

H11T1A4

Berechne die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^t, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\det(A - \mu E_3) = \det \begin{pmatrix} -\mu & -1 & 1 \\ 1 & -\mu & 3 \\ 0 & 0 & -1 - \mu \end{pmatrix}$$

$$= -(1 + \mu)\mu^2 - (1 + \mu) = -(1 + \mu)(\mu + i)(\mu - 1) \quad \text{Eigenwerte: } -1, i, -i$$

$$A + E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eig}(A, -1) = \text{lin} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A + iE_3 = \begin{pmatrix} i & -1 & 1 \\ 1 & i & 3 \\ 0 & 0 & -1 + i \end{pmatrix} \xrightarrow{(II)+i(I)} \begin{pmatrix} i & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3+i \\ 0 & 0 & -1+i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eig}(A, -i) = \text{lin} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Eig}(A, i) = \text{lin} \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Realteile für } T \text{ verwenden})$$

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{transformiert auf reelle Jordanform:}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = J$$

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & \sin(t) \\ 0 & -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Da } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E_2$$

$$\Rightarrow e^{t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)^k}{k!} =$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{t^{2l}}{(2l)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{t^{2l+1}}{(2l+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = T e^{tJ} T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & -2e^{-t} - \sin(t) + 2\cos(t) \\ \sin(t) & \cos(t) & -e^{-t} + \cos(t) + 2\sin(t) \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\text{Lösung von } \dot{x} = Ax + e^t \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist gegeben als}$$

$$\lambda(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{tA} \underbrace{\int_0^t e^{-sA} e^s \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} ds}_{(*)} = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{tA} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \int_0^t e^{2s} ds$$

$$= e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} e^{2s} \Big|_0^t = \begin{pmatrix} 3\cos(t) - 2\sin(t) - 2e^t \\ 3\sin(t) + 2\cos(t) - e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$(*) \text{ Da } \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \text{Eig}(A, -1) \Rightarrow e^{-sA} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-(-1)s} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ gilt.}$$