

**Frühjahr 14 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{r^2}{1+r^4} dr.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{dx}{1+|x|^4}.$$

Dabei bezeichnet $|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ die euklidische Norm von $x \in \mathbb{R}^3$.

Lösungsvorschlag:

a) Nachdem der Integrand stetig ist, weil das Nennerpolynom keine reellen Nullstellen besitzt, und weil der Zählerpolynomgrad um 2 kleiner als der Nennerpolynomgrad ist, existiert dieses Integral. Dieses Integral könnte mit Partialbruchzerlegung gelöst werden, was hier jedoch sehr aufwändig wäre. Wir benutzen daher komplexe Integration. Es ist klar, dass der Integrand eine gerade Funktion ist und daher der gesuchte Integralwert, die Hälfte von $J := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r^2}{1+r^4} dr$ ist, was wie oben existiert.

Sei $f : \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ mit der endlichen Menge von Singularitäten (Nullstellen des Nenners) $S = \left\{ \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right\}$. Für keine davon, verschwindet der Zähler und daher handelt es sich um Pole erster Ordnung (alle Nullstellen sind einfach, weil vier paarweise verschiedene Nullstellen eines quartischen Polynoms vorliegen). Für $R > 1$ berührt der Weg $\gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2$ mit $\gamma_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it}$, $\gamma_2 : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t$ keine Singularität, umkreist aber $\frac{\pm 1+i}{\sqrt{2}}$ genau einmal in positiver Richtung und $\frac{\pm 1-i}{\sqrt{2}}$ gar nicht. Weil \mathbb{C} eine offene, konvexe Menge ist und $f : \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist, wobei S eine endliche Menge ist und weil für alle $R > 1$ der Weg γ_R geschlossen und stückweise stetig differenzierbar ist, ohne durch eine Singularität von f zu verlaufen, können wir den Residuensatz anwenden und $\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}_f(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}) + \text{Res}_f(\frac{1+i}{\sqrt{2}}))$ folgern. Wir berechnen die Residuen mit der Formel für Pole erster Ordnung. Es ist $\text{Res}_f(s) = \frac{1}{4s} = \frac{\bar{s}}{4}$ und daher $\text{Res}_f(\frac{1+i}{\sqrt{2}}) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$, sowie $\text{Res}_f(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}) = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}$. Daher ist $\int_{\gamma_R} f(z) dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ unabhängig von $R > 1$.

Einsetzen der Definition zeigt $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{r^2}{1+r^4} dr$ für alle $R > 1$, für γ_2 schätzen

wir mit der Standardungleichung ab: Die Länge der Kurve beträgt πR und für $z \in \text{Spur}(\gamma_2)$ ist $|z| = R$, also $|f(z)| \leq \frac{R^2}{R^4-1}$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung. Also ist $0 \leq |\int_{\gamma_2} f(z) dz| \leq \frac{\pi R^3}{R^4-1}$, was für $R \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

Aus $\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$ und der Existenz von J , folgt im Grenzwertübergang $R \rightarrow \infty$ nun $J = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$; unser gesuchtes Integral hat den halben Wert, also $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

- b) Wir berechnen das Integral mit der Transformationsformel und transformieren in Kugelkoordinaten. Daher gilt für das Integral:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{dx}{1+|x|^4} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin \theta}{1+r^4} d\theta \, dr \, d\varphi = \sqrt{2}\pi^2$$

unter Verwendung von a) und elementarer Integration.

J.F.B.