第十四次作业答案

补充材料P109　5(2) 、用单纯性方法求解以下线性规划问题：

$$\max\ z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 \le 13 \\ x_2 + 3x_3 \le 17 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 13 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：先将线性规划问题转化为标准形式：

$$\max\ z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 0x_4 - 0x_5 + 0x_6$$

$$s.t.\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 13 \\ x_2 + 3x_3 + x_5 = 17 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 13 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

构造初始基可行解为：

$$x^0 = (0,0,0,13,17,13)^T$$

以此建立初始的单纯形表，如下：

$c_j \to$			3	-2	5	0	0	0
c_b	x_b	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	13	3	0	2	1	0	0
0	x_5	17	0	1	**3**	0	1	0
0	x_6	13	2	1	1	0	0	1
σ_j			3	-2	5	0	0	0

由于上表中有大于零的检验指标，故表中的基可行解不是最优解。又因为 $\sigma_1 \prec \sigma_3$，故确定 x_3 为换入变量，将 b 除以 p_3 的同行系数得

$$\lambda = \min\left\{\frac{13}{2}, \frac{17}{3}, \frac{13}{1}\right\} = 17/3$$

用变量 x_3 替换出变量 x_5，按基可行解转换方法可以找到一个新的基可行解，并以此建立新的单纯形表：

$c_j \to$			3	-2	5	0	0	0
c_b	x_b	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	$5/3$	3	$-2/3$	0	1	$-2/3$	0
5	x_3	$17/3$	0	$1/3$	1	0	$1/3$	0
0	x_6	$22/3$	2	$2/3$	0	0	$-1/3$	1
σ_j			3	$-11/3$	0	0	$-5/3$	0

同样地，上表中有大于零的检验指标，故表中的基可行解不是最优解。此时，x_1 为换入变量，将 b 除以 p_1 的同行系数得

$$\lambda = \min\left\{\frac{5}{9}, \frac{11}{3}\right\} = 5/9$$

用变量 x_1 替换出变量 x_4，按基可行解转换方法可以找到一个新的基可行解，并以此建立新的单纯形表：

$c_j \to$			3	-2	5	0	0	0
c_b	x_b	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
3	x_1	$5/9$	1	$-2/9$	0	$1/3$	$-2/9$	0
5	x_3	$17/3$	0	$1/3$	1	0	$1/3$	0
0	x_6	$56/9$	0	$10/9$	0	$-2/3$	$1/9$	1
σ_j			0	-3	0	-1	-1	0

上表中所有检验指标 $\sigma_j \le 0$，故表中得基可行解 $x = \left(5/9, 0, 17/3, 0, 0, 56/9\right)$ 是最优解。带入目标函数得 $\max\ z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 30$