

**Frühjahr 15 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

- (a) Definiere $U := \{z \in \mathbb{C} : 2|\operatorname{Re}(z)| + 3|\operatorname{Im}(z)| + \frac{1}{1+|z|^2} < \frac{11}{2}\}$. Gibt es eine holomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \rightarrow U$ und Punkte $v, w \in \mathbb{C}$ mit $h(v) = \frac{i}{2}$ und $h(w) = 1 - i$? Begründung!
- (b) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine nicht-leere offene Menge und $z_0 \in \Omega$. Seien $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = 0, g(z_0) = g^{(1)}(z_0) = 0$ und $g^{(2)}(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(2)}(z_0)}{g^{(2)}(z_0)}.$$

- (c) Definiere $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \frac{1 - \cos(z)}{z^2}, \quad z \neq 0.$$

Ist die isolierte Singularität 0 von f hebbar? Begründung!

Lösungsvorschlag:

- (a) Nein, gibt es nicht. Die Menge U ist beschränkt, denn für $z \in U$ gilt

$$|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq 2|\operatorname{Re}(z)| + 3|\operatorname{Im}(z)| + \frac{1}{1+|z|^2} < \frac{11}{2},$$

also ist jede holomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \rightarrow U$ beschränkt und nach dem Satz von Liouville konstant. Es kann also keine zwei verschiedenen Punkte im Bild von h geben.

- (b) Per Voraussetzung sind f und g um z_0 in Potenzreihen entwickelbar, die für ein $\varepsilon > 0$ auf $B_\varepsilon(z_0)$ konvergieren und dort mit f respektive g übereinstimmen. Mittels des Satzes von Taylor, können diese explizit angegeben werden. Wir können weiter $\varepsilon > 0$ so wählen, dass die einzige Nullstelle von g auf $B_\varepsilon(z_0)$ der Punkt z_0 ist. Sonst würden sich die Nullstellen in z_0 häufen und g wäre die Nullfunktion, im Widerspruch zu $g''(z_0) \neq 0$. Für $z \in B_\varepsilon(z_0)$ gilt dann

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n} = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n}{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n} = \frac{(z - z_0)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} (z - z_0)^n}{(z - z_0)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} (z - z_0)^n}.$$

Den Term $(z - z_0)^2$ können wir für $z \neq z_0$ kürzen und erhalten zwei neue Potenzreihen, die als Teilreihen von den Taylorreihen der Funktionen f und g selbst absolut konvergent und damit insbesondere stetig sind. Wegen $g^{(2)}(z_0) \neq 0$ folgt dann aus den Grenzwertsätzen

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} (z - z_0)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} (z - z_0)^n} = \frac{f^{(2)}(z_0)}{g^{(2)}(z_0)}.$$

- (c) Ja. Zähler und Nenner sind holomorph, besitzen eine Nullstelle bei $z_0 = 0$ und ihre Ableitungen $\sin(z)$, $2z$ haben bei 0 ebenfalls eine Nullstelle. Die zweite Ableitung des Nenners ist die konstante Funktion 2, die keine Nullstelle bei 0 besitzt. Aus (b) folgt die Existenz des Limes $\lim_{z \rightarrow 0} F(z)$ gegen eine komplexe Zahl. Insbesondere ist F um die 0 beschränkt und nach Riemanns Hebbarkeitssatz ist 0 eine hebbare Singularität. (Man kann sogar direkt $\lim_{z \rightarrow 0} F(z) = \frac{1}{2}$ angeben; erforderlich ist dies allerdings nicht.)

J.F.B.