

## H18T2A2

- a) (i) Zeige, dass die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 z^2 + 8} \quad (1)$$

absolut konvergiert für jedes  $z \in \mathbb{R}$  und die Funktion  $f : z \mapsto f(z)$ , die so entsteht, stetig ist auf  $\mathbb{R}$ .

- (ii) Gebe (ohne Beweis) die größte offene Menge  $U \subseteq \mathbb{C}$  an, so dass die Funktion  $f$  durch (??) auf  $U$  definiert und dort holomorph ist.

- b) Die komplexen Zahlen  $a_1, \dots, a_n$  (mit  $n \geq 1$ ) erfüllen  $|a_j| = 1$  für  $j = 1, \dots, n$ . Zeige, dass es einen Punkt  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = 1$  gibt, so dass das Produkt der Abstände zwischen  $z$  und  $a_j$ , für  $j = 1, \dots, n$  mindestens 1 ist.

Hinweis: Betrachte die Funktion  $f(z) := (z - a_1) \cdot \dots \cdot (z - a_n)$ .

**Zu a), (i):**

Ist  $z = 0$ , so ist offensichtlich  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^2}{n^2 \cdot 0^2 + 8} = 0$  (insbesondere konvergiert die vorkommende Reihe absolut).

Andernfalls ist  $z \neq 0$  und wir stellen fest:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^2}{n^2 z^2 + 8} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 z^2 + 8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \frac{8}{z^2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

wobei wir verwendet haben, dass die Reihe der Form  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  genau dann konvergiert, wenn  $\alpha > 1$  gilt. Damit konvergiert auch in diesem Fall die Reihe in Gleichung (??) absolut.

Dass die Funktion  $f$  stetig ist, besagen nun entweder Sätze aus der Vorlesung oder die folgende Argumentation: Betrachte die Folge der Partialsummen  $(\sum_{k=1}^n f_k)_{n \in \mathbb{N}}$ , wobei  $f_n(z) := \frac{z^2}{n^2 z^2 + 8}$ . Diese konvergiert gleichmäßig gegen  $f$ , denn für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es wegen der Konvergenz der Folge  $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2})_{n \in \mathbb{N}}$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$  und daher ist für  $n > N, n \in \mathbb{N}$

$$|f(z) - f_n(z)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \varepsilon.$$

Aus der (offensichtlichen) Stetigkeit der  $f_n$  (für alle  $n \in \mathbb{N}$ ) folgt damit aus der eben gezeigten gleichmäßigen Konvergenz auch die Stetigkeit des punktweise gebildeten Grenzwerts  $f$ .

**Zu a), (ii):**

Im Körper der komplexen Zahl können die Funktion

$$f_n(z) = \frac{z^2}{n^2 \cdot (z - i\frac{2\sqrt{2}}{n}) \cdot (z + i\frac{2\sqrt{2}}{n})}$$

nur noch auf der Menge  $\mathbb{C} \setminus \left\{ \pm i\frac{2\sqrt{2}}{n} \right\}$  definiert werden. Damit liegt in jeder Umgebung von 0 ein Punkt, an dem  $f$  nicht definiert ist. Für  $z \notin A := \{0\} \cup \left\{ \pm i\frac{2\sqrt{2}}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  und  $C := \operatorname{Re}\left(\frac{8}{z^2}\right)$  gilt die Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^2}{n^2 z^2 + 8} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^2 + \frac{8}{z^2}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\operatorname{Re}(n^2 + \frac{8}{z^2})|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + C} < \infty,$$

Damit konvergiert die Reihe (??) für alle  $z \in U := \mathbb{C} \setminus A$ . Da die  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergieren, folgt aus der Holomorphie der  $f_n$  auch die Holomorphie von  $f$  auf  $U$ .

**Zu b):**

Wir betrachten die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , wie sie im Hinweis definiert wurde und wollen zeigen, dass es  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| = 1$  mit  $|f(z)| \geq 1$  gibt.

Wir bemerken als erstes  $|f(0)| = \prod_{i=1}^n |a_j| = 1$ . Andererseits ist  $f|_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$  auf der offenen Einheitskreisscheibe  $\mathbb{E}$  holomorph und als Einschränkung einer ganz-holomorphen Funktion auch stetig auf  $\partial\mathbb{E}$  fortsetzbar. Nach dem Maximumsprinzip für beschränkte Gebiete gilt

$$1 = |f(0)| \leq \max_{z \in \bar{\mathbb{E}}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\mathbb{E}} |f(z)|.$$

Es gibt also ein  $z \in \partial\mathbb{E}$  (also eine  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = 1$ ), für das  $|f(z)| \geq 1$  gilt - wie gewünscht.

Hieraus folgt dann

$$1 = |f(z)| \leq \prod_{i=1}^n |z - a_j|$$

- wie gewünscht.