Herbst 23 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation m mit

$$m(1) = \infty, \qquad m(\infty) = 0, \qquad \text{und} \qquad m(0) = 1 - i$$

Zeigen Sie, dass für eine solche Funktion die Relation $m(i) = 1$ gelten muss.

b) Es bezeichne Δ die offene Dreiecksfläche in $\mathbb{C}$ mit den Eckpunkten 0, 1 und i. Bestimmen Sie die Bildmenge $m(\Delta)$, wobei m wie in Teilaufgabe a) gewählt sei. Verdeutlichen Sie Ihr Ergebnis durch eine Skizze von $m(\Delta)$.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Bilder der drei Geraden, die aus den Verlängerungen der Dreiecksseiten von Δ entstehen, unter der Abbildung m. Worauf wird die Dreiecksseite abgebildet, die 0 und i verbindet? Für all diese Überlegungen genügt es, die werte von m an den Stellen 0, 1, i und ∞ zu kennen. Diese sind aus Teilaufgabe a) bekannt.

Lösungsvorschlag:

a) Für $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}$ ist eine allgemeine Möbiustransformation $\hat{m} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ durch

$$\hat{m}(z) := \frac{a_1 z + a_2}{a_3 z + a_4}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gegeben. Es ist weiter $\hat{m}(\infty) := \lim_{z\to\infty} \frac{a_1 z + a_2}{a_3 z + a_4}$. Um m zu finden, setzen wir die vorgegebenen Bedingungen ein:

$$\begin{aligned}
\hat{m}(1) &= \frac{a_1 + a_2}{a_3 + a_4} \overset{!}{=} \infty \\
\hat{m}(\infty) &= \frac{a_1}{a_3} \overset{!}{=} 0 \\
\hat{m}(0) &= \frac{a_2}{a_4} = 1 - i
\end{aligned}$$

Diese Bedingungen implizieren:

$$\begin{aligned}
a_3 + a_4 &= 0 && (1)\\
a_1 &= 0 && (2)\\
a_2 &= a_4(1 - i) && (3)
\end{aligned}$$

Man kann also etwa $a_3 = -1$, $a_4 = 1$, $a_1 = 0$ und $a_2 = 1 - i$ wählen. Es ergibt sich als mögliche Wahl für m:

$$m(z) = \frac{1 - i}{-z + 1} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Man kann jetzt für die allgemeine Wahl von (1)-(2) zeigen, dass $\hat{m}(i) = 1$: Es ist

$$\hat{m}(i) = \frac{a_2}{a_3 i + a_4} = \frac{a_4(1-i)}{-a_4 i + a_4} = \frac{a_4(1-i)}{a_4(1-i)} = 1,$$

solange $a_4 \neq 0$. Diese Wahl ist aber nicht zulässig, da sonst $\hat{m}(0) = 1-i$ nicht erfüllt wäre.

b) Die zur Gerade fortgesetzte Verbindungsstrecke von 0 und i ist die Menge $(ti)_{t\in\mathbb{R}}$. Eingesetzt in m:

$$m(ti) = \frac{1-i}{-ti+1} = \frac{(1-i)(ti+1)}{(-ti+1)(ti+1)} = \frac{ti+1+t-i}{t^2+1} = \frac{1+t}{t^2+1} + \frac{i(t-1)}{t^2+1}$$

Man sieht dann $\lim_{t\to\pm\infty} m(ti) = 0$. Weiter ist $m(0) = 1-i$ und $m(i) = 1$. Die Punkte 0, 1 und $1-i$ liegen nicht auf einer Geraden. Es ist eher naheliegend, dass $\big(m(ti)\big)_{t\in\mathbb{R}}$ ein Kreis ist. Wir wollen Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $a \in \mathbb{C}$ des Kreises berechnen. Dazu setzen wir die drei bekannten Punkte 0, 1 und $1-i$ für z in die Kreisgleichung $\big(\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(a)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(a)\big)^2 = r^2$ ein:

$$\mathrm{Re}(a)^2 + \mathrm{Im}(a)^2 = r^2 \tag{4}$$
$$\big(1-\mathrm{Re}(a)\big)^2 + \mathrm{Im}(a)^2 = r^2 \tag{5}$$
$$\big(1-\mathrm{Re}(a)\big)^2 + \big(-1-\mathrm{Im}(a)\big)^2 = r^2 \tag{6}$$

Aus (4) folgt $\mathrm{Im}(a)^2 = r^2 - \mathrm{Re}(a)^2$. Das kann man in (5) einsetzen, um zu erhalten:

$$\big(1-\mathrm{Re}(a)\big)^2 + r^2 - \mathrm{Re}(a)^2 = r^2 \iff 1 - 2\mathrm{Re}(a) = 0 \iff \mathrm{Re}(a) = \frac{1}{2}$$

Jetzt setzt man $\mathrm{Im}(a)^2 = r^2 - \mathrm{Re}(a)^2$ in (6) ein:

$$\begin{aligned} & 1 - 2\mathrm{Re}(a) + \mathrm{Re}(a)^2 + 1 + 2\mathrm{Im}(a) + r^2 - \mathrm{Re}(a)^2 = r^2 \\ \overset{\mathrm{Re}(a)=\frac{1}{2}}{\iff} & 1 + 2\mathrm{Im}(a) = 0 \\ \iff & \mathrm{Im}(a) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Und daher $r^2 = \frac{1}{2} \iff r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Damit, falls die Punkte auf einem Kreis liegen, muss $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ und $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gelten. Wir zeigen jetzt, dass die Punkte $\big(m(ti)\big)_{t\in\mathbb{R}}$ tatsächlich auf diesem Kreis liegen. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} |m(ti) - a|^2 &= \left(\frac{1+t}{t^2+1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{t-1}{t^2+1} + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1+2t-t^2}{2(t^2+1)}\right)^2 + \left(\frac{-1+2t+t^2}{2(t^2+1)}\right)^2 \\ &= \frac{t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 4t + 1 + t^4 + 4t^3 + 2t^2 - 4t + 1}{4t^4 + 8t^2 + 4} \\ &= \frac{2t^4 + 4t^2 + 2}{4t^4 + 8t^2 + 4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Das beweist unsere Hypothese, dass $\big(m(ti)\big)_{t\in\mathbb{R}} \subseteq \partial B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(a)$.
Überprüfen der Monotonie der Real- und Imaginärteile von $[0,1] \ni t \mapsto m(ti)$ zeigt, dass $\big(m(ti)\big)_{t\in[0,1]}$ das Kreisliniensegment Γ_1 im vierten Quadranten ist, das die Punkte 1 und $1-i$ verbindet und dessen Fortsetzung zu einem Kreis durch die 0 läuft.

Jetzt zur Geraden, die aus der Fortsetzung der Verbindungsstrecke von 0 und 1 entsteht: Das ist die Menge $\big(t\big)_{t\in\mathbb{R}}$. Es ist:

$$m(t) = \frac{1}{-t+1}(1-i)$$

Also ist $\big(m(t)\big)_{t\in\mathbb{R}} = (\mathbb{R}\setminus\{0\})(1-i) \cup \{\infty\}$ eine Gerade und $\Gamma_2 := \big(m(t)\big)_{t\in[0,1]} = [1,\infty)(1-i)$.

Zuletzt betrachten wir die Gerade, die i und 1 verbindet: Sie ist gegeben durch die Menge $\big(t+(1-t)i\big)_{t\in\mathbb{R}}$. Eingesetzt in m ergibt sich: $(t\in\mathbb{R}\setminus\{1\})$

$$\begin{aligned} m\big(t+(1-t)i\big) &= \frac{1-i}{-t-(1-t)i+1} = \frac{(1-i)((1-t)+(1-t)i)}{2(1-t)^2} \\ &= \frac{(1-i)(1-t)+(1-t)(1-i)i}{2(1-t)^2} = \frac{(1-i)+(1-i)i}{2(1-t)} \\ &= \frac{1}{1-t} \end{aligned}$$

Für $t\in[0,1)$ ergibt das die Gerade $\Gamma_3 := [1,\infty)$ als Bild.

Wir haben also die drei Mengen Γ_1, Γ_2, Γ_3 gefunden, auf die die Seiten des Dreiecks Δ abgebildet werden. Wir zeigen jetzt, dass für die drei Seiten S_1, S_2, S_3 von Δ gilt:

$$m(S_i \cap \mathbb{C}\setminus\{1\}) \subseteq \partial m(\Delta) \quad \forall i \in \{1,2,3\} \tag{7}$$

Wir wählen für $i\in\{1,2,3\}$ ein $x\in S_i$. Dann gibt es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \Delta$, sodass $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. Aus Stetigkeitsgründen ist dann

$$\lim_{k\to\infty} \underbrace{m(x_k)}_{\in m(\Delta)} = m(x) \in \overline{m(\Delta)}.$$

Dass $m(x)$ Da der obige Limes existiert, ist (7) gezeigt. Man kann sogar zeigen, dass $m(x)\in\partial m(\Delta)$. Wäre dem nicht so, dann gäbe es eine Umgebung U von $m(x)$, die in $m(\Delta)$ liegt und demnach wäre $m^{-1}(U)$ offen (m ist stetig!) und $x\in m^{-1}(U)$ wäre ein innerer Punkt. Das widerspricht der Annahme, dass x auf dem Rand liegt.
Wir können demnach folgern, dass die Seiten von Δ auf den Rand des Bildes von Δ abgebildet werden. Da $m(\Delta)$ zusammenhängend sein muss (Satz über die Gebietstreue), ist $m(\Delta)$ entweder das Innere oder das Äußere der Kurve $\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$.
Etwa ist $m\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right) = \frac{8}{5}-\frac{4}{5}i$. Dieser Punkt liegt im Inneren der angesprochenen Kurve $\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$. Damit ist $m(\Delta)$ identifiziert (siehe auch Abbildung 1).

(JR)