F09T2A1

Gegeben sein folgendes Differentialgleichungssystem

$$x' = -y + x\sin(x^2 + y^2) \tag{1}$$

$$y' = x + y\sin(x^2 + y^2) \tag{2}$$

a) Bestimme alle periodischen Orbits.

b) Skizziere das Phasenportrait.

Hinweis: Man transformiere auf Polarkoordinaten. Zunächst bestimme man eine Differentialgleichung für $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

zu a):

Transformation in Polarkoordinaten: $\dot{r} = p(r, \varphi)$, $\dot{\varphi} = q(r, \varphi)$ mit

$$p(r, \varphi) := f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\cos(\varphi) + g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\sin(\varphi)$$

$$= \cos(\varphi)[-r\sin(\varphi) + r\cos(\varphi)\sin(r^2)] + \sin(\varphi)[r\cos(\varphi) + r\sin(\varphi)\sin(r^2)]$$

$$= r\sin(r^2)((\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2) = r\sin(r^2) = \dot{r}$$

$$q(r, \varphi) := \frac{1}{r}(g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\cos(\varphi) - f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\sin(\varphi)) =$$

$$= \frac{1}{r}((r\cos(\varphi) + r\sin(\varphi)\sin(r^2))\cos(\varphi) - \sin(\varphi)(-r\sin(\varphi) + r\cos(\varphi)\sin(r^2)))$$

$$= (\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2 = 1 = \dot{\varphi}$$

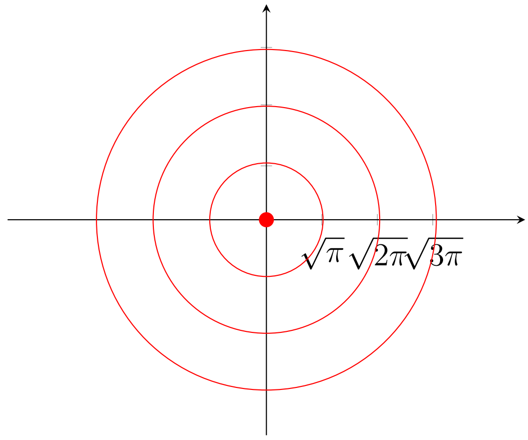
$\to \varphi(t) = \varphi_0 + t$

Für jede periodische Lösung von $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$ muss die auf Polarkoordinaten transformierte Lösung von $\dot{r} = p(r, \varphi) = r\sin(r^2)$ ebenfalls periodisch sein.

Da jede Lösung einer reellen, autonomen Differentialgleichung mit stetiger rechter Seite monoton ist (d.h. ist $h : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\lambda : J \to \mathbb{R}$ Lösung zu $x' = h(x)$ dann ist λ monoton)

$\Rightarrow$ $\dot{r} = r\sin(r^2)$ hat nur konstante periodische Lösungen.
$r = 0$, $\sin(r^2) = 0$ d.h. $r^2 = \pi k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ $\Rightarrow$ nichtkonstante periodische Lösungen: $r(t) = \sqrt{\pi k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\varphi(t) = \varphi_0 + t$

zu b):



(Orbit ist eine Trajektorie)