

**Frühjahr 13 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, $n \in \mathbb{N}_0$ und $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ die Kurve mit $\gamma(t) = e^{-it}$. Weiterhin bezeichne $P_n(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ das n -te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Zeigen Sie, dass für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > 1$ gilt:

$$P_n(w) = \frac{w^{n+1}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}(z-w)} dz.$$

Hinweis: Man schreibe den im Integranden auftretenden Faktor $\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{w[1-(z/w)]}$ und verwende dann die geometrische Reihe.

Lösungsvorschlag:

Für $z \in \text{Spur}(\gamma)$ gilt $|z| = 1$, also $z^{n+1} \neq 0 \neq z-w$ und $|\frac{z}{w}| < 1$ für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > 1$. Daher ist das angegebene Kurvenintegral wohldefiniert, weil der Weg durch keine Singularität des Integranden verläuft, und die geometrische Reihe aus dem Hinweis konvergiert.

Wir formen das Integral auf der rechten Seite der zu zeigenden Gleichung gemäß dem Hinweis um. Es gilt

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}(z-w)} dz = \int_{\gamma} -\frac{f(z)}{z^{n+1}w} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^j dz = \sum_{j=0}^n -\frac{1}{w^{j+1}} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1-j}} dz.$$

Im ersten Schritt wurde die geometrische Reihe eingesetzt. Dies ist wegen $|\frac{z}{w}| < 1$ zulässig. Im zweiten Schritt teilen wir die Reihe in eine endliche Summe (von 0 bis n) und eine weitere Reihe (ab $n+1$) auf. Weil das Integral linear ist, dürfen wir die Summe und den Vorfaktor $\frac{-1}{w^{j+1}}$ aus dem Integral ziehen und weil $z \neq 0$ ist, können wir kürzen. Der zweite Summand fällt nach Cauchys Integralsatz weg, denn es gilt

$$-\frac{f(z)}{z^{n+1}w} \cdot \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^j = -f(z) \cdot w^{-n-2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^j = \frac{-f(z)w^{-n-2}}{1-\frac{z}{w}} = \frac{f(z)w^{-n-1}}{z-w},$$

was für festes $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > 1$ holomorph (in z) auf $B_{|w|}(0)$ ist. Diese Menge ist offen und konvex und enthält die Spur von γ wegen $|w| > 1$. Nach Cauchys Integralsatz verschwindet also das Integral über $\frac{f(z)w^{n+1}}{z-w}$ längs γ . Es folgt

$$\frac{w^{n+1}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}(z-w)} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^n -w^{n-j} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1-j}} dz = \sum_{j=0}^n -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{j+1}} dz \cdot w^j.$$

Nach der Taylorformel sind die Koeffizienten vom n -ten Taylorpolynom durch $a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma} \frac{f(z)}{z^{j+1}} dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{j+1}} dz$ gegeben, womit aus der letzten Darstellung die

Behauptung $P_n(w) = \sum_{j=0}^n a_j z^j = \frac{w^{n+1}}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}(z-w)} dz$ folgt.

J.F.B.