F18T3A2

a) Bestimme Art und Lage aller lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto xe^{x-y^2}$$

b) Zeige, dass alle stationären Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = 2xy \tag{1}$$
$$\dot{y} = 1 + x \tag{2}$$

stabil sind, wobei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Verwende dazu das Resultat aus Teilaufgabe a).

Zu a):

$$(\nabla f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{e^{x-y^2}}_{\neq 0}\begin{pmatrix} 1+x \\ x(-2y) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ d.h.}$$

$$1 + x = 0 \quad \wedge \quad -x2y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \wedge \quad y = 0$$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der einzige kritische Punkt von f.

$$(Hes\, f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{x-y^2}\begin{pmatrix} 1+x+1 & (1+x)(-2y) \\ -2xy - 2y & (-2y)x(-2y) - 2x \end{pmatrix}$$

$$(Hes\, f)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} e^{-1}$$

hat Eigenwerte $\frac{1}{e}, \frac{2}{e} > 0$.
$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ isoliertes lokales Minimum von f.

Zu b):

Wie in a) hat $\begin{pmatrix} 2xy \\ 1+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur die Lösung $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\langle (\nabla f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2xy \\ 1+x \end{pmatrix} \rangle = e^{x-y^2} \langle \begin{pmatrix} 1+x \\ -2xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2xy \\ 1+x \end{pmatrix} \rangle = 0$$

$\Rightarrow f$ Erhaltungsgröße für $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 1+x \end{pmatrix}$ und da die stationäre Lösung $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein isoliertes lokales Minimum der Erhaltungsgröße f ist, gibt es eine Umgebung von U von $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, sodass $f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} < f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U \setminus \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\Rightarrow V : U \to \mathbb{R} \qquad \text{Lyapunovfunktion}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 1+x \end{pmatrix}$, die Stabilität von $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zeigt.

Achtung: Da die die Jacobimatrix der Funktion $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 1+x \end{pmatrix}$ nur Eigenwerte mit $Re(\lambda) = 0$ besitzt, kann darüber keine Aussage über die Stabilität getroffen werden.

Bemerkung: Hat eine Erhaltungsgröße $E : U \to \mathbb{R}$ für $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ an einer Ruhelage $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in U$ ein isoliertes lokales Extremum, dann ist $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ stabiles

- Minimum wie in der Aufgabe
- Maximum: Auch $-E$ ist Erhaltungsgröße und $-E$ hat bei $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ isoliertes lokales Minimum.