Möglichkeiten zur Berechnung von komplexen Integralen

Umlaufzahl: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve und $z_0 \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{im}(\gamma)$.

- Die Umlaufzahl (Windungszahl) von γ in z_0 ist definiert als

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$$

Cauchy-Integralsatz: $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph.

- Sind γ_1 und γ_2 Wege in U, die in U zueinander holomorph/schleifenholomorph sind, dann gilt

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z) dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z) dz$$

- Ist γ ein geschlossener Weg in U, nullhomolog in U, dann ist

$$\int\limits_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Cauchy-Integralformel:

- Ist γ ein geschlossener Weg in U, nullhomolog in U, dann gilt

$$n(\gamma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi$$

Residuensatz:

- $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $S \subseteq U$ Menge ohne Häufungspunkte (diskret), $f : U \backslash S \to \mathbb{C}$ holomorph, γ geschlossener Weg in $U \backslash S$, nullhomolog in

$$U = \underbrace{(U \backslash S)}_{\substack{\text{Definitions-}\\ \text{bereich}\\ \text{von } f}} \cup \underbrace{S}_{\substack{\text{Menge der}\\ \text{isolierten}\\ \text{Singularitäten}\\ \text{von } f}}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{s \in S} n(\gamma, s) \mathrm{Res}(f, s)$$