F19T1A5

a) Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\frac{1}{n}) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihenentwicklung von f um $z_0 = 1+i$? Begründe die Antwort kurz.

b) Es sei $G \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$ und seien $a, b \in G$ mit $a \neq b$. Zeige, dass es eine biholomorphe (konforme und surjektive) Abbildung $f : G \to G$ von G auf sich selbst mit $f(a) = b$ gibt.

c) Es sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Zeige, dass es keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gibt.

Zu a):
Der Konvergenzradius ist $\sqrt{2} = |0 - (1+i)|$
Da $f\big|_{\{z\in\mathbb{C}:|z-(1+i)|<\sqrt{2}\}}$ holomorph ist, konvergiert die Potenzreihenentwicklung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1+i)}{n!}(z-(1+i))^n$$

von f um $1+i$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z-(1+i)| < \sqrt{2}\}$ (also $\rho \geq \sqrt{2}$).
0 ist keine hebbare Singularität von f, da wegen $f(\frac{1}{n}) = n$, f in keine punktierten Umgebung von 0 beschränkt ist. Daher ist $\rho \leq \sqrt{2}$ (denn sonst gibt die Potenzreihe eine holomorphe Fortsetzung von f in 0).

$$\Rightarrow \rho = \sqrt{2}$$

Zu b):
Sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
$\mathrm{Aut}(\mathbb{E}) := \{g_{\lambda,c} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}, z \mapsto e^{i\lambda}\frac{z-c}{1-\bar{c}z} : \lambda \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{E}\}$ ist die Menge aller biholomorphen Abbildungen von $\mathbb{E}$ in sich, wobei $g_{\lambda,c}(c) = 0$.
Nach dem Riemannschen Abbildungssatz gibt es ein biholomorphes $h : \mathcal{G} \to \mathbb{E}$
$\Rightarrow h_a := g_{0,h(a)} \circ h : \mathcal{G} \to \mathbb{E}$ ist biholomorph mit $h_a(a) = g_{0,h(a)}(h(a)) = 0$.
Analog gibt es ein biholomorphes $h_b : \mathcal{G} \to \mathbb{E}$ mit $h_b(b) = 0$
$\Rightarrow f := (h_b)^{-1} \circ h_a : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ ist biholomorph mit

$$f(a) = (h_b)^{-1}(h_a(a)) = (h_b)^{-1}(0) = b$$

Zu c):
$f\big|_{\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq 1\}}$ ist stetig, $f\big|_{\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}}$ ist holomorph. Nach dem Maximumsprinzip Minimumsprinzip (da $f(z) \neq 0\ \forall z$) für beschränkte Gebiete hat $|f|\big|_{\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq 1\}}$ ein Maximum Minimum. Dieses wird auf $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ angenommen. Wegen $f(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ ist $\max\{|f(z)| : |z| \leq 1\} = 1 = \min\{|f(z)| : |z| \leq 1\}$
$\Rightarrow |f|$ ist konstant auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$
$\Rightarrow f\big|_{\mathbb{D}}$ ist konstant (nach Maximumsprinzip, da z.B. $0 \in \mathbb{D}$ ein lokales Maximum von $|f|\big|_{\mathbb{D}}$ ist).
$\Rightarrow f$ ist konstant nach dem Identitätssatz im Widerspruch zu $f(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$.