

F09T1A4

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Der topologische Abschluss M der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ sei kompakt. Man zeige:

- a) Eine Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ verläuft für jeden Punkt $x_0 \in M$ vollständig in M .
- b) Das Anfangswertproblem $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ ist für jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ global lösbar.

Zu a):

Behauptung: Eine Lösung $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ von $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ mit $x_0 \in M$ erfüllt $\lambda(t) \in M$ für alle $t \in I$.

Beweis: Da $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist, hat für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ das Anfangswertproblem $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_{(0,x_0)} : I_{(0,x_0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (mit $0 \in I_{(0,x_0)}$ offen).

Nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz hat für jedes $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ das Anfangswertproblem $x' = f(x)$, $x(\tau) = \xi$ eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_{(\tau,\xi)}$, daher ist

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{(\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} \Gamma(\lambda_{(\tau,\xi)})$$

eine Zerlegung von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n \setminus M \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$. Für $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus M$ ist $\lambda_{(\tau,\xi)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \xi$ die maximale Lösung von $x' = f(x)$, $x(\tau) = \xi$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &= \bigcup_{(\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus M)} \Gamma(\lambda_{(\tau,\xi)}) \cup \bigcup_{(\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times M} \Gamma(\lambda_{(\tau,\xi)}) \\ &= (\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus M)) \cup (\mathbb{R} \times M) \end{aligned}$$

(die Mengen sind wegen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes disjunkt) d.h. für alle $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times M$ ist $\Gamma(\lambda_{(\tau,\xi)}) \subseteq \mathbb{R} \times M$

Zu b):

Behauptung: $I_{(0,x_0)} = \mathbb{R}$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Nach a) ist für $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M$ $\lambda_{(\tau,\xi)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x_0$ die maximale Lösung.

Ist $x_0 \in M$, $I_{(0,x_0)} =]a, b[$

Angenommen $b < \infty$, dann ist

$$\Gamma_+(\lambda_{(0,x_0)}) = \{(t, \lambda_{(0,x_0)}(t)) : t \geq 0, t \in I_{(0,x_0)}\} \subseteq [0, b[\times M$$

$\overline{\Gamma_+(\lambda_{(0,x_0)})} \subseteq [0, b] \times M$ ist kompakt in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ im Widerspruch zur Charakterisierung maximaler Lösungen.

Angenommen $a > -\infty$, dann ist

$$\Gamma_-(\lambda_{(0,x_0)}) = \{(t, \lambda_{(0,x_0)}(t)) : t \leq 0, t \in I_{(0,x_0)}\} \subseteq]a, 0] \times M$$

$\overline{\Gamma_-(\lambda_{(0,x_0)})} \subseteq [a, 0] \times M$ ist kompakt in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ im Widerspruch zur Charakterisierung maximaler Lösungen.

Alternative zu b) ohne Teil a):

$$\left. \begin{array}{l} M \text{ ist kompakt, } f \text{ stetig} \Rightarrow f(M) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ kompakt.} \\ f(\mathbb{R}^n \setminus M) = \{0\} \end{array} \right\} (*)$$

$(*) \Rightarrow f(\mathbb{R}^n) = f(M) \cup \{0\}$ kompakt, insbesondere ist f (linear) beschränkt.

Also gilt nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz mit linear beschränkter rechter Seite, dass die maximalen Lösungsintervalle $0\mathbb{R}$ sind.