F05T1A1

a) Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$u'' = -4u + 4u'$$

b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \text{ für } x > 0$$

Durch die Substitution $x = e^t$ und $y(e^t) = u(t)$ (wegen $x > 0$) geht die obige Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für $u(t)$ über. Wie lautet diese? Gebe die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung aus b) an.

Zu a):

$$u'' - 4u' + 4u = 0$$

ist eine lineare Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
Überführe in das charakteristische Polynom:
u ersetzen durch 1, u' ersetzen durch z, u'' ersetzen durch z^2, ...

$$z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$$

hat doppelte Nullstelle z

$$\Rightarrow v_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto e^{2t} \quad \text{und} \quad v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto te^{2t}$$

bilden eine Basis des Lösungsraums von $u'' - 4u' + 4u = 0$, dh. jede Lösung davon hat die Form

$$c_1v_1 + c_2v_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto (c_1 + c_2t)e^{2t}$$

Zu b):

$$u'(t) = \frac{d}{dt}(y(e^t)) = y'(e^t) \cdot e^t = y'(x(t)) \cdot x(t)$$

$$\begin{aligned} u''(t) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt}(y(e^t))\Big) = \frac{d}{dt}\Big(y'(e^t) \cdot e^t\Big) &= y''(e^t) \cdot e^t \cdot e^t + y'(e^t) \cdot e^t \\ &= y''(x(t)) \cdot (x(t))^2 + y'(x(t)) \cdot x(t) \end{aligned}$$

$$0 = (x(t))^2 y''(x(t)) - 3x(t)y'(x(t)) + 4y(x(t)) = u''(t) - \overbrace{y'(x(t)) \cdot x(t)}^{=u'(t)} - 3u'(t) + 4y(t)$$
$$= u''(t) - 4u'(t) + 4u(t)$$

Einsetzen der Substitution in die Lösung aus a) gibt:

$$]0, \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto c_1 x^2 + c_2 \ln(x) x^2$$

als Lösung von $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$