2022 秋季学期（答案）

1 （12 分）填空题

（1）设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 6 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix}$ 则其范数 $\|A\|_1 = \underline{13\qquad}$，$\|A\|_\infty = \underline{11\qquad}$，谱半径 $= \underline{2+3\sqrt{3}}$；若利用 Householder 变换求该矩阵的 QR 分解，则 $Q = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & -0.6 \\ 0 & -0.6 & -0.8 \end{pmatrix}}$，$R = \underline{\begin{pmatrix} 6 & 0.5 & -2 \\ 0 & 5 & 7.2 \\ 0 & 0 & 4.6 \end{pmatrix}\qquad}$。

（2）将线性规划问题

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2,x_3} \; & z = 2x_1 + x_2 - 4x_3 \\ \text{subject to: } & -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ & -2x_1 + x_2 - x_3 \le 6, \\ & x_1 \le 0, x_2 \ge 0, x_3\text{无约束。} \end{aligned}$$

化为**标准形式**。

解答：$z = -z', -x_1$替代$x_1, x_3 = x_4 - x_5, x_6$为松弛变量，标准形式为：

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2,x_4,x_5} \; & z = 2x_1 + x_2 - 4x_4 + 4x_5 + 0x_6 \\ \text{subject to: } & -x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 4, \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 + x_5 + x_6 = 6, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

2　（13 分）

在线性空间 $\mathbf{P}_1[x] = span\{1, x\}$ 中，求 $f(x) = \sin x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的：（1）一次最佳平方逼近多项式（设权函数为 1）；（2）一次最佳一致逼近多项式。

解答：(1)$\frac{8}{\pi} - \frac{24}{\pi^2} + (\frac{96}{\pi^3} - \frac{24}{\pi^2})x \approx 0.1148 + 0.6644x$;
(2)$\frac{\sqrt{1-(\frac{2}{\pi})^2}}{2} - \frac{1}{\pi}\arccos\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}x \approx 0.1053 + 0.6366x$

3　（10 分）

给定线性方程组 $Ax = b$，其中 A 可逆，D 为 A 的对角元构成的对角阵，在 Jacobi 迭代法中引入迭代参数 $\omega > 0$，即：

$$x_{k+1} = x_k - \omega D^{-1}(Ax_k - b)$$

称之为 Jacobi 松弛法（简称 JOR 方法），证明：若此时 Jacobi 迭代法收敛且 $0 < \omega < 1$，则 JOR 方法收敛。

证明： Jacobi 迭代法的迭代矩阵为 $M_1 = I - D^{-1}A$，JOR 方法的迭代矩阵为 $M_2 = I - \omega D^{-1}A$，则 $\rho(M_1) < 1 \Rightarrow \rho(D^{-1}A) < 2 \Rightarrow \rho(M_2) < 1$。

4　（15 分）

（1）构造一个次数不高于三次的多项式 $H(x) \in \mathcal{P}_3[x]$，使之满足

$$H(x_i) = f(x_i), H'(x_i) = f'(x_i), i = 0, 1$$

其中 $a \le x_0 \le x_1 \le b$。

（2）给定节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 上的函数 $f(x_i)(i = 0, 1, \cdots, n)$ 及一阶导数值 $f'(x_i)(i = 0, 1, \cdots, n)$，设 $H(x) \in \mathcal{P}_{2n+1}[x]$ 为相应的 Hermite 插值多项式，即 $H(x)$ 满足 $H(x_i) = f(x_i), H'(x_i) = f'(x_i), i = 0, 1, \cdots, n$ 且 $f(x)$ 充分光滑，

证明：此时插值误差 $R(x) = f(x) - H(x)$ 满足

$$R(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi(x))}{(2n+2)!}[w_{n+1}(x)]^2,$$

其中 $w_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i), \xi(x)\in(x_0,x_n)$。(注：不可利用差商与导数的关系式)

解答：（1）Lagrange 插值形式：

$$\begin{aligned}H_3(x)=&(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2f(x_0)+(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_0})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2f(x_1)\\&+(x-x_0)(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2f'(x_0)+(x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2f'(x_1)\end{aligned}$$

或 Newton 插值形式：

$$\begin{aligned}&H_3(x)=f(x_0)+f[x_0,x_0](x-x_0)+f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2\\&+f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1)\\&f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\begin{cases}\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_n]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0} & x_0\neq x_n,\\ \frac{f^n(x_0)}{n!} & x_0=x_n\end{cases}\end{aligned}$$

（2）由于 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 为 $R(x)$ 的根，可以设 $R(x)=k(x)\prod_{i=0}^n(x-x_i)$，引入

$$\varphi(t)=f(t)-H(t)-k(x)\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)$$

则 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 n+2 个零点（不要忘了 x），由于 f 充分光滑，有 Rolle 定理，$\varphi'(t)$ 在相邻的两个零点之间至少有一个零点，即 $\varphi'(t)$ 至少有 n+1 个不同于 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 的零点，也即 $\varphi'(t)$ 至少有 2n+2 个不同的零点，反复利用 Rolle 定理可得：$\varphi^{2n+2}(t)$ 至少有一个零点 ξ，于是：

$$\varphi^{(2n+2)}(t)=f^{(2n+2)}(t)-k(x)(2n+2)!$$

令 $t=\xi$，有：$k(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}$，于是原结论得证。

5 （10 分）

考虑用 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 求非线性函数 f(x) 的单重根 s。其中 $\varphi(x)=x-a(x)f(x)+b(x)f^2(x)$。试确定一组 $a(x)$ 和 $b(x)$ 使得该迭代公式在根 s 附近至少是三阶收敛的。

分析：仍采用课本上分析 Newton 迭代格式时采用的 Taylor 展开的方法。

解答：

$$\begin{aligned} x_{k+1} - s &= \varphi(x_k) - \varphi(s) \\ &= (x_k - s)\varphi'(s) + \frac{(x_k-s)^2}{2!}\varphi''(s) + \frac{(x_k-s)^3}{3!}\varphi'''(s) + ... \end{aligned}$$

由于要求至少三阶收敛，可以得到关系式：

$$\begin{cases} \varphi'(s) & = 0 \\ \varphi''(s) & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(s)f'(s) & = 1 \\ -(2a'(s)f'(s) + a(s)f''(s)) + 2b(s)f'(s)^2 & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(x) & = \frac{1}{f'(x)} \\ b(x) & = -\frac{f''(x)}{f'(x)^3} \end{cases} \text{（注意这只是一组容易得到的解）}$$

6 （15 分）

（1）用 LU 分解求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases}$，其中 L 是单位下三角矩阵，U 是上三角矩阵。

（2）设 $A = (a_{ij} \in R^{n\times n}$ 是<u>严格对角占优矩阵</u>, 即 A 满足

$$|a_{kk}| > \sum j = 1, j \neq k^n |a_{jk}|, k = 1, 2, \cdots, n,$$

证明：对 $Ax = b$ 用 Gauss 顺序消元法得到的上三角阵方程组与用 Gauss 列主元消元法得到的上三角阵方程组是完全相同的。

分析：本题的关键是注意到对 A 进行一步 Gauss 消去后剩下待处理的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵仍为严格列对角占优，这自然也保证了每步 Gauss 消去需要寻找的“列主元”就是对角线上的元素，于是归纳法保证了原结论成立，另外有一个去年考试很多同学犯的错误是只证明了对 A 的第一列进行一步 Gauss 消去后第二列仍满足严格对角占优，并没有点出剩下待处理的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵是严格列对角占优（虽然它们之间只差了一个“依此类推”），这样归纳法实际上是进行不下去的。

证明：首先证明一个引理：若 A 严格列对角占优，则对 A 进行一步 Gauss 消去后剩下待处理的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵仍为严格列对角占优。

设 $A=A^{(0)}=(a_{ij}^{(0)})_{i,j=1}^n$，一步 Gauss 消去后得到的矩阵为 $A^{(1)}=(a_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^n$，则我们需要证明 $\forall i=2,3,\cdots,n$，有 $|a_{jj}^{(1)}|>\sum_{i=2,i\neq j}^n|a_{ij}((1)|$，事实上，

$$\begin{aligned}
&|a_{jj}^{(1)}|>\sum_{i=2,i\neq j}^n|a_{ij}^{(1)}|\\
\Leftrightarrow&|a_{jj}^{(0)}-a_{1j}^{(0)}\frac{a_{j1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}|>\sum_{i=2,i\neq j}^n|a_{ij}^{(0)}-a_{1j}^{(0)}\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}|\\
\Leftarrow&|a_{jj}^{(0)}|-|a_{1j}^{(0)}\frac{a_{j1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}|>\sum_{i=2,i\neq j}^n(|a_{ij}^{(0)}|+|a_{1j}^{(0)}\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}|)\\
\Leftrightarrow&|a_{jj}^{(0)}|>\sum_{i=2,i\neq j}^n|a_{ij}^{(0)}|+\sum_{i=1,i\neq j}|a_{1j}^{(0)}\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}|\\
\Leftarrow&|a_{jj}^{(0)}|>\sum_{i=1,i\neq j}^n|a_{ij}^{(0)}|
\end{aligned}$$

于是由归纳法可以保证原结论成立（考试时不要这样省略）。

7 （15 分）

设 $f(x)$ 充分可微，设有数值积分公式

$$\int_{-2}^2\omega(x)f(x)dx=Af(x_0)+Bf(x_1)$$

其中 $\omega(x)=(4-x^2)^{-0.5}$。

（1）试确定常数 A,B,x_0,x_1 使其达到最高阶 的代数精度；给出此时的代数精度。

（2）试求第一问中数值积分公式的截断误差。

解答：（1）计算可得 $\omega(x)$ 下的正交多项式为：

$$\begin{aligned}
&g_0(x)=1\\
&g_1(x)=x-\frac{\int_{-2}^2\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx}{\int_{-2}^2\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx}=x\\
&g_2(x)=(x-\frac{\int_{-2}^2\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx}{\int_{-2}^2\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx})x-\frac{\int_{-2}^2\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx}{\int_{-2}^2\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx}=x^2-2
\end{aligned}$$

于是 $x_0=-\sqrt{2},x_1=\sqrt{2},A=\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\frac{x-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}dx=\frac{\pi}{2},B=\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\frac{x+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}dx=\frac{\pi}{2}$，验证可得：此时代数精度为 3。（考试时最好验证一下）

（2）由 Gauss 公式的积分余项可得：$E=\frac{f^{(4)}(\epsilon)}{4!}\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}(x^2-2)^2dx=\frac{\pi}{12}f^{(4)}(\epsilon),\epsilon\in(-2,2)$

8 （10 分）

设二元函数 $f(x,y)$ 在 $a\le x\le b,-\infty<y<\infty$ 上连续，且对 y 满足 Lipschitz 条件，即 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$，设常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y), & \\ & a\le x\le b\\ y(a)=y_0. & \end{cases}$$

的精确解为 $y(x)\in C^2[a,b]$，且满足 $|y''(x)|\le M,\forall x\in[a,b]$（这里的 $M>0$ 为常数）。对区间 $[a,b]$ 作等距划分，记步长为 $h=\frac{b-a}{n},x_i=a+ih,i=0,1,\cdots,n,n\ge 2$ 为正整数。考虑用向前 Euler 公式解此初值问题，记 y_i 为 $x_i(i=1,\cdots,n)$ 处的数值解。

（1）写出向前 Euler 公式；

（2）若不考虑计算机舍入误差，试证明：

$$|y(x_n)-y_n|\le\frac{hM}{2L}(e^{L(b-a)}-1).$$

解答：（1）$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$

(2) 设 $e_n = |y(x_n) - y_n|$，则 $e_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
e_n &= \left|y(x_{n-1}) + hf(x_{n-1}, y(x_{n-1})) + \frac{h^2}{2}f''(\epsilon) - y_{n-1} - hf(x_{n-1}, y_{n-1})\right| \\
&\leq (1+hL)e_{n-1} + \frac{h^2M}{2} \\
&\leq \cdots \\
&\leq (1+hL)^n e_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^2M}{2}(1+hL)^i \\
&= \frac{hM}{2L}((1+hL)^n - 1) \\
&\leq \frac{hM}{2L}(e^{nhL} - 1) \\
&= \frac{hM}{2L}(e^{L(b-a)} - 1)
\end{aligned}
$$