第九次作业答案

补充材料

P55 21.

设$n=3m$, 记 $\omega_n = e^{-\frac{2\pi}{n}i}$, 则 $\omega_n^{3k} = \omega_m^k, k = 0, 1, ..., m$

令$p(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k\, z^k$, 则求

$$g_l = p(\omega_n^l),\ l = 0, 1, ..., n-1.$$

构造多项式 $p_0(z), p_1(z), p_1(z)$:

$$p_0(z) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f_{3k}\, z^k$$

$$p_1(z) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f_{3k+1}\, z^k$$

$$p_2(z) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f_{3k+2}\, z^k$$

则

$$p(z) = \frac{p_0(z^3) + z\, p_1(z^3) + z^2\, p_2(z^3)}{3}$$

于是

$$\begin{aligned}
g_k = p(\omega_n^k) &= \frac{p_0(\omega_n^{3k}) + \omega_n^k\, p_1(\omega_n^{3k}) + \omega_n^{2k}\, p_2(\omega_n^{3k})}{3} \\
&= \frac{p_0(\omega_m^k) + \omega_n^k\, p_1(\omega_m^k) + \omega_n^{2k}\, p_2(\omega_m^k)}{3} \\
g_{k+m} = p(\omega_n^{k+m}) &= \frac{p_0(\omega_n^{3k+n}) + \omega_n^{k+m}\, p_1(\omega_n^{3k+n}) + \omega_n^{2k+2m}\, p_2(\omega_n^{3k+n})}{3} \\
&= \frac{p_0(\omega_m^k) + (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)\omega_n^k\, p_1(\omega_m^k) + (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)\omega_n^{2k}\, p_2(\omega_m^k)}{3} \\
g_{k+2m} = p(\omega_n^{k+2m}) &= \frac{p_0(\omega_n^{3k+2n}) + \omega_n^{k+2m}\, p_1(\omega_n^{3k+2n}) + \omega_n^{2k+4m}\, p_2(\omega_n^{3k+2n})}{3} \\
&= \frac{p_0(\omega_m^k) + (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)\omega_n^k\, p_1(\omega_m^k) + (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)\omega_n^{2k}\, p_2(\omega_m^k)}{3}
\end{aligned}$$

P55 23.

设 $f(x) \in C[a, b]$, 求 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式。

******[**定理 9.17 （切比雪夫交错定理）** 设函数 $f \in C[a, b]$ 且 $f \notin P_n[x]$，则 p^* 是 f 的 n 次最佳一致逼近多项式的充分必要条件是 $f - p^*$ 在

$[a,b]$ 上存在 $n+2$ 个点组成的交错点组, 即有 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq b$ 使得

$$f(x_i) - p^*(x_i) = (-1)^i \sigma \|f - p^*\|_\infty, \quad i = 0, 1, \cdots, n+1. \quad] ******$$

由于$f(x) \in C[a,b]$, 故 $f(x)$ 存在最大值 M 和最小值 m。

而$f - p_0^*$ 的最大值和最小值为 $M - p_0^*, m - p_0^*$。

由切比雪夫交错定理, $|M - p_0^*| = |m - p_0^*|$, 故零次最佳一致逼近多项式为 $p_0^*(x) = \frac{M+m}{2}$。

P56 26.

求多项式 $p(x) = 6x^3 + 3x^2 + x + 4$ 在 $[-1,1]$ 上的二次最佳一致逼近多项式。

******[**定理 9.21** 对于任意的 $p_n \in P_n^1[x]$, 有

$$\|p_n\|_\infty = \max_{x \in [-1,1]} |p_n(x)| \geq \|2^{1-n} T_n(x)\| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

当且仅当 $p_n(x) = 2^{1-n} T_n(x)$ 时，等号成立。]*****

由定理， $\frac{f(x) - p_2^*(x)}{6} = 2^{1-3} T_3(x)$, 故 $p_2^*(x) = 3x^2 + \frac{11}{2}x + 4$。