F19T2A1

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, i, 0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z} + \exp\left(\frac{z-i}{z^2+1}\right)$

a) Bestimme den Typ der isolierten Singularität von f bei i, 0 und $-i$ und berechne die Residuen $\mathrm{Res}(f, i)$, $\mathrm{Res}(f, 0)$ und $\mathrm{Res}(f, -i)$ von f bei i, 0 und $-i$.

b) Weiter sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{-i, i, 0\}$, $t \mapsto 2e^{-2it}$. Berechne $\int_\gamma f(z)dz$.

Zu a):
Es gilt $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$, daher existiert

$$\lim_{\substack{z\to i \\ z\in\mathbb{C}\setminus\{-i,i,0\}}} f(z) = \lim_{\substack{z\to i \\ z\in\mathbb{C}\setminus\{-i,i,0\}}} \left(\frac{1}{z} + \exp\left(\frac{z-i}{z^2+1}\right)\right) = \frac{1}{i} + e^{\frac{1}{2i}}$$

also ist i eine hebbare Singularität von f mit $\mathrm{Res}(f, i) = 0$ und holomorpher Fortsetzung $F : \mathbb{C} \setminus \{-i, 0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z} + \exp(\frac{1}{z+i})$ von f.

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ z\in\mathbb{C}\setminus\{-i,i,0\}}} |f(z)| = \infty$$

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ z\in\mathbb{C}\setminus\{-i,i,0\}}} zf(z) = \lim_{\substack{z\to 0 \\ z\in\mathbb{C}\setminus\{-i,i,0\}}} \left(1 + z\exp\left(\frac{1}{z+i}\right)\right) = 1$$

daher ist 0 ein Pol 1. Ordnung von f mit $\mathrm{Res}(f, 0) = 1$.
Die Exponentialreihe gibt

$$\exp\left(\frac{1}{z+i}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z+i}\right)^k \quad \text{für } z \neq -i$$

und da $\frac{1}{z}$ in einer Umgebung von $-i$ holomorph ist, gibt dies den Hauptteil der Laurentreihenentwicklung von F (bzw. f) um $-i$. Da es hier unendlich viele Koeffizienten $\neq 0$ gibt, ist $-i$ eine wesentliche Singularität von f und $\mathrm{Res}(f, -i) = 1$ (als Koeffizient von $\frac{1}{z+i}$ in der Laurentreihe von f um $-i$).

(Bild 1)

Zu b):
$\mathrm{Spur}(\gamma) \cap \{\pm i, 0\} = \varnothing$, γ als geschlossener Weg nullhomolog in

$$\mathbb{C} = \underbrace{(\mathbb{C} \setminus \{\pm i, 0\})}_{\text{Definitionsbereich von } f} \cup \underbrace{\{\pm i, 0\}}_{\text{Menge der isolierten Singularitäten von } f}$$

$$\xRightarrow{\text{Residuensatz}} \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\Big(\mathrm{Res}(f,0)\cdot n(\gamma,0)+\mathrm{Res}(f,i)\cdot n(\gamma,i)+\mathrm{Res}(f,-i)\cdot n(\gamma,-i)\Big)$$

$$n(\gamma,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{2e^{-2it}(-2i)}{2e^{-2it}}dt = -2 = n(\gamma,i) = n(\gamma,-i)$$

da $-i$, i und 0 in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Spur}(\gamma)$ liegen.

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i(-2)(1+0+1) = -8\pi i$$