

## H19T1A1

- a) Für  $c \in \mathbb{C}$  und  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$  bezeichne  $\partial B(c, r)$  den Rand der Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $c$  und Radius  $r$  in der komplexen Ebene. Der Rand der Kreisscheibe werde einmal entgegen dem Uhrzeigersinn, d.h. in mathematisch positiver Richtung, durchlaufen. Berechne die Integrale

$$\int_{\partial B(20,19)} \frac{\cos(z^2 + 1)}{z^2 - 2019} dz \quad \text{und} \quad \int_{\partial B(0,2)} \frac{\sin(z)}{(z - 1)^3} dz$$

- b) Berechne die Umlaufzahl/Windungszahl um Null für den Weg  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(t) = (\cos(e^{it}))^2$ .

**Zu a):**

**Berechnung des ersten Integrals:** Die Funktion  $\mathbb{C} \ni z \mapsto \cos(z^2 + 1)$  im Zähler des Integranden ist ganz-holomorph, während der Nenner  $z^2 - 2019$  Nullstellen bei  $z_{\pm} := \pm\sqrt{2019}$  besitzt. Nun gilt  $\sqrt{2019} > \sqrt{1600} = 40$ , also folgt

$$|\sqrt{2019} - 20| > 40 - 20 > 19 \quad \text{und} \quad |-\sqrt{2019} - 20| = \sqrt{2019} + 20 > 19$$

also liegen die zwei Singularitäten  $z_{\pm}$  des Integranden nicht in der abgeschlossenen Kreisscheibe  $B(\bar{20}, 19)$ ; diese Kreisscheibe ist vielmehr singularitätenfrei. Mit dem Cauchy-Integralsatz folgt:

$$\int_{\partial B(20,19)} \frac{\cos(z^2 + 1)}{z^2 - 2019} dz = 0$$

**Berechnung des zweiten Integrals:** Die Sinusfunktion im Zähler des Integranden ist ganz-holomorph, und die Nullstelle 1 des Nenners liegt in der offenen Kreisscheibe  $B(0, 2)$ . Damit ist die Cauchy-Integralformel für höhere (hier: zweite) Ableitungen anwendbar. Sie besagt allgemein:

*Cauchy-Integralformel für höhere Ableitungen, Version für Kreisscheiben:* Ist eine abgeschlossene Kreisscheibe  $B(\bar{c}, r)$  im Definitionsbereich einer holomorphen Funktion  $f$  enthalten,<sup>1</sup> so gilt für alle Punkte  $a$  in der offenen Kreisscheibe  $B(c, r)$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\int_{B(c,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{n-1}(a)$$

In unserem Fall ( $f = \sin, c = 0, r = 2, a = 1, n = 3$ ) bedeutet das:

$$\int_{B(0,2)} \frac{\sin(z)}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \sin''(1) = -\pi i \sin(1)$$

**Zu b):**

Die Umlaufzahl  $U$  beträgt mit der Abkürzung  $f(z) := \cos^2(z)$ :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'(e^{it})}{f(e^{it})} i e^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,1)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \end{aligned}$$

Weil die Abbildung  $[0, 2\pi] \ni t \mapsto e^{it}$  den positiv orientierten Rand des Einheitskreises in  $\mathbb{C}$  parametrisiert. Nun ist die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ganz-holomorph, und sie besitzt Nullstellen genau an den Nullstellen der Kosinusfunktion  $\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Die Kosinusfunktion besitzt keine Nullstellen in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,<sup>2</sup> und ihre betragskleinsten reellen Nullstellen sind  $\pm \frac{\pi}{2}$ . Wegen  $\frac{\pi}{2} > 1$  liegt keine dieser Nullstellen in der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe  $B(\bar{0}, 1)$ . Also umfasst der Holomorphiebereich von  $\frac{f'}{f}$  diese Kreisscheibe. Mit dem Cauchy-Integralsatz folgt:

$$U = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,1)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

---

<sup>1</sup>Es genügt auch, wenn  $f$  auf der geschlossenen Kreisscheibe stetig und in ihrem Inneren holomorph ist, doch das ist für diese Aufgabe irrelevant.

<sup>2</sup>In der Tat: Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , also  $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ , gilt  $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im}(z)} \neq 1$ , also  $|e^{iz}| \neq |e^{-iz}|$  und daher  $\cos(z) = (e^{iz} + e^{-iz})/2 \neq 0$