

## H11T3A3

Sei  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto e^{x^2 t^2} + t^2$

a) Berechne die partiellen Ableitungen von  $F$

b) Bestimme zu  $x_0 \in \mathbb{R}$  alle Lösungen von

$$xt^2 x' + t(x^2 + e^{-x^2 t^2}) = 0, \quad x(1) = x_0$$

c) Zeige, dass jede Lösung aus b) maximal auf einem beschränkten Zeitintervall existiert und gebe das Randverhalten der Lösungen an.

**Zu a):**

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = e^{x^2 t^2} 2t^2 x + 2t$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = e^{x^2 t^2} 2xt^2$$

**Zu b):**

$2e^{x^2 t^2}$  ist hierfür ein integrierender Faktor, denn

$$2e^{x^2 t^2} xt^2 x' + 2e^{x^2 t^2} tx^2 + 2t = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(t, x)x' + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)(t, x) = 0$$

und  $F$  ist zu dieser exakten Differentialgleichung eine Stammfunktion.

Ist  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung von der Differentialgleichung, so gilt

$$e^{x_0^2} + 1 = F(1, x_0) = F(t, \lambda(t)) = e^{\lambda(t)^2 \cdot t^2} + t^2$$

$$e^{\lambda(t)^2 \cdot t^2} = e^{x_0^2} + 1 - t^2$$

$$\lambda(t)^2 = \frac{\ln(e^{x_0^2} + 1 - t^2)}{t^2}$$

$$\lambda(t)^2 = \text{sign}(x_0) \frac{\sqrt{\ln(e^{x_0^2} + 1 - t^2)}}{t}$$

Definiert für  $t \neq 0 \rightarrow$  Intervall  $]0, \infty[$  damit Startzeitpunkt 1 enthalten ist.

$\ln(e^{x_0^2} + 1 - t^2)$ :  $e^{x_0^2} + 1 - t^2 > 0$  damit  $\ln(\cdot)$  definiert ist.

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\downarrow}$   
 $\geq 0$  damit  $\sqrt{\ln(\dots)}$  definiert ist  $\Rightarrow e^{x_0^2} + 1 - t^2 \geq 1 \Leftrightarrow e^{x_0^2} \geq t^2$

$$\Rightarrow 0 < t \leq \sqrt{e^{x_0^2}} \Rightarrow 1 \leq \sqrt{e^{x_0^2}} \text{ für } x_0 \neq 0$$

Kandidat:  $\lambda : ]0, \sqrt{e^{x_0^2}}[ \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\text{sign} x_0}{t} \sqrt{\ln(e^{x_0^2} + 1 - t^2)}$  (an der oberen Grenze ist  $\lambda$  noch definiert, aber  $\lambda'$  nicht mehr)

$$\lambda(1) = \text{sign}(x_0) \sqrt{x_0^2} = \text{sign}(x_0) |x_0| = x_0$$

$$\lambda'(t) = \frac{\text{sign}(x_0) \left( t \frac{1}{2\sqrt{\ln(e^{x_0^2} + 1 - t^2)}} \cdot \frac{1}{e^{x_0^2} + 1 - t^2} (-2t) - \sqrt{\ln(e^{x_0^2} + 1 - t^2)} \right)}{t^2}$$

$$\lambda(t)t^2\lambda'(t) + t(\lambda(t)^2 + e^{-\lambda(t)^2 t^2}) = \dots = 0$$

**Zu c):**

$$\left. \begin{array}{l} |\lambda(t)| \xrightarrow[t \nearrow 0]{} \infty \\ |\lambda'(t)| \xrightarrow[t \searrow \sqrt{e^{x_0^2}}]{} \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda \text{ lässt sich nicht weiter zu einer Lösung des AWP's fortsetzen.}$$

$$e^{x_0^2} + 1 = F(1, x_0) = F(t, \lambda(t)) = e^{\lambda(t)^2 \cdot t^2} + t^2 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(1, x_0) = e^{x_0^2} \cdot 2x_0 \neq 0$$

dann ist die Differentialgleichung laut dem Satz über implizite Funktionen lokal eindeutig lösbar. Somit ist das gefundene Intervall das größtmögliche.