

Frühjahr 11 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' = e^{4x}.$$

Lösungsvorschlag:

Es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die zugehörige homogene Gleichung führt auf die charakteristische Gleichung $y(y + 3) = y^2 + 3y = 0$ mit Lösungen $y = 0$ und $y = -3$. Die allgemeine homogene Lösung hat also die Form $y(x) = a + be^{-3x}$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

Wir bestimmen mit dem Ansatz $y(x) = ce^{4x}$ eine partikuläre Lösung. Aus $28ce^{4x} = y'' + 3y' = e^{4x}$ folgt $c = \frac{1}{28}$.

Nach dem Superpositionsprinzip ist die Menge der reellen Lösungen gegeben durch

$$\left\{ y(x) = \frac{1}{28}e^{4x} + a + be^{-3x} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

J.F.B.