

## H17T2A1

- a) Dezimalziffern einer rationalen Zahl  $\frac{a}{b} \in [0, 1[$ : Gegeben seien zwei Zahlen  $a \in \mathbb{N}_0$  und  $b \in \mathbb{N}$  mit  $a < b$ . Die Folgen  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  werden wie folgt rekursiv definiert:

$$r_0 := a, \quad z_{n+1} := \left\lfloor \frac{10r_n}{b} \right\rfloor, \quad r_{n+1} := 10r_n - bz_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Hierbei bezeichnet  $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} | k \leq x\}$  den ganzzahligen Anteil von  $x \in \mathbb{N}$ .

Beweise mit vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$0 \leq r_n < b$ ,  $r_n \in \mathbb{N}_0$ ,  $z_{n+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  und

$$\frac{a}{b} = \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n b}$$

- b) Beweise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = 0,$$

indem explizit die Definition der Konvergenz reeller Folgen nachgeprüft wird.

- c) Zeige:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{10^k} = \frac{a}{b}$$

**Zu a):**

*Behauptung:* Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt  $0 \leq r_n < b$ ,  $r_n \in \mathbb{N}_0$  und

$$\frac{a}{b} = \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n b}$$

Falls zudem  $n > 0$ , so gilt auch  $z_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

*Beweis durch vollständige Induktion:*

*Induktionsanfang:*  $n = 0 : 0 \leq r_0 = a < b$  und  $r_0 = a \in \mathbb{N}_0$  sind gegeben. Es folgt:

$$\frac{a}{b} = \frac{r_0}{b} = \sum_{k=1}^0 \frac{z_k}{10^k} + \frac{r_0}{10^0 b},$$

denn die Summe über  $k$  hat hier keinen Summanden, also den Wert 0.

*Induktionsschritt*  $n \rightarrow n + 1$ : Aus der Induktionsvoraussetzung folgt:

$$0 \leq \frac{10r_n}{b} < \frac{10b}{b} = 10$$

und daher auch

$$0 \leq z_{n+1} = \left\lfloor \frac{10r_n}{b} \right\rfloor \leq \frac{10r_n}{b} < 10 \quad (1)$$

Wegen  $z_{n+1} \in \mathbb{Z}$  folgt hieraus  $z_{n+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Aus (1) und  $b > 0$  schließen wir

$$bz_{n+1} \leq 10r_n \quad (2)$$

und damit

$$r_{n+1} = 10r_n - bz_{n+1} \geq 0. \quad (3)$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt  $r_n \in \mathbb{Z}$ . Mit  $b, z_{n+1} \in \mathbb{Z}$  erhalten wir hieraus auch  $r_{n+1} \in \mathbb{Z}$ . Wir formen die Gleichung (3) um in

$$\frac{r_n}{10^n b} = \frac{z_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{r_{n+1}}{10^{n+1} b}.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung schließen wir hieraus

$$\frac{a}{b} = \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n b} = \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{10^k} + \frac{z_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{r_{n+1}}{10^{n+1} b} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{z_k}{10^k} + \frac{r_{n+1}}{10^{n+1} b}.$$

Damit sind alle Teile der Induktionsbehauptung für  $n+1$  gezeigt.

**Zu b):**

Zu zeigen ist:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_0 : \left( n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{10^n} - 0 \right| < \epsilon \right)$$

Hierzu sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Mit dem archimedischen Axiom wählen wir ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ . Nun sei  $n \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq n_0$  gegeben. Es folgt aus der Bernoullischen Ungleichung

$$(1 + 9)^n = 10^n \geq 1 + 9n \geq n \geq n_0 > \frac{1}{\epsilon}$$

und daher die Behauptung:

$$\left| \frac{1}{10^n} - 0 \right| = \frac{1}{10^n} < \epsilon$$

**Zu c):**

Zu zeigen ist

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_0 : \left( n \geq n_0 \left| \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{10^k} - \frac{a}{b} \right| < \epsilon \right)$$

Hierzu sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Mit Teilaufgabe b) wählen wir ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 0$  gilt:  $10^{-n} < \epsilon$ . Nun sei  $n \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq n_0$  gegeben. Aus Teilaufgabe a) wissen wir

$$\frac{a}{b} = \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n b}$$

wobei  $0 \leq r_n < b$ . Es folgt

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{10^k} - \frac{a}{b} \right| = \frac{r_n}{10^n b} < \frac{1}{10^n} < \epsilon,$$

was zu zeigen war.