Aufgabenstellung und Lösung

Es ist die folgende Aufgabe zu lösen:

Entscheiden Sie, ob es Funktionen f mit den jeweils angegebenen Eigenschaften gibt. Geben Sie im Fall der Existenz ein Beispiel an und begründen Sie kurz, warum dieses die geforderten Eigenschaften besitzt. Zeigen Sie andernfalls, dass es kein solches Beispiel geben kann.

(a) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| = 2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

(b) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = \pi$ und $|f(z)| = 2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

(c) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit einer Polstelle bei $z = 0$ so, dass *keine* holomorphe Funktion $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ existiert mit $F' = f$.

(d) Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit einer wesentlichen Singularität bei $z = 0$ so, dass eine holomorphe Funktion $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ existiert mit $F' = f$.

(e) Eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Ableitung an der Stelle $x = 0$ nicht stetig ist.

Lösungsvorschlag: Teilaufgabe (a): Die als Komposition holomorpher Funktionen selbst holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) := 2z$ genügt der Bedingung. Also gibts so eine Funktion.

Teilaufgabe (b): Die Existenz einer solchen Funktion widerspräche dem Maximumsprinzip, das Folgendes besagt: Sei G ein beschränktes Gebiet und f auf $\overline{G}$ stetige und in G holomorphe Funktion. Dann nimmt $|f|$ ihr Maximum auf dem Rand von G an, also $|f(z)| \leq \max_{w \in \partial G} |f(w)|$ für alle $z \in G$. Das gilt auch hier, obwohl $\mathbb{C}$ kein beschränktes Gebiet ist. Betrachte dazu die auf einem beschränkten Gebiet definierte Funktion $g : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) := f(z)$. Wegen dem Maximumsprinzip und $g(0) = f(0) = \pi$ sowie $|g(z)| = |f(z)| = 2$ für $|z| = 1$ ist g *nicht* holomorph auf G. Also ist es die Fortsetzung von g auf ganz $\mathbb{C}$, nämlich f, auch nicht.

Teilaufgabe (c): Gefragt ist nach einer auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphen Funktion f mit Polstelle bei $z = 0$, die *keine* Stammfunktion besitzt. Ein einfaches Beispiel für eine solche Funktion ist $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{1}{z}$. Diese hat offensichtlich eine Pol erster Ordnung in 0 und bekanntermaßen (sowie nach dem Residuensatz) gilt nämlich

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\mathrm{i} \neq 0.$$

Damit ist f nicht wegunabhängig integrierbar und hat demnach keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Teilaufgabe (d): Solche Funktionen gibt es, beispielsweise $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) := \exp\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z}.$$

Die Laurent-Reihe von f um $z = 0$ ist

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^m - \frac{1}{z} = \sum_{m=0,\, m\neq 1}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^m = \sum_{k=-\infty,\, k\neq -1}^{0} \frac{1}{(-k)!} \cdot z^k.$$

Ihr Hauptteil bricht offensichtlich nicht ab, weshalb die isolierte Singularität in $z = 0$ in der Tat wesentlich ist. Gleichwohl gilt allerdings für das Residuum von f bei $z = 0$ $\operatorname*{Res}_{z=0}(f(z)) = c_{-1} = 0$, wobei c_{-1} derjenige Laurent-Reihenkoeffizient ist, der zu z^{-1} gehört. Nach dem Residuensatz gilt nun für jede geschlossene Kurve γ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, dass

$$\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \eta_\gamma(0) \cdot \operatorname*{Res}_{z=0}(f(z)) = 0,$$

wobei $\eta_\gamma(0)$ die Windungszahl von γ um 0 ist. Daher ist f jedoch wegunabhängig integrierbar und besitzt deswegen auch eine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, also ein F mit $F' = f$. Weitere Funktionen, die dieser Bedingung genügen sind etwa $z \mapsto \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ und $z \mapsto \sin\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z}$.

Teilaufgabe (e): Auch eine solche Funktion gibts. Betrachte

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen selbst auch differenzierbar mit Ableitung

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni z \mapsto 2\sin\left(\frac{1}{x}\right) x - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Für $x = 0$ betrachten wir

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right),$$

wobei wegen der Beschränktheit des reellen Sinus $|h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)| \leq |h|$ folgt. Damit ergibt sich, dass $\quad -\lim_{h\to 0} |h| \leq |\lim_{h\to 0} h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)| \leq \lim_{h\to 0} |h| \quad$ ist und somit $f'(0) = \lim_{h\to 0} h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$. Also ist die Ableitungsfunktion von f gegeben durch

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) := \begin{cases} 2\sin\left(\frac{1}{x}\right) x - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bleibt zu zeigen, dass f' *nicht* stetig ist. Dazu nutzen wir die Folgenstetigkeit: Eine Funktion f heißt stetig in x_0, wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_n$ mit Elementen $x_n \in \mathbb{R}$ die Folge $(f(x_n))_n$ gegen $f(x_0)$ konvergiert. Wir wählen hier die Nullfolge mit Gliedern $x_n := \frac{1}{n\pi}$. Offenbar konvergiert aber $\left(f\left(\frac{1}{n\pi}\right)\right)_n$ nicht, da

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} -1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Also ist f' nicht stetig in $x = 0$.