H00T1A2

Gegeben sei für ξ, $\eta \in \mathbb{R}$ das zwei-dimensionale Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{y} = g(x)y \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = \xi \\ y(0) = \eta \end{cases}$$

mit Lipschitzstetigem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und stetigem $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeige anhand eines Beweises und eines Gegenbeispiels, dass dieses Problem eine eindeutige Lösung besitzt, obwohl der Satz von Picard-Lindelöf nicht anwendbar ist.

Lösung:

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x)y \end{pmatrix}$$

Beispiel: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{|x|}$ nicht lokal Lipschitzstetig.

(Bild 1)

$$0 < x_1 < x_2 \quad \Rightarrow |g(x_2) - g(x_1)| = \Big| \int_{x_1}^{x_2} g'(s) ds \Big| = \Big| \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2\sqrt{s}} ds \Big| \geq |x_1 - x_2| \frac{1}{2\sqrt{x_2}}$$

und $x_2 \searrow 0$ zeigt, dass g bei 0 nicht Lipschitzstetig ist.

$$\Rightarrow \big|\big| h(x_1, y) - h(x_2, y) \big|\big| \geq |y| \cdot |g(x_1) - g(x_2)|$$

$\Rightarrow$ auch h ist nicht lokal Lipschitzstetig also ist auf ein Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

der Existenz- und Eindeutigkeitssatz nicht anwendbar.

Das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = \xi$ hat nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$ mit offenem Intervall I_ξ, $0 \in I_\xi$. Mit dieser Lösung wird aus $\dot{y} = g(x)y$, $y(0) = \eta$

$$\dot{y}(t) = \underbrace{g(\lambda_\xi(t))}_{\text{stetig, da } g \text{ stetig und } \lambda_\xi \text{ stetig}} \cdot y(t), \; y(0) = \eta$$

$\Rightarrow I_\xi \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t, y) \mapsto g(\lambda_\xi(t))y$ stetig, lokal Lipschitzstetig bzgl. y

$F :]a, b[\times \mathbb{K}^d \to \mathbb{K}^d$, $(t, x) \mapsto A(t)x$ mit $A :]a, b[\to M(d \times d)$, $t \mapsto A(t)$ stetig
$\Rightarrow F$ stetig und lokal Lipschitzstetig bzgl. x.
Zu $t \in]a, b[$ wähle kompakte Umgebung $K \subseteq]a, b[$ von t

$$||A(t)x - A(t)y|| \leq |||A(t)||| \cdot ||x - y|| \leq \max\{|||A(t)||| : t \in K\}||x - y||$$