

**Herbst 15 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Beweisen Sie, dass jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten vom Grad $n \geq 1$, $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$, genau n Nullstellen in \mathbb{C} besitzt (mit Vielfachheit gezählt) mithilfe

- a) des Satzes von Rouché,
- b) des Null- und Polstellen zählenden Integrals, indem Sie den Quotienten

$$\frac{p'(z)}{p(z)} =: \frac{n}{z}(1 + g(z))$$

betrachten und die so definierte Funktion g geeignet abschätzen.

Lösungsvorschlag:

- a) Wir definieren $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$, $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$ und $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $q(R) = |a_0| + |a_1|R + \dots + |a_{n-1}|R^{n-1}$. Wir zeigen, dass es ein $R_0 > 0$ gibt, sodass alle Nullstellen von p in $B_{R_0}(0)$ liegen und, dass für alle $z \in \partial B_{R_0}(0)$ die Abschätzung $|g(z)| < |f(z)|$ gilt.

Wir betrachten zunächst die rationale Funktion $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni R \mapsto \frac{q(R)}{R^n}$, die für $R \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Es gibt also ein $R_0 > 0$ mit $\frac{q(R)}{R^n} \leq \frac{1}{2}$ und folglich $q(R) < R^n$ für $R \geq R_0$. Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|p(z)| \geq ||z^n| - |g(z)|| \geq R^n - q(R) > 0,$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R \geq R_0$. Dabei wurde die Dreiecksungleichung genutzt, um $|g(z)| \leq q(|z|)$ zu zeigen. Daraus folgen die beiden oben angegebenen Eigenschaften $|g(z)| \leq q(R_0) < R_0^n = |f(z)|$ für alle $z \in \partial B_{R_0}(0)$ und $|p(z)| > 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R_0$, woraus natürlich $p(z) \neq 0$ folgt.

Nun hat p nur endlich viele Nullstellen in $B_{R_0}(0)$, gäbe es unendlich viele müssten diese sich nämlich in $\overline{B_{R_0}(0)}$ häufen und damit in $B_{R_0}(0)$, weil keine Nullstellen auf $\partial B_{R_0}(0)$ liegen. Auf dem Gebiet $B_{R_0}(0)$ ist p holomorph und müsste dann die Nullfunktion sein, was der Forderung $n \geq 1$ widerspricht.

Die Funktionen f, g und die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = R_0 \cdot e^{it}$ erfüllen nun alle Voraussetzungen des Satzes von Rouché, es folgt also

$$\sum_{z \in B_{R_0}(0)} \text{Ord}_p(z) = \sum_{z \in B_{R_0}(0)} \text{Ord}_f(z) = n,$$

weil f die n -fache Nullstelle 0 hat und $f + g = p$ gilt. Weil alle Funktionen ganz, also polstellenfrei sind, muss p insgesamt n Nullstellen (mit Vielfachheit) in $B_{R_0}(0)$ besitzen. Da es keine Nullstellen z mit $|z| \geq R_0$ gibt, besitzt p insgesamt n Nullstellen auf \mathbb{C} .

b) Wir lösen den Term nach $g(z)$ auf und erhalten

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{zp'(z)}{np(z)} - 1 = \frac{a_1z + \dots (n-1)a_{n-1}z^{n-1} + nz^n}{a_0n + a_1nz + \dots na_{n-1}z^{n-1} + nz^n} - 1 \\ &= \frac{-a_{n-1}z^{n-1} + \dots + (1-n)a_1z - a_0n}{np(z)}, \end{aligned}$$

also eine rationale Funktion deren Zählerpolynom Grad $n-1$ und deren Nennerpolynom Grad n hat. Für $|z| \rightarrow \infty$ folgt also $|g(z)| \rightarrow 0$. Weiter besitzt diese Funktion nur endlich viele Null- und Polstellen (Beweis ähnlich wie in a)) und für R groß genug, umschließt die Kurve $\gamma_R : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_R(t) = Re^{it}$ alle Pole und Nullstellen ohne selbst durch diese zu verlaufen. Nun gilt

$$n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{1}{z} dz + \frac{n}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{g(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = \sum_{z \in B_R(0)} \text{Ord}_p(z).$$

Weil p ganz ist, zählt der letzte Term nur die Nullstellen von p , der erste Summand des ersten Terms lässt sich leicht berechnen und beträgt n , wir schätzen den zweiten Summanden ab:

Es ist

$$\left| \frac{n}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{g(z)}{z} dz \right| \leq \frac{n}{2\pi} \max_{|z|=R} \frac{|g(z)|}{|z|} \cdot |\gamma_R| = n \max_{|z|=R} |g(z)|,$$

weil der Umfang eines Kreises mit Radius R durch $2\pi R$ gegeben ist. Für $R \rightarrow \infty$ geht dieser Term gegen 0, weil g eine rationale Funktion ist, deren Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist (Beweis ähnlich wie in a)).

Das Polynom p besitzt nur endlich viele Nullstellen, für R groß genug werden alle von γ_R genau einmal positiv umwunden. Lassen wir $R \rightarrow \infty$ streben, ist der letzte Term also konstant und konvergiert gegen die Anzahl der Nullstellen mit Vielfachheit von p in \mathbb{C} . Grenzwertbildung liefert daher $n = \sum_{z \in \mathbb{C}} \text{Ord}_p(z)$, was zu zeigen war.

J.F.B.