H19T1A1

a) Für $c \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ bezeichne $\partial B(c,r)$ den Rand der Kreisscheibe mit Mittelpunkt c und Radius r in der komplexen Ebene. Der Rand der Kreisscheibe werde einmal entgegen dem Uhrzeigersinn, d.h. in mathematisch positiver Richtung, durchlaufen. Berechne die Integrale

$$\int_{\partial B(20,19)} \frac{\cos(z^2+1)}{z^2-2019}dz \quad \text{und} \quad \int_{\partial B(0,2)} \frac{\sin(z)}{(z-1)^3}dz$$

b) Berechne die Umlaufzahl/Windungszahl um Null für den Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto (\cos(e^{it}))^2$$

Zu a):

Berechnung des ersten Integrals:

$$\int_{\partial B(20,19)} \frac{\cos(z^2+1)}{z^2-2019}dz = \int_{\partial B(20,19)} \frac{\cos(z^2+1)}{\sqrt{z-2019}\sqrt{z+2019}}dz$$

$$f : B(20,20) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{\cos(z^2+1)}{z^2-2019}$$

holomorph als Quotient holomorpher Funktionen mit nullstellenfreiem Nenner.

$$\int_{\partial B(20,19)} \frac{\cos(z^2+1)}{z^2-2019}dz = \int_{\partial B(20,19)} f(z)dz = 0$$

nach Cauchy-Integralsatz.

$$\int_{\partial B(0,2)} \frac{\sin(z)}{(z-1)^3}dz$$

Da $f = \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sin(z)$ holomorph, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto 2e^{it}$ ist als geschlossener Weg nullhomolog in $\mathbb{C}$.

Alternative:

Die Funktion $\mathbb{C} \ni z \mapsto \cos(z^2+1)$ im Zähler des Integranden ist ganz-holomorph, während der Nenner $z^2 - 2019$ Nullstellen bei $z_\pm := \pm\sqrt{2019}$ besitzt. Nun gilt $\sqrt{2019} > \sqrt{1600} = 40$, also folgt

$$|\sqrt{2019} - 20| > 40 - 20 > 19 \quad \text{und} \quad |-\sqrt{2019} - 20| = \sqrt{2019} + 20 > 19$$

also liegen die zwei Singularitäten $z_{\pm}$ des Integranden nicht in der abgeschlossenen Kreisscheibe $B(2\bar{0}, 19)$; diese Kreisscheibe ist vielmehr singularitätenfrei. Mit dem Cauchy-Integralsatz folgt:

$$\int_{\partial B(20,19)} \frac{\cos(z^2+1)}{z^2-2019} dz = 0$$

Berechnung des zweiten Integrals:

Nach der Cauchy-Integralformel (für die 2. Ableitung)

$$n(\gamma, 1) f^{(z)}(1) = \frac{2!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-1)^3} d\xi = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\sin(\xi)}{(\xi-1)^3} d\xi$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\gamma} \frac{\sin(z)}{(z-1)^3} dz = \pi i(-\sin(1)) \cdot 1 = -\pi i \sin(1)$$

Alternative:

Die Sinusfunktion im Zähler des Integranden ist ganz-holomorph, und die Nullstelle 1 des Nenners liegt in der offenen Kreisscheibe $B(0, 2)$. Damit ist die Cauchy-Integralformel für höhere (hier: zweite) Ableitungen anwendbar. Sie besagt allgemein:

Cauchy-Integralformel für höhere Ableitungen, Version für Kreisscheiben: Ist eine abgeschlossene Kreisscheibe $B(\bar{c}, r)$ im Definitionsbereich einer holomorphen Funktion f enthalten, [1] so gilt für alle Punkte a in der offenen Kreisscheibe $B(c, r)$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{B(c,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{n-1}(a)$$

In unserem Fall ($f = \sin, c = 0, r = 2, a = 1, n = 3$) bedeutet das:

$$\int_{B(0,2)} \frac{sin(z)}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} sin''(1) = -\pi i sin(1)$$

[1]Es genügt auch, wenn f auf der geschlossenen Kreisscheibe stetig und in ihrem Inneren holomorph ist, doch das ist für diese Aufgabe irrelevant.

Zu b):

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto (\cos(e^{it}))^2$

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-0} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{2\cos(e^{it})(-\sin(e^{it}))e^{it}i}{(\cos(e^{it}))^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{-\sin(e^{it})e^{it}i}{\cos(e^{it})} dt = -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{\eta} \tan(z) dz = 0$$

nach Cauchy-Integralsatz, mit $\eta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$, denn $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ definiert holomorphes $\tan : \mathbb{C} \backslash \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \tan\Big|_{\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{\pi}{2}\}} \text{ holomorph}$$

Bild

Alternative:

Die Umlaufzahl U beträgt mit der Abkürzung $f(z) := cos^2(z)$:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'(e^{it})}{f(e^{it})} i e^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,1)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \end{aligned}$$

Weil die Abbildung $[0, 2\pi] \ni t \mapsto e^{it}$ den positiv orientierten Rand des Einheitskreises in $\mathbb{C}$ parametrisiert. Nun ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz-holomorph, und sie besitzt Nullstellen genau an den Nullstellen der Kosinusfunktion $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Die Kosinusfunktion besitzt keine Nullstellen in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,[2] und ihre betragskleinsten reellen Nullstellen sind $\pm\frac{\pi}{2}$. Wegen $\frac{\pi}{2} > 1$ liegt keine dieser Nullstellen in der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\bar{B}(0, 1)$. Also umfasst der Holomorphiebereich von $\frac{f'}{f}$ diese Kreisscheibe. Mit dem Cauchy-Integralsatz folgt:

$$U = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,1)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

[2] In der Tat: Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, also $Im(z) \neq 0$, gilt $|e^{iz}| = e^{-Im(z)} \neq 1$, also $|e^{iz}| \neq |e^{-iz}|$ und daher $\cos(z) = (e^{iz} + e^{-iz})/2 \neq 0$