F19T3A4

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = (z^2 + 4\pi^2) \sin z \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

(a) Bestimme alle Nullstellen von f.

(b) Berechne für alle reell ganzzahligen Vielfachen von π das Residuum von $1/f$.

(c) Erstelle eine beschriftete Skizze der Menge

$$M = \{t - i \cos t \mid t \in [-\pi, \pi]\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z \geq 1, |z - i| = \pi\}$$

und bestimmen Sie einen geschlossenen Weg Γ, so dass M das Bild von Γ ist.

(d) Berechne das Wegintegral

$$\int_\Gamma \frac{dz}{f(z)}.$$

Zu a):

Es ist $f(z) = (z + 2i\pi)(z - 2i\pi) \sin(z)$.
Da ein Produkt null ist, wenn einer der Faktoren null ist, sind die Nullstellen von f gegeben durch $\pm 2i\pi$ sowie die Nullstellen des komplexen Sinus.
Diese sind aber gerade die ganzzahligen Vielfachen von π. Es ist also $N := \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \cup \{\pm 2i\}\}$ die Nullstellenmenge von f.

Zu b):

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe mit $\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$.
Damit ist für $z \in \mathbb{C} \setminus N$

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}} = 1.$$

Damit ist 0 wegen

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{f(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{z^2 + 4\pi^2} \frac{z}{\sin(z)} = \frac{1}{4\pi^2} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ein Pol 1. Ordnung von f mit Residuum $\frac{1}{4\pi^2}$.

Andererseits gilt nach der Euler-Formel

$$-\sin(z) = -\mathrm{Im}(e^{iz}) = \mathrm{Im}\left(e^{i(z+\pi)}\right) = \sin(z + \pi)$$

und damit

$$\lim_{z\to-\pi}\frac{z+\pi}{\sin(z)}=\lim_{z\to-\pi}\frac{z+\pi}{-\sin(z+\pi)}=-\lim_{z\to-\pi}\frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z+\pi)^{2k}}{(2k+1)!}}=-1.$$

Somit ist $-\pi$ wegen

$$\lim_{z\to-\pi}\frac{z+\pi}{f(z)}=\lim_{z\to-\pi}\frac{1}{z^2+4\pi^2}\frac{z+\pi}{\sin(z)}=-\frac{1}{\pi^2+4\pi^2}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

ein Pol 1. Ordnung von f mit Residuum $\frac{1}{5\pi^2}$.

Wie oben lässt sich aus der Euler-Formel die 2π Periodizität des Sinus herleiten; hieraus folgt dann wiederum für $n\in\mathbb{Z}$

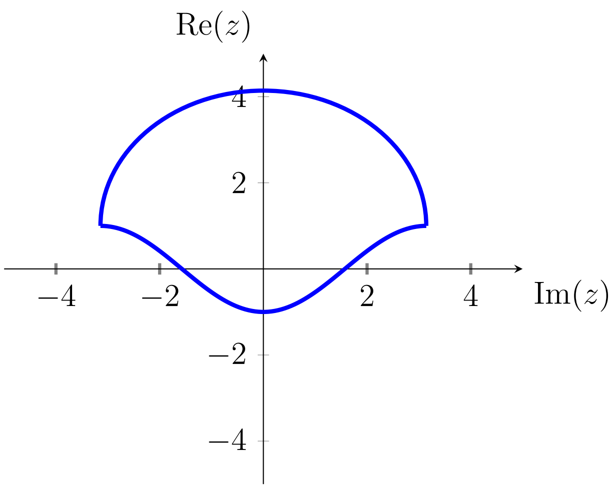
$$\lim_{z\to2\pi n}\frac{z-2\pi n}{\sin(z)}=\lim_{z\to2\pi n}\frac{z-2\pi n}{-\sin(z-2\pi n)}=\lim_{z\to2\pi n}\frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-2\pi n)^{2k}}{(2k+1)!}}=1.$$

Somit ist analog zu obigem Vorgehen $2\pi n$ wegen

$$\lim_{z\to2\pi n}\frac{z-2\pi n}{f(z)}=\lim_{z\to2\pi n}\frac{1}{z^2+4\pi^2}\frac{z-2\pi n}{\sin(z-2\pi n)}=\frac{1}{4(n^2+1)\pi^2}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

ein Pol 1. Ordnung von f mit Residuum $\frac{1}{4(n^2+1)\pi^2}$.
Geht man genauso für die ungeradzahligen Vielfachen, die man dann auf den Fall $z=-\pi$ zurückführen kann, so findet man, dass f bei $2\pi n+\pi$ jeweils einen Pol 1. Ordnung mit Residuum $\frac{-1}{4(n^2+1)\pi^2}$ hat.

Zu c):



Naheliegenderweise definieren wir die Wege

$$\gamma_1\colon\ \begin{array}{ccc}[-\pi,\pi] & \to & \mathbb{C}\\ t & \mapsto & t-i\cos(t)\end{array}\quad\text{und}\quad\gamma_2\colon\ \begin{array}{ccc}[0,1] & \to & \mathbb{C}\\ t & \mapsto & i+\pi e^{i\pi}\end{array}.$$

Dann ist nämlich

$$M = \underbrace{\{t - i\cos t \mid t \in [-\pi, \pi]\}}_{=\mathrm{im}(\gamma_1)} \cup \underbrace{\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z \geq 1, |z - i| = \pi\}}_{=\mathrm{im}(\gamma_2)}$$

sowie $\gamma_1(\pi) = \pi + i = \gamma_2(0)$ und $\gamma_2(1) = i - \pi = \gamma_1(-\pi)$ und damit die Konkatenation $\Gamma := \gamma_1 \dot{+} \gamma_2$ wohldefiniert mit $\mathrm{im}(\Gamma) = M$.

Zu d):

Es bezeichne U das Innere von Γ. Wir stellen mithilfe der Skizze aus Teil c) fest, dass $U \cap N = \{0\}$. Weil $1/f$ auf $\mathbb{C} \setminus N$ holomorph ist und $M \subseteq \mathbb{C} \setminus N$ gilt, ist der Residuensatz anwendbar. Demnach gilt

$$\int_\Gamma \frac{dz}{f(z)} = 2\pi i \cdot n(\Gamma, 0) \cdot \mathrm{Res}(f, 0) = \frac{2\pi i}{4\pi^2} = \frac{i}{\pi}.$$

Wir haben hierbei verwendet, dass Γ die Menge M einmal in mathematisch positiver Richtung durchläuft.