H19T3A4

a) Bestimme alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der homogenen reellen Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

b) Bestimme alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der inhomogenen reellen Differentialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 15e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

c) Zeige, dass es genau eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt, mit

$$f''(z) + 2f'(z) + 2f(z) = 15e^z$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ sowie $f(0) = 3$, $f'(0) = 2$ und bestimme diese.

Zu a):

$y'' + 2y' + 2y = 0$ ist eine lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
Übergang zum charakteristischen Polynom: $z^2 + 2z + 2 = (z + 1 + i)(z + 1 - i)$

$$z_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = -1 \pm i$$

$$\Rightarrow \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{(-1+i)t} \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{(-1-i)t}$$

linear unabhängige Lösungen von $y'' + 2y' + 2y = 0$.

$$\Rightarrow \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto e^{-t}\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{(-1+i)t} + e^{(-1-i)t})$$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto e^{-t}\sin(t) = \frac{1}{2i}(e^{(-1+i)t} - e^{(-1-i)t})$$

sind linear unabhängige reellwertige Lösungen von $y'' + 2y' + 2y = 0$ und spannen den 2-dimensionalen Lösungsraum von $y'' + 2y' + 2y = 0$ auf.

Zu b):

Die Lösungen bilden einen 2-dimensionalen affinen Unterraum von $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$
Ansatz: $Ce^x = y(x)$ in Differentialgleichung:

$$Ce^x + 2Ce^x + 2Ce^x - 5Ce^x \overset{!}{=} 15e^x \quad \Rightarrow y(x) = 3e^x \text{ ist Lösung}$$

$$\Rightarrow \{\mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto c_1 e^{-t}\sin(t) + c_2 e^{-t}\cos(t) + 3e^t :\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \text{ ist Lösungsraum}$$

Zu c):

$y'' + 2y' + 2y = 15e^t$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$ hat auf $\mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung.

$$\lambda(t) = c_1 e^{-t}\sin(t) + c_2 e^{-t}\cos(t) + 3e^t$$

$$\Rightarrow \lambda'(t) = -c_1 e^{-t}\sin(t) + c_1 e^{-t}\cos(t) - c_2 e^{-t}\cos(t) - c_2 e^{-t}\sin(t) + 3e^t$$

$$\lambda(0) = c_2 + 3 \overset{!}{=} 3 \;\Rightarrow\; c_2 = 0$$

$$\lambda'(0) = c_1 - c_2 + 3 = c_1 + 3 \overset{!}{=} 2 \;\Rightarrow\; c_1 = -1$$

$\Rightarrow \lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto -e^{-t}\sin(t) + 3e^t$ ist auf $\mathbb{R}$ die einzige Lösung von

$$y'' + 2y' + 2y = 15e^t,\; y(0) = 3,\; y'(0) = 2$$

λ ist eine Einschränkung von $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto -e^{-z}\sin(z) + 3e^z$, holomorph.

Da die Einschränkung eines holomorphen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit
$f''(z) + 2f'(z) + 2f(z) = 15e^z$, $f(0) = 3$, $f'(0) = 2$ auf $\mathbb{R}$ eine Lösung von
$y'' + 2y' + 2y = 15e^t$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$ ist, gilt $f\big|_{\mathbb{R}} = \lambda$.
Daher ist $\mathbb{R} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : f(z) = g(z)\}$ für jedes holomorphe f mit $f''(z) + 2f'(z) + 2f(z) = 15e^z$, $f(0) = 3$, $f'(0) = 2$ und da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ Häufungspunkte hat (sogar jeder Punkt ist ein Häufungspunkt!), folgt $f = g$ nach dem Identitätssatz.