H19T3A5

a) Seien f, g : $\mathbb{R}^2 \setminus\{(0, 0)\} \to$ R differenzierbare Funktionen und

$$p :]0, \infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ (r,\ \phi) \to f\Big(r\cos(\varphi),\ r\sin(\varphi)\Big)\cos(\varphi) +\ g\Big(r\cos(\varphi),\ r\sin(\varphi)\Big)\sin(\varphi)$$

$$q :]0, \infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ (r,\ \phi) \to \frac{1}{r}\Big(g\Big(r\cos(\varphi),\ r\sin(\varphi)\Big)\cos(\varphi)\ -f\Big(r\cos(\varphi),\ r\sin(\varphi)\Big)\sin(\varphi)\Big).$$

Zeigen Sie: Ist $\alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2) : I \to\ ]0, \infty[\ \times \mathbb{R}$ eine Lösung des Systems

$$r' = p(r,\ \phi) \qquad\qquad \phi' = q(r,\ \phi)$$

so ist $\beta : I \to \mathbb{R}^{2\setminus}\{(0, 0)\};\ t \to (\beta_1, \beta_2) = \Big(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t))\Big)$ eine Lösung des Systems

$$x' = f(x, y) \qquad\qquad y' = g(x, y)$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = y + x^3 + xy^2 \qquad\qquad y' = -x + x^2y + y^3 \qquad\qquad (x(0), y(0)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$$

auf $\mathbb{R}^2$

Zu a)

Zunächst gilt für alle t $\in$ I

$$\beta_1'(t) = \alpha_1'(t)\ cos(\alpha_2(t)) - \alpha_1(t)\alpha_2'(t)\ sin(\alpha_2(t))$$

$$= f\Big(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t))\ , \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t))\Big)\cos(\alpha_2(t))^2 +\ g\Big(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t))\Big)\cos(\alpha_2(t))\sin(\alpha_2(t)) - \frac{\alpha_1(t)}{\alpha_1(t)}\sin(\alpha_2(t))g\Big(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t))\Big)\cos(\alpha_2(t)) + \frac{\alpha_1(t)}{\alpha_1(t)}\sin(\alpha_2(t))^2 f\Big(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)),\ \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t))\Big)$$

$$= f\Big(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t))\Big)\ \Big(\cos(\alpha_2(t))^2 + \sin(\alpha_2(t))^2\Big) - g\Big(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)),\ \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t))\Big)\ \Big(\sin(\alpha_2(t))\cos(\alpha_2(t)) - \sin(\alpha_1(t))\cos(\alpha_2(t))\Big)$$

$$= f\Big(\alpha_1(t)\cos(\alpha_2(t)), \alpha_1(t)\sin(\alpha_2(t))\Big) = f(\beta_1(t),\ \beta_2(t)).$$

Analog rechnet man nach: $\beta_2'(t) = g(\beta_1(t),\ \beta_2(t))$.

Damit ist β wie behauptet eine Lösung des angegebenen Systems von Differentialgleichungen.

Zu b)

Wir sehen unmittelbar, dass das System von Differentialgleichungen autonom ist. Zunächst stellen wir fest, dass $\mathbb{R}^2$ ein Gebiet ist und ferner $(f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ als Vektorfeld mit multivariaten Polynomfunktion als Komponentenfunktionen sogar glatt, insbesondere also lokal Lipschitz-stetig ist. Damit können wir für ein vorgegebenes $(x(0), y(0)) = (\eta_x, \eta_y) \in \mathbb{R}^2$ den globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz auf das so definierte Anfangswertproblem anwenden. Dieser liefert uns die Existenz einer eindeutig bestimmten maximalen Lösung $(\xi_x, \xi_y) : I \to \mathbb{R}^2$ des Anfangswertproblems, die auf einem maximalen offenen Intervall I das Anfangswertproblem zum Anfangswert $(x(0), y(0)) = (\eta_x, \eta_y)$ löst. Für die Wahl $(\eta_x, \eta_y) = (0, 0)$ sehen wir, dass es sich um eine Ruhelage des betrachteten Systems handelt. Somit ist $(x_0, y_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; t \to (0, 0)$ die eindeutig bestimmte und maximale Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems, denn $(x\ 0 , y\ 0)$ ist auf ganz R definiert und löst dort das eben besprochene Anfangswertproblem. Zudem handelt es sich um die eindeutig bestimmte maximale Lösung für den Anfangswert $(x(\tau), y(\tau)) = (0, 0)$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$.

Da $(x(0), y(0)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \neq (0,0)$, sehen wir, dass für die zum Anfangswertproblem $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$, $(x(0), y(0)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ gehörige maximale Lösung $(\xi_x, \xi_y) : I \to \mathbb{R}^2; t \to (\xi_x(t), \xi_y(t))$ gilt, dass $(\xi_x(t), \xi_y(t)), \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ für alle t aus dem maximalen Existenzintervall I. Andernfalls finden wir ein $\tau \in R$, sodass $(\xi_x(\tau), \xi_y(\tau)), = (0, 0) = (x_0(\tau), y_0(\tau))$. Dann sind aber durch (x_0, y_0) und (ξ_x, ξ_y), wegen $(\xi_x(t), \xi_y(t)), = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \neq (0,0)$ zwei verschiedene und maximal definierte Lösungen des Anfangswertproblems $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$, $(x(\tau), y(\tau)) = (0,0)$ gegeben, was der Eindeutigkeit der maximalen Lösung des Anfangswertproblems infolge des globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes widerspricht. Somit gilt also tatsächlich $(\xi_x(t), \xi_y(t)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ für alle $t \in I$. Da $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ebenfalls ein Gebiet ist, reicht es f und g auf $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ einzuschränken und das Anfangswertproblem auf D zu betrachten. Wir bezeichnen lax die angesprochenen Einschränkungen wieder mit f bzw. g. Damit haben (die neuen) f und g die für die Definition von p, q gemäß Angabe notwendige Form. Es gilt dann

$$p(r, \varphi) = r \sin(\varphi) \cos(\varphi) + r^3 \cos(\varphi)^2 - r \cos(\varphi) \sin(\varphi) + r^3 \sin(\varphi)^2 = r^3$$

$$q(r, \varphi) = - \cos(\varphi)^2 + r \sin(\varphi) \cos(\varphi) - \sin(\varphi)^2 - r^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) = -1$$

Wir setzen also wie in Teil (a) das System $r' = p(r, \varphi) = r^3$ und $\varphi' = q(r, \varphi) = -1$ auf, wo $(r, \varphi) \in]0, \infty[\times R$. Es ist leicht nachzurechnen, dass die maximalen Lösungen jeweils durch $r(t) = \frac{2}{\sqrt{2r_0^{-2} - t}}$ und $\varphi(t) = \varphi_0 - t$ für die Anfangswerte $r_0 > 0$ und φ_0 gegeben sind und wir für die maximale Lösung (r, φ) des Systems $I =] - \infty, \frac{2}{\sqrt{2r_0^{-2}}} > 0[$ fordern müssen wegen des Charakterisierungssatzes für maximale Lösungen anhand des Randverhaltens. Indem wir nun das in Teil (a) bewiesene Resultat bemühen, finden wir

$\xi_x(t) = \dfrac{2\cos\left(\varphi_0 - t\right)}{\sqrt{2{r_0}^{-2} - t}}$, $\xi_y(t) = \dfrac{2\sin\left(\varphi_0 - t\right)}{\sqrt{2{r_0}^{-2} - t}}$ und bestimmen $2{r_0}^{-2} = 8$ sowie $\varphi_0 = 0$ aus der Forderung, dass $(\xi_x(0), \xi_y(0)) = (0, 0)$ also eine Lösung des Anfangswertproblems ist. Dann gilt, dass $\xi = \left(\xi_x, \xi_y\right) : I \to \mathbb{R}^2; t \to \left(\dfrac{2\cos(t)}{\sqrt{8 - t}}, \dfrac{-2\sin(t)}{\sqrt{8 - t}}\right)$ eine Lösung des Anfangswertproblems ist, die mit $I =]-\infty, 8[$ auch $0 \in I$ erfüllt und wegen des Charakterisierungssatzes zur Maximalität von Lösungen tatsächlich auch eine, und damit die, maximale Lösung des Anfangswertproblems ist.