2023 春季学期（答案）

1 （12 分）填空题

(1)设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&2&2\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. (1)$\|A\|_1=\underline{5\qquad\qquad}$. (2)$\underset{x}{min}\|Ax-b\|_2=\underline{\frac{1}{3}\qquad\qquad}$.

(3) 设 $A=LU$, L 是单位下三角阵, 则 $L=\begin{pmatrix}1&&\\1&1&\\0&2&1\end{pmatrix}, U=\begin{pmatrix}1&1&0\\&1&1\\&&0\end{pmatrix}$

2 （11 分）

通过 Newton 插值方法，构造如下数据的 Hermite 插值多项式 f(x).

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	1	1	0
$f'(x_i)$	0		1

思路与解答:列差商表, $f(x)=1-\frac{1}{4}(x-1)^2(x-2)+\frac{3}{4}(x-1)^2(x-2)(x-3)$

3 （11 分）

求 $f(x)=x^3$ 在 $[-1,1]$ 上的最佳一致逼近多项式 $p(x)=ax^2+bx+c$.

思路与解答: $\|f-p\|_\infty=\|(f-p)-0\|_\infty$，实际上是最小零偏差问题（注意仅有首项系数固定），考虑切比雪夫多项式，必有 $f-p=\frac{1}{4}T_3$，故

$p=f-\frac{1}{4}T_3=\frac{3}{4}x$（这实际上由最佳一致逼近的唯一性与切比雪夫交错定理保证，详见补充教材 9.6,9.7，类似的思路可以用到第九章作业题 26）

4 （11 分）

设 $0<x_0<1, x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n\in N$，其中 $f(x)=x-\sin x$.
（1）求证：迭代数列 x_n 一定收敛。（2）求上述迭代收敛的阶。

思路与解答：本题更像是一道数分题，在计算的时候不要用洛必达法则，用等价无穷小替换会更方便。

（1）用归纳法容易证明：$0<x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-\sin x_n}{1-\cos x_n}<x_n<1$（利用 $0<x<1$时$,0<\sin x<x<\tan x$），故 $\{x_n\}$ 为单调递减数列，且有下界，收敛到 $f(x)$ 的根 0.

（2）记 $\phi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}, x^*=0$，则：

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x^* &= \phi(x_n)-\phi(x^*)\\ &= \phi'(x^*)(x_n-x^*)+\frac{\phi''(\epsilon)}{2}(x_n-x^*)^2\end{aligned}$$

注意到：

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \frac{\sin x(x-\sin x)}{(1-\cos x)^2}\\ &= \frac{(x+O(x^3))(\frac{1}{6}x^3+O(x^5))}{(\frac{1}{2}x^2+O(x^4))^2}\\ &= \frac{2}{3}+O(x^2), x\to 0\end{aligned}$$

故 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{3}$, 一阶收敛。

（注：上面模仿了课本上 Newton 迭代法收敛阶的证明方法，不过如果你能直接看出来的话，直接从收敛阶的定义去证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{x_n\to 0}\frac{x_n-\frac{x_n-\sin x_n}{1-\cos x_n}}{x_n}=\frac{2}{3}$$

当然也是可以的）

5 （11 分）

设某商家需要把某商品从 A_1, A_2 地运输至 B_1, B_2 地，已知 A_1, A_2 地商品的库存量分别为 u_1, u_2，B_1, B_2 地商品的需求量分别为 v_1, v_2，其中 $u_1 + u_2 > v_1 + v_2$，并且把商品从 A_i 运输至 B_j 所需费用为 w_{ij}（元/单位数量）。商家希望运输费用最少，请为上述问题建立线性规划模型，并把线性规划问题表示为标准形式 $\underset{Ax=b且x\geq 0}{min} c^T x.$

思路与解答：设从 A_i 运到 B_j 的货物量为 x_{ij}，可得约束条件：

$$x_{11} + x_{12} \leq u_1, x_{21} + x_{22} \leq u_2$$
$$x_{11} + x_{21} \geq v_1, x_{12} + x_{22} \geq v_2$$

标准形式为：

$$z = \min\{w_{11}x_{11} + w_{12}x_{12} + w_{21}x_{21} + w_{22}x_{22} + 0x_{13} + 0x_{23} + 0x_{31} + 0x_{32}\}$$

subject to: $x_{11} + x_{12} + x_{13} = u_1$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = u_2$

$x_{11} + x_{21} - x_{31} = v_1$

$x_{12} + x_{22} - x_{32} = v_2$

6 （11 分）

设实方阵为 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，其中 a 为任意正数。

求证：线性方程组 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代收敛当且仅当 Gauss-Seidel 迭代收敛。

思路与解答：Jacobi 迭代的迭代矩阵为 $M_J = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，Gauss-

Seidel 迭代的迭代矩阵为 $M_G = \begin{pmatrix} 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & -a^{-2} & a^{-1} \\ 0 & a^{-3} & -a^{-2} \end{pmatrix}$,

$$\rho(M_J) < 1 \iff a > \sqrt{2}$$
$$\rho(M_G) < 1 \iff a > \sqrt{2}$$

故原结论成立。

7 （11 分）

求常数 a,b 是的 $\int_0^1 f(x)dx$ 的数值积分公式

$$I_n(f) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(f(\frac{k-a}{n}) + f(\frac{k-b}{n})\right), n \to \infty$$

的截断误差具有尽可能高的阶数。

思路与解答：$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx$

$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx = \frac{1}{n}\int_0^1 f(\frac{t+i-1}{n})dt$，要使原公式具有尽可能高的阶数，只需要 $\frac{1}{n}\int_0^1 f(\frac{t+k-1}{n})dt = \frac{1}{2}\left(f(\frac{k-a}{n}) + f(\frac{k-b}{n})\right)$ 具有尽可能高的阶数即可，考虑两点高斯积分（注意 [0,1] 上两点高斯积分的系数正好是 1/2），可知 $a, b = \frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$

（注：原答案中 a,b 的值是通过正交多项式的根得到的，考试中遇到类似情况的话建议这么做，因为这步可能算分）

8 （11 分）

求常数 a,b,c 使得常微分方程初值问题 $y'(x) = f(x, y)$ 的如下数值解公式

$$y_{n+1} = y_n + chK, K = f(x_n + ah, y_n + bhK)$$

的局部截断误差具有尽可能高的阶数，其中 $h = x_{n+1} - x_n \to 0$.

思路与解答：本题容易让人困惑的是 $K = f(x_n + ah, y_n + bhK)$，但从解答（收敛性分析）的角度，只要把它当成一个方程，把 K 解出来就行，从实际应用的角度，把这个当作一个隐格式就可以。

$$
\begin{aligned}
K &= f(x_n + ah, y_n + bhK) \\
&= f(x_n, y_n) + ahf_x(x_n, y_n) + bhKf_y(x_n, y_n) + O(h^2) \cdots (*) \\
K &= \frac{f(x_n, y_n) + ahf_x(x_n, y_n) + O(h^2)}{1 - bhf_y(x_n, y_n)} \\
&= (f(x_n, y_n) + ahf_x(x_n, y_n) + O(h^2))(1 + bhf_y(x_n, y_n) + O(h^2)) \\
&= f(x_n, y_n) + ahf_x(x_n, y_n) + bhf(x_n, y_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(x_{n+1}) - y_{n+1} = {} & y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) \\
& + \frac{h^2}{2}(f_x(x_n, y(x_n)) + f(x_n, y(x_n))f_y(x_n, y(x_n))) + O(h^3) \\
& - y_n - ch(f(x_n, y_n) + ahf_x(x_n, y_n) + bhf(x_n, y_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^2))
\end{aligned}
$$

考虑让对应系数相等，可得方程组：

$$
\begin{cases} c = 1 \\ ac = \frac{1}{2} \\ bc = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}
$$

局部截断误差阶数为 3（如果这里写数值格式的阶数为 2 记得注明）

（注：上述方程组的解唯一性保证了我们的关于 a,b 的结果是正确且唯一的，但具体到在该结果下局部截断误差的阶数是不是 3，上面的论述就不完整了，因为 (*) 式中的 $O(h^2)$ 实际上也是包含 K 的，如果想验证局部阶段误差更高阶的系数是否非零，在这一步需要进一步展开，但这样如果想按上面的思路得到 K 的表达式需要解一个高于一次的方程，因此对于 K 的处理，提供另一个“剥洋葱”式的方法：

设 $K = f(x_n, y_n) + ahf_x(x_n, y_n) + T + O(h^2)$，则：

$$
\begin{aligned}
T &= bhf_y(x_n, y_n)(f(x_n, y_n) + ahf_x(x_n, y_n) + T + O(h^2)) + O(h^2) \\
&= bhf(x_n, y_n)f_y(x_n, y_n) + bhf_y(x_n, y_n) * T + O(h^2) \\
&= bhf(x_n, y_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^2)(\text{这是因为} T = O(h))
\end{aligned}
$$

$\therefore K = f(x_n, y_n) + ahf_x(x_n, y_n) + bhf(x_n, y_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^2)$

这个方法的好处是对于上面所说的更高阶的展开的情况也是适用的，可以验证局部截断误差的阶数确实是 3.）

9 （11 分）

已知 n 阶对称实方阵 A 的特征值 $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. 我们用如下方法计算 λ_1 对应的特征向量: 选取实数 s，令 $B = A - sI$，随机产生非零向量 $x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$，构造序列 $x_{k+1} = Bx_k/\|Bx_k\|_2, k \in \mathbb{N}$，其中 $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$.

(1) 求 s 的取值范围，使得 $\{x_k\}$ 收敛到 λ_1 对应的特征向量。

(2) 求 s 使得收敛速度最快。

思路与解答:（1）由于 A 是对称实矩阵，故 A 有 n 个线性无关的特征向量，又 B=A-sI，可知 B 也有 n 个线性无关的特征向量，且 B 的特征值为 $\{\lambda_i - s\}_{i=1}^n$，模仿课本 8.1 的思路 (归一化的过程没有影响)，可知 $\{x_k\}$ 收敛到 λ_1 对应的特征向量等价于 $|\lambda_1 - s| > \max\limits_{i=2,\cdots,n} |\lambda_i - s|$，即 $s \in (-\infty, \frac{\lambda_1+\lambda_n}{2})$

（2）由上一问，收敛速度 $f(s)$ 取决于 $\max\limits_{i=2,\cdots,n} \frac{|\lambda_i - s|}{|\lambda_1 - s|}$，$s < \frac{\lambda_2+\lambda_n}{2}$ 时，$f(s) = \frac{\lambda_2 - s}{\lambda_1 - s}$ 且单调递减，$s > \frac{\lambda_2+\lambda_n}{2}$ 时，$f(s) = \frac{s-\lambda_n}{\lambda_1 - s}$ 且单调递增，因此 $s = \frac{\lambda_2+\lambda_n}{2}$ 时，收敛速度最快。