Herbst 16 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Bestimmen Sie für jede der Singularitäten von f im Komplexen den Typ und berechnen Sie das Integral $\int_{|z|=4} f(z)\mathrm{d}z$ für

$$a) f(z) = \frac{\sin(z)}{e^z - e^\pi}, \qquad b) f(z) = \sin(e^{1/z}).$$

Lösungsvorschlag:

a) Die Singularitäten sind die Nullstellen des Nenners, also diejenigen $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = e^\pi$. Eine Singularität ist also $z_0 = \pi$, jede andere Singularität muss $e^\pi = e^z = e^{\Re(z)}(\cos(\Im(z)) + i\sin(\Im(z)))$, also $\Re(z) = \pi$ und $\Im(z) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ erfüllen. Damit sind die Singularitäten von f genau die Punkte $z_k = \pi + 2\pi ik$. Um diese zu untersuchen bestimmen wir noch $\sin(z_k)$ und $\cos(z_k)$. Mit den Formeln

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y, \quad \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

erhalten wir $\sin(z_k) = -i\sinh(2k\pi)$ und $\cos(z_k) = -\cosh(2k\pi)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Für $k \neq 0$ verschwindet der Nenner, aber nicht der Zähler, womit wir einen Pol vorliegen haben. Aus

$$e^z = e^{z - z_k + z_k} = e^{z_k}e^{z-z_k} = \sum_{n=0}^{\infty} e^\pi \frac{(z-z_k)^n}{n!}$$

folgt dann $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^\pi \frac{(z-z_k)^n}{n!}}$, woraus man erkennt, dass z_k eine einfache Nullstelle des Nenners ist und der Zähler nicht verschwindet. Es handelt sich also um einen Pol erster Ordnung. Das Residuum erhalten wir durch $\lim\limits_{z \to z_k} f(z)(z - z_k) = \frac{\sin(z_k)}{e^\pi} = -i\frac{\sinh(2k\pi)}{e^\pi}$.

Für $k = 0$ verschwindet auch der Zähler und wir dürfen den Satz von l'Hospital anwenden und erhalten

$$\lim_{z\to\pi} f(z) = \lim_{z\to\pi} \frac{\cos(z)}{e^z} = \frac{\cos(\pi)}{e^\pi} = -\frac{1}{e^\pi}.$$

Folglich ist f auf einer Umgebung um π beschränkt und die Singularität ist hebbar und das Residuum demnach 0. Setzen wir f holomorph in 0 fort, so ist f auf der offenen, konvexen Menge $B_5(0)$ holomorph, denn es ist $|z_k| = \sqrt{(4k^2+1)\pi^2} \geq \sqrt{5 \cdot 3^2} = \sqrt{45} \geq 6$ für $k \neq 0$, also liegen keine weiteren Singularitäten in der Menge. Wir betrachten das Wegintegral über den geschlossenen, glatten Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 4\}, \gamma(t) = 4e^{it}$, der vollständig in $B_5(0)$ verläuft. Nach Cauchys Integralsatz folgt, dass das Integral den Wert 0 hat.

b) Als Verknüpfung holomorpher Funktionen ist f für $z \neq 0$ wohldefiniert und holomorph, daher ist $z = 0$ die einzige Singularität von f, es handelt sich um eine wesentliche Singularität. Um das zu sehen, betrachten wir die Nullfolgen $z_n = \ln(2\pi n + \frac{\pi}{2})^{-1}$ und $w_n = -n^{-1}$. Beides sind wohldefinierte Nullfolgen, weil die Basen gegen $+\infty$ divergieren (wir nicht durch 0 dividieren) und das Argument vom natürlichen Logarithmus strikt positiv ist. Es gilt $f(z_n) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1 \to 1$ und $f(w_n) = \sin(e^{-n}) \to 0$ für $n \to \infty$, da $\sin(0) = 0$ ist und die Exponentialfunktion für reelle Argumente die gegen $-\infty$ streben, gegen 0 konvergiert. Wäre die Singularität hebbar, so gäbe es eine holomorphe Fortsetzung, die insbesondere stetig sein müsste, was unmöglich ist. Wäre die Singularität ein Pol, so müssten die Bildwerte gegen unendlich divergieren, was nicht passiert. Also muss die Singularität wesentlich sein. Wir berechnen das Residuum, dafür entwickeln wir $f(z)$ für $z \neq 0$ in eine Laurentreihe um 0, d. h. wir finden Koeffizienten $a_n \in \mathbb{Z}$ mit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}^\times$. Das Residuum ist dann durch a_{-1} gegeben. Für $z \neq 0$ können wir nun $g(z) = g(1/z)$ betrachten. Es gilt dann

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{-n} z^n = g(z) = \sin(e^z), \quad z \neq 0.$$

Letztere Funktion lässt sich holomorph in 0 fortsetzen (durch $g(0) = \sin(1)$) und wir erhalten a_{-1} durch $g'(0) = \cos(e^0) \cdot e^0 = \cos(1)$. Nach dem Residuensatz können wir nun das Integral berechnen, weil der Integrand mit Ausnahme einer einzelnen Singularität holomorph auf der offenen, konvexen Menge $\mathbb{C}$ ist, die von der Spur der Kurve ($\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$) nicht berührt wird, aber einmal in positiver Richtung durchlaufen wird. Der Wert des Integrals ist dann $2\pi i \operatorname{Res}_f(0) = 2\pi i \cos(1)$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$