

**Frühjahr 14 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen  
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Gegeben sei die Differentialgleichung  $\ddot{x} = -\cos x$ .

- (a) Wandeln Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein äquivalentes System erster Ordnung mit den Variablen  $x$  und  $y$  um.
- (b) Hat diese Differentialgleichung für jede Anfangsbedingung eine eindeutige maximale Lösung?
- (c) Sind die maximalen Lösungen auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert?
- (d) Man zeige, dass die Funktion  $S(x, y) = 2 \sin x + y^2$  ein Erstes Integral ist.

**Lösungsvorschlag:**

- (a) Mit  $y = x'$  lautet das äquivalente System  $x' = y, y' = -\cos x$ .
- (b) Ja, nach dem Satz von Picard-Lindelöf, denn das äquivalente System aus (a) weist eine stetig differenzierbare, also lokal lipschitzstetige Strukturfunktion auf.
- (c) Ja, weil wegen  $\|(y, -\cos x)\|_1 \leq \|(x, y)\|_1 + 1$  das Wachstum linear beschränkt bleibt.
- (d) Natürlich ist  $S \in C^1(\mathbb{R}^2)$  mit  $\nabla S(x, y) \cdot (y, -\cos x) = 2y \cos x - 2y \cos x \equiv 0$ .

*J.F.B.*