H19T2A4

Gegeben sei ein Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ und reelle $(n \times n)$-Matrizen A, B, M. Wir betrachten die affine Differentialgleichung

$$\dot{x} = Mx + c$$

Zeige:

a) Ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der obigen Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = 0$, so ist

$$x(t) = e^{tM}x_0 + y(t),\ t \in \mathbb{R}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung zu dem Anfangswert $x(0) = x_0$.

b) Genau dann existiert für jedes $d \in^{\mathbb{R}}$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\dot{x} = Mx + c,\ Ax(0) + Bx(1) = d,$$

wenn die Matrix

$$C := A + Be^M$$

invertierbar ist. Unter der Annahme, dass dies der Fall ist, drücke die Lösung des Randwertproblems durch y wie in a) aus.

c) Setzen wir

$$F(X) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^{k-1}}{k!}$$

für eine reelle $(n \times n)$-Matrix X, so ist die in a) definierte Funktion y gegeben durch

$$y(t) = tF(tM)c$$

Hinweis: Man darf verwenden, dass man bei konvergernten Potenzreihen Summation und Ableitung vertauschen darf.

Zu a):

Da e^{tM} eine Fundamentalmatrix zu $\dot{x} = Mx$ bildet, ist die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ zu $\dot{x} = Mx + c$, $x(0) = 0$ gegeben als:

$$y(t) = e^{tM} \int_0^t e^{-sM} C ds$$

und die Lösung $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ zu $\dot{x} = Mx + c$, $x(0) = x_0$ ist gegeben als

$$\lambda(t) = e^{tM} x_0 + e^{tM} \int_0^t e^{-sM} C ds = e^{tM} x_0 + y(t)$$

Zu b):

Jede Lösung $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ von $\dot{x} = Mx + c$ ist durch $\lambda(0)$ eindeutig festgelegt, denn laut Lösungsformel gilt

$$\lambda(t) = e^{tM} \lambda(0) + e^{tM} \int_0^1 e^{-sM} c ds$$

$$\left(\Rightarrow \lambda(1) = e^{M} \lambda(0) + e^{M} \int_0^1 e^{-sM} c ds \right)$$

"$\Rightarrow$" Gibt es für jedes $d \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $\dot{x} = Mx + c$, $Ax(0) + Bx(1) = d$, so existiert $\lambda_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $\lambda_d(t) = e^{tM} \lambda_d(0) + e^{tM} \int_0^1 e^{-sM} c ds$ und

$$A\lambda_d(0) + B\lambda_d(1) = d = A\lambda_d(0) + B(e^M \lambda_d(0) + e^M \int_0^1 e^{-sM} c ds)$$

oder $(A + Be^M)\lambda_d(0) = d - Be^M \int_0^t e^{-sM} c ds =: \tilde{d}$ lässt sich für jedes $\tilde{d} \in \mathbb{R}^n$ lösen, d.h. $A + Be^M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \mapsto (A + Be^M)\underline{x}$

$\overset{\text{Dimensionsformel}}{\Longleftrightarrow}$ $A + Be^M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist bijektiv $\Leftrightarrow$ $A + Be^M \in M(n \times n, \mathbb{R})$ invertierbar.

"$\Leftarrow$" Ist $A + Be^M$ invertierbar, dann gibt es für jedes $d \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung von

$$(A + Be^M)\lambda_d(0) = d - Be^M \int_0^1 e^{-sM} c ds =: \tilde{d}$$

nämlich $(A + Be^m)^{-1}(d - Be^M \int_0^1 e^{-sM} c ds) = w_d$

$$\lambda_{w_d}(0),\ \lambda_{w_d}(1) = e^M w_d + e^M \int_0^1 e^{-sM} c ds \Rightarrow A\lambda_{w_d}(0) + B\lambda_{w_d}(1) =$$

$$(A + Be^M)w_d + Be^M \int_0^1 e^{-sM} c ds = d$$

Zu c):

Diese Potenzreihe $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}\right)$ konvergiert auf $\mathbb{C}$ $\left(\text{da} \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k-1]{\left|\frac{1}{k!}\right|} = 0\right)$

$\Rightarrow F(X) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^{k-1}}{k!}$ konvergiert für alle $X \in M(n \times n, \mathbb{R})$

$$e^{tM} \int_0^t e^{-sM} c ds = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((t-s)M)^k}{k!} c ds \underbrace{=}_{\text{lokal gleichm. konv.}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \frac{((t-s)M)^k}{k!} c ds$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-s)^{k+1}}{k!} \frac{1}{(k+1)} M^k (-1) c \Big|_{s=0}^{s=t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} M^k c$$

$$\underbrace{=}_{l=k+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^l}{l!} M^{l-1} c = tF(tM)c$$