第十次作业答案

补充材料P56 28.

求函数 $f(x)=\arctan x$ 在 $[-1,1]$ 上的近似最佳一致逼近多项式, 要求绝对误差不超过 10^{-3}。用切比雪夫多项式级数来逼近函数 f，取权函数 $\rho(x)=(1-x^2)^{-1/2}$，按空间 $L^2_\rho[-1,1]$ 的内积构造 n 次最佳平方逼近多项式

$$S_n(x)=c_0\frac{T_0(x)}{2}+\sum_{i=1}^{n}c_iT_i(x)$$

其中

$$c_i=\frac{(f,T_i)}{(T_i,T_i)}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\quad i=0,1,\ldots,n$$

对于 $S_n(x)$，如果 $c_{n+1}\neq 0$ 且系数 c_i 迅速趋于零，那么

$$f(x)-S_n(x)=\sum_{i=n+1}^{\infty}c_iT_i(x)\approx c_{n+1}T_{n+1}(x),$$

且 $S_n(x)$ 相似于最佳一致逼近多项式。对本题，计算 c_i 得

$$c_0=0,\ c_1=0.828427,\ c_2=0,\ c_3=-0.0473785,\ c_4=0,$$

$$c_5=4.87732\times10^{-3},\ c_6=0,\ c_7=-5.97726\times10^{-4}<10^{-3}$$

故满足题设的多项式为

$$\begin{aligned}s(x)&=0.828427T_1(x)-0.0473785T_3(x)+0.00487732T_5(x)\\&=0.078037x^5-0.287060x^3+0.994491x\end{aligned}$$

注意：本题不宜用 Taylor 展开式，因为 $\arctan(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，泰勒级数的系数并未随次数增加而迅速减小，如 $x^9,x^{11},\ldots$ 项仍会对原函数的切比雪夫多项式级数造成较大影响。

补充材料P57 30.

设 $f(x)\in C[a,b],M_n=\max_{x\in[a,b]}|f^n(x)|$，若取

$$x_{k-1}=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi,\quad k=1,2,\ldots,n+1,$$

作为插值节点构造 n 次多项式插值函数 $p_n(x)$。证明：$f(x)$ 的 n 次多项式插值余项 $R(x)=f(x)-p_n(x)$ 满足

$$\max_{x\in[a,b]}|R(x)|\leq\frac{M_{n+1}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!\,2^{2n+1}}.$$

证明：

$$\begin{aligned}&\|R(x)\|=\|f(x)-p_n(x)\|\\&\leq\frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|\\&=\frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{i=0}^{n}\left(x-\frac{1}{2}(a+b)+\frac{b-a}{2}\cos\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)\right|\end{aligned}$$

$$= \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{i=0}^{n}\left(2\frac{x-(a+b)}{b-a}-\cos\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)\right|$$

令 $t=\frac{2x-(a+b)}{b-a}\Rightarrow t\in[-1,1]$,

$$\|R(x)\| = \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\max_{t\in[-1,1]}\left|\prod_{i=0}^{n}\left(t-\cos\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)\right|$$

$$\le \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\cdot 2^{-n}\|T_{n+1}\|$$

$$\le \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\le \frac{M_{n+1}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!\,2^{2n+1}}.$$

P138 13.

设函数 $f(x)$ 的数值由下表给出:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.06	0.871475	0.11	0.892995
0.07	0.876022	0.12	0.896943
0.08	0.880446	0.13	0.90078
0.09	0.884748	0.14	0.904506
0.10	0.88893	0.15	0.90812

取不同的步长计算 $f'(0.10)$，观察误差变化规律，从而确定最佳步长。

$$h=0.01:\quad f'(0.10)=\frac{f(0.11)-f(0.09)}{0.11-0.09}=0.41235$$
$$h=0.02:\quad f'(0.10)=\frac{f(0.12)-f(0.08)}{0.12-0.08}=0.412425$$
$$h=0.03:\quad f'(0.10)=\frac{f(0.13)-f(0.07)}{0.13-0.07}=0.412633$$
$$h=0.04:\quad f'(0.10)=\frac{f(0.14)-f(0.06)}{0.14-0.06}=0.4128875$$

$$|D(0.04,0.10)-D(0.03,0.10)|=0.000254167=2.54167\times10^{-4}$$
$$|D(0.03,0.10)-D(0.02,0.10)|=0.000208333=2.08333\times10^{-4}$$
$$|D(0.02,0.10)-D(0.01,0.10)|=0.0000075=7.5\times10^{-5}$$

含入误差 $\frac{\epsilon}{h}=\frac{5\times10^{-7}}{0.01}=5\times10^{-5}$，与 $|D(0.02,0.10)-D(0.01,0.10)|$ 相当
故 $h=0.02$ 为最佳步长。

P138 15.

构造数值微分公式

$$f'(0)\approx c_1f(-h)+c_2f(0)+c_3f(2h)$$

$$f''(0)\approx d_1f(-h)+d_2f(0)+d_3f(2h)$$

设 $\{x_i, i=0,1,\ldots,n\}$ 为 $[a,b]$ 上的节点，给定 $\{(x_i, f(x_i)), i=0,1,\ldots,n\}$。以 $(x_i, f(x_i))$ 为插值点构造插值多项式 $L_n(x)$，$L_n(x)$ 的各阶导数近似 $f(x)$ 的相应阶的导数。例如，

$$f(x) \approx L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \ell_i(x) f(x_i)$$

$$f'(x) \approx L_n'(x) = \sum_{i=0}^{n} \ell_i'(x) f(x_i)$$

当 $x = x_j$ 时, $f'(x_j) = \sum_{i=0}^{n} \ell_i'(x_j) f(x_i)$, $j = 0,1,\cdots,n$. 在本题中, $x_0 = -h, x_1 = 0, x_2 = 2h$, 做过 $(x_i, f(x_i))$ 的插值多项式

$$\begin{aligned}
L_2(x) &= \frac{(x-0)(x-2h)}{(-h-0)(h-2h)} f(-h) + \frac{(x+h)(x-2h)}{(0+h)(0-2h)} f(0) + \frac{(x+h)x}{(2h+h)2h} f(2h) \\
&= \frac{x(x-2h)}{3h^2} f(-h) + \frac{(x+h)(x-2h)}{-2h^2} f(0) + \frac{(x+h)x}{6h^2} f(2h)
\end{aligned}$$

$$f'(x) = L_2'(x) = \frac{2x-2h}{3h^2} f(-h) + \frac{2x-h}{-2h^2} f(0) + \frac{2x+h}{6h^2} f(2h)$$

将 $x=0$ 代入

$$\begin{aligned}
f'(0) = L_2'(0) &= \frac{-2h}{3h^2} f(-h) + \frac{h}{2h^2} f(0) + \frac{h}{6h^2} f(2h) \\
&= -\frac{2}{3h} f(-h) + \frac{1}{2h} f(0) + \frac{1}{6h} f(2h)
\end{aligned}$$

$$L_2''(x) = \frac{2}{3h^2} f(-h) + \frac{2}{-2h^2} f(0) + \frac{2}{6h^2} f(2h)$$

$$f''(0) = \frac{2}{3h^2} f(-h) - \frac{1}{h^2} f(0) + \frac{1}{3h^2} f(2h)$$

P137 2.

取 $f(x) = x^k$ 带入计算即可，求得有二阶代数精度。

P137 3.

参考书上例 6.1

$$I(f) = \int_{-h}^{2h} \left(l_0(x) f(-h) + l_1(x) f(0) + l_2(x) f(2h)\right) dx,$$

$$I(f) = \frac{9}{4} h f(0) + \frac{3}{4} h f(2h).$$

P137 5.

对区间做二等分，取 $(a, f(a)), \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), (b, f(b))$ 为插值节点，

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

(1) 0.724 (2) 5/6

P137 6.

复化梯形公式

$$T(f) = h\left(\frac{1}{2} f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2} f(b)\right)$$

复化Simpon公式

$$S(f) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b)\right)$$

带入求得：复化梯形公式: 5.5, 复化Simpon公式: 5.467.