

H17T3A3

Für $u_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man für $t \geq 0$ das Anfangswertproblem

$$u'(t) = u(t) + \frac{1}{1+t}, \quad u(0) = u_0$$

Zeige:

- a) Für jedes u_0 existiert eine eindeutige Lösung auf ganz \mathbb{R}^+ .
- b) $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \infty$ für jedes $u_0 \geq 0$.
- c) Es existiert ein $u_0 < 0$, so dass $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = -\infty$
- d) Es existiert ein $\alpha < 0$ so dass $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \infty$ für jedes $u_0 > \alpha$, $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = -\infty$ für jedes $u_0 < \alpha$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) \in \mathbb{R}$ für $u_0 = \alpha$.

Zu a):

Sei $g :]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{1+t} \in C^1(]-1, \infty[)$ und damit hat die Differentialgleichung die Form $u' = 1u + g(t)$, $u(0) = x_0$ einer inhomogenen, skalaren linearen Differentialgleichung mit stetigem g . Damit hat laut Existenz- und Eindeutigkeitssatz für linear beschränkte rechte Seite auf $] -1, \infty[$ eine eindeutige maximale Lösung, die laut Lösungsformel für skalare, lineare Differentialgleichung

$$\lambda :]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \exp\left(\int_0^t 1 ds\right) u_0 + \exp\left(\int_0^t ds\right) \int_0^t \exp\left(-\int_0^s dr\right) g(s) ds =$$
$$e^t u_0 + e^t \int_0^t e^{-s} \frac{1}{1+s} ds$$

Damit ist jede Lösung der Differentialgleichung, die auf $[0, \infty[$ definiert ist, gerade die Einschränkung von λ auf $[0, \infty[$.

Zu b):

$u_0 \geq 0$:

$$e^t u_0 + e^t \underbrace{\int_0^t e^{-s} \frac{1}{1+s} ds}_{\substack{>0 \\ \geq 0 \text{ für } t \geq 0, >0 \text{ für } t > 0}} \underbrace{\geq}_{t \geq 1} e^t \underbrace{\int_0^1 e^{-s} \frac{1}{1+s} ds}_{>0} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$$

$$\Rightarrow \lambda(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \text{ für } u_0 \geq 0$$

Zu c):

Da für $s \geq 0$ gilt $\left| \frac{e^{-s}}{1+s} \right| \leq e^{-s}$ und $\int_0^t e^{-s} ds = -e^{-s} \Big|_0^t = 1 - e^{-t}$ ist $[0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \frac{e^{-s}}{1+s}$ integrierbar mit

$$0 \leq \int_{[0, \infty[} e^{-s} \frac{1}{1+s} ds = \lim_{t \nearrow \infty} \underbrace{\int_0^t \frac{e^{-s}}{1+s} ds}_{=: \gamma(t)} \leq 1$$

(nach Majorantenkriterium)

$$\Rightarrow \lambda(t) = e^t(u_0 + \gamma(t))$$

$$\beta := \sup\{\gamma(t) : t \geq 0\} = \lim_{t \nearrow \infty} \gamma(t)$$

Ist $u_0 < 0$ mit $u_0 + \beta < 0$, dann ist $\varepsilon := -\frac{1}{2}(u_0 + \beta) > 0$, $u_0 = -\beta - 2\varepsilon$

$$\Rightarrow u_0 + \gamma(t) = -\beta - 2\varepsilon + \gamma(t) \leq -\beta - 2\varepsilon + \beta = -2\varepsilon \text{ für alle } t \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda(t) = e^t(u_0 + \gamma(t)) \leq e^t(-2\varepsilon) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$$

Zu d):

- Ist $u_0 < 0$ mit $u_0 + \beta > 0$, dann ist $\varepsilon := \frac{1}{2}(u_0 + \beta) > 0$, daher gibt es nach Definition des Supremums ein $T_\varepsilon \geq 0$ so dass $\gamma(t) \geq \beta - \varepsilon$ für alle $t \geq T_\varepsilon$

$$u_0 + \underbrace{\gamma(t)}_{t \geq T_\varepsilon} \geq u_0 + \beta - \varepsilon = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} e^t \varepsilon = \infty$$

- Ist $u_0 + \beta = 0$

$$\lambda(t) = e^t(u_0 + \gamma(t)) = \frac{\overbrace{u_0 + \gamma(t)}^{\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0}}{\underbrace{e^{-t}}_{\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0}}$$

$$(u_0 + \gamma(t))' = \frac{d}{dt} \left(\int_0^t e^{-s} \frac{1}{1+s} ds \right) = \frac{e^{-t}}{1+t} ; \quad \frac{d}{dt}(e^{-t}) = -e^{-t}$$

$$\frac{(u_0 + \gamma(t))'}{(e^{-t})'} = -\frac{1}{1+t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Nach dem Satz von l'Hospital existiert $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$.