

**Herbst 13 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen  
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq 0 \text{ oder } y \geq x^2, \\ 1 & \text{für } 0 < y < x^2. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass  $f$  in  $(0,0)$  unstetig ist, aber dort sämtliche Richtungsableitungen existieren.

**Lösungsvorschlag:**

Wir bestimmen die Richtungsableitungen in der Richtung von  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ . Wir bestimmen dazu zunächst die einseitigen Richtungsableitungen  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(tv)}{t}$ . Um dann die Richtungsableitung  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv)}{t}$  zu erhalten, sollten  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(tv)}{t}$  und  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f((-v)t)}{t}$  existieren und übereinstimmen.

- Ist  $v_2 \leq 0$ , so ist  $f(tv) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ , denn  $(tv)_2 = tv_2 \leq 0$ . Die Richtungsableitung ist also  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(tv)}{t} = 0$ .
- Ist  $v_2 > 0$  sowie  $v_1 = 0$ , so ist nach Definition  $f(tv) = f(0, tv_2) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ , denn  $tv_2 > 0 = 0^2$ ; die Richtungsableitung ist also  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(tv)}{t} = 0$ .
- Ist  $v_2 > 0$  und  $v_1 \neq 0$ , so hat die Gleichung  $(tv_2) = (tv_1)^2$  genau eine Lösung für  $t > 0$ , nämlich  $t = \frac{v_2}{v_1^2}$ . Für  $t < \frac{v_2}{v_1^2}$  ist  $tv_2 > t(tv_1^2) = (tv_1)^2$ . Es gilt dann also  $f(tv) = 0$  für  $t < \frac{v_2}{v_1^2}$ , und die Richtungsableitung ist also gleich 0.

Wir sehen also, dass alle Richtungsableitungen existieren und gleich 0 sind. Die Funktion  $f$  ist aber nicht stetig, denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0 = f(0,0).$$

*J.F.B.*