Frühjahr 13 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) + 4y(t) + f(t) = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass für jede Lösung y dieser Differentialgleichung gilt

$$y(t) \to 0 \ \text{ für } \ t \to \infty.$$

Lösungsvorschlag:

a) Aus der Theorie linearer Differentialgleichung ist die allgemeine Form einer Lösung $y_c(t) = e^{-4t}(c - \int_0^t f(s)e^{4s} \, \mathrm{d}s)$ für $c \in \mathbb{R}$ bekannt. Man kann dies auch mittels Variation der Konstanten herleiten oder obige Form nachprüfen und den Satz von Picard-Lindelöf anwenden.

b) Wir formen obige Darstellung etwas um. Es ist $y_c(t) = ce^{-4t} - \dfrac{\int_0^t f(s)e^{4s} \, \mathrm{d}s}{e^{4t}}, t \in \mathbb{R}$. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ konvergiert $ce^{-4t} \to 0$ für $t \to \infty$; wir müssen also nur den Subtrahenden untersuchen.
Falls der Zähler für $t \to \infty$ beschränkt bleibt, können wir betragsmäßig gegen ein Ke^{-4t} abschätzen, was gegen 0 konvergiert. Falls der Zähler unbeschränkt ist, können wir die zweite Regel von l'Hospital benutzen, denn Zähler und Nenner sind stetig differenzierbar, wobei der Nenner und dessen Ableitung keine Nullstelle besitzen. Es folgt dann $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\int_0^t f(s)e^{4s} \, \mathrm{d}s}{e^{4t}} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)e^{4t}}{4e^{4t}} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{4} = \frac{0}{4} = 0$.
Alternativ kann man auch folgendermaßen direkt abschätzen: Weil f stetig ist und $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$ gilt, ist f auf $[0, \infty)$ gegen ein $K > 0$ beschränkt. (Finde $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $t > t_0 \implies |f(t)| < 1$. Falls $t_0 < 0$ ist, kann man $K = 1$ wählen, sonst besitzt die stetige Funktion $|f|$ ein Maximum M auf dem kompakten Intervall $[0, t_0]$ und man kann $K = \max\{1, M\}$ wählen.) Sei $\varepsilon > 0$ und $k \in [0, \infty)$ mit $t \geq k \implies |f(t)| \leq \varepsilon$, dann gilt für alle $0 \leq k \leq t :$

$$\begin{aligned}
\left| e^{-4t} \int_0^t f(s)e^{4s} \, \mathrm{d}s \right| &\leq e^{-4t} \int_0^k |f(s)|e^{4s} + e^{-4t} \int_k^t |f(s)|e^{4s} \, \mathrm{d}s \\
&\leq Kke^{4(k-t)} + \varepsilon e^{-4t} \int_k^t e^{4s} \, \mathrm{d}s \\
&= Kke^{4(k-t)} + \varepsilon e^{-4t} \left(\frac{e^{4t}}{4} - \frac{e^{4k}}{4} \right) \\
&\leq Kke^{4(k-t)} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon \text{ für } t \geq \max\left\{ -4 \ln\left(\frac{\varepsilon}{2kKe^{4k}} \right), k \right\}.
\end{aligned}$$

J.F.B.