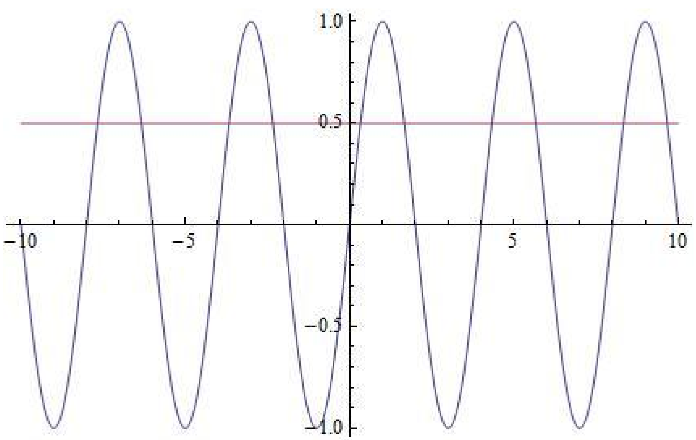
# 第三章　非线性方程求根

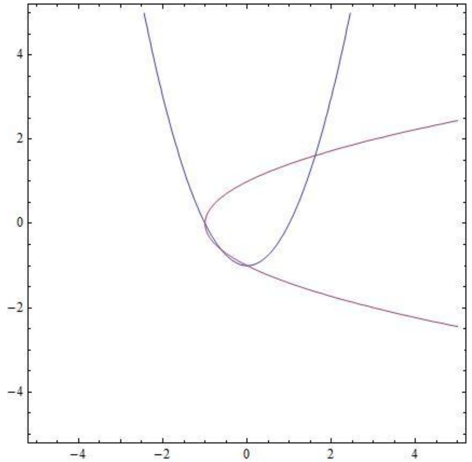
# 非线性方程求根

- 非线性科学是当今科学发展的一个重要研究方向
- 非线性方程的求根非常复杂
- 例如：

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}x) = y \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$ 无穷组解

$$\begin{cases} y = x^2 + a \\ x = y^2 + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 & \text{无解} \\ a = \frac{1}{4} & \text{一个解} \\ a = 0 & \text{两个解} \\ a = -1 & \text{四个解} \end{cases}$$



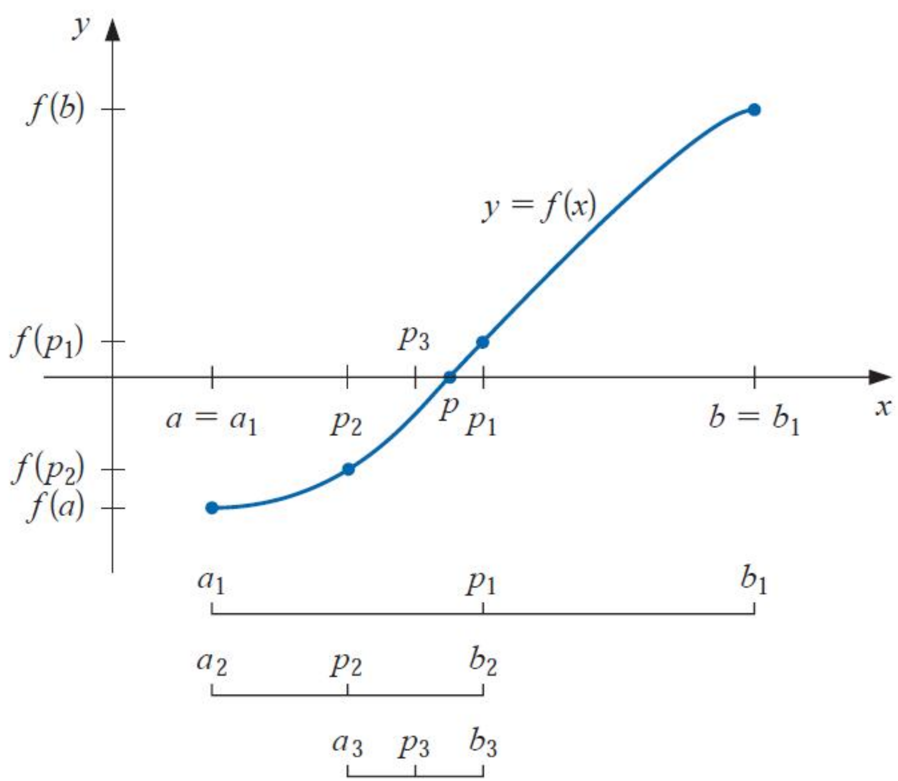
# 非线性方程求根

- 非线性方程的根通常不止一个，很难找到所有的解
- 非线性方程求根，通常需要给定初始值或求解范围，用迭代法求解
- （介值定理）设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的一个连续函数，那么 $f(x)$ 取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何一个值，即如果 $y$ 是 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一个数，那么存在一个数 $c \in [a,b]$ 使得 $f(c) = y$

  （推论）$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists x, s.t., f(x) = 0$

# 对分法

- 基于微积分中的介值定理，对区间$[a,b]$不断进行细分，缩小搜索区间
- 停止标准：$|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon_1$ 或 $|f(x)|<\varepsilon_2$



# 对分法

## ■ 对分算法

**Algorithm 6** Bisection Algorithm

**Input:**

$f(x)$, $a$, $b$, $M$, $\delta$, $\varepsilon$

```
u ← f(a);
v ← f(b);
e ← b − a;
if sign(u) == sign(v) then
    return false;
end if
for k = 1 to M do
    e ← e/2;
    c ← a + e;
    w ← f(c);
    if |e| < δ or |w| < ε then
        return true;
    end if
    if sign(u)! = sign(v) then
        b ← c;
        v ← w;
    else
        a ← c;
        u ← w;
    end if
end for
return false;
```

**Output:**

$a$, $b$, $u$, $v$

# 迭代法

- **基本思想：将方程 $f(x)=0$ 转换成等价形式 $x=\varphi(x)$，给定初值 $x_0$，构造迭代序列：**

  $$x_{k+1}=\varphi(x_k),\ k=1,2,\ldots$$

  **若迭代收敛，即**

  $$\lim_{k\to\infty} x_{k+1}=\lim_{k\to\infty}\varphi(x_k)=x^*,$$

  **则有 $f(x^*)=0$**

- **基本问题：**
  - 如何构造迭代格式？
  - 是否收敛？收敛速度？
  - 收敛的条件？（例如是否与初值相关？）

# 迭代法

- 定理：设 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的连续，如果 $\varphi(x)$ 满足

  (1) 当 $x\in[a,b]$ 时，有 $a\le\varphi(x)\le b$；

  (2) $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，并且存在正数 $L<1$，使对任意的 $x\in[a,b]$，都有 $|\varphi'(x)|\le L$，

  则存在唯一的点 $x^*\in[a,b]$，使得 $x^*=\varphi(x^*)$ 成立，而且迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 对于任意的初值 $x_0\in[a,b]$ 均收敛于 $\varphi(x)$ 的不动点 $x^*$，并有误差估计公式

$$|x^*-x_k|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|.$$

- 构造迭代格式的要素：
  - 等价形式 $x=\varphi(x)$ 满足 $|\varphi'(x)|<1$；
  - 初始值取自 $x^*$ 的充分小领域；

# 收敛阶

- 定义：设迭代 格式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$收敛到$\varphi(x)$的不动点$x^*$，记$e_k=x_k-x^*$，若$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=C>0$，则称该迭代格式为$p$阶收敛的，其中$C$称为渐进误差常数

# Newton迭代法

- 将函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处做Taylor展开：

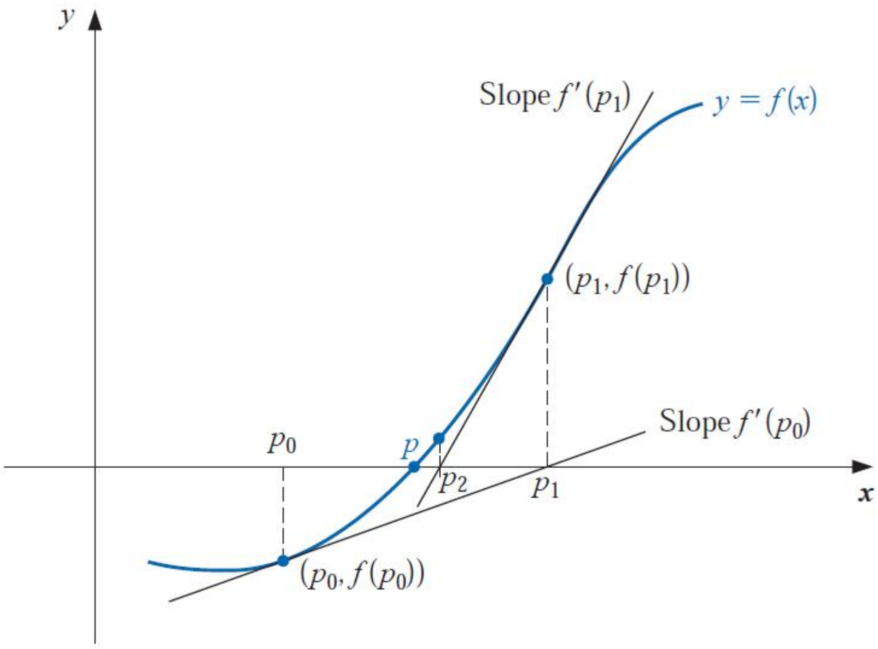
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\approx 0$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- Newton迭代格式：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ k=1,2,\ldots$$



# Newton迭代法

- （收敛性）设 $f(x)\in C^2[a,b]$，$x^*$为$f(x)$的单根，则存在$\delta>0,\ C>0$，使得对任意的初值$x_0\in(x^*-\delta,x^*+\delta)$，Newton迭代法是2阶收敛的，即有$|x_{n+1}-x^*|\le C|x_n-x^*|^2\quad(n\ge 0).$
- （重根情形）若$f(x)\in C^{m+1}[a,b]$，$x^*$为$f(x)$的$m$重根，则存在$\delta>0,\ C>0$，使得对任意的初值$x_0\in(x^*-\delta,x^*+\delta)$，Newton迭代法1阶收敛的，即有$|x_{n+1}-x^*|\le C|x_n-x^*|\quad(n\ge 0).$
- 修正：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{mf(x_k)}{f'(x_k)}\Longrightarrow |x_{n+1}-x^*|\le C|x_n-x^*|^2\quad(n\ge 0).$$

$$\left.\begin{aligned}&\mu(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}\\&f(x)=(x-x^*)^m p(x)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)}$$

# Newton迭代法

- Newton迭代算法

**Algorithm 7** Newton's Algorithm

**Input:**

$f(x)$, $x_0$, $M$, $\delta$, $\varepsilon$

$v \leftarrow f(x_0)$;
**if** $|v| < \varepsilon$ **then**
  **return true**;
**end if**
**for** $k = 1$ to $M$ **do**
  $x_1 \leftarrow x_0 - v/f'(x_0)$;
  $v \leftarrow f(x_1)$;
  **if** $|x_1 - x_0| < \delta$ **or** $|v| < \varepsilon$ **then**
    **return true**;
  **end if**
  $x_0 \leftarrow x_1$;
**end for**
**return false**;

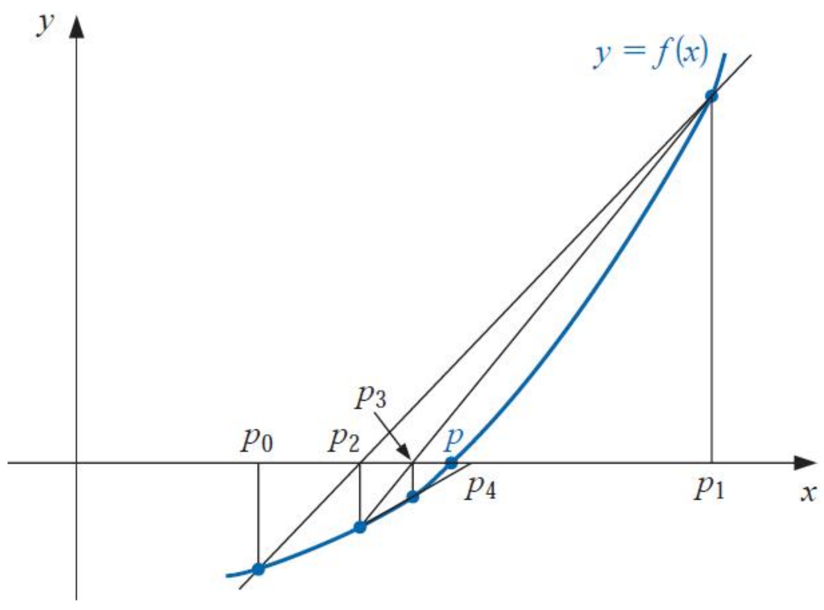
**Output:**

$x_0$, $v$

# 弦截法

- Newton法：需要求导数
- 思想：用差商代替导数
- 弦截法迭代格式：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$



# 弦截法

- （收敛性）设 $f(x)\in C^2[a,b]$，$x^*$为$f(x)$的单根，则存在$\delta>0,\ C>0$，使得对任意的初值$x_0\in(x^*-\delta,x^*+\delta)$，弦截法收敛，收敛阶为$(1+\sqrt{5})/2$，即有

$$|x_{n+1}-r|\le C|x_n-r|^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\quad(n\ge 0).$$

# 弦截法

- 弦截迭代算法

**Algorithm 8** Secant Algorithm

**Input:**

$f(x)$, $a$, $b$, $M$, $\delta$, $\varepsilon$

$u \leftarrow f(a)$;
$v \leftarrow f(b)$;
**for** $k = 2$ to $M$ **do**
    **if** $|u| > |v|$ **then**
        $a \leftrightarrow b$;
        $u \leftrightarrow v$;
    **end if**
    $s \leftarrow (b-a)/(v-u)$;
    $b \leftarrow a$;
    $v \leftarrow u$;
    $a \leftarrow a - u * s$;
    $u \leftarrow f(a)$;
    **if** $|u| < \varepsilon$ **or** $|b-a| < \delta$ **then**
        **return true**;
    **end if**
**end for**
**return false**;

**Output:**

$x_0$, $v$

# 非线性方程组的Newton方法

■ 考虑二阶非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x_0,y_0)+(x-x_0)\dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x}+(y-y_0)\dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y}\approx 0 \\ f_2(x_0,y_0)+(x-x_0)\dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x}+(y-y_0)\dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y}\approx 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -f_1(x_0,y_0) \\ -f_2(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

■ Newton迭代格式：

$$J(x_k,y_k)\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_k,y_k) \\ -f_2(x_k,y_k) \end{pmatrix},\ \Delta x = x_{k+1}-x_k,\ \Delta y = y_{k+1}-y_k$$

# 非线性方程组的Newton方法

- **对于一般的$n$阶非线性方程组**

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 \\ \qquad\vdots \\ f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 \end{cases} \Rightarrow F(X)=0, F=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^T, X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$$

- **Newton迭代格式：**

$$X_{k+1}=X_k-\frac{F(x_k)}{F'(x_k)}=X_k-(J(X_k))^{-1}F(X_k)\Leftrightarrow J(X_k)(X_{k+1}-X_k)=-F(X_k)$$

$$J(X)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$