计算方法第四次编程作业报告

崔士强 PB22151743

2024 年 4 月 30 日

1 问题描述

实验的目的是实现 Jacobi 方法求解对称矩阵的特征值，并应用该方法于主成分分析（PCA）和矩阵的奇异值分解（SVD）。具体应用包括：

- 使用 PCA 对数据进行有效压缩。
- 使用 SVD 对矩阵进行分解。

2 问题分析

2.1 PCA 主成分分析

主要步骤包括：

1. 数据去中心化并构造协方差矩阵 $\frac{1}{m}XX^T$。
2. 应用 Jacobi 方法求解协方差矩阵的所有特征值。
3. 选择最大的两个特征值对应的特征向量，构成视觉平面的基。
4. 对数据进行投影，并可视化结果。

2.2 SVD 分解

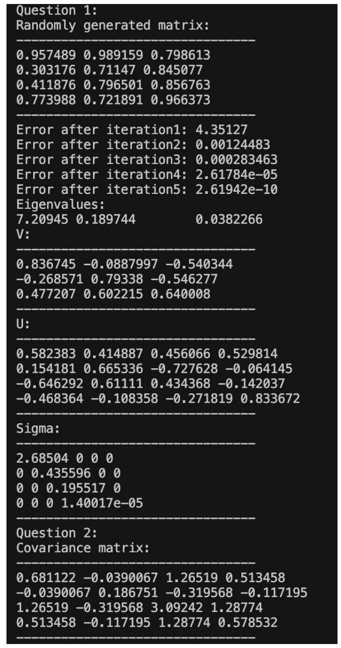
主要步骤包括：

1. 对矩阵 A 应用 Jacobi 方法计算 AA^T 和 A^TA 的特征值。
2. 分别计算 AA^T 和 A^TA 的特征向量，构成矩阵 U 和 V。
3. 构造对角阵 Σ，其中对角元素为特征值的平方根。
4. 进行矩阵分解 $A = U\Sigma V^T$。

3 实验结果

3.1 结果展示

程序的计算结果如下图所示



```
Question 1:
Randomly generated matrix:
--------------------------------
0.957489 0.989159 0.798613
0.303176 0.71147 0.845077
0.411876 0.796501 0.856763
0.773988 0.721891 0.966373
--------------------------------
Error after iteration1: 4.35127
Error after iteration2: 0.00124483
Error after iteration3: 0.000283463
Error after iteration4: 2.61784e-05
Error after iteration5: 2.61942e-10
Eigenvalues:
7.20945 0.189744        0.0382266
V:
--------------------------------
0.836745 -0.0887997 -0.540344
-0.268571 0.79338 -0.546277
0.477207 0.602215 0.640008
--------------------------------
U:
--------------------------------
0.582383 0.414887 0.456066 0.529814
0.154181 0.665336 -0.727628 -0.064145
-0.646292 0.61111 0.434368 -0.142037
-0.468364 -0.108358 -0.271819 0.833672
--------------------------------
Sigma:
--------------------------------
2.68504 0 0 0
0 0.435596 0 0
0 0 0.195517 0
0 0 0 1.40017e-05
--------------------------------
Question 2:
Covariance matrix:
--------------------------------
0.681122 -0.0390067 1.26519 0.513458
-0.0390067 0.186751 -0.319568 -0.117195
1.26519 -0.319568 3.09242 1.28774
0.513458 -0.117195 1.28774 0.578532
--------------------------------
```

图 1: 计算结果

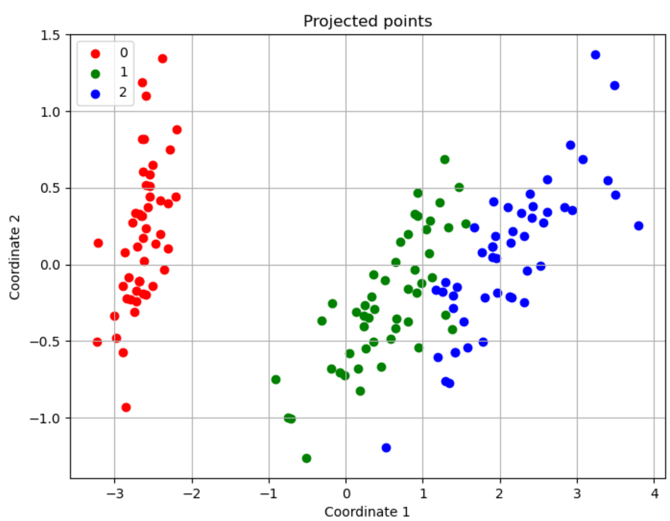


图 2: 可视化

3.2 结果分析

1. 可以看到，Jacobi 方法迭代中矩阵非对角元素平方和迅速下降
2. 经计算验证，所求特征值是矩阵特征值的近似值
3. 在可视化结果中，三个标签经降维后得到的点近似分布在三条直线附近