H13T2A4

Betrachte die Differentialgleichung $y' = t^2\sqrt{1+2y}$

a) Gebe die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit Anfangswert $y(0) = 0$ auf dem Intervall $[0, \infty[$ an. Warum ist sie dort eindeutig?

b) Betrachte die Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = -\frac{1}{2}$. Gebe zwei verschiedene Lösungen dieser Anfangswertaufgabe explizit an.

Zu a):

$$(1) \begin{cases} x' = g(t)h(x) \text{ mit stetigem } g : I \to \mathbb{R} \quad , \quad h : J \to \mathbb{R} \\ \text{ mit } x(\tau) = \xi \quad (\tau \in I \quad , \quad \xi \in J) \quad (I, \quad J \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervalle }) \end{cases}$$

Fall 1: $h(\xi) = 0 \Rightarrow \lambda : I \to \mathbb{R}\ t \to \xi$ löst (1)

Fall 2: $h(\xi) \neq 0 \Rightarrow$ Dann hat (1) in einer Umgebung von τ eine eindeutige Lösung $\lambda : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ (mit Intervall $\tilde{I} \subseteq I$, $\tau \subset \tilde{I}$).
Diese ergibt sich durch Auflösen von

$$\int_{\xi}^{\lambda(t)} \frac{dx}{h(x)} = \int_{\tau}^{t} g(s)ds \text{ nach } \lambda(t)$$

Trennen der Variablen: $h : [-\frac{1}{2}, \infty[\to \mathbb{R}$, $y \mapsto \sqrt{1+2y}$ stetig, $h(0) = 1$

$$\sqrt{1+2y}\Big|_0^{\lambda(t)} = \int_0^{\lambda(t)} \frac{dy}{\sqrt{1+2y}} = \int_0^t s^2 ds = \frac{1}{3}s^3\Big|_0^t = \frac{t^3}{3}$$

$$\sqrt{1+2\lambda(t)} = \frac{t^3}{3} \Leftrightarrow 1 + 2\lambda(t) = (1 + \frac{t^3}{3})^2$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{t^3}{3}\right)^2 - 1\right) \text{ als Kandidat für eine Lösung } \lambda(0) = 0$$

$$\lambda'(t) = \left(1 + \frac{t^3}{3}\right)t^2 = t^2\sqrt{1 + 2\lambda(t)} \text{ falls } \left(1 + \frac{t^3}{3}\right) \geq 0 \text{ dh. } t \geq \sqrt[3]{-3}$$

$$\Rightarrow \lambda : [\sqrt[3]{-3}, \infty[\to \mathbb{R} \quad t \mapsto \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{t^3}{3}\right)^2 - 1\right) \text{ löst } y' = t^2\sqrt{1+2y}, \quad y(0) = 0$$

$$\text{und } \lambda|_{[0,\infty[} : [0, \infty[\to \mathbb{R} \quad t \mapsto \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{t^3}{3}\right)^2 - 1\right) \text{ ist die gesuchte Lösung}$$

$$f : \mathbb{R}\times]-\frac{1}{2},\infty[\to\mathbb{R} \quad (t,y)\mapsto t^2\sqrt{1+2y}$$

$$\mathbb{R}\times]-\frac{1}{2},\infty[\text{ offen, zusammenhängend, } f\in C^1(\mathbb{R}\times]-\frac{1}{2},\infty[)$$

$\Rightarrow$ Auf $x' = f(t,x)$, $x(\tau)=\xi$ (mit $\tau\in\mathbb{R}$, $\xi\in]-\frac{1}{2},\infty[$) ist der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz anwendbar.
Für $t\geq 0$ ist $\lambda(t)=\frac{1}{2}\Big(\Big(1+\frac{t^3}{3}\Big)^2-1\Big)\geq 0$, dh. $(t,\lambda(t))\in\mathbb{R}\times]-\frac{1}{2},\infty[$ für $t\geq 0$, dh. $\lambda|_{]-\frac{1}{2},\infty[}$ löst $x'(t)=f(t,x)$, $x(0)=0$ ist laut globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz die Einschränkung der maximalen Lösung $\lambda_{(0,0)} : I_{(0,0)}\to\mathbb{R}$ von $x'(t)=f(t,x)$, $x(0)=0$ und damit eindeutig.
Kandidat für maximale Lösung. Betrachte das Randverhalten ($a\neq-\infty$)

$$\mu :]-\sqrt[3]{3},\infty[\to\mathbb{R} \quad t\mapsto\frac{1}{2}\Big(\Big(1+\frac{t^3}{3}\Big)^2-1\Big)$$

$$\mu(t)\xrightarrow{t\searrow-\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{t\searrow-\sqrt[3]{3}}\operatorname{dist}\Big((t,\mu(t)),\mathbb{R}\times\Big\{-\frac{1}{2}\Big\}\Big)=0$$

$$\partial V=\partial\Big(\mathbb{R}\times]-\frac{1}{2},\infty[\Big)=\mathbb{R}\times\Big\{-\frac{1}{2}\Big\}$$

(Bild)

Zu b):

$$y'=t^2\sqrt{1+2y},\quad y(0)=-\frac{1}{2}$$

hat die konstante Lösung $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $t\mapsto-\frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+2y}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\mu(t)}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\mu(t)}\frac{dy}{\sqrt{1+2y}}=\int_0^t s^2ds=\frac{1}{3}s^3\Big|_0^t=\frac{t^3}{3}$$

$$\sqrt{1+2\mu(t)}=\frac{t^3}{3};\quad 2\mu(t)=\frac{t^6}{9}-1;\quad \mu(t)=\frac{t^6}{18}-\frac{1}{2}$$

$$\mu'(t)=\frac{t^5}{3};\quad \mu(0)=-\frac{1}{2}$$

$$t^2\sqrt{1+2\mu(t)}=t^2\sqrt{\frac{t^6}{9}}\begin{cases}\frac{t^5}{3} & \text{für } t\geq 0\\ -\frac{t^5}{3} & \text{für } t<0\end{cases}$$

$\Rightarrow\mu : [0,\infty[\to\mathbb{R}$ $t\mapsto\frac{t^6}{18}-\frac{1}{2}$ ist eine weitere Lösung.