F17T2A4

Sei $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

a) Bestimme alle holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ mit

$$f(0) = 1 \text{ und } \forall z \in D: \;\; f'(z) = (f(z))^2$$

b) Bestimme alle holomorphen Funktionen $g = u + iv : \; D \to \mathbb{C}$, u und v reellwertig, mit

$$u(0) = v(0) = 0 \text{ und } \forall z \in D: \;\; \sin(u(z)) + iv(z)\cos(v(z)) = 0$$

zu a):

Laut Angabe gilt:

$$f'(z) = (f(z))^2$$
$$f''(z) = 2 \cdot f(z) \cdot f'(z) = 2 \cdot f(z) \cdot (f(z))^2 = 2 \cdot (f(z))^3$$
$$f'''(z) = 2 \cdot 3 \cdot (f(z))^2 \cdot f'(z) = 2 \cdot 3 \cdot f(z) \cdot (f(z))^2 \cdot (f(z))^2 = 3! \cdot (f(z))^4$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(z) = n! \cdot (f(z))^{(n+1)}$$
$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \cdot (f(0))^{(n+1)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (f(0))^{(n+1)} z^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} 1^{(n+1)} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Dies sind die gesuchten holomorphen Funktionen.

zu b):

$$\sin(u(z)) + i \cdot v(z) \cdot \cos(v(z)) = 0 \quad \overset{u,v \text{ reellwertig}}{\Longleftrightarrow} \quad \sin(u(z)) = 0, \quad v(z) \cdot \cos(v(z)) = 0$$

Nebenrechnung:

$$\sin(u(z)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(z) \in \pi\mathbb{Z}$$
$$v(z) \cdot \cos(v(z)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v(z) = 0 \text{ oder } v(z) \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

$\pi\mathbb{Z}$ und $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$ sind diskret, D ist zusammenhängend und u, v stetig (da g holomorph ist, also insbesondere stetig, ist somit auch die Real- und Imaginärteilbildung stetig). Daher sind u, v konstant.
Mit $u(0) = v(0) = 0$ ergibt sich dann $u \equiv v \equiv 0$, also $g \equiv 0$.