, dass $\Gamma(\lambda_0) \cap \Gamma(\lambda_{-1}) = \emptyset$).

$$0 < s < t: \quad \lambda_{-1}(0) - \lambda_{-1}(s) = \int_s^t \lambda'_{-1}(r)dr = \int_s^t \underbrace{g(\lambda_{-1}(r))}_{>0} dr$$

$\Rightarrow \lambda_{-1}\Big|_{[0,\infty[\ \cap\ I_{-1}}$ ist (streng) monoton steigend.

(Bild 2)

Angenommen $[0, \infty[\cap I_{-1} = [0, b[$ mit $b < \infty$

$$\Rightarrow \Gamma(\lambda_{-1}) = \{(t, \lambda_{-1}(t)) : t \in [0, b[\} \subseteq [0, b[\times [-1, 0[$$

ist relativ kompakt in $\mathbb{R} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ im Widerspruch zur Charakterisierung maximaler Lösungen.

Zu b):
$\lambda_{-1} : I_{-1} \to \mathbb{R}$ ist eine maximale Lösung von $y' = -\tan(y)e^y$, $y(0) = 1$
$[0, \infty[\subseteq I_{-1}$
Da $\lambda_{-1}\Big|_{[0,\infty[}$ monoton steigend (nach a)) und nach ober beschränkt ($\lambda_{-1} < 0$) existiert

$$\lim_{t \nearrow \infty} \underbrace{\lambda_{-1}(t)}_{\text{liegt in } [-1,0[} = \sup\{\underline{\lambda_{-1}(t)} : t \in [0, \infty[\} \in [-1, 0]$$

Angenommen

$$c := \sup\{\lambda_{-1}(t) : t \in [0,^{\infty}[\} = \lim_{t \nearrow \infty} \lambda_{-1}(t) < 0$$

Dann ist

$$f(\lambda_{-1}(t)) = -\tan(\lambda_{-1}(t))e^{\lambda_{-1}(t)} \in \{f(y) : y \in [-1, c]\}$$
$$\Rightarrow \inf\{f(\lambda_{-1}(s)) : s \in [0, \infty[\} = \min\{f(y) : y \in [-1, c]\} =: b > 0$$

Für $t \geq 0$ ist

$$\lambda_{-1}(t) = -1 + \int_0^t \lambda'_{-1}(s) ds = -1 + \int_0^t \underbrace{f(\lambda_{-1}(s))}_{\geq b} ds \geq -1 + bt$$

wonach der Graph $\Gamma_+(\lambda_{-1}) \subseteq \{(t, x) : t \geq 0, x \geq -1 + bt\}$

(Bild 3)

aber dies widerspricht $[0, \infty[\subseteq I_{-1}$ und $\Gamma_+(\lambda_{-1}) \subseteq [0, \infty[\times [-1, 0[$
Damit bleibt $0 = \lim\limits_{t \nearrow \infty} \lambda_{-1}(t)$.