H09T1A1

Für die Differentialgleichung $u'(x) = \sqrt{1-u(x)^2}$ bestimme jeweils alle Lösungen $u_[0,\infty[\to\mathbb{R}$ zu den Anfangswerten

a) $u(0) = 1$

b) $u(0) = -1$

Lösung

$u \in [-1,1]$ damit $\sqrt{1-u^2}$ eine reellwertige Funktion definiert.

$$F : [-1,1] \to \mathbb{R},\, u \mapsto \sqrt{1-u^2}, \quad f :]-1,1[\to \mathbb{R},\, u \mapsto \sqrt{1-u^2} \quad \in C^1(]-1,1[,\mathbb{R})$$

$\Rightarrow u' = f(u)$, $u(\tau) = \xi$, $(\tau,\xi) \in \mathbb{R}\times]-1,1[$ hat eine maximal Lösung.
Auf $u' = F(u)$, $u(\tau) = \xi$ ist der Existenz- und Eindeutigkeitssatz anwendbar.
Jede Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$ von $u' = F(u)$ nimmt nur Werte $\lambda(t) \in [-1,1]$ an.
Da $\lambda'(t) = F(\lambda(t)) = \sqrt{1-(\lambda(t))^2} \geq 0$ ist λ monoton steigend (mit $(\lambda(t))^2 \in [0,1]$).

Zu a):
Mit $\lambda(0) = 1$, λ monoton steigend, $\lambda(t) \in [-1,1]$ bleibt auf dem Lösungsintervall $I = [0,\infty[$ nur $\lambda : [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto 1$ als Lösung zu $u' = \sqrt{1-u^2}$, $u(0) = 1$.

(Bild 1)

Zu b):
$\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto -1$ löst $u' = \sqrt{1-u^2}$, $u(0) = -1$
Sei $\tau > 0$ und $\xi \in]-1,1[$ und $\lambda_{(\tau,\xi)} : I_{(\tau,\xi)} \to \mathbb{R}$ ist eine maximale Lösung zu $u' = f(u)$, $u(\tau) = \xi$
Trennen der Variablen:

$$\int_{\xi}^{\lambda(t)} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_{\tau}^{t} ds = \arcsin(u)\Big|_{\xi}^{\lambda(t)}, \quad \arcsin(\lambda(t)) = t - \tau + \arcsin(\xi)$$

$$\lambda(t) = \sin(t - \tau + \arcsin(\xi))$$

Test: $\lambda'(t) = ...$

(Bild 2)

Maximales Lösungsintervall $I_{(\tau,\xi)} =]u(\tau,\xi), u(\tau,\xi)+\pi[$ so zu wählen, dass $\sin(t-\tau+\arcsin(\xi)) = -1$ und $\tau \in I_{(\tau,\xi)}$

Dies lässt sich nur durch Anstückeln zu einer Lösung von $u' = F(u)$, $u(0) = -1$ auf $[0,\infty[$ fortsetzen; somit sind dies alle derartige Lösungen (da jede Lösung $\not\equiv -1$ dann lokal auch $u' = f(u)$, $u(\tau) = \xi$ mit $\xi \in]-1,1[$ löst!).

(Bild 3)