F19T3A1

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.

a) Bestimme für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^n - 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ alle Nullstellen mit strikt positivem Realteil.

b) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine der Nullstellen mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ aus Teilaufgabe a). Zeige, dass $w = z + z^{n-1}$ eine reelle Zahl echt größer Null ist.

c) Sei $n = 5$ und $w > 0$ eine der positiven reellen Zahlen aus Teilaufgabe a). Nimm $w \neq 2$ an und zeige, dass

$$w^2 + w - 1 = 0$$

gilt. Bestimme den Winkel $\alpha \in]0, \pi[$ mit $w = 2\cos(\alpha)$.

Zu a):

$z^n = 1$ wird gelöst durch die Einheitswurzeln $e^{\frac{k+1}{n}2\pi i}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$e^{\frac{k+1}{n}2\pi i} = \cos\left(\frac{k+1}{n}2\pi\right) + i\sin\left(\frac{k+1}{n}2\pi\right)$$

Sei $l \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\cos\left(\frac{l}{n}2\pi\right) > 0$

$$\frac{l}{n}2\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\ \cup \ \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{l}{n}2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\ \cup \ \left]\frac{3}{2}, 2\right]$$

Dies sind alle Nullstellen mit strikt positiven Realteil.

Zu b):

Vorab gilt:

$$z^n = 1 \text{ und } z\bar{z} = 1 = z\tfrac{1}{z} \ \Rightarrow \text{für } z \neq 0 \text{ ist } \tfrac{1}{z} = \bar{z}.$$

Beweis:

$$\begin{array}{ccccccc} z^{n-1} & = & z^n\frac{1}{z} & = & \frac{1}{z} & = & \bar{z} \\ w & = & z + \bar{z} & = & 2\mathrm{Re}(z) & > & 0 \end{array}$$

Zu c):

Wegen $n = 5$ gilt $z^5 = 1$ und $z \neq 1$, da $w = z + \bar{z} \neq 2$.

$$\begin{array}{llllll} w^2 + w - 1 = & (z+z^4)^2 + (z+z^4) - 1 & = & z^2 + 2z^5 + z^8 + z + z^4 - 1 & & = \\ & z^2 + 1 + z^3 + z + z^4 & = & \sum\limits_{k=0}^{4} z^k = \frac{1-z^{4+1}}{1-z} = \frac{1-1}{1-z} & = & 0 \end{array}$$

Für w gilt laut Teil b): $w > 0$ und $w \leq 2$

$$\cos(\alpha) = \frac{w}{2} \ \in \ ]0, 1[\quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{w}{2}\right)$$