第一章　插值

函数逼近问题

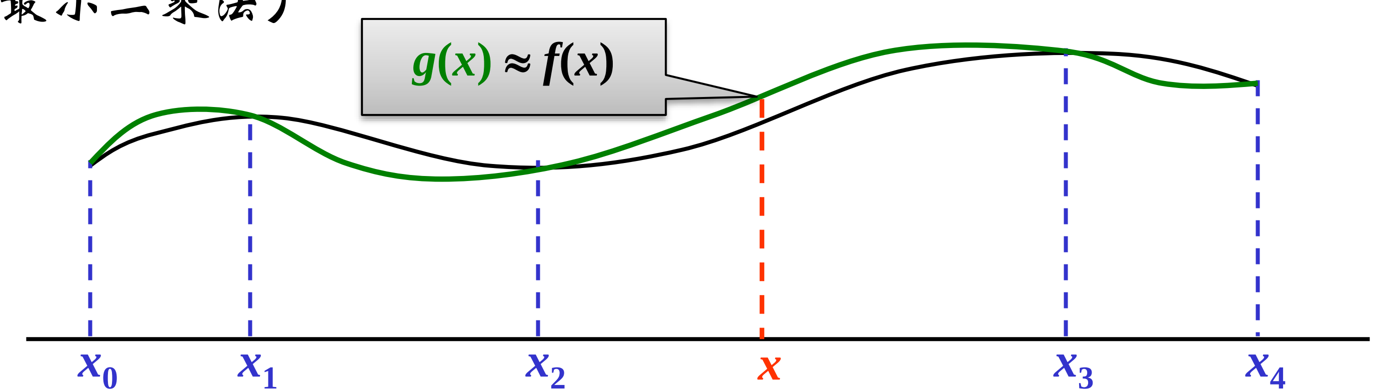
- 给定未知函数 $f(x)$ 的若干采样点：$\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$，构造函数 $\varphi(x)$ 使得

$$\varphi(x_i) = f(x_i),\ i = 0,1,\ldots,n.$$

或者要求满足某种范数意义下的最小化

$$\min \|\varphi(x) - f(x)\|_p$$

- 函数逼近的常用方法
  - 插值
  - 均方逼近（最小二乘法）
  - 一致逼近



插值问题

- 定义：$f(x)$为定义在区间$[a,b]$上的函数，$x_0,x_1,\ldots,x_n$为$[a,b]$上$n+1$个互不相同的点，Φ为给定的某一函数类。若Φ上有函数$\varphi(x)$满足：

$$\varphi(x_i)=f(x_i),\ i=0,1,\ldots,n$$

则称$\varphi(x)$为$f(x)$关于节点$x_0,x_1,\ldots,x_n$的插值函数

- 称$x_0,x_1,\ldots,x_n$为插值节点
- 称$(x_i,f(x_i))$为插值型值点
- 称$f(x)$为被插函数

插值问题

主要问题

- 插值函数类 Φ 如何选取?
- 插值函数 $\varphi(x)$ 是否存在?
- 插值函数 $\varphi(x)$ 是否唯一?
- 被插值函数 $f(x)$ 与插值函数 $\varphi(x)$ 之间误差如何估计?

插值问题

- 设 $\varphi(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_m\varphi_m(x)$，则

$$f(x_i)=\varphi(x_i)=a_0\varphi_0(x_i)+a_1\varphi_1(x_i)+\cdots+a_m\varphi_m(x_i),\ i=0,1,\ldots,n$$

- $n+1$个方程，$m+1$个未知量的线性方程组
- 当且仅当 $m=n$，$\det(A)\neq 0$，方程组解存在且唯一

插值问题

- （存在唯一性定理）设 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 为 $n+1$ 个互不相等的节点，$\Phi=\mathrm{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ 为 $n+1$ 维线性空间，则插值函数 $\varphi(x)$ 存在唯一，当且仅当

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

多项式插值的Lagrange形式

- 取 $\Phi = \mathrm{P}_n(x) = \mathrm{span}\{1, x, x^2, \cdots x^n\}$，有

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le j < i \le n} \left(x_i - x_j \right) \ne 0$$

- 插值问题的解存在且唯一

Vandermonde行列式

病态矩阵，不适于直接求解

多项式插值的Lagrange形式

- 如何选取 $\Phi = \mathrm{P}_n(x) = \mathrm{span}\{1, x, x^2, \cdots x^n\}$ 的另一组基，使得插值问题便于求解？

- Lagrange基函数 $\{l_i(x)\}_{i=0}^n \subseteq \mathrm{P}_n(x)$ 满足

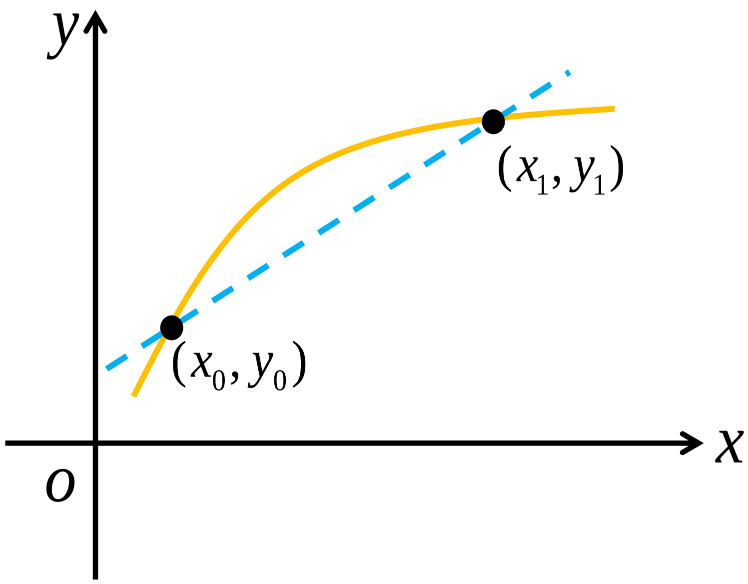
$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \forall i, j = 0, 1, \ldots, n$$

多项式插值的Lagrange形式

- **线性插值公式**

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \ l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$L_1(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x)$$



多项式插值的Lagrange形式

- （误差估计）设 $L_1(x)$ 为以 $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ 为插值点的插值函数，$x_0, x_1 \in [a,b], x_0 \neq x_1$. 设 $f(x)$ 一阶连续可导，$f''(x)$ 在 (a,b) 上存在，则对任意给定的 $x \in [a,b]$，至少存在一点 $\xi_x \in (a,b)$，使得

$$R_1(x) = f(x) - L_1(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2!}(x - x_0)(x - x_1),\ \xi_x \in (a,b)$$

多项式插值的Lagrange形式

- **二次插值公式**

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},\quad l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},\quad l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

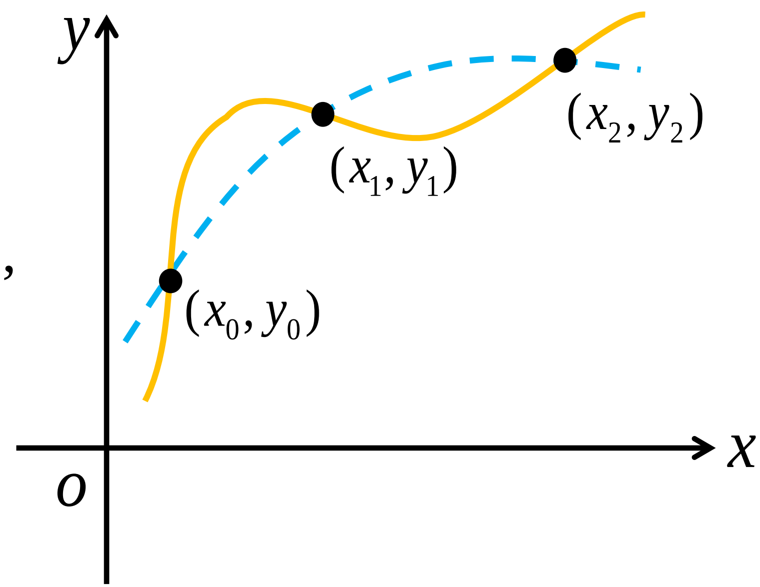
$$L_2(x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+f(x_1)l_2(x)$$

- **误差估计公式**

$$R_2(x)=f(x)-L_2(x)$$

$$=\frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),$$

其中$\xi_x\in(a,b)$



多项式插值的Lagrange形式

- n次插值公式

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$=\frac{\omega_n(x)}{\omega'_n(x_i)(x-x_i)},\quad \omega_n(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),\ i=0,1,\ldots,$$

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x)$$

截断误差，亦称插值余项

- 误差估计公式

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),\ f(x)\in C^{n+1}[a,b],\ \xi_x\in(a,b)$$

- 误差界估计：若$|f^{(n+1)}(x)|\le M,\ x\in[a,b]$，则

$$|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

多项式插值的Lagrange形式

- 取函数 $f(x)=x^k,\ k=0,1,\ldots,n$和插值节点$x_0,x_1,\ldots,x_n$，则Lagrange插值多项式就是其本身

- 性质：

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)x_i^k = x^k,\ k=0,1,\ldots,n \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\equiv 1$$

多项式插值的Lagrange形式

- 存在问题：若$f(x)$是未知的，误差估计的理论公式，无法用于实际的计算！
- 后验误差估计：增加一个插值节点 x_{n+1}

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

$$f(x)-\tilde{L}_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n+1}),$$

$$\Longrightarrow f(x)-L_n(x)\approx\frac{x-x_0}{x_0-x_{n+1}}(L_n(x)-\tilde{L}_n(x))$$

多项式插值的Lagrange形式

- **Lagrange插值多项式算法**

Algorithm 1 Lagrange Interpolation

Input:

n, $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$, x;

$L_n(x) \leftarrow 0$;
for $i = 0$ to n **do**
  $l_i(x) \leftarrow 1$;
  for $j = 0$ to n **do**
    if $j != i$ **then**
      $l_i(x) \leftarrow l_i(x) * (x - x_j)/(x_i - x_j)$;
    end if
  end for
  $L_n(x) \leftarrow L_n(x) + l_i(x) * y_i$;
end for

Output:

$L_n(x)$;

多项式插值的Newton形式

- Lagrange插值：$\{l_i(x)\}_{i=0}^{n}$
- Newton插值：$\left\{1,(x-x_0),(x-x_0)(x-x_1),\ldots,\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)\right\}$
- 承袭性：$N_{n+1}(x)=N_n(x)+q_{n+1}(x)\in P^{n+1}$
- 差商定义
  - 一阶差商

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

  - k 阶差商

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_k]=\frac{f[x_1,x_2,\ldots,x_k]-f[x_0,x_1,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

无承袭性

多项式插值的Newton形式

■ 差商的性质

1. k阶差商 $f[x_0,x_1,\ldots,x_k]$ 是由函数值 $f(x_0),f(x_1),\ldots,f(x_k)$ 的线性组合而成，即

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_k]=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)}f(x_i)$$

2. 若 $i_0,i_1,\ldots,i_k$ 为 $0,1,\ldots,k$ 的任一排列，则

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_k]=f[x_{i_0},x_{i_1},\ldots,x_{i_k}]$$

3. 若 $f(x)$ 为 m 次多项式，则 $f[x_0,x_1,\ldots,x_{k-1},x]$ 为 $m-k$ 次多项式

4. 若多项式 $p(x)\in \mathrm{P}_n(x)$ 插值于 $f(x_0),f(x_1),\ldots,f(x_n)$，则 $f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ 等于 $p(x)$ 最高次项 x^n 的系数

多项式插值的Newton形式

Newoton插值构造

1. 构造差商表

i	x_i	$f(x_i)$	1	2	3	$\cdots$	n
0	x_0	$f(x_0)$					
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$				
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$			
3	x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
n	x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1},x_n]$	$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	$f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	$\cdots$	$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$

2. 构造插值多项式

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

多项式插值的Newton形式

- Newton插值的误差估计

$$R(x)=f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

其中 $f(x)\in C^{n+1}[a,b],\ \xi_x\in(a,b)$

- （差商与导数之间的关系）设 $f(x)\in C^n[a,b]$，$x_0,x_1,\ldots,x_n\in[a,b]$ 是互不相等的点，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

多项式插值的Newton形式

- Newton插值多项式算法

Algorithm 2 Newton Interpolation

Input:

n, $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$, x;

for $i = 0$ to n **do**
    $d_i \leftarrow f(x_i)$;
end for
for $j = 1$ to n **do**
    for $i = n$ to j step -1 **do**
        $d_i \leftarrow (d_i - d_{i-1})/(x_i - x_{i-j})$;
    end for
end for
$N_n(x) \leftarrow d_n$;
for $i = n - 1$ to 1 step -1 **do**
    $N_n(x) \leftarrow (x - x_i) * N_n(x) + d_i$;
end for

Output:

$N_n(x)$;

Hermite插值

- 在构造插值函数时，如果不仅要求在插值多项式节点的函数值与被插函数的函数值相等，还要求在节点处插值函数与被插函数的一阶或高阶导数的值也相等，这类插值称为Hermite插值
- 定义：设 $f(x)$ 是具有一阶连续导数的函数，给定 $n+1$ 个互不相等的插值节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$。若存在至多为 $2n+1$ 次的多项式函数 $H_{2n+1}(x)$ 满足：

$$\begin{cases} H_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \\ H_{2n+1}'(x_i) = f'(x_i) \end{cases}, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

则称 $H_{2n+1}(x)$ 为 $f(x)$ 关于节点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 的Hermite插值多项式

Hermite插值

- 问题：给定 $f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1, f'(x_0)=m_0, f'(x_1)=m_1, x_0 \neq x_1$，如何构造满足插值条件的Hermite插值多项式？
- 利用多项式插值定理，满足插值条件的三次多项式存在且唯一
- 类似于Lagrange基函数表示形式

$$H_3(x)=h_0(x)y_0+h_1(x)y_1+g_0(x)m_0+g_1(x)m_1$$

满足条件：

$$\begin{cases} h_0(x_0)=1, h_1(x_0)=0, g_0(x_0)=0, g_1(x_0)=0 \\ h_0(x_1)=0, h_1(x_1)=1, g_0(x_1)=0, g_1(x_1)=0 \\ h_0'(x_0)=0, h_1'(x_0)=0, g_0'(x_0)=1, g_1'(x_0)=0 \\ h_0'(x_1)=0, h_1'(x_1)=0, g_0'(x_1)=0, g_1'(x_1)=1 \end{cases}$$

Hermite插值

- 三次Hermite插值多项式基函数

$$\begin{cases} h_0(x) = \left(1-2\dfrac{x-x_0}{x_0-x_1}\right)\left(\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 \\ h_1(x) = \left(1-2\dfrac{x-x_1}{x_1-x_0}\right)\left(\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 \\ \qquad g_0(x) = (x-x_0)l_0^2(x) \\ \qquad g_1(x) = (x-x_1)l_1^2(x) \end{cases}$$

- 误差估计公式：当 $f(x)\in C^4[a,b]$ 时，有

$$R(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2,\ \xi_x \in (a,b)$$

Hermite插值

- 问题：给定$n+1$个插值节点$x_0,x_1,\ldots,x_n$，如何构造$2n+1$次Hermite插值多项式？
- $2n+1$次Hermite插值多项式

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}h_i(x)f(x_i)+\sum_{i=0}^{n}g_i(x)f'(x_i),\ h_i(x),g_i(x)\in P_{2n+1}(x)$$

满足条件

$$\begin{cases}h_i(x_j)=\delta_{ij},\\ h_i'(x_j)=0,\end{cases}\begin{cases}g_i(x_j)=0\\ g_i'(x_j)=\delta_{ij}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}h_i(x)=\left(1-2(x-x_i)\sum_{j\neq i}\dfrac{1}{x_i-x_j}\right)l_i^2(x)\\ g_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x)\end{cases}$$

- 误差估计公式：当$f(x)\in C^{2n+2}[a,b]$时，有

$$R(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2,\ \xi_x\in(a,b)$$

Hermite插值

- 问题：是否可以利用Newton插值多项式？
- 给定插值点的函数值和一阶导数值 $\left\{(x_i, f(x_i), f'(x_i))\right\}_{i=0}^{n}$，定义序列 $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i,\ i = 0,1,\ldots,n$，在计算差商表时，用 $f'(x_0), f'(x_1),\ldots, f'(x_n)$ 分别代替 $f[z_0,z_1], f[z_2,z_3],\ldots, f[z_{2n},z_{2n+1}]$，其余不变，则得到差商型的Hermite插值多项式：

$$H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0, z_1,\ldots, z_k](x-z_0)(x-z_1)\cdots(x-z_{k-1})$$

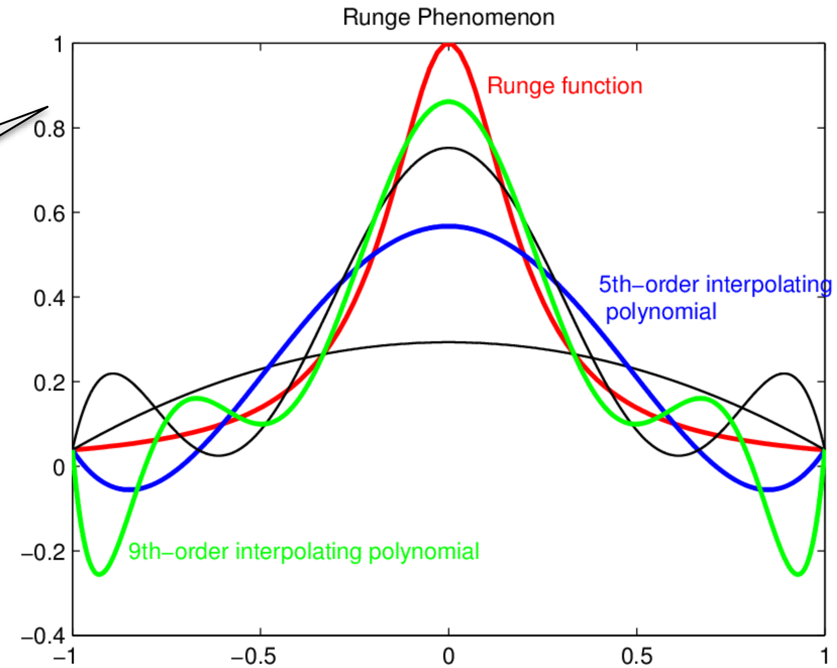
- 误差估计公式保持不变

分段插值

- 在构造插值多项式时，是否多取插值点比少取插值点效果好？
- Runge现象：插值多项式在插值区间内发生剧烈震荡的现象称为Runge现象
- 例子：采用等距节点构造Lagrange插值多项式

$$f(x)=\frac{1}{1+25x^2},\ x\in[-1,1]$$

等距高次插值，数值稳定性差，本身是病态的



分段插值

- （Faber法贝尔）对每个 n，设在区间 $[a,b]$ 中指定一组 $n+1$ 个相异的节点 $\xi_0^{(n)},\xi_1^{(n)},\ldots,\xi_n^{(n)}$. 以 $L_n f$ 表示在给定节点上对函数 f 插值的次数 $\le n$ 的多项式. 则对某个 $f\in C[a,b]$，$\|L_n f - f\|$ 无界

- （Weierstrass逼近定理）设 $f(x)\in C[a,b]$，则对任意 $\varepsilon>0$，都存在一个多项式 $p(x)$，使得 $\|f-p\|<\varepsilon$

- 高次多项式不稳定，计算代价高：分段低次多项式

分段插值

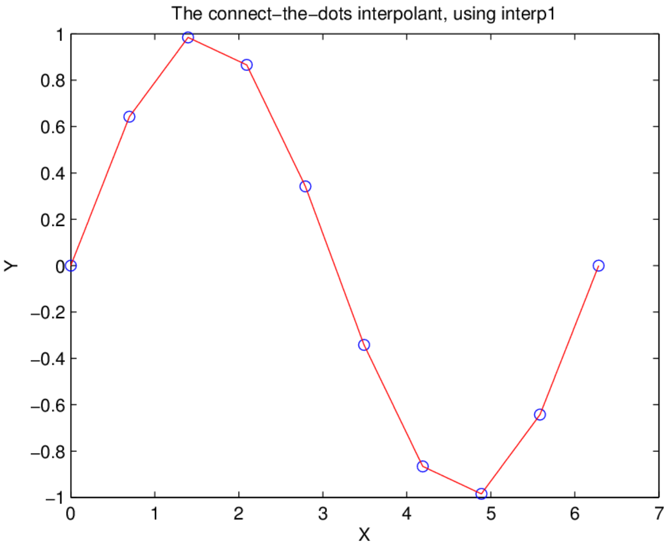
- （分段线性插值）对给定的区间$[a,b]$作分割

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上作 $f(x)$以 x_i, x_{i+1}为节点的线性插值 $p_i(x)$，则

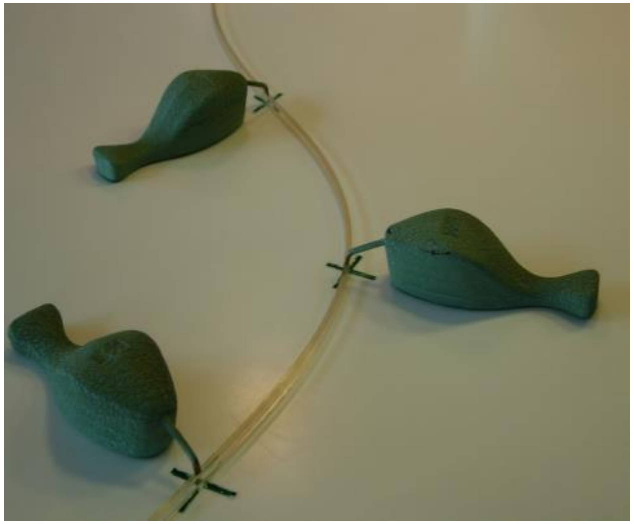
$$p(x)\big|_{[x_i,x_{i+1}]} = p_i(x) = \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} f(x_i) + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} f(x_{i+1}), \quad x_i \le x \le x_{i+1}$$

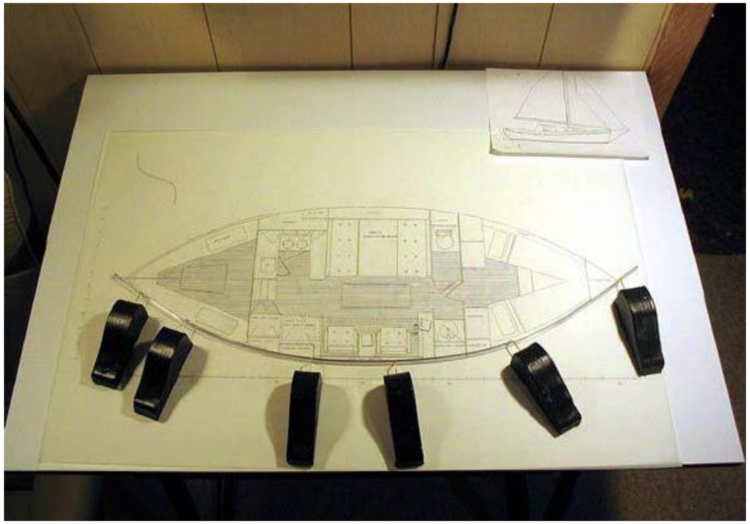
- 误差估计公式：在每个小区间上分别利用插值多项式误差估计公式
- （收敛性）若 $f(x) \in C^2[a,b]$，则当区间分割加密时，分段线性插值收敛于 $f(x)$



样条函数

- 样条起源于船体的外形设计
- 样条函数的特征：
  - 分片表示
  - 满足一定的整体连续性约束
- 在计算机辅助几何设计、计算机图形学、科学计算领域被广泛使用





三次样条插值

- 分段线性插值，收敛性好，但光滑性不够理想
- 三次样条函数：分段三次多项式，整体二阶连续导数
- 定义：给定区间 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 和这些节点上的函数值 $\{y_i=f(x_i)\}_{i=0}^{n}$. 若分段函数 $S(x)$ 满足
  - 插值条件：$S(x_i)=y_i,\ i=0,1,\ldots,n$
  - 分段表示：$S(x)\big|_{[x_i,x_{i+1}]}=S_i(x)=a_ix^3+b_ix^2+c_ix+d_i,\ x\in[x_i,x_{i+1}],\ i=0,1,\ldots,n-1$
  - 二阶导数连续：$S(x)\in C^2[a,b]$

  则称 $S(x)$ 为 $f(x)$ 关于剖分 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 的三次样条插值函数，称 $x_0,x_1,\ldots,x_n$ 为样条结点
- 确定 $S(x)$ 需要 $4n$ 个条件，插值条件提供 $n+1$ 个条件，二阶连续可导提供 $3n-3$ 条件，因此还需要两个条件，通常在边界给出，称为边界条件

三次样条插值

- 三次样条插值的 M 关系式
- 引入记号 $M_i = S''(x_i),\ h_i = x_{i+1} - x_i$，满足条件

$$\begin{cases} S_i(x_i) = f(x_i), S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \\ S_i''(x_i) = M_i, S_i''(x_{i+1}) = M_{i+1} \end{cases}$$

的三次多项式必为

$$S_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i} f(x_i) + \frac{x - x_i}{h_i} f(x_{i+1}) + \frac{1}{6h_i}(x - x_i)(x - x_{i+1})(2x_{i+1} - x_i - x)M_i$$

$$+ \frac{1}{6h_i}(x - x_i)(x - x_{i+1})(x + x_{i+1} - 2x_i)M_{i+1}$$

- 因此，要确定 $S(x)$ 只需确定 $\{M_i\}_{i=0}^{n}$

三次样条插值

- 利用一阶导数连续条件：$S_i'(x_i)=S_{i-1}'(x_i)$，可得

$$f[x_i,x_{i+1}]-\frac{h_i}{3}M_i-\frac{h_i}{6}M_{i+1}=f[x_{i-1},x_i]+\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1}+\frac{h_{i-1}}{3}M_i$$

化简得

$$\mu_i M_{i-1}+2M_i+\lambda_i M_{i+1}=d_i,\ i=1,2,\ldots,n-1$$

其中 $\lambda_i=\dfrac{h_i}{h_i+h_{i-1}},\ \mu_i=1-\lambda_i,\ d_i=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$

- 为求 $\{M_i\}_{i=0}^{n}$，差两个端点条件
- 三类常用边界条件

三次样条插值

- **自然边界条件**：$M_0=0, M_n=0$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1-\mu_1 M_0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1}-\lambda_{n-1} M_n \end{bmatrix}$$

- **插值端点一阶导数条件**：$S'(x_0)=m_0, S'(x_n)=m_n$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

其中 $d_0=\dfrac{6}{h_0}(f[x_0,x_1]-m_0),\ d_n=\dfrac{6}{h_{n-1}}(m_n-f[x_{n-1},x_n])$

三次样条插值

- **周期边界条件：**

$$S(x_0)=S(x_n),\ S^{'}(x_0)=S^{'}(x_n),\ S^{''}(x_0)=S^{''}(x_n)$$

$$\Updownarrow$$

$$m_0=m_n, M_0=M_n$$

注意：边界条件只需要两个条件，插值函数值相等的条件只需要输入的插值函数值相等即可，因此不需要额外添加

- **思考：如何给出边界条件的 M 关系？**

三次样条插值

- 三次样条插值的 m 关系式
- 引入记号 $m_i = S'(x_i),\ h_i = x_{i+1} - x_i$，满足条件

$$\begin{cases} S_i(x_i) = f(x_i), S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \\ S_i'(x_i) = m_i, S_i'(x_{i+1}) = m_{i+1} \end{cases}$$

的三次Hermite多项式必为

$$S_i(x) = \left(1 - 2\frac{x - x_i}{x_i - x_{i+1}}\right)\left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2 y_i + (x - x_i)\left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2 m_i$$

$$+ \left(1 - 2\frac{x - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}\right)\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 y_{i+1} + (x - x_{i+1})\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 m_{i+1}$$

- 因此，要确定 $S(x)$ 只需确定 $\{m_i\}_{i=0}^n$

三次样条插值

- 利用一阶导数连续条件：$S_i''(x_i)=S_{i-1}''(x_i)$，可得

$$\frac{10}{h_i^2}y_i-\frac{4}{h_i}m_i+\frac{2}{h_i^2}y_{i+1}-\frac{2}{h_i}m_{i+1}=\frac{2}{h_{i-1}^2}y_{i-1}+\frac{2}{h_{i-1}}m_{i-1}+\frac{10}{h_{i-1}^2}y_i+\frac{4}{h_{i-1}}m_i$$

化简得

$$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=c_i,\ i=1,2,\ldots,n-1$$

其中 $\lambda_i=\dfrac{h_i}{h_i+h_{i-1}},\ \mu_i=1-\lambda_i,\ c_i=3\left(\lambda_i f[x_{i-1},x_i]+\mu_i f[x_i,x_{i+1}]\right)$

- 为求 $\{m_i\}_{i=0}^n$，差两个端点条件
- 三类常用边界条件（略）

三次样条插值

三次样条插值算法

Algorithm 3 Spline Interpolation

Input:

n, $\{(x_i, f(x_i)\}_{i=0}^{n}$, x;

for $i = 0$ to $n-1$ **do**
  $h_i \leftarrow x_{i+1} - x_i$;
  $b_i \leftarrow \frac{6[f(x_{i+1})-f(x_i)]}{h_i}$;
end for
$u_1 \leftarrow 2(h_0 + h_1)$;
$v_1 \leftarrow b_1 - b_0$;
for $j = 2$ to $n-1$ **do**
  $u_i \leftarrow 2(h_i - h_{i-1}) - \frac{h_{i-1}^2}{u_{i-1}}$;
  $v_i \leftarrow b_i - b_{i-1} - \frac{h_{i-1}v_{i-1}}{u_{i-1}}$;
end for
$M_n \leftarrow 0$
for $i = n-1$ to 1 step -1 **do**
  $M_i \leftarrow \frac{v_i - h_i M_{i+1}}{u_i}$;
end for
find i such that $x \in [x_i, x_{i+1})$;
$S_i(x) = \frac{x_{i+1}-x_i}{h_i} f(x_i) + \frac{x-x_i}{h_i} f(x_{i+1}) + \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})(2x_{i+1}-x_i-x)}{6h_i} M_i$
  $+ \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})(x+x_{i+1}-2x_i)}{6h_i} M_{i+1}$;

Output:

$S_i(x)$;