第十二次作业答案

P162 5.

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ \quad k_1 = f(x_n, y_n) \\ \quad k_2 = f\left(x_n + \dfrac{1}{2}h, y_n + \dfrac{1}{2}hk_1\right) \\ \quad k_3 = f\left(x_n + \dfrac{1}{2}h, y_n + \dfrac{1}{2}hk_2\right) \\ \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \\ \quad k_1 = f(x_n, y_n) \\ \quad k_2 = f\left(x_n + \dfrac{1}{3}h, y_n + \dfrac{1}{3}hk_1\right) \\ \quad k_3 = f\left(x_n + \dfrac{2}{3}h, y_n + \dfrac{1}{3}hk_1 + hk_2\right) \\ \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_1 - hk_2 + hk_3) \end{cases} \qquad (2)$$

使用式 (1):

$y_1 = 1.35651$, $y_2 = 1.66136$, $y_3 = 1.9391$.

使用式 (2):

$y_1 = 1.33523$, $y_2 = 1.63069$, $y_3 = 1.90319$.

P162 8.

原题：由三阶显式 Adams 公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left[23f(x_n, y_n) - 16f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 5f(x_{n-2}, y_{n-2})\right]$$

推导截断误差

$$T_{n+1} = \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(\xi)$$

原题证明：(证明类似于第八章常微分方程数值解 PPT的第29页.)

可以验证公式是由Lagrange插值构造的，于是

$T_{n+1}=\int_{x_n}^{x_{n+1}} R(x)dx=\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{y^{(4)}(\xi(x))}{3!}(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})dx$
由于$(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})$在积分区间上不变号，因此可以使用积分中值定理，即：
$T_{n+1}=\frac{y^{(4)}(\xi)}{6}\int_{x_n}^{x_{n+1}}(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})dx=\frac{3}{8}h^4y^{(4)}(\xi)$.证毕.

如果证明的是：$T_{n+1}=\frac{3}{8}h^4y^{(4)}(x_n)+O(h^5)$，则需要在$x_n$处进行泰勒展开.
首先由条件有

$$y_{n+1}=y(x_n)+\frac{h}{12}\left(23y'(x_n)+5y'(x_{n-2})-16y'(x_{n-1})\right) \qquad (*)$$

然后在x_n处进行泰勒展开，可以得到：

$$y'(x_{n-2})=y'(x_n)-2hy''(x_n)+2h^2y^{(3)}(x_n)-\frac{4}{3}h^3y^{(4)}(x_n)+O(h^4)$$
$$y'(x_{n-1})=y'(x_n)-hy''(x_n)+\frac{h^2}{2}y^{(3)}(x_n)-\frac{1}{6}h^3y^{(4)}(x_n)+O(h^4)$$
$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{6}y^{(3)}(x_n)+\frac{h^4}{24}y^{(4)}(x_n)+O(h^4)$$

进一步可以得到，

$$\frac{h}{12}\left(23y'(x_n)+5y'(x_{n-2})-16y'(x_{n-1})\right)=hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{6}y^{(3)}(x_n)-\frac{h^4}{3}y^{(4)}(x_n)+O(h^5)$$

最后带入$(*)$式，化简即可得到：

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}=\frac{3}{8}h^4y^{(4)}(x_n)+O(h^5).$$

证毕.