F13T3A2

a) Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $y \neq 0$. Zeige, dass

$$|\sin(z)| \geq \frac{1}{2}(e^{|y|} - e^{-|y|})$$

ist. (Hinweis: Man kann von der Formel $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ohne Beweis Gebrauch machen.)

b) Gegeben sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(z) := \frac{\sin(nz)}{n}$ für $z \in \mathbb{C}$. Gebe die Menge M aller Punkte $z \in \mathbb{C}$ an, für die $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme die Grenzfunktion

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z), \quad z \in M.$$

zu a):

$$|\sin(z)| \overset{(\triangledown)}{\geq} \left|\frac{1}{2}(|e^{iz}| - |e^{-iz}|)\right| = \frac{1}{2}|e^{-y} - e^{y}| = \frac{1}{2}(e^{|y|} - e^{-|y|})$$

$$z = x + iy; \quad |e^{iz}| = e^{\Re e(iz)} = e^{-y}; \quad |e^{-iz}| = e^{\Re e(-iz)} = e^{y}$$

Bild

zu b):

$\mathbb{R} \subseteq M$: Für $z \in \mathbb{R}$, dann ist $\sin\underbrace{(nz)}_{\in\mathbb{R}} \in [-1, 1] \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nz)}{n} = 0$

$\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}\backslash M$: Für $z = x + iy$, $y \neq 0$, so gilt laut a):

$$|f_n(z)| = \frac{1}{n}|\sin(nz)| \geq \frac{1}{2n}(e^{n|y|} - e^{-n|y|}) \geq \frac{1}{2n}(e^{n|y|} - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

also konvergiert $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ nicht.

$$\Rightarrow \quad M = \mathbb{R} \text{ und } f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto 0.$$