F02T2A1

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto e^{-y}(x \cos(x) - y \sin(x))$$

und

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto e^{-y}(y \cos(x) + x \sin(x))$$

a) Zeige, dass diese Funktion die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen, und dass deswegen die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z = x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$$

holomorph ist.

b) Zeige für $z = iy$ mit $y \in \mathbb{R}$, dass

$$f(z) = ze^{iz}$$

ist und folgere daraus $f(z) = ze^{iz}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Zu a):

Behauptung: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ holomorph

$$(\partial_1 u)(x, y) = e^{-y}(\cos(x) + x(-\sin(x)) - y \cos(x)) =$$

$$= (\partial_2 v)(x, y) = -e^{-y}(\cos(x) + x \sin(x)) + e^{-y} \cos(x))$$

$$(\partial_2 u)(x, y) = e^{-y}(x \cos(x) - y \sin(x)) + e^{-y}(-\sin(x))$$

$$(\partial_1 v)(x, y) = e^{-y}(y \sin(x) + \sin(x)) + x \cos(x)) = -(\partial_2 u)(x, y)$$

$\Rightarrow u$, v erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen
$\Rightarrow f$ ist holomorph.

Zu b):

$z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, $f(iy) = f(0 + iy) = e^{-y}yi$
Betrachte $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto ze^{iz}$ holomorph (als Produkt holomorpher Funktionen) mit

$$A := \{iy : \; y \in \mathbb{R}\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \; f(z) = g(z)\} \overset{\text{Identitätssatz}}{\Longrightarrow} f = g$$

A hat Häufungspunkt in $\mathbb{C}$(sogar jedes $iy \in A$ ist ein Häufungspunkt, da es zu jeder Umgebung U von iy ein $r > 0$ mit $K(iy, r) := \{w \in \mathbb{C} : |iy - w| < r\} \subseteq U$ $\Rightarrow \{i\eta : \eta \in]y - r, y + r[\} \subseteq U$).

$$\Rightarrow (U \backslash \{iy\}) \cap A \neq \emptyset$$

Bild