F12T1A5

Für $\xi \in \mathbb{R}$ sei das Anfangswertproblem

$$x' = \arctan(x), \quad x(0) = \xi$$

gegeben. Beweise folgende Aussagen:

a) Obiges Anfangswertproblem besitzt genau eine maximale Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$

b) λ_ξ besitzt genau dann eine Nullstelle, wenn $\xi = 0$ ist.

c) Für alle $t \in I_\xi$ gilt:

$$\xi - \frac{\pi}{2}|t| \leq \lambda_\xi(t) \leq \xi + \frac{\pi}{2}|t|$$

d) $I_\xi = \mathbb{R}$

Zu a):
Da $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^1(\mathbb{R})$ hat die Differentialgleichung nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz eine eindeutige maximal Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$.

Zu b):
arctan hat genau eine Nullstelle bei $0 \Rightarrow \lambda_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 0$ ist (als Lösung mit richtigem Randwert) die maximal Lösung von $x' = \arctan(x)$, $x(0) = 0$. Für $\xi \neq 0$ sind die Graphen $\Gamma(\lambda_0)$ und $\Gamma(\lambda_\xi)$ zu λ_0 bzw. λ_ξ verschieden (da $\lambda_\xi(0) = \xi \neq \lambda_0(0)$) also $\Gamma(\lambda_0) \cap \Gamma(\lambda_\xi) = \emptyset$, d.h. für $\xi \neq 0$ hat λ_ξ keine Nullstelle.

Zu c):

$$-\frac{\pi}{2} \leq \lambda_\xi'(t) = \arctan(\lambda_\xi(t)) \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{für } t \in I_\xi$$

$$\lambda_\xi(t) - \lambda_\xi(0) = \lambda_\xi(t) - \xi = \int_0^t \lambda_\xi'(s)ds$$

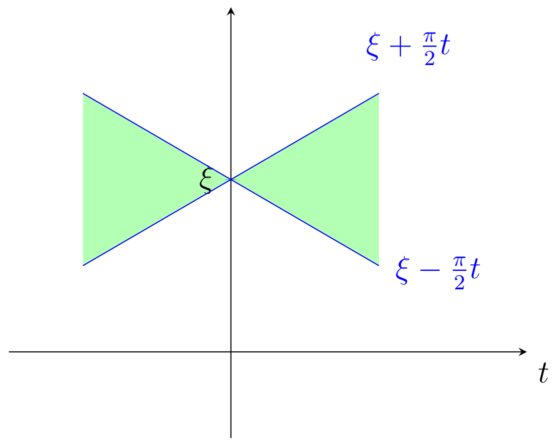
<u>$t \geq 0$:</u> $\quad -t\frac{\pi}{2} \leq \int_0^t \lambda_\xi'(s)ds \leq t\frac{\pi}{2}$

<u>$t < 0$:</u> $\quad -|t|\frac{\pi}{2} \leq \int_0^t \lambda_\xi'(s)ds = -\int_t^0 \lambda_\xi'(s)ds \leq |t|\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \xi - \frac{\pi}{2}|t| \leq \lambda_\xi(t) \leq \xi + \frac{\pi}{2}|t|$

Zu d):
$I_\xi = \mathbb{R}$ da $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto \arctan(x)$ (linear) beschränkt hat $x' = f(t,x)$, $x(0) = \xi$ das maximale Lösungsintervall $I_\xi = \mathbb{R}$.

Alternativ:



Lösungskurve muss im grün gekennzeichneten Bereich liegen laut Teil c).