F15T1A4

Bestimme eine reelle Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y(x)y'(x) + y(x)^2 + 2x + 5 = 0, \quad y(-4) = -2$$

Wie groß kann das Intervall I maximal sein?
Hinweis: Eine Möglichkeit der Lösung besteht darin, zunächst einen integrierenden Faktor $u : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ zu bestimmen, welcher nur von der Variablen x abhängt. Wir bezeichnen hierbei u als integrierenden Faktor, wenn die DIfferentialgleichung nach Multiplikation mit u exakt wird.

Lösung:
Diese Differentialgleichung hat die Form

$h(x,y)+g(x,y)y' = 0$ mit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y^2+2x+5$, $\quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \neq 2y = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$$

$$\frac{1}{g(x,y)}\Big(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\Big) = 2 \quad \Rightarrow e^2x \text{ integrierender Faktor}$$

$$(e^{2x}h(x,y)) + (e^{2x}g(x,y))y' = 0 \text{ exakt, da}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{2x}y) = 2e^{2x}y,\ \frac{\partial}{\partial y}(e^{2x}(y^2+2x+5)) = e^{2x}2y \text{ und } \mathbb{R}^2 \text{ sternförmig}$$

Nebenrechnung:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}e^{2x}y^2 + w(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^{2x}y,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^{2x}y^2 + w'(x) = e^{2x}(y^2+2x+5) = e^{2x}y^2 + 2xe^{2x} + 5e^{2x}$$

Stammfunktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{2}e^{2x}(x+2)$
Für jede Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$ von einer exakten Differentialgleichung mit Stammfunktion F ist $I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto F(t, \lambda(t))$ konstant.
Hier $F(t,\lambda(t)) = \frac{1}{2}e^{2t}(\lambda(t))^2 + e^{2t}(t+2) = F(-4,-2) = 0$

$$\lambda(t)^2 = -\frac{2e^{2t}(t+2)}{e^{2t}} = -2(t+2)$$

$$\lambda(t) = -\sqrt{-2(t+2)} = -\sqrt{-2t-4}, \quad t \leq -2$$

$$\lambda'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{-2t-4}}(-2) = \frac{1}{\sqrt{-2t-4}} \quad \text{für } t < -2$$

$$\lambda(t)\lambda'(t) + (\lambda(t))^2 + 2t + 5 = -\sqrt{-2t-4}\frac{1}{\sqrt{-2t-4}} + (-\sqrt{-2t-4})^2 + 2t + 5 =$$

$$-1 + (-2t-4) + 2t + 5 = 0 \quad \text{für } t < -2$$

$$\Rightarrow \lambda :]-\infty, -2[\to \mathbb{R},\, t \mapsto -\sqrt{-2t-4} \quad \text{löst} \quad yy' + y^2 + 2x + 5,\, y(-4) = -2$$

Da $|\lambda'(t)| \xrightarrow[t \nearrow -2]{} \infty$ hat die Fortsetzung von λ bei -2 keine Ableitung und ist damit keine Lösung des Anfangswertproblems $\Rightarrow]-\infty, -2[$ ist größtmögliches Lösungsintervall von λ.