F18T2A2

Diese Aufgabe befasst sich mit der Maximierung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto 4(x+y)$$

unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$.

a) Zeige die Existenz einer globalen Maximalstelle.

b) Berechne die globale Maximalstelle und bestimme das Maximum von f unter obiger Nebenbedingung.

Zu a):

$g^{-1}(\{1\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq [-1,1]^2$ ist beschränkt und abgeschlossen (als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{1\}$ bei der stetigen Funktion g), also kompakt. Daher nimmt die stetige reellwertige Funktion f auf $g^{-1}(\{1\})$ ein Maximum an.

Zu b):

Die Maximalstelle liegt in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\} \cap g^{-1}(\{1\})$

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ und } x, y \geq 0, \quad x = \sqrt{1-y^2} \text{ mit } y \in [0,1]$$

d.h. gesucht wird $\max\{4(\sqrt{1-y^2} + y) : y \in [0,1]\}$

$$h : [0,1] \to^{\mathbb{R}}, \quad y \mapsto 4(\sqrt{1-y^2} + y)$$

$$h'(y) = 4\Big(\frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}} + 1\Big) = 4\frac{-y + \sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{für } y \in]0,1[$$

$$h'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{1-y^2}, \quad y^2 = 1 - y^2 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d.h. $h'(y)$ ist $\begin{cases} > 0 \text{ für } y \in]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[\\ = 0 \text{ für } y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ < 0 \text{ für } y \in]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[\end{cases}$ also hat h Randminima bei 0 und 1.

Maximum bei $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ Das Maximum von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ liegt bei $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ mit $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{8}{\sqrt{2}}$.