H09T1A3

Für jedes $E \in \mathbb{C}$ betrachte die Differentialgleichung

$$H'' - 2zH' + (E-1)H = 0$$

für eine Funktion H, die analytisch in der Variablen z ist.

a) Bestimme die Lösungen der Form $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$. Zeige, dass die Koeffizienten eine Rekursionsrelation erfüllen, die angegeben werden soll.

b) Berechne den Konvergenzradius der Reihe

c) Gebe die geraden Lösungen an.

d) Für welche Werte von E ist die Lösung von c) ein Polynom?

Zu a):

Lineare Differentialgleichung mit analytischen Koeffizienten, 2. Ordnung, homogen $\Rightarrow$ Lösungsraum 2-dimensionaler Untervektorraum bestehend aus analytischen Funktionen. Als analytische Funktion hat H lokal um 0 eine Potenzreihenentwicklung

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

mit Konvergenzradius $\rho > 0$.
Im Inneren des Konvergenzkreises, d.h. auf $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < \rho\}$ lässt sich H', H'' durch gliedweises Differenzieren ermitteln; durch Koeffizientenvergleich dann b_n und ρ bestimmen.

Für $|z| < \rho$:

$$H'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n z^{n-1}$$

$$H''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n z^{n-2}$$

$$H''(z) - 2zH'(z) + (E-1)H(z) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)b_n z^{n-2} - 2z\sum_{n=0}^{\infty} nb_n z^{n-1} + (E-1)\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = 0$$

$$\underline{z^0:} \qquad 2\cdot 1\cdot b_2 + (E-1)b_0 \overset{!}{=} 0$$

$$\underline{z^1:} \qquad 3\cdot 2\cdot b_3 - 2\cdot 1\cdot b_1 + (E-1)b_1 \overset{!}{=} 0$$

$$\underline{k\geq 1,\ z^k:} \qquad (k+2)(k+1)b_{k+2} - 2kb_k + (E-1)b_k =$$

$$(k+2)(k+1)b_{k+2} - (2k-(E-1))b_k \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow\ b_2 = -\frac{(E-1)b_0}{2}, \quad b_{k+2} = \frac{2k-(E-1)}{(k+2)(k+1)}b_k \quad (1)$$

Zu b):

Betrachte die Potenzreihe $h(w) := \sum_{l=0}^{\infty} b_{2l}w^{2l}$

Konvergenzradius durch $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ bestimmen:

$$\left|\frac{b_{2l}}{b_{2(l+1)}}\right| = \left|\frac{(2l+2)(2l+1)}{4l-(E-1)}\right| \xrightarrow[l\to\infty]{} \infty$$

$$k(w) := w\sum_{l=0}^{\infty} b_{2l+1}w^{2l}$$

$$\left|\frac{b_{2l+1}}{b_{2(l+1)+1}}\right| = \left|\frac{(2l+3)(2l+2)}{2(2l+1)-(E-1)}\right. \xrightarrow[l\to\infty]{} \infty$$

$$\Rightarrow\ H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \text{ konvergiert für alle } z\in\mathbb{C}$$

($\Rightarrow$ gliedweises Differenzieren, bzw. Koeffizientenvergleich geht auf $\mathbb{C}$)

Alternativ: Aus der rekursiven Definition der Koeffizienten eine explizite Form bestimmen und damit den Konvergenzradius ausrechnen:

$$(2) \quad b_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\Big(\prod_{k=0}^{n-1}(E-1-4k)\Big)b_0 \text{ für } n\geq 1 \text{ (Beweis per Induktion)}$$

$$b_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\Big(\prod_{k=0}^{n-1}(E-1-2(2k+1))\Big)b_1 \text{ für } n \geq 1$$

Zu c):

Aufgrund der Rekursionsgleichung (1) verschwinden im Fall $b_1 = 0$ alle Koeffizienten b_{2k+1}, $k \in \mathbb{N}$ und $H(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_{2l}z^{2l}$ spannt zu vorgegebenem b_0 einen eindimensionalen Untervektorraum des Lösungsraums auf. Da gerade und ungerade Funktionen linear unabhängig sind, sind dies alle geraden Lösungen der Differentialgleichung.

Zu d):

Aus (2) folgt für $b_0 \neq 0$ dass $b_{2n} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, falls $E - 1 \notin 4\mathbb{N}_0$ und $b_{2n} = 0$ für $n \geq 0$ falls $E - 1 \in 4\mathbb{N}_0$.