3.4 Aufgabe 4

Aufgabe 4:

Es sei die Funktion

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass f lokal lipschitzstetig ist.

(b) Berechnen Sie eine Lösung $\mu : J \to \mathbb{R}$ von

$$x' = f(x), \quad x(0) = 0,$$

deren Graph $\Gamma(\mu) = \{(t, \mu(t)) : t \in J\}$ in $[0,\infty)^2$ enthalten ist. Hierbei ist J ein geeignet zu wählendes reelles Intervall.

(c) Zeigen Sie, dass $x' = f(x)$, $x(0) = 0$ eine maximale Lösung besitzt und bestimmen Sie diese inklusive des maximalen Existenzintervalls.

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus (b).

(1+3+2 Punkte)

Zu (a)

Betrachten wir die Funktion

$$h_1 :]-1,1[\to]0,\infty[\ ;\ x \mapsto 1-|x|$$

dann gilt für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$

$$\big|h_1(x) - h_1(y)\big| = \big|1-|x|-1+|y|\big| = \big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$$

weshalb die Funktion Lipschitz-stetig ist. Die Funktion

$$h_2 :]0,\infty[\to]0,\infty[\ ;\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ist stetig differenzierbar und somit auch lokal Lipschitz-stetig. Somit ist auch

$$f = h_2 \circ h_1 :]-1,1[\to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$$

als Komposition von lokal Lipschitz-stetigen Funktionen lokal Lipschitz-stetig.

Zu (b)

Wir lösen das Anfangswertproblem

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \qquad x(0) = 0$$

durch Trennen der Variablen

$$\int_0^{\mu(t)} \sqrt{1-x}\ dx = \int_0^t 1\ ds = t$$

Die linke Seite wird zu

$$\int_0^{\mu(t)} \sqrt{1-x}\ dx = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\mu(t)} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-\mu(t)}\right)^3$$

Stellt man schließlich die Gleichung

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-\mu(t)}\right)^3 = t$$

nach $\mu(t)$ um, so erhält man

$$\mu(t) = 1 - \left(1 - \frac{3}{2}t\right)^{\frac{2}{3}}$$

Leitet man diese Funktion ab, so erhält man

$$\mu'(t) = -\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{2}t\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{2}t}}$$

und sieht, dass die Ableitung für $t \neq \frac{2}{3}$ existiert. Somit definieren wir

$$\mu : [0, \frac{2}{3}[\to \mathbb{R}\ ;\ t \to 1 - \left(1-\frac{3}{2}t\right)^{\frac{2}{3}}$$

Offensichtlich gilt $\mu(0) = 0$ und zudem gilt $\mu(t) \geqslant 0$. Somit gilt

$$\mu'(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{2}t}} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{1-|\mu(t)|}}$$

wobei $(*)$ gilt wegen

$$\sqrt{1-|\mu(t)|} = \sqrt{1-\mu(t)} = \sqrt{1-1+\left(1-\frac{3}{2}t\right)^{\frac{2}{3}}} = \left(1-\frac{3}{2}t\right)^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{3}{2}t\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1-\frac{3}{2}t}$$

Somit löst die Funktion das Anfangswertproblem und zudem gilt

$$\Gamma(\mu) \subseteq [0, \infty[^2$$

Zu (c)

Da f nach (a) lokal Lipschitz-stetig ist, besitzt das Anfangswertproblem

$$x' = f(x) \quad x(0) = 0$$

eine eindeutige maximale Lösung. Betrachte die Funktion

$$\nu :]-\frac{2}{3}, 0] \to \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto -\mu(-t) = -1 + \left(1+\frac{3}{2}t\right)^{\frac{2}{3}}$$

Wegen

$$\nu'(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{3}{2}t}}$$

existiert die Ableitung für $t \neq 0$. Außerdem gilt $\nu(t) \leqslant 0$. Daher ist

$$\nu'(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{3}{2}t}} = \frac{1}{\sqrt{1+\nu(t)}} = \frac{1}{\sqrt{1-|\nu(t)|}}$$

und damit ist ν eine Lösung von

$$x' = f(x) \quad x(0) = 0$$

Die beiden Lösungen lassen sich anstückeln wegen $\mu(0) = 0 = \nu(0)$. Wir definieren

$$\lambda :]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[\to \mathbb{R} \; ; \; t \mapsto \begin{cases} \mu(t) & \text{für} \quad t \geqslant 0 \\ \nu(t) & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}$$

Wegen

$$\lambda(t) \underset{t \to \frac{2}{3}}{\longrightarrow} 1 \quad \text{und} \quad \lambda(t) \underset{t \to -\frac{2}{3}}{\longrightarrow} -1$$

gilt

$$\lim_{t \to \frac{2}{3}} \operatorname{dist}\Big(\big(t, \lambda(t)\big), \partial\big(\mathbb{R} \times]-1, 1[\big) \Big) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{t \to -\frac{2}{3}} \operatorname{dist}\Big(\big(t, \lambda(t)\big), \partial\big(\mathbb{R} \times]-1, 1[\big) \Big)$$

weshalb λ auch das Randverhalten einer maximalen Lösung hat.