

H17T1A1

a) Ist die Menge $A := \{z \in \mathbb{C} : |z| + \Re(z) \leq 1\}$ abgeschlossen in \mathbb{C} ? Falls ja, bestimme, ob A kompakt ist.

b) Bestimme den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{5n^2} z^n$$

c) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Es seien C^1 -Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. Bestimme, ob die Funktionen $g(x, y) := e^{u(x, y)} \cos(v(x, y))$ und $h(x, y) := e^{u(x, y)} \sin(v(x, y))$, für $x + iy \in \Omega$, die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen oder nicht.

Zu a):

$A := \{z \in \mathbb{C} : |z| + \Re(z) \leq 1\}$ ist abgeschlossen, denn $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto |z| + \Re(z)$ ist als Komposition stetiger Abbildungen $|\cdot|$ und $\Re|\cdot|$ stetig und $A = \varphi^{-1}(]-\infty, 1])$ ist abgeschlossen.

Für $z = x + 0 \cdot i$ mit $x \leq 0$ ist $|z| + \Re(z) = |y| + y = 0 \leq 1$, also ist $\{z = x : x \leq 0\} \subseteq A$ und nicht beschränkt.

$\Rightarrow A$ ist nicht beschränkt, also auch nicht kompakt.

Zu b):

Wurzelkriterium (Formel von Cauchy-Hadamard)

$$\begin{aligned} L &:= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n} \right)^{5n^2}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{5n} = \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n-1}{n} \right)^n \right)^5 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right)^5 \end{aligned}$$

Es ist bekannt, dass $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ ist, mit $z = -1$ gilt:

$$e^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{e}\right)^5 = \frac{1}{e^5} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{L} = e^5$$

Zu c):

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ist offen, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sind C^1 -Funktionen, die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen, also gilt:

$$\partial_x u = \partial_y v \quad \text{und} \quad \partial_y u = -\partial_x v$$

Zu zeigen: werden $\partial_x g = \partial_y h$ und $\partial_y g = -\partial_x h$ erfüllt oder nicht?

$$\partial_x g = \partial_x u e^u \cos(v) - e^u \sin(v) \partial_x v = e^u (\partial_x u \cos(v) + \partial_y u \sin(v))$$

$$\partial_y h = \partial_y u e^u \sin(v) + e^u \cos(v) \partial_y v = e^u (\partial_y u \sin(v) + \partial_x u \cos(v))$$

$$\partial_y g = \partial_y u e^u \cos(v) - e^u \sin(v) \partial_y v = e^u (-\partial_x v \cos(v) - \partial_y v \sin(v))$$

$$\partial_x h = \partial_x u e^u \sin(v) + e^u \cos(v) \partial_x v = e^u (\partial_y v \sin(v) + \partial_x v \cos(v))$$

$\Rightarrow g$ und h erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.