F17T2A3

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) := (|x_2|^{\frac{1}{2}}, |x_1|^{\frac{1}{2}})$, und $D :=]0, \infty[^2$. Zeige:

a) Das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ ist für jedes $x_0 \in D$ lokal eindeutig lösbar.

b) Es gibt genau eine Lösung $x : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2$ des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = 0$ mit $x(t) \in D$ für alle $t > 0$.
(Hinweis: Die Trajektorie einer solchen Lösung ist der Graph einer Funktion, welche wieder eine Differentialgleichung erfüllt.)

c) Das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = 0$ ist nicht eindeutig lösbar.

zu a):

Die Einschränkung von f auf D ist als Komposition stetig partiell differenzierbarer Funktionen auch stetig partiell differenzierbar, also insbesondere lokal Lipschitz-stetig.

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ für jedes $x_0 \in D$ lokal eindeutig lösbar.

zu b):

f ist stetig und somit ist das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = 0$$

nach dem Satz von Peano lösbar.

Nebenrechnung:

$$\dot{x}_1 \cdot |x_1|^{\frac{1}{2}} = \dot{x}_1 \dot{x}_2 = |x_2|^{\frac{1}{2}} \cdot \dot{x}_2$$

Für $x(t) \in D$:

$$(x_1(t))^{\frac{1}{2}} \cdot \dot{x}_1(t) = (x_2(t))^{\frac{1}{2}} \cdot \dot{x}_2(t)$$

$$\frac{2}{3} \cdot (x_1(t))^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot (x_2(t))^{\frac{3}{2}} + C$$

Für $t \to 0$ erhält man $0 = 0 + C$, also $C = 0$.
Demnach muss dann $x_1(t) = x_2(t)$ gelten.

Betrachte die Abbildung

$$x : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \left(\frac{t^2}{4}, \frac{t^2}{4}\right)$$

Für alle $t \in [0, \infty[$ ist

$$\dot{x}(t) = \left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right) \in]0, \infty[^2 = D$$

Demnach ist x eine gesuchte Lösung.

Angenommen es gäbe noch eine eine von x verschiedene Lösung $\tilde{x}$ mit den gesuchten Eigenschaften. Da $\tilde{x} \neq x$, gibt es ein $t_1 \in]0, \infty[$ mit $\tilde{x}(t_1) \neq x(t_1)$. Dann gibt es ein $k \in \{1, 2\}$ mit $\tilde{x}_k(t_1) \neq x_k(t_1)$. Wegen $\tilde{x}_k(t_1) \in D$ ist $\tilde{x}_k(t_1) > 0$.
Setze $t_2 := \sqrt{4\tilde{x}_k(t_1)}$, sodass $x_k(t_2) = \tilde{x}_k(t_1)$ gilt. Wenn $t_1 = t_2$ wäre, wäre

$$\tilde{x}_k(t_1) = x_k(t_2) = x_k(t_1) \neq \tilde{x}_k(t_1)$$

ein Widerspruch. Also ist $t_1 \neq t_2$.

<u>1. Fall:</u> $t_2 > t_1$
Betrachte die (verschobene) Funktion

$$y_k : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto x_k(t + t_2 - t_1)$$

Für alle $t \in [0, \infty[$ ist

$$\dot{y}_k(t) = \dot{x}_k(t + t_2 - t_1) = f(x_k(t + t_2 - t_1)) = f(y_k(t))$$

$$y_k(t_1) = x_k(t + t_2 - t_1) = x_k(t_2) = \tilde{x}_k(t_1)$$

y_k und $\tilde{x}_k$ erfüllen beide das Anfangswertproblem

$$\dot{\varphi} = \sqrt{|\varphi|^{\frac{1}{2}}}, \quad \varphi(t_1) = \tilde{x}_k(t_1) \in D$$

Wegen der Eindeutigkeit nach Picard-Lindelöf des Anfangswertproblems $\dot{\varphi} = \sqrt{|\varphi|^{\frac{1}{2}}}$ mit $\varphi(t_0) = a$ mit $(t_0, a) \in \mathbb{R}\times]0, \infty[$, ist dann $y_k(t) = \tilde{x}_k(t)$ für alle $t \in]0, \infty[$.
Dann ist

$$0 = \tilde{x}_k(0) = \lim_{t\searrow 0} \tilde{x}_k(t) = \lim_{t\searrow 0} y_k(t) = y_k(0) = x_k(t_2 - t_1) \in D$$

ein Widerspruch.

<u>2. Fall:</u> $t_1 > t_2$
Betrachte die (verschobene) Funktion

$$\tilde{y}_k : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \tilde{x}_k(t + t_1 - t_2)$$

Für alle $t \in [0, \infty[$ ist

$$\dot{\tilde{y}}_k(t) = \dot{\tilde{x}}_k(t + t_1 - t_2) = f(\tilde{x}_k(t + t_1 - t_2)) = f(\tilde{x}_k(t))$$

$$\tilde{y}_k(t_2) = \tilde{x}_k(t + t_1 - t_2) = \tilde{x}_k(t_1) = x_k(t_2)$$

$\tilde{y}_k$ und x_k erfüllen beide das Anfangswertproblem

$$\dot{\varphi} = \sqrt{|\varphi|^{\frac{1}{2}}}, \quad \varphi(t_2) = x_k(t_2) \in D$$

Wegen der Eindeutigkeit nach Picard-Lindelöf des Anfangswertproblems $\dot{\varphi} = \sqrt{|\varphi|^{\frac{1}{2}}}$ mit $\varphi(t_0) = a$ mit $(t_0, a) \in \mathbb{R}\times]0, \infty[$, ist dann $\tilde{y}_k(t) = x_k(t)$ für alle $t \in]0, \infty[$.
Dann ist

$$0 = x_k(0) = \lim_{t\searrow 0} x_k(t) = \lim_{t\searrow 0} \tilde{y}_k(t) = \tilde{y}_k(0) = \tilde{x}_k(t_2 - t_1) \in D$$

ein Widerspruch.

Die Annahme, dass es eine weitere, von x verschiedene, Lösung $\tilde{x}$ mit den gesuchten Eigenschaften gibt, ist falsch gewesen.

zu c):

Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = 0$$

ist nicht eindeutig lösbar. Es gibt neben der Lösung

$$x : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \left(\frac{t^2}{4}, \frac{t^2}{4}\right)$$

aus Teilaufgabe b) auch die konstante Nullfunktion als Lösung.