

**Herbst 15 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

- a) Existiert eine Folge von Punkten in der offenen oberen komplexen Halbebene, die alle Punkte von \mathbb{R} und keine anderen Häufungswerte hat? Geben Sie eine ausführlich begründete Antwort.
- b) Zeigen Sie, dass es eine Folge von Punkten in der offenen komplexen Einheitskreisscheibe gibt, die genau die Punkte der (komplexen) Einheitskreislinie als Häufungswerte hat, und weisen Sie nach, dass diese Eigenschaften tatsächlich erfüllt sind.

Lösungsvorschlag:

- a) Ja, solche Folgen gibt es. Wir halten fest, dass \mathbb{Q} dicht in \mathbb{R} liegt und abzählbar ist, und, dass eine komplexe Folge in Normaldarstellung $z_n = x_n + iy_n$ genau dann konvergiert, wenn die reellen Folgen x_n, y_n konvergieren, wobei dann $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ist.
Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Mengen $M_n \subset \mathbb{C}$ definiert durch

$$M_n = \left\{ \frac{k}{n} + \frac{i}{n} : k \in \mathbb{Z}, |k| \leq n^2 \right\}$$

und stellen fest, dass jede dieser Mengen endlich ist mit $|M_n| = 2n^2 + 1$. Jede dieser Mengen liegt außerdem in $\mathbb{H}_+ := \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0, x \in \mathbb{R}\}$. Die Vereinigung $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ ist demnach abzählbar als abzählbare Vereinigung endlicher (und damit abzählbarer) Mengen und selbst Teilmenge von \mathbb{H}_+ . Wir finden eine Bijektion $\tau : \mathbb{N} \rightarrow M$ und behaupten, dass sich die Folge $z_n := \tau(n)$ genau in \mathbb{R} häuft. Zunächst zeigen wir, dass jeder Häufungspunkt dieser Folge reell ist. Dazu definieren wir noch $S_k = \bigcup_{n=1}^k M_n$, was für alle $k \in \mathbb{N}$ eine endliche Menge ist. Ist nun z_{n_j} eine konvergente Teilfolge, so konvergiert die Folge der Imaginärteile gegen 0 und der Grenzwert ist reell. Sei dazu $\varepsilon > 0$ vorgegeben und ein $K \in \mathbb{N}$ mit $k \geq K \implies |\frac{1}{k}| < \varepsilon$. Da τ bijektiv ist, gibt es für jedes Element m der endlichen Menge S_K einen Index $n \in \mathbb{N}$ mit $z_n = m$. Sei $N \in \mathbb{N}$ der größte dieser endlich vielen Indizes, dann gilt für $j > N$ auch $n_j > N$ und daher $|y_{n_j}| < \varepsilon$. Per Definitionem konvergiert also y_{n_j} gegen 0 und der Grenzwert von z_{n_j} ist reell. Man beachte, dass das für **jede** Teilfolge gilt.

Wir zeigen, dass jede reelle Zahl Häufungswert ist, sei dazu $r \in \mathbb{R}$ fest aber beliebig gewählt. Es gibt eine rationale Zahl $q_1 \in \mathbb{Q} \cap [r, r+1]$, also $q_1 = \frac{k}{n}$ für ein $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Daher ist $q_1 + \frac{i}{n} \in M_n \subset M$ und es gibt ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $z_{n_1} = q_1 + \frac{i}{n}$. Wir wählen jetzt ein $q_2 \in (\mathbb{Q} \cap [r, r + \frac{1}{2}]) \setminus \bigcup_{t=1}^{n_1} \{z_t\}$ (nichtleer, da wir das Komplement einer unendlichen und einer endlichen Menge betrachten). Es gibt nun ein $n_2 \in \mathbb{N}_{>n_1}$ mit $\operatorname{Re}(\tau(n_j)) = q_2$. Allgemein wählen wir als j -ten Index das Urbild einer komplexen Zahl in M , mit einer rationalen Zahl $q_j \in (\mathbb{Q} \cap [r, r + \frac{1}{j}]) \setminus \bigcup_{t=1}^{n_{j-1}} \{z_t\}$ als Realteil.

Die Folge x_{n_j} erfüllt $r \leq x_{n_j} \leq r + \frac{1}{j}$ per Konstruktion, konvergiert für $j \rightarrow \infty$ also gegen r . Die Folge y_{n_j} ist wie zuvor begründet eine Nullfolge. Also konvergiert z_{n_j} gegen $r + i \cdot 0 = r$ und r ist Häufungspunkt der Folge. Damit ist alles gezeigt.

- b) Nach Teil a) gibt es eine Folge $z_n \subset \mathbb{H}_+$ die als Häufungspunkte genau die reellen Zahlen besitzt. Die Folge $iz_n \subset \mathbb{C}$ besitzt demnach als Häufungspunkte genau die imaginären Zahlen.

Wir betrachten jetzt $w_n = \frac{n \exp(iz_n)}{(n+1) |\exp(iz_n)|}$ (die Exponentialfunktion hat keine Nullstelle, der Bruch ist also wohldefiniert). Es gilt $|w_n| = \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+1} = 1$, also liegt die Folge in der offenen Einheitskreisscheibe. Weil sogar $\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| = 1$ ist, hat jeder Häufungspunkt selbst Einheitsbetrag. Die Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(it)$ bildet surjektiv auf die Einheitskreislinie ab. Für jedes $z \in \partial\mathbb{D}$ gibt es also ein $r \in \mathbb{R}$ mit $\exp(ir) = z$. Weil $r \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von z_n ist, gibt es eine Teilfolge z_{n_j} , die gegen r konvergiert. Mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion erhalten wir $\lim_{j \rightarrow \infty} w_{n_j} = \frac{\exp(ir)}{|\exp(ir)|} = z$. Damit ist auch jeder Punkt der Einheitskreislinie ein Häufungspunkt.

J.F.B.