H17T1A2

a) Bestimme die Ordnung der Nullstelle $z_0 = 0$ der Funktion

$$f(z) := 6\sin(z^3) + z^3(z^6 - 6)$$

b) Sei $b > 0$. Zeige, dass gilt:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$$

Es darf ohne Beweis $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ verwendet werden.

Hinweis: Betrachte für $R > 0$ das Kurvenintegral $\int\limits_{\gamma_R} e^{-z^2}dz$, wobei γ_R der Rand des Rechtecks mit den Eckpunkten $\pm R + 0i$ und $\pm R + bi$ ist.

Zu a):

$$f(z) := 6\sin(z^3) + z^3(z^6 - 6) = 6\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{3(2k+1)} + z^3(z^6-6) =$$

$$= 6z^3 - \frac{6}{3!}z^9 + 6\Big(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{3(2k+1)}\Big) + z^9 - 6z^3 = 6\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{3(2k+1)} =$$

Um die Nullstellenordnung zu berechnen, bringe f in die Form $f(z) = (z-0)^n g(z)$

$$= 6z^{15}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{3(2k-4)}$$

f ist als holomorphe Funktion, die auf ganz $\mathbb{C}$ definiert ist, ganz und konvergiert somit für alle $z \in \mathbb{C}$.

Werte $g(z) := \sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{3(2k-4)}$ bei $z_0 = 0$ aus.

$\Rightarrow\ g(0) = \frac{1}{5!} \neq 0\ \Rightarrow$ Nullstellenordnung von $f(0)$ ist 15.

Zu b):

Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|\cos(2bx)| \in [0,1]$, also ist $h : \mathbb{R} \to [0, \infty[,\ x \mapsto e^{-x^2}$ eine integrierbare Majorante. Daher ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x^2}\cos(2bx) \in L^1(\mathbb{R})$, also integrierbar.
Weil $\cos(2bx) = \cos(2b(-x))$ gilt (also achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse) und auch $e^{-x^2} = e^{-(-x)^2}$ gilt, folgt:

$$2\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)dx$$

Unter Verwendung des Hinweis, betrachte erstmal das Kurvenintegral $\int_{\gamma_R} e^{-z^2}dz$ über den Rand des Rechtecks.

$$\text{Sei } \gamma_R = \gamma_{R,1} \dotplus \gamma_{R,2} \dotplus \gamma_{R,3} \dotplus \gamma_{R,4} \text{ mit}$$

$$\gamma_{R,1} : [-R, R] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t, \quad \gamma_{R,2} : [0, b] \to \mathbb{C},\ t \mapsto R + it$$
$$\gamma_{R,3} : [-R, R] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t + ib, \quad \gamma_{R,4} : [0, b] \to \mathbb{C},\ t \mapsto -R + it$$
$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} e^{-z^2}dz = \int_{\gamma_{R,1}} e^{-z^2}dz + \int_{\gamma_{R,2}} e^{-z^2}dz - \int_{\gamma_{R,3}} e^{-z^2}dz - \int_{\gamma_{R,4}} e^{-z^2}dz$$

Da $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto e^{-z^2}$ holomorph ist, gilt nach dem Cauchy-Integralsatz

$$\int_{\gamma_R} e^{-z^2}dz = 0$$

$$\int_{\gamma_{R,1}} e^{-z^2}dz = \int_{-R}^R e^{-t^2} \cdot 1dt \xrightarrow{R\to\infty} \sqrt{\pi} \text{ (laut Angabe)}$$

$$\int_{\gamma_{R,3}} e^{-z^2}dz = \int_{-R}^R e^{-(t+ib)^2} \cdot 1dt = \int_{-R}^R e^{-(t^2+2itb-b^2)}dt = \int_{-R}^R e^{-t^2}e^{-2itb}e^{b^2}dt =$$

$$e^{b^2}\int_{-R}^R e^{-t^2}e^{-2itb}dt = e^{b^2}\Big(\underbrace{\int_{-R}^0 e^{-t^2}e^{-2itb}dt}_{\text{Substitution } t\mapsto -s} + \int_0^R e^{-t^2}e^{-2itb}dt\Big) =$$

$$e^{b^2}\Big(\int\limits_R^0 e^{-(s)^2}e^{-2i(-s)b}(-1)ds + \underbrace{\int\limits_0^R e^{-t^2}e^{-2itb}dt}_{\text{Substitution } t\mapsto s}\Big) =$$

$$e^{b^2}\Big(-\int\limits_R^0 e^{-s^2}e^{2isb}ds + \int\limits_0^R e^{-s^2}e^{-2isb}ds\Big) = e^{b^2}\Big(\int\limits_0^R e^{-s^2}e^{2isb}ds + \int\limits_0^R e^{-s^2}e^{-2isb}ds\Big) =$$

$$e^{b^2}\int\limits_0^R e^{-s^2}(e^{2isb}+e^{-2isb})ds = e^{b^2}\int\limits_0^R e^{-s^2}2\cos(2bs)ds = 2e^{b^2}\int\limits_0^R e^{-s^2}\cos(2bs)ds$$

$$\xrightarrow{R\to\infty} 2e^{b^2}\int\limits_0^\infty e^{-s^2}\cos(2bs)ds$$

$$\Big|\int\limits_{\gamma_{R,2}} e^{-z^2}dz\Big| = \Big|\int\limits_0^b e^{-(R+it)^2}idt\Big| \leq \int\limits_0^b |e^{-(R+it)^2}|dt = \int\limits_0^b e^{\Re e(-(R+it)^2)}dt =$$

$$\int\limits_0^b e^{\Re e(-R^2-2Rit+t^2)}dt = \int\limits_0^b e^{-R^2+t^2}dt = e^{-R^2}\int\limits_0^b e^{t^2}dt \leq e^{-R^2}e^{b^2}b \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$\Big|\int\limits_{\gamma_{R,4}} e^{-z^2}dz\Big| = \Big|\int\limits_0^b e^{-(-R+it)^2}idt\Big| \leq \int\limits_0^b |e^{-(-R+it)^2}|dt = \int\limits_0^b e^{\Re e(-(-R+it)^2)}dt =$$

$$\int\limits_0^b e^{\Re e(-R^2+2Rit+t^2)}dt = \int\limits_0^b e^{-R^2+t^2}dt = e^{-R^2}\int\limits_0^b e^{t^2}dt \leq e^{-R^2}e^{b^2}b \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Insgesamt:

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_R} e^{-z^2}dz = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_{R,1}} e^{-z^2}dz + \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_{R,2}} e^{-z^2}dz - \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_{R,3}} e^{-z^2}dz - \lim_{R\to\infty}\int\limits_{\gamma_{R,4}} e^{-z^2}dz$$

$$0 = \sqrt{\pi} + 0 - 2e^{b^2}\int\limits_0^\infty e^{-s^2}\cos(2bs)ds - 0$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^\infty e^{-s^2}\cos(2bs)ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^{b^2}} \quad \Rightarrow \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$$