Herbst 24 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es seien
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, y \geq 0\}$$
und die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ durch
$$f(x, y) = 27y + 7y^2 - y^3 + 5x^2(1 + y^2)$$
gegeben.

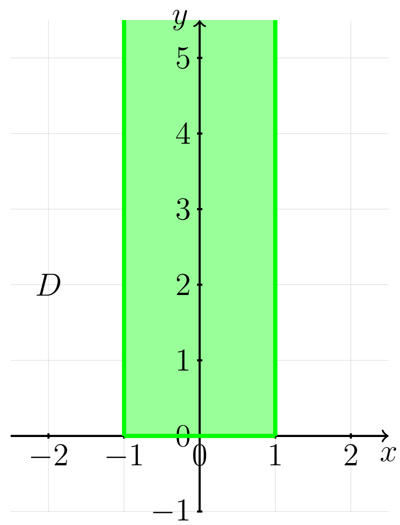
a) Skizzieren Sie die Menge D.

b) Zeigen Sie, dass f ein globales Maximum besitzt.
Hinweis: Es könnte hilfreich sein, zunächst zu zeigen, dass ein $R > 0$ existiert, sodass $f(x, y) \leq 0$ für alle $(x, y) \in D$ mit $y > R$ gilt.

c) Bestimmen Sie sämtliche Stellen in D, an denen das globale Maximum angenommen wird.

Lösungsvorschlag:

a) Die Menge D ist ein unendlich langer, vertikaler Streifen oberhalb der x-Achse, der von den senkrechten Asymptoten $x = 1$ und $x = -1$ eingeschlossen wird. Die Menge ist abgeschlossen, das heißt der Rand gehört zu D.



b) Wir zeigen zunächst die Aussage aus dem Hinweis:
Für alle $(x, y) \in D$ gilt wegen $5(1 + y^2) \geq 0$ und $|x| \leq 1 \implies x^2 \leq 1$:
$$f(x, y) \leq 27y + 7y^2 - y^3 + 5(1 + y^2) = -y^3 + 12y^2 + 27y + 5 := g(y).$$
Weil g ein Polynom ungeraden Grades mit negativem Leitkoeffizienten ist, gilt $\lim\limits_{y\to\infty} g(y) = -\infty$, es gibt also ein $R > 0$ mit $y > R \implies g(y) \leq 0$, woraus wiederum für $y > R$ auch $f(x, y) \leq g(y) \leq 0$ folgt.

Nun zur eigentlichen Aufgabe: Wir betrachten

$$D_R \coloneqq D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq R\} = [-1{,}1] \times [0,R].$$

Diese Menge ist kompakt als Produkt zweier kompakter Intervalle (alternativ: als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist D_R kompakt). f ist als Polynom stetig auf der kompakten, nichtleeren Menge D_R ($(0{,}1) \in D_R$) und besitzt nach dem Satz von Minimum und Maximum ein globales Maximum x_0 auf D_R. Wegen $f(0{,}1) = 33 > 0$ folgt $(0{,}1) \in D_R$ und es muss $f(x_0) \geq 33 > 0$ gelten. Damit gilt per Konstruktion von R auch $f(x_0) \geq f(x,y)$ für alle $(x,y) \in D \backslash D_R$ und wegen der Definition von x_0 natürlich $f(x_0) \geq f(x,y)$ für alle $(x,y) \in D_R$. Damit folgt $f(x_0) \geq f(x,y)$ für alle $(x,y) \in D$ und f nimmt per Definition bei x_0 ein globales Maximum an.

c) Wir untersuchen zunächst das Innere von D. Weil Dieses offen ist und f als Polynom sogar glatt ist, können wir Extrema mithilfe von Gradient und Hessematrix suchen. Es gilt $\nabla f(x,y) = (10x(1+y^2), 27 + 14y - 3y^2 + 10x^2 y)^{\mathrm{T}}$. Damit der Gradient eine Nullstelle besitzt, muss insbesondere die erste Komponente 0 ergeben. Wegen $1 + y^2 > 0$ ist dies nur für $x = 0$ möglich. Es kann aber kein globales Maximum mit $x = 0$ geben, weil für jeden Punkt $(0,y)$ mit $y \geq 0$ die Ungleichung

$$f(1,y) = 27y + 7y^2 - y^3 + 5(1+y^2) > 27y + 7y^2 - y^3 = f(0,y)$$

gilt. (Alternativ: Die Nullstellen der zweiten Komponente erhält man nun als Nullstellen der Funktion $h(y) = 27 + 14y - 3y^2$. Die einzige positive Nullstelle ist $y = \frac{7+\sqrt{130}}{3}$. Die zugehörige Hessematrix ist eine Diagonalmatrix mit einem positiven und einem negativen Eintrag, also indefinit. Damit handelt es sich um kein Maximum.) Die globalen Maxima müssen also auf dem Rand (hellgrüne Linien) liegen.
Wir beginnen mit den vertikalen Linien, das heißt der Menge
$D_1 \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \pm 1, y > 0\}$. Für jedes $(x,y) \in D_1$ gilt $F(x,y) = g(y)$ (siehe b)), wir suchen also die Extrema von g auf $(0,\infty)$. Wegen

$$g'(y) = -3y^2 + 24y + 27 = 0 \iff y = 9 \text{ oder } y = -1$$

erhalten wir als möglichen Extremalpunkt von g, weil y positiv sein muss, nur $y_0 = 9$. Wegen $g''(9) = -30 < 0$, handelt es sich um ein Maximum. Für f erhalten wir die Kandidaten

$$z_1 = (-1{,}9) \quad z_2 = (1{,}9),$$

wobei $f(z_1) = f(z_2) = g(9) = 491$ gilt.
Nun zur unteren Randlinie, also der Menge $D_2 \coloneqq [-1{,}1] \times \{0\}$. Für jedes $(x,y) \in D_2$ gilt $f(x,y) = 5x^2$, was offensichtlich für $x = \pm 1$ maximal wird mit $f(-1{,}0) = f(1{,}0) = 5$.
f besitzt nach b) ein Maximum, das nicht im Inneren von D liegen kann, also auf dem Rand liegen muss. Die einzigen Kandidaten dafür sind die Punkte:

$$(-1,9), \quad (1{,}9), \quad (-1{,}0), \quad (1{,}0).$$

In b) wurde gezeigt, dass für das Maximum x_0 auch $f(x_0) \geq 33$ gelten muss, damit können $(\pm 1, 0)$ nicht die globalen Maxima sein. Die einzig übrigen Punkte sind $z_1 = (-1{,}9)$ und $z_2 = (1{,}9)$. Dies sind genau die Punkte an denen f das globale Maximum mit Wert 491 annimmt.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$