

中国科学技术大学数学科学学院
2018 ~ 2019学年 第 1 学期期末考试试卷
■A卷 □B卷

课程名称 _____ 计算方法(B) _____ 课程编号 _____ 001511
考试时间 _____ 2019年1月8日 _____ 考试形式 _____ 闭卷
姓 名 _____ 学 号 _____ 学 院 _____

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总计 |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 得分 | | | | | | | | |
| 评卷人 | | | | | | | | |

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
2. 本试卷共 7 道试题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟。
3. 除特殊说明, 计算结果保留4位小数。

一、(36分) 填空

(1) (6分) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, 则谱半径 $\rho(A) =$ _____, $\|A\|_{\infty} =$ _____, 条件数 $cond_1(A) =$ _____。

(2) (6分) 已知 $f(-1) = 3, f(0) = -1, f(1) = 4$, 则 $f(x)$ 关于插值节点 $\{-1, 0, 1\}$ 的2次Lagrange插值多项式 $L_2(x) =$ _____,
差商 $f[-1, 0, 1] =$ _____。

(3) (6分) 设 $S(x) = \begin{cases} x^3 - x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ ax^3 + bx^2 + cx - 1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$ 是以0, 1, 2为节点的三次样条函数, 则 $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____。

(4) (6分) 设 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$, 则解非线性方程 $f(x) = 0$ 的牛顿迭代格式为 _____, 当初始值 x_0 取在根 $x^* = 1$ 附近时, 迭代格式的收敛阶为 _____。

(5) (6分) 若 n 阶矩阵 A 的按模最大特征值只有一个且是单实根, 则可用_____方法数值求解; 若 n 阶矩阵 A 的按模最小特征值只有一个且是单实根, 则可用_____方法数值求解; 若 n 阶矩阵 A 为对称实矩阵, 则可用_____方法数值求解其所有特征值。

(6) (6分) 向量 $v \in \mathbb{R}^3$, 矩阵 $H = I - 2vv^T$, 若 $\|v\| = 1$, 则 $\det(H) =$ _____。 $x = (4, 0, 3)^T$, $y = (\alpha, 0, 0)^T$, 若有 $H(x) = y$ 且 $\alpha > 0$, 则 $\alpha =$ _____, $v =$ _____。

二、 (10分) 用Gauss-Seidel方法解线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

- 1) 写出Gauss-Seidel迭代的分量形式;
- 2) 写出Gauss-Seidel迭代的迭代矩阵;
- 3) 分析Gauss-Seidel迭代的收敛性。

三、（10分）按下列数据，用最小二乘法做出 $f(x) = a + be^{2x}$ 形式的拟合函数。

| | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|
| x_i | -1 | 0 | 1 | 1.5 | 2 |
| y_i | 0.35 | 0.60 | 0.85 | 1.24 | 1.58 |

四、（10分）已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ，运用LU分解法（其中 L 为单位下三角矩阵）求矩阵 A 的逆。

五、（10分）取 $h = \frac{b-a}{n}$ ，试导出下述复化积分公式的截断误差：

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h\right).$$

.....
密.....
封.....
线.....
内.....
不.....
要.....
答.....
题.....

六、 (12分) 设 $f(x) = \frac{1}{a-x}$, x_0, x_1, \dots, x_n 互异且不等于 a 。试求 $f[x_0, x_1, \dots, x_k] (1 \leq k \leq n)$ 及 $f(x)$ 关于插值节点 $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 的 n 次Newton插值多项式。

七、（12分）对于常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [a, b] \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

其中 $f(x, y)$ 足够光滑。若取 $h = \frac{b-a}{m}$, $x_n = a + nh, n = 0, 1, 2, \dots, m$, m 为正整数。试确定常数 α 和 β , 使如下线性多步格式

$$y_{n+3} - y_n + \alpha(y_{n+2} - y_{n+1}) = h\beta[f(x_{n+2}, y_{n+2}) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

至少具有3阶精度, 并求局部截断误差, 要求给出表达式。