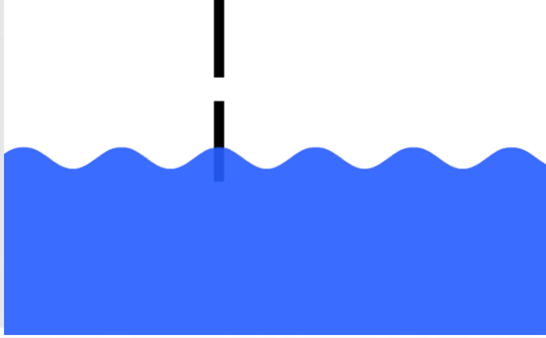
中国科学技术大学
University of Science and Technology of China



University Physics
大 学 物 理

第一部分 力 学
（机械波）

第八章　波　动

- 波动:振动在空间的传播过程
  - 机械波:机械振动在弹性介质中的传播
  - 电磁波:电磁震荡在空间的传播
- 不同种类的波其产生和传播的机制不同
- 波动的共性
  - 相似的波动方程
  - 波动性质：反射、折射、干涉、衍射

§ 7-1　机械波的产生和传播

中国科学技术大学 University of Science and Technology of China

一、形成机械波的必要条件：

- 机械波是机械振动在介质中传播
- 波源（振源）：波动的能量、决定波动的形式
- 弹性介质：具有弹性恢复力的介质，机械波只能在介质（气体、液体、固体）中传播
- 介质内各质元间当有相对位移时，能互相施以弹性恢复力，使各质元能在平衡位置附近按波源的形式振动，并将波源的振动形式和能量传播开去。

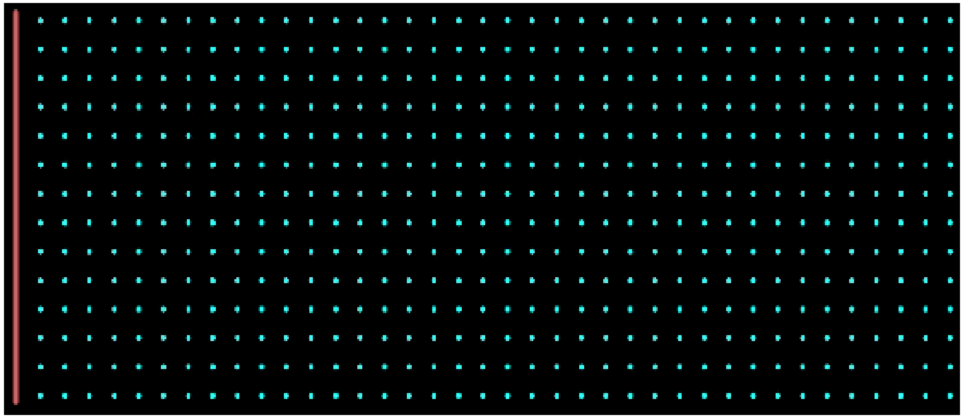
二、横波和纵波：

- **横波:** 介质中质元的振动方向垂直于波的传播方向

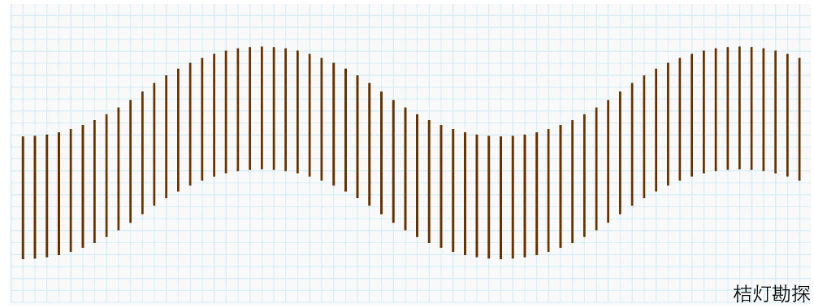
  如：绳波　　横波只能在固体中传播。

- **纵波:** 介质中质元的振动方向平行于波的传播方向

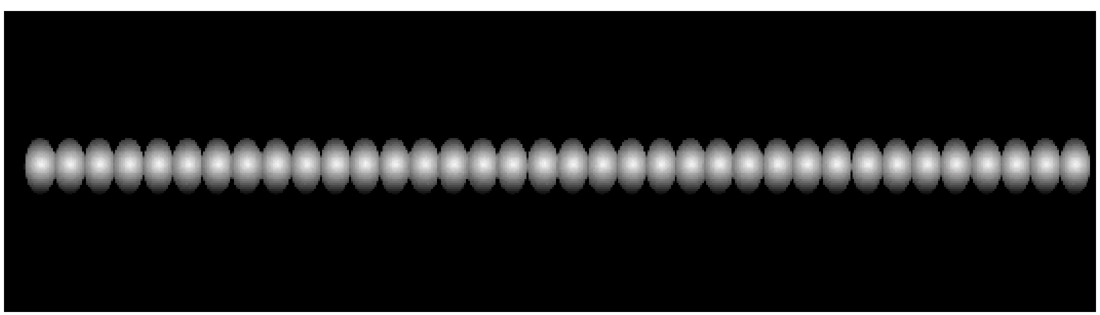
  如：声波　　纵波可在任何介质中传播。

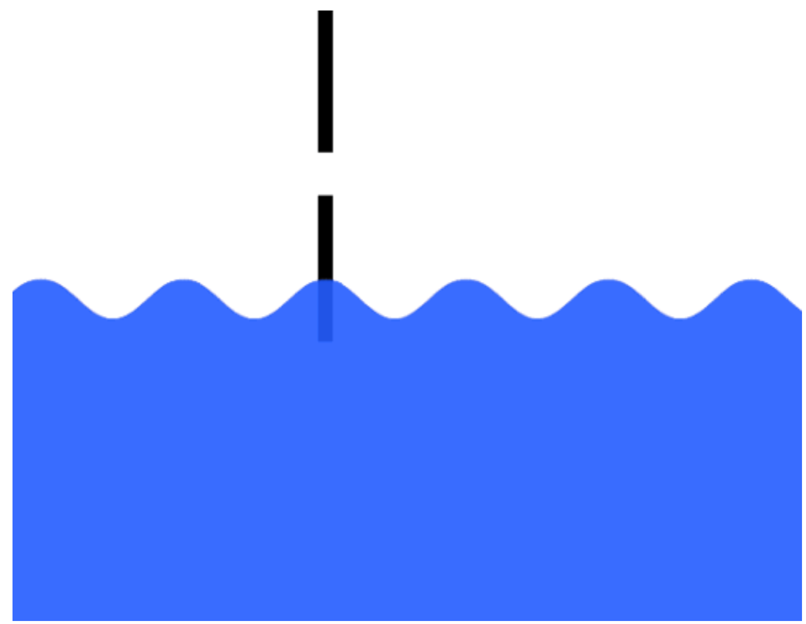


- **行波：**周期性变化的**运动状态**在**空间**形成**周期性分布**，并随着**时间**推移向一定方向行进



  - 某一时刻质元**振动状态**在较晚时刻**重现**于**前进方向**的另一质元上
  - 行波传播的是**振动的状态和能量**，而不是质量，波上的各点没有“随波逐流”





三、波的特征量

- 波长λ：同一波线上相位差为2π的两质元间的距离
- 周期T：波传播一个波长的距离所需要的时间
- 频率ν：单位时间内传出的完整波形的个数

$$u=\lambda\nu=\frac{\lambda}{T}$$

- 波速（相速）u：单位时间内某振动状态传播的距离

振动状态决定于相位，所以波速也是相位传播的速度

- 特征量的影响因素：
  - 波的周期、频率和波源频率相同
  - 波长、波速决定于弹性介质的性质，与波源无关

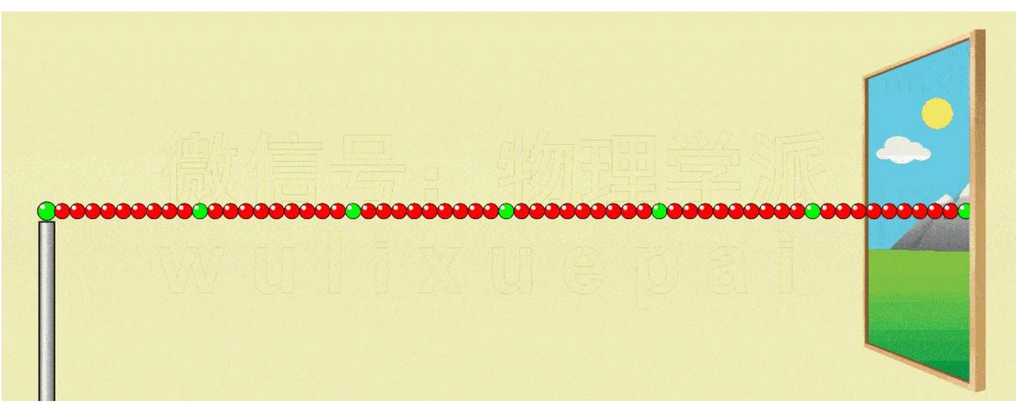
§7-2 平面简谐波

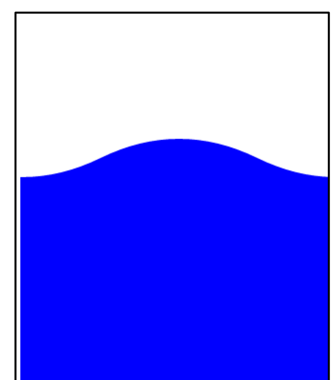
□ **波函数**：介质中各个质点的振动**位移**与该点的**位置**及**时间**的函数关系，也称为**波运动方程**

□ **简谐波**：介质中各质元作余弦（或正弦）运动的波。

- 简谐波是最简单、最基本的波动形式
- 任意复杂的波总可以表示为若干简谐波的叠加。

□ 平面简谐**波**：波面为平面且向前传播的简谐波

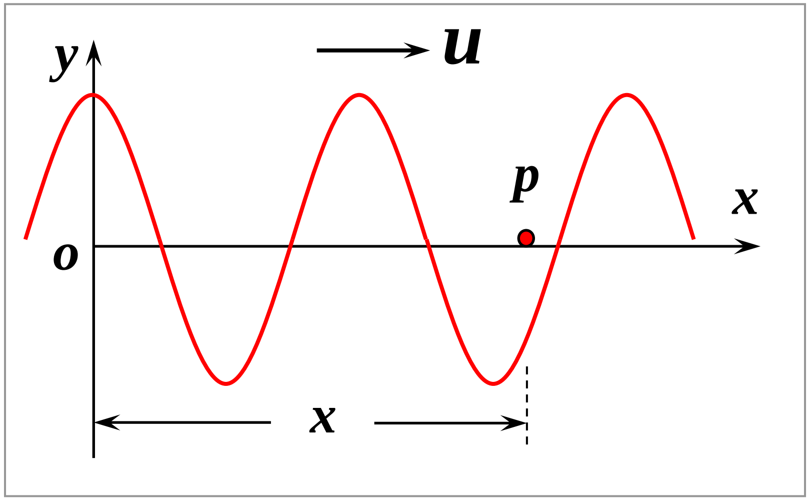




一、平面简谐波方程：

- 行波的特点：某一时刻质元振动状态在较晚时刻**重现**于前进方向的另一质元上

- 设波以速度 u 沿波线 x 传播，Y表示振动位移



  - 设X=0处质元的振动方程为：

$$\boxed{y_o = A\cos\omega t}$$

  - 波从o点传到 p 点需要时间：$\Delta t = x/u$

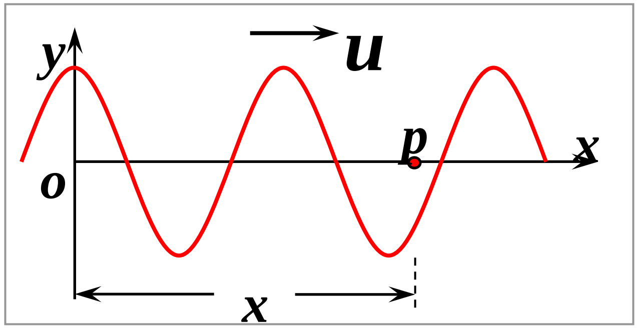
- p点质元t 时刻的振动状态（相位）为o点质元 $t\text{-}\Delta t\text{=}t_0$ 时刻的振动状态（相位）。

p点质元的振动方程：

$$\boxed{y_P(t) = y_O(t - \Delta t) = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})}$$

□ 平面简谐波方程或波函数

$$y(x,t)=A\cos\omega(t-\frac{x}{u})$$



- 该波函数表示沿x正向传播
- 若波沿x轴负方向传播，则波函数为：

$$y=A\cos\omega(t+\frac{x}{u})$$

- 若o点质元振动初相位$\varphi\neq 0$，则波函数为：

$$\boxed{y=A\cos[\omega(t\mp\frac{x}{u})+\varphi]}$$

- φ是O点 的初位相，在传播方向上，后面的点初相位都落后于前面的点

波函数的形式

$$y = A\cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi]$$

$$y = A\cos[2\pi(\nu t \mp \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

$$y = A\cos(\omega t \mp kx + \varphi)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi\nu}{u}$$

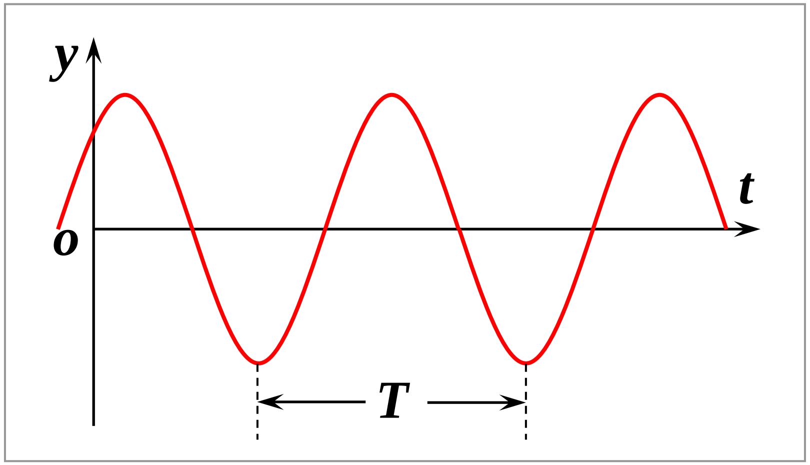
波函数反映了波的时间、空间的双重周期性：

- **T反映时间周期性，**
- **λ反映空间周期性**

二、波函数的意义

- 当x一定时，波函数为x点处质元的**振动方程**：

$$y = A\cos[\omega t + (\varphi - \frac{2\pi}{\lambda}x)]$$



式中：$\varphi - \dfrac{2\pi}{\lambda}x$

为x点处质元的振动初相位。

而：$-\dfrac{2\pi}{\lambda}x$ 为x点处振动落后于o点处振动的相位。

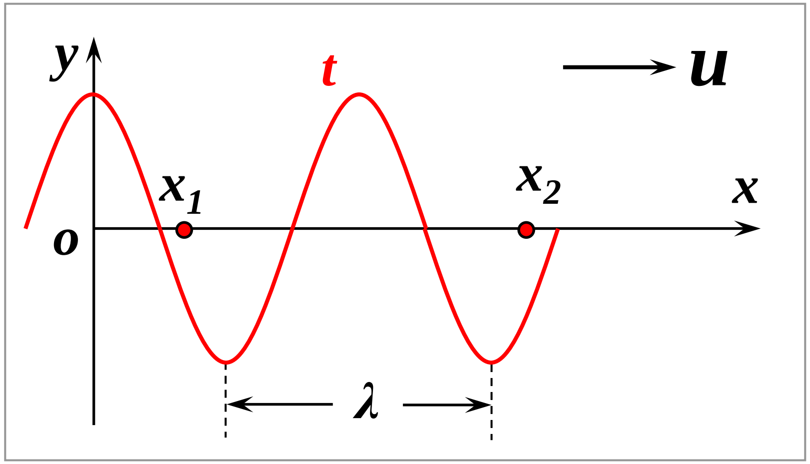
位移—时间图上**相邻**两个**同相点**的间隔即为**周期**T。

□ 当t一定时，波函数为t时刻各质元的位移分布情况：

同一时刻 t，同一波线上 x_1、x_2 两点处振动的相位差：

$$\Delta\varphi=[2\pi(\nu t-\frac{x_2}{\lambda})+\varphi]-[2\pi(\nu t-\frac{x_1}{\lambda})+\varphi]$$

$$=-2\pi\frac{x_2-x_1}{\lambda}=-\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$



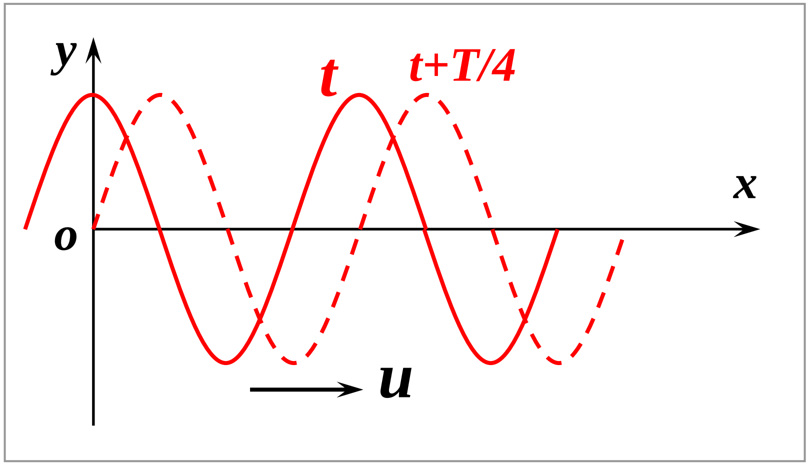
$\Delta x = x_2 - x_1$ 称为波程差。

波形图上相邻同相位点的间隔为波长λ。

□ 当t、x都变化时，波函数表示波线上所有质元的位移随时间的变化情况

t 时刻波形：实线

$t+\dfrac{T}{4}$时刻波形：虚线



整个波形随时间向 x 正方向运动 → 行波

u是波传播速度而不是质点的振动速度，x处质点的振动速度：

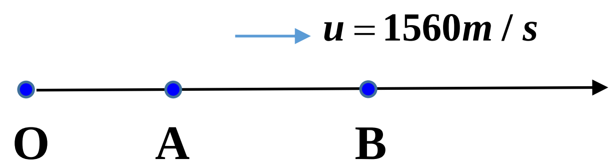
$$v_x=\frac{dy}{dt}=-A\omega\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

声波 ν=3000Hz， u=1560m/s， 沿一波线从 A 传播到 B。$\Delta x=AB$=0.13m。求：(1) 波的周期和波长；(2)B点振动比A点落后多少时间； (3) A、B两点的相位差；(4)若波幅A=0.1mm, 则波线上各质元振动速度的最大值为多少？

(1) $T=\dfrac{1}{\nu}=3.33\times10^{-4}\,s$， $\lambda=\dfrac{u}{\nu}=0.52m=4\Delta x$

(2) $\Delta t_{A\to B}=\dfrac{\Delta x}{u}=\dfrac{T}{4}=8.33\times10^{-5}\,s$

(3) $\Delta\varphi=-2\pi\dfrac{\Delta x}{\lambda}=-\dfrac{\pi}{2}$



(4) $\upsilon_m=A\omega=18.8\quad m/s$

$$v_x=\frac{dy}{dt}=-A\omega\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

沿x轴正向传播的平面简谐波：$u=1.0m/s$，$x=0$点处质元的振动方程为 $y_0= 0.1cos(\pi t+\varphi)$ (m)，$t = 0$ 时，该质元振动速度$\upsilon_0= 0.1\pi(m/s)$ 。求：(1) 波动表达式；(2) $t = 1s$ 时， x 轴上各质元的位移分布； (3) $x = 0.5m$ 处质元的振动方程。

(1) $x = 0$ 处质元振动的速度： $\upsilon = \dfrac{dy_0}{dt} = -0.1\pi\sin(\pi t+\varphi)$

$t = 0$ 时：$0.1\pi = -0.1\pi\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\dfrac{\pi}{2}$

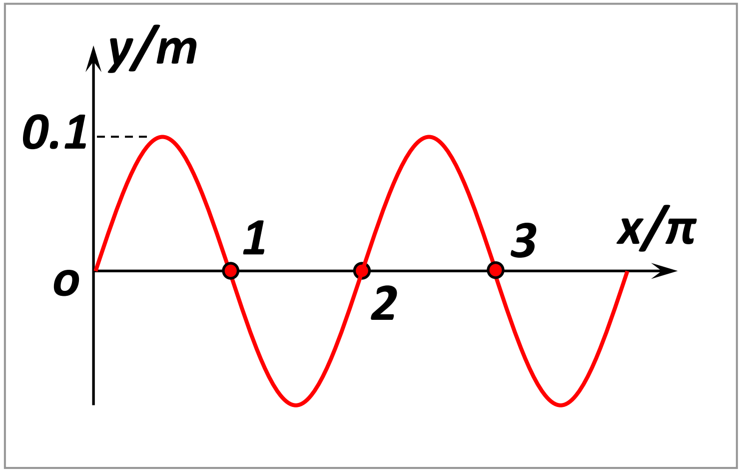
$x = 0$ 处质元的振动方程： $y_0 = 0.1\cos\pi(t-\dfrac{1}{2}) \quad (m)$

波数： $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{uT} = \dfrac{\omega}{u} = \pi$

∴波函数： $y = 0.1\cos\pi(t - x - \frac{1}{2}) = 0.1\sin\pi(t - x) \quad (m)$

(2) t = 1s 时:

$$y = 0.1\sin\pi(1 - x)$$
$$= 0.1\sin\pi x \quad (m)$$

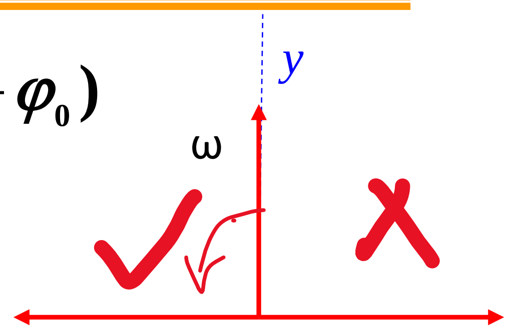


(3) x = 0.5m 处质元的振动方程:

$$y\Big|_{x=0.5m} = 0.1\sin\pi(t - \frac{1}{2}) = -0.1\cos\pi t \quad (m)$$

一正弦横波沿一张紧的弦从左向右传播，A=10cm, λ= 200cm, u = 100 cm/s。t = 0 时，弦左端经平衡位置向下运动。求：(1) 弦左端振动方程；(2) 波函数；(3) x=150cm处质元的振动方程；(4) 弦上质点的最大振动速度；(5) t=3.25s时，x = 150cm 处质元的位移和速度。

(1) 设弦左端的振动方程为： $y_0 = A\cos(2\pi\nu t + \varphi_0)$



由题设条件： $\nu = \dfrac{u}{\lambda} = 0.5Hz, \quad \varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$

所以： $y_0 = 0.1\cos(2\pi \cdot \dfrac{1}{2} t + \dfrac{1}{2}\pi) = -0.1\sin\pi t \quad (m)$

(2) 波函数：

$$y = A\cos[2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0] = 0.1\cos[2\pi(\frac{t}{2} - \frac{x}{2}) + \frac{\pi}{2}]$$

$$= -0.1\sin\pi(t - x) \quad (m)$$

(3) x=150cm处质元的振动方程为：

$$y\Big|_{x=1.5m} = -0.1\sin\pi(t-1.5) \quad (m)$$

(4) 弦上质点的最大振动速度：

$$\upsilon_{max} = A\omega = 2\pi\nu A = 0.1\pi = 0.314 \quad (m/s)$$

(5) t=3.25s，$x = 150cm$处质元的位移和速度为：

$$y\Big|_{x=1.5m, t=3.25s} = -0.1\sin 1.75\pi = 7.07\times 10^{-2}\, m$$

$$\upsilon\Big|_{x=1.5m, t=3.25s} = -0.1\pi\cos 1.75\pi = -0.22\ m/s$$

三、机械波的频率和波长

- 波的频率决定于波源
- 波长、波速决定于介质

- 同一列波在不同介质中的波长不同

  - 波动靠介质中的弹性力作用形成，弹性越强波速越大
  - 介质密度大，惯性大，波速越小

四、各类介质中的波速度（机械波）

□ 固体：
$$\begin{cases} u_{横} = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}} \\ u_{纵} = \sqrt{\dfrac{Y}{\rho}} \end{cases}$$

G：固体的切变弹性模量

Y：固体的杨氏弹性模量

□ 张紧的软绳：$u_{绳} = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$　　T：张力；μ：质量线密度

□ 流体：$u = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}}$　　B：流体的容变弹性模量

□ 空气中的声波：$u_{声} = \sqrt{\dfrac{\gamma p}{\rho}} \approx 331\ {}^{m}\!/_{s}$

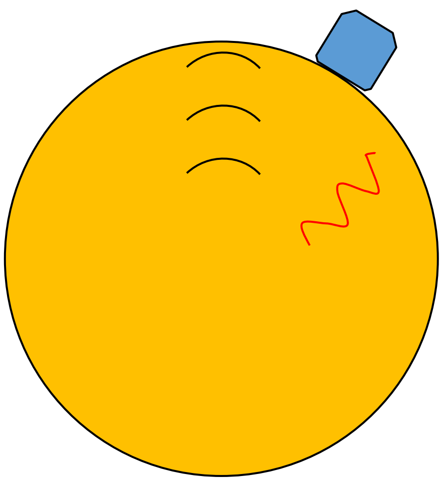
- 波的频率决定于波源，波速决定于介质，所以**同一列波在不同介质中的波长不同、波速不同**

比如声波在空气中传播速度 $u = 331\ m/s$

在水中传播速度 $u = 1450\ m/s$

在混泥土中传播速度 $u = 4000\ m/s$

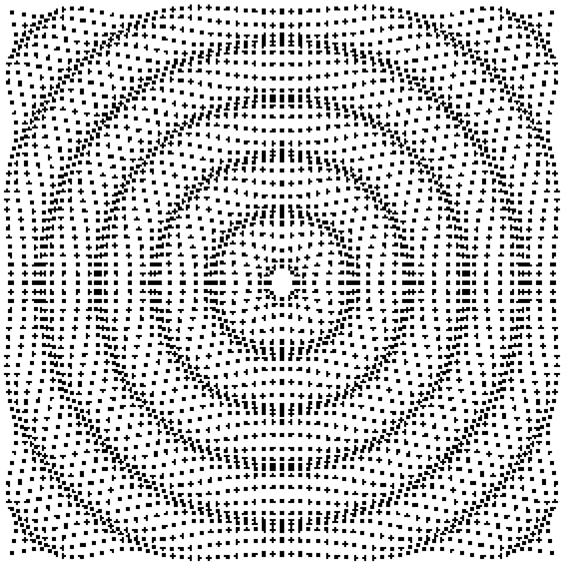
在铁轨中传播速度 $u = 5000\ m/s$

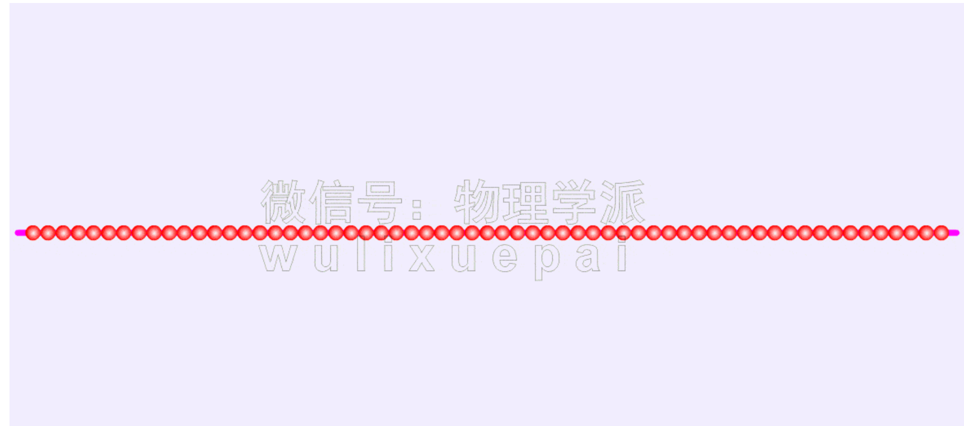


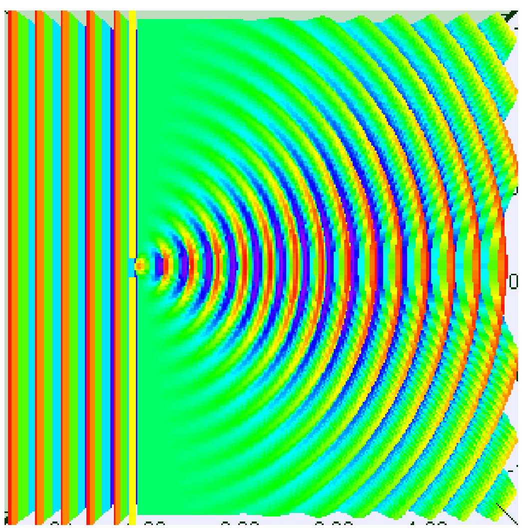
地震中先纵波、后横波

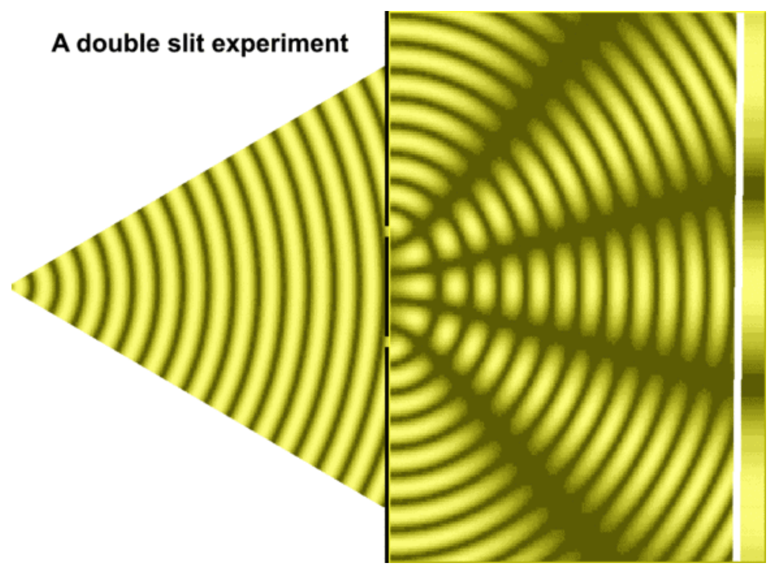

+ 关注
横波
就像地震引发的横波和纵波也不是一回事
01:10 / 02:15
自动
倍速

§ 7-3 波的传播 惠更斯原理



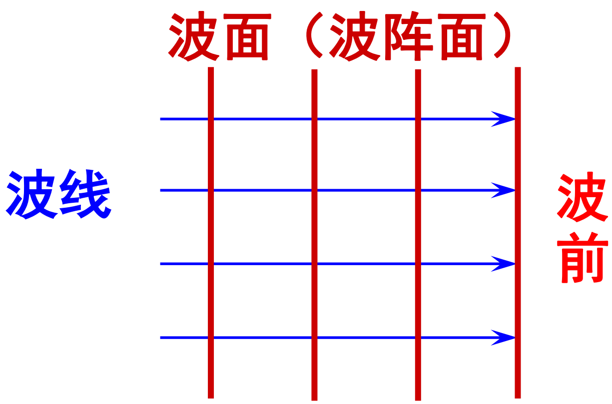




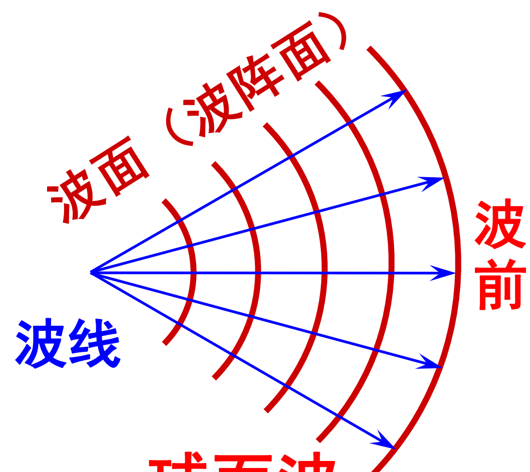


一、波线和波面

- **波线**：沿波的**传播方向**所画的**射线**
- **波面**：介质中振动**相位相同**的点所构成的面
- 在各向同性的均匀介质中，**波线恒与波面垂直。**



平面波



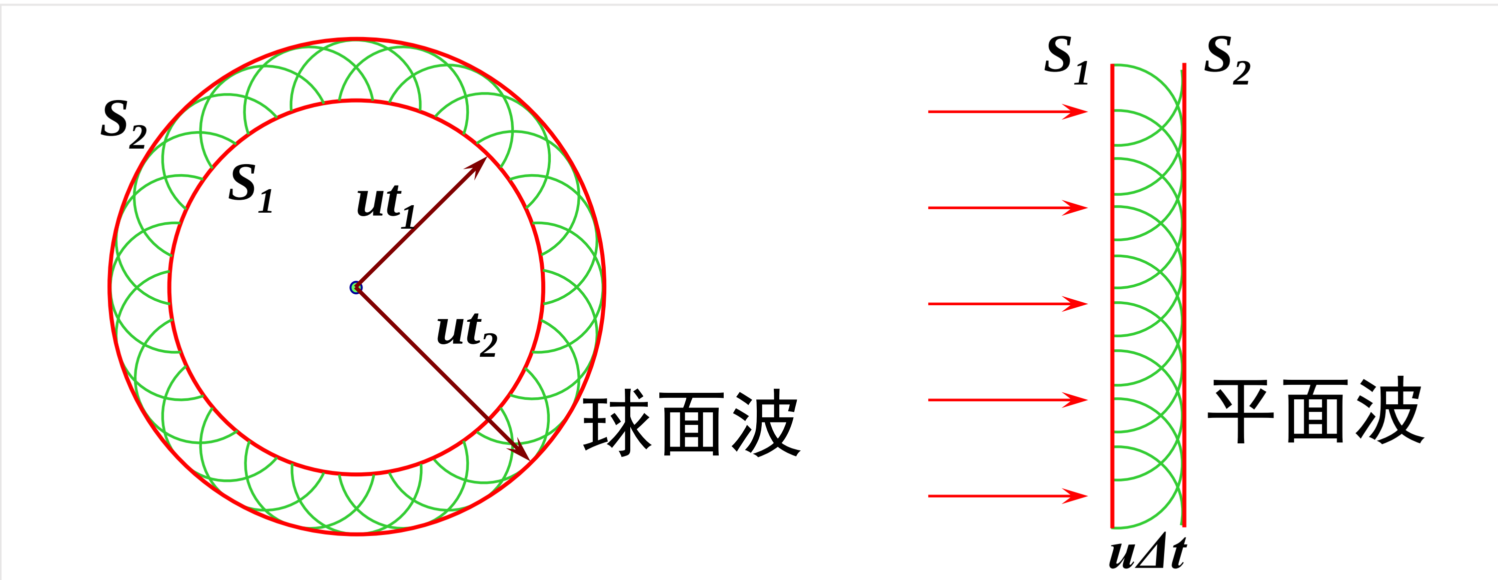
球面波

球面波传到足够远时，在一小范围内可看作平面波。

（如：传到地球上的太阳光波）

二、惠更斯原理

波前上每一个点都可看作产生球面次波的波源，而后一时刻新的波前就是这些球面次波的包络面。



惠更斯原理可用于定性解释波的反射、折射、衍射、干涉以及光在各向异性介质中的传播，但不能解释：

(1)子波为何不会向后传； (2)波的强度分布问题。

三、波的衍射：

当平面波在传播过程中遇到障碍物时，波将改变传播方向—波的衍射。

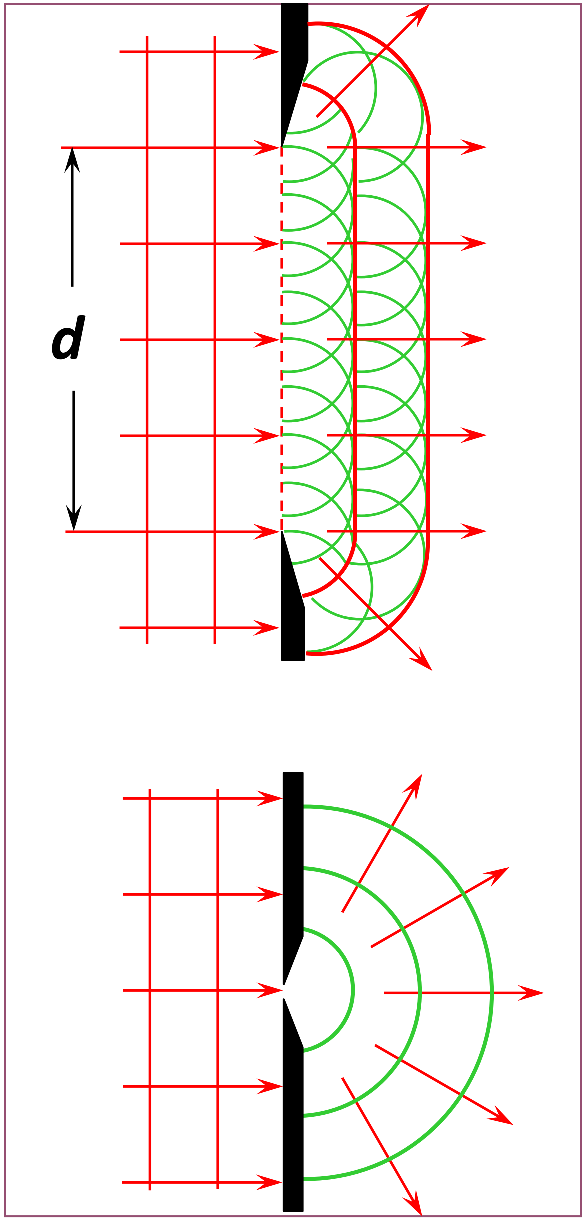
(1) 当$d >> \lambda$ 时，衍射不明显，波仍沿原方向传播；

(2) 当$d \sim \lambda$ 时，衍射较明显；

(3) 当$d << \lambda$ 时，衍射很明显。

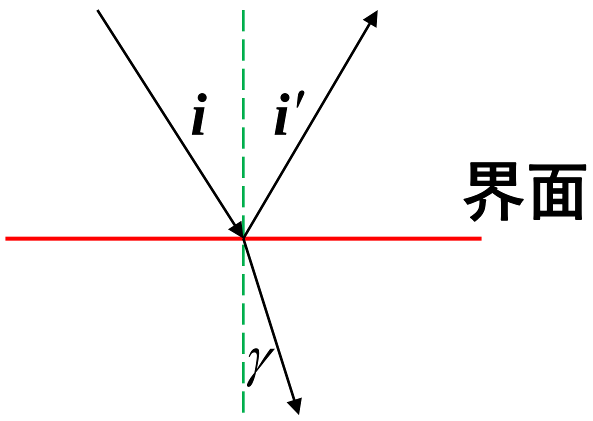
声波波长：*16.5m~1.65cm*

无线电中波：*180~560m*



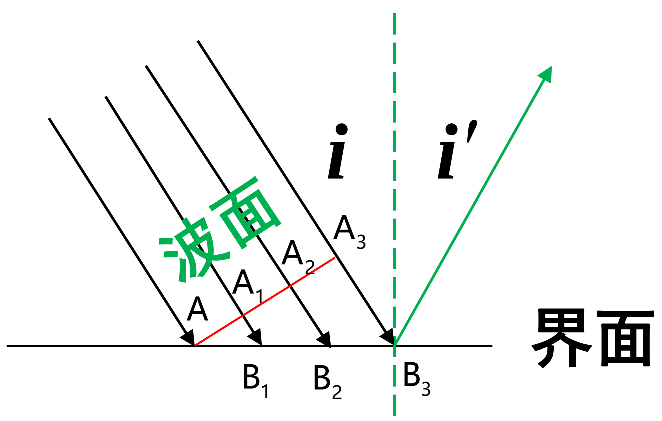
四、波的反射

反射线、入射线、和界面法线在同一平面内，反射角等于入射角



$$i = i'$$

假设 $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3, \quad A_3B_3 = d$



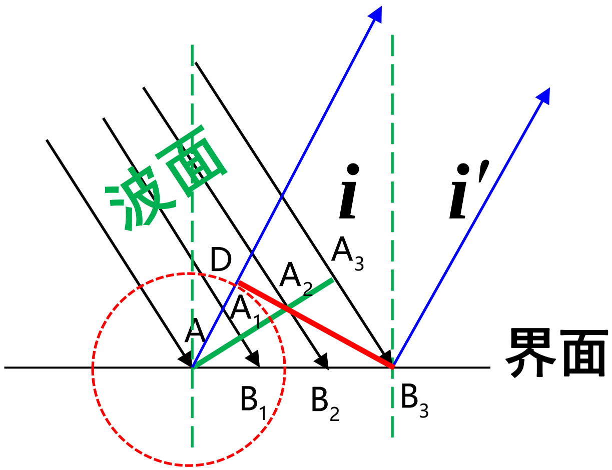
同一波面上的波先后依次到达界面，速度相同

按惠更斯原理同一波面上发出的子波是相同的

A、A_3是同一波面上的两点，在某一时刻，A首先到达界面并发出子波

光线从 A_3 到达 B_3时，从A、B_1、B_2处

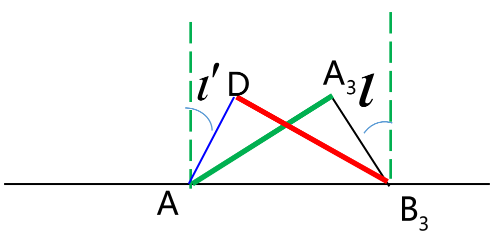
发出的子波半径分别是d、$\frac{2d}{3}$ 、$\frac{d}{3}$



子波的包迹面以红色显示

$$AD = A_3B_3 \qquad AB_3 = AB_3$$

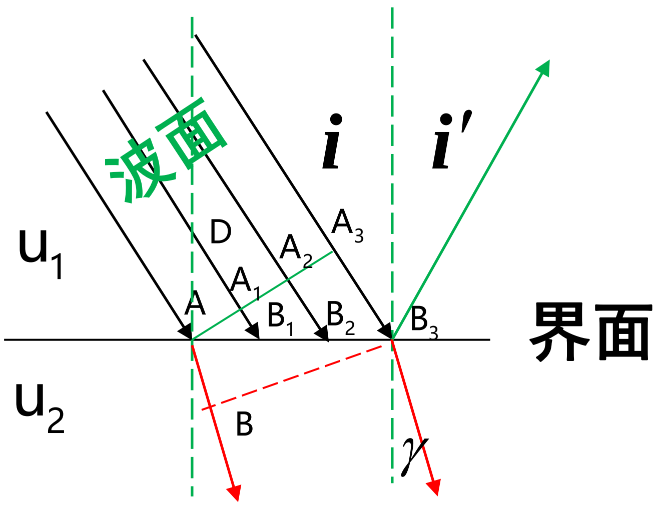
两个三角形全等 $Rt\Delta ADB_3 \cong Rt\Delta AA_3B_3$



$$\angle DAB_3 = \angle A_3B_3A \Rightarrow i = i'$$

五、波的折射：

折射定律 $$\frac{\sin i}{\sin \gamma} = \frac{u_1}{u_2}$$



经过 Δt 后，A_3 发出的子波到达 B_3 。

此时A点的子波到达B,此时有

$$A_3B_3 = u_1\Delta t = AB_3 \sin i$$

$$AB = u_2\Delta t = AB_3 \sin \gamma$$

所以有 $$\frac{\sin i}{\sin \gamma} = \frac{u_1}{u_2}$$ 或 $$\frac{\sin i}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1}$$ $$n = \frac{c}{u}$$

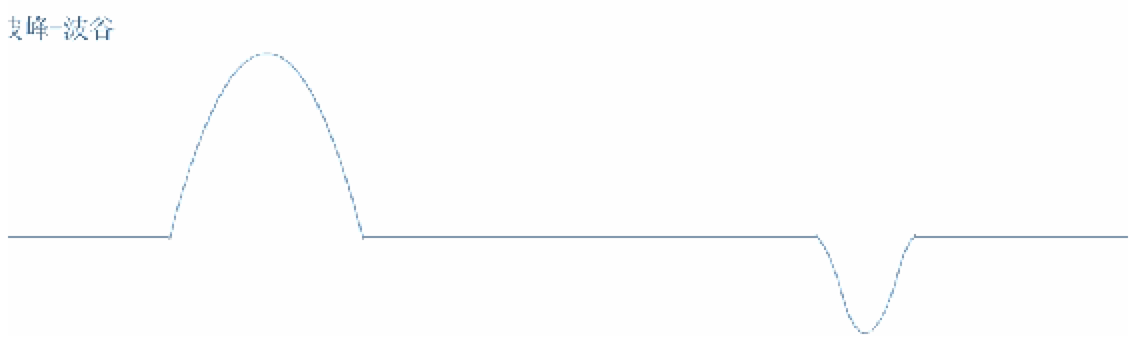
§7-4 波的叠加

一、波的叠加原理：

- **波的独立传播原理：** 几列波在传播时，无论是否相遇，都将**保持各自原有特性**（频率、波长、振幅、振动方向）不变，互不影响。

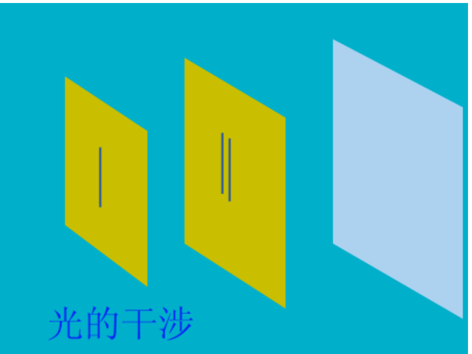
- **波的叠加原理：** 几列波相遇处质元的位移为各列波**单独存在**时在该点引起**位移的矢量和**。

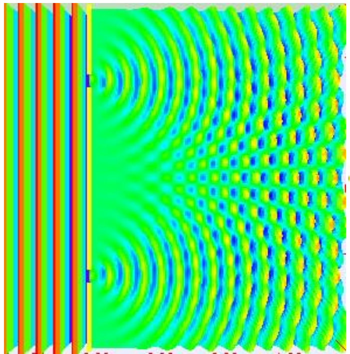
数学上表示为 $$\vec{y}=\vec{y}_1+\vec{y}_2+\vec{y}_3+\cdots+\vec{y}_n$$

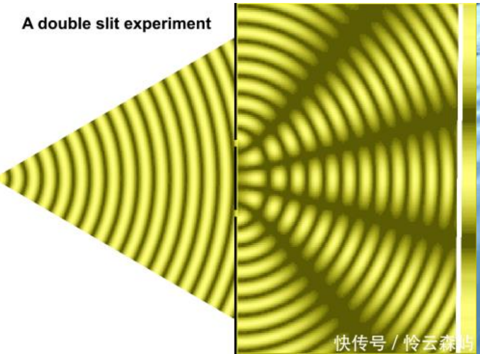


二、波的干涉：

- 当两列简谐波满足**相干条件**时，可得到稳定的**干涉图样**
- **相干条件：**
  - 两列波具有**相同的频率**
  - 两列波具有**相同的振动方向**
  - 两列波的**相位相同**或**相位差保持恒定**
- 满足相干条件的两列波称为**相干波**，它们的波源称为**相干波源**。





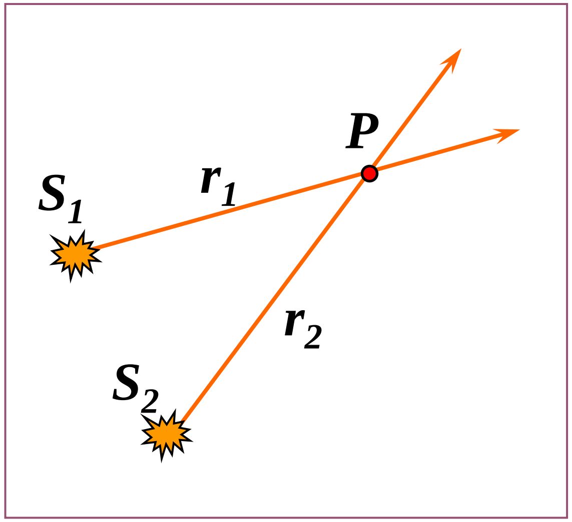


□ 定量分析

设产生简谐波的两波源S_1、S_2的振动方程为：

$$y_{10} = A_{10}\cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$y_{20} = A_{20}\cos(\omega t + \varphi_{20})$$



两列波在波场中P点引起的振动为：

$$y_{1P} = A_1\cos(\omega t + \varphi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda})$$

$$y_{2P} = A_2\cos(\omega t + \varphi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda})$$

这两个同方向、同频率的简谐振动，相位差为：

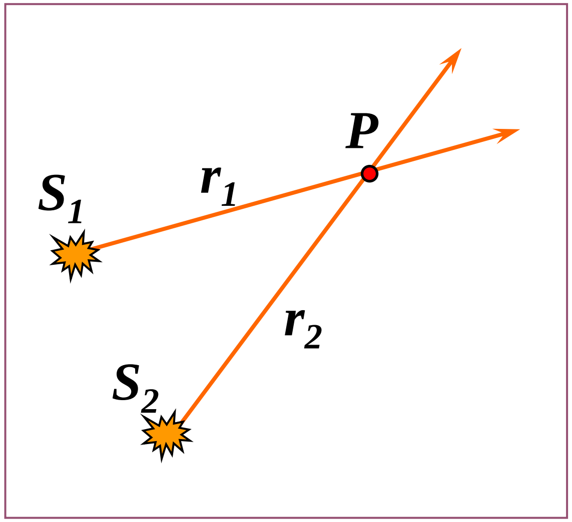
$$\boxed{\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda}}$$

波源相位差

波程差引起的相位差

由简谐振动的合成规律, P点的振动仍为简谐振动:

$$y_P = y_{1P} + y_{2P} = A\cos(\omega t + \varphi_{P0})$$



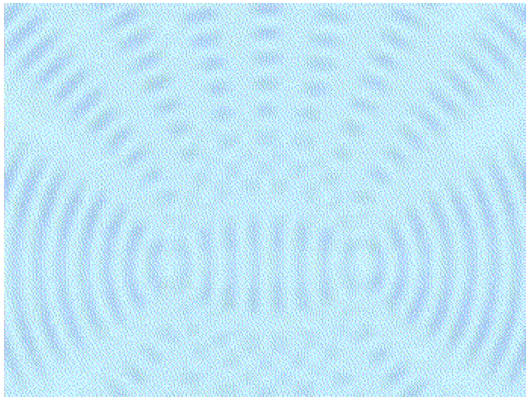
其振幅和初相位为:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

$$\tan\varphi_{P0} = \frac{A_1\sin(\varphi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2\sin(\varphi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}{A_1\cos(\varphi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2\cos(\varphi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}$$

- 两列相干波在空间叠加时，波场中各质元的**振幅*A*保持不变**，有些点处振动始终被加强（**相长干涉**）、有些点处始终被减弱（**相消干涉**），得到稳定的**干涉图样**，称为**干涉现象**。



- 讨论：$\boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}}$

$$
(1)\ \begin{cases} \text{当}\Delta\varphi=\pm 2k\pi\text{时，}A=A_1+A_2 \rightarrow \text{相长干涉} \\ \text{当}\Delta\varphi=\pm(2k+1)\pi\text{时，}A=|A_1-A_2| \rightarrow \text{相消干涉} \end{cases}
$$

(2) $\varphi_{20} = \varphi_{10}$ 时：

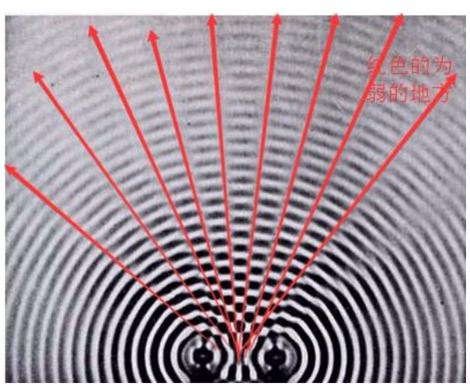
当 $\Delta\varphi = 2\pi \dfrac{r_1 - r_2}{\lambda} = \pm 2k\pi$ 时：

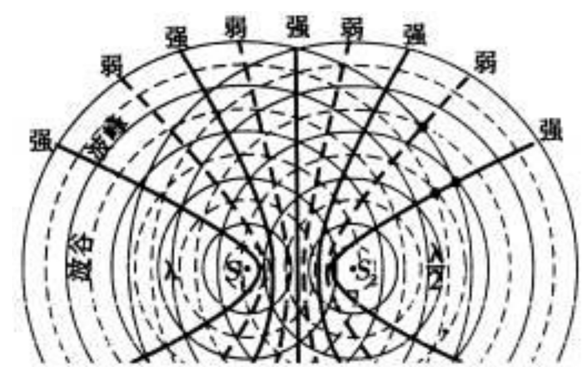
即：$\delta = r_1 - r_2 = \pm\ k\lambda$ 时 → 相长干涉

当 $\Delta\varphi = 2\pi \dfrac{r_1 - r_2}{\lambda} = \pm(2k+1)\pi$ 时：

即：$\delta = r_1 - r_2 = \pm(2k+1)\lambda/2$ 时 →相消干涉

不满足相干条件的两列波不能产生干涉现象。



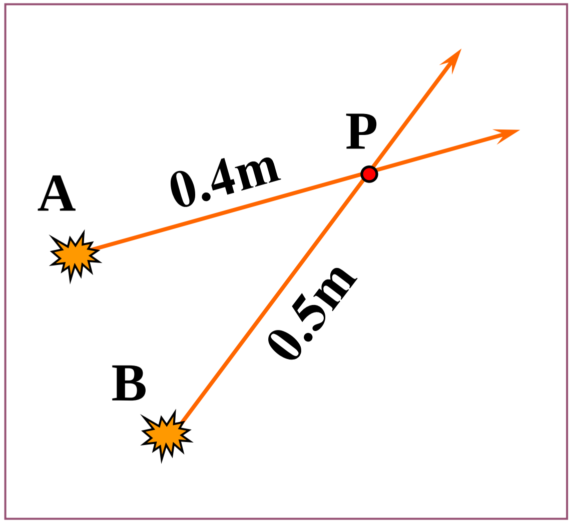


A、B为两平面简谐横波的波源，振动表达式分别为：

$$x_1 = 0.2\times 10^{-2}\cos 2\pi t \quad (m)$$

$$x_2 = 0.2\times 10^{-2}\cos(2\pi t+\pi) \quad (m)$$

两列波在P点相遇，u = 0.2 m/s , PA= 0.4 m , PB = 0.5 m。求：(1)两列波在P点处的相位差；(2)P点合振动的振幅；(3)若两列波振动方向相互垂直，则P点合振动的振幅多大？



(1) $$\Delta\varphi = \pi - 2\pi\frac{PB-PA}{\lambda} = 0$$

(2) 两列波在P点引起的振动相位相同

$$\therefore \quad A_p = A_1 + A_2 = 0.4\times 10^{-2}\ m$$

(3) $$A_p = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 0.283\times 10^{-2}\ m$$

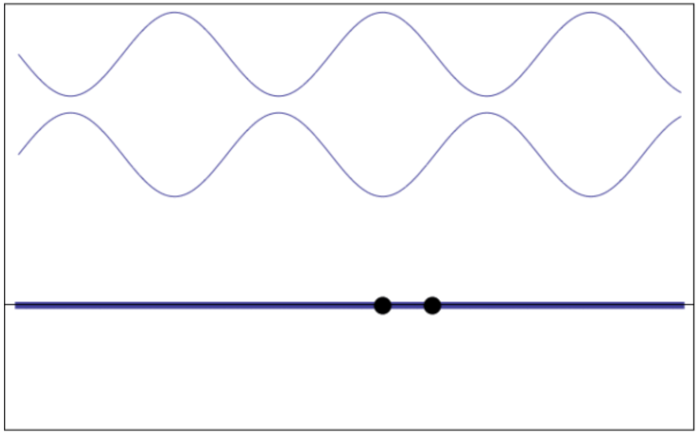
三、驻波：

两列行波：$y_1 = A\cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda})$　　$y_2 = A\cos 2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda})$

合成波是驻波：

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos 2\pi\nu t = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t}$$

（驻波不满足行波方程　$y(t+\Delta t、x+u\Delta t) = y(t、x)$　）



$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos 2\pi\nu t = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t$$

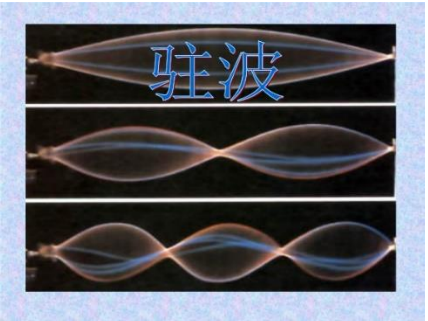
（1）它不是行波，只表示各点都在做简谐振动

（2）驻波的波形、能量都不能传播，驻波不是波，是一种特殊形式的振动。

（3）驻波的振幅：$\left|2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|$ 随x而异，与时间无关

振幅始终最大的位置-------波腹

振幅始终为 0 的位置-------波节



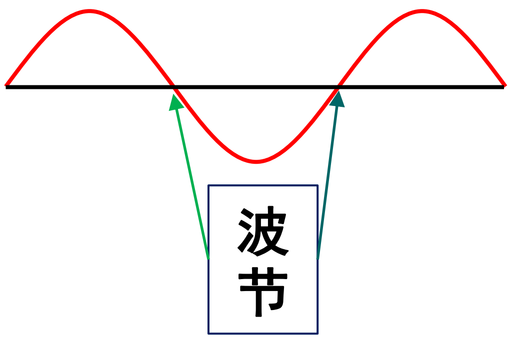
$$\left|\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| = \begin{cases} 1 & 2\pi\dfrac{x}{\lambda} = \pm k\pi \Rightarrow \boxed{x = \pm k\dfrac{\lambda}{2}} \\ 0 & 2\pi\dfrac{x}{\lambda} = \pm(2k+1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{4}} \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} \pm k\dfrac{\lambda}{2} & \text{波腹} \\ \pm(k+\dfrac{1}{2})\dfrac{\lambda}{2} & \text{波节} \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

- 相邻的波节 $x_{k+1} - x_k = \left[k+1+\dfrac{1}{2}-(k+\dfrac{1}{2})\right]\dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{\lambda}{2}$
- 相邻的波腹 $x_{k+1} - x_k = (k+1-k)\dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{\lambda}{2}$
- 测得波节、波腹位置可求出波长。

(4) 驻波的相位：

$$\boxed{y = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t}$$



- 相邻波节之间 $\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$符号相同，

  所以：**相邻波节间所有质元相位相同**；

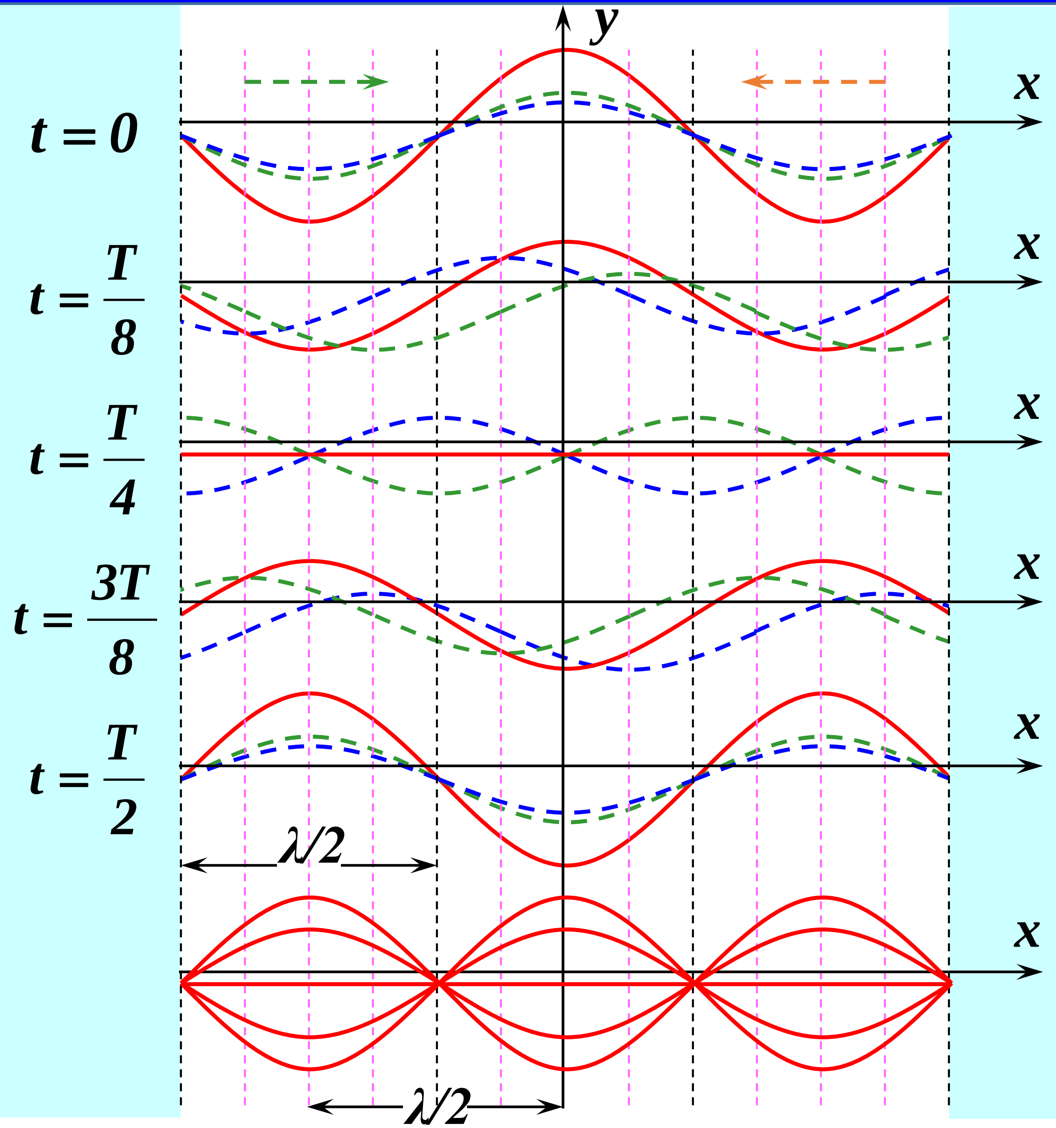
- 同一波节两侧 $\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$ 符号相反，

  所以：**同一波节两侧的质元相位相反**。

在**波节处**产生 π 相位的**跃变**

同一段上的各点振动同相，相邻两段各点反相。**驻波实际上是分段振动现象**，驻波中没有振动状态、相位的传播，也没有能量的传播，故被称为**驻波**

$$y = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t$$



两列反向传播的相干波形成驻波。

(1) 波节—振幅为零；

(2) 波腹—振幅最大；

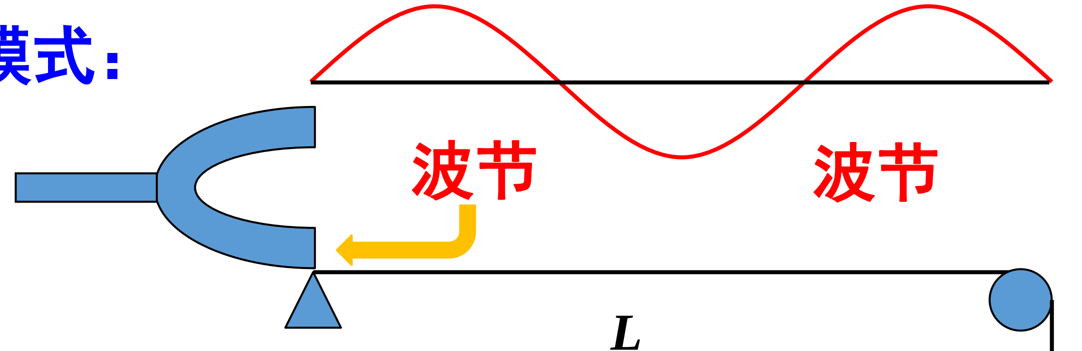
(3) 波节、波腹位置不变

(4) 相邻波节(波腹)相距 $\lambda/2$；

(5) 相邻波节间同相位；

(6) 同一波节两侧反相位；

四、振动的简正模式：



- 两端固定弦线形成驻波时，波长和弦长将满足

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

即系统允许的波长为 $\lambda_n = \dfrac{2L}{n}$

由于 $\upsilon = \dfrac{u}{\lambda}$ 　相应的频率 $\upsilon_n = n\dfrac{u}{2L} \quad n = 1, 2, 3\cdots$

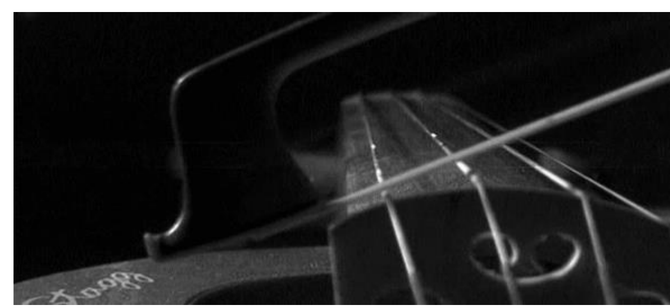
- 这个频率是“**量子化**”的，称为**本征频率**，此式决定的各种振动方式称为弦线的简正模式。
- 最低的频率叫**基频**，为基频整数倍的称为**谐频**

□ 两端固定，长为L的弦可能产生的振动频率

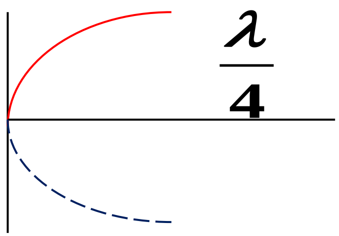
弦的两端固定，所以均为波节，故仅当弦长为半波长的整数倍时才能形成稳定的驻波。即：$L=\frac{1}{2}n\lambda_n \qquad n=1,2,3,\cdots$

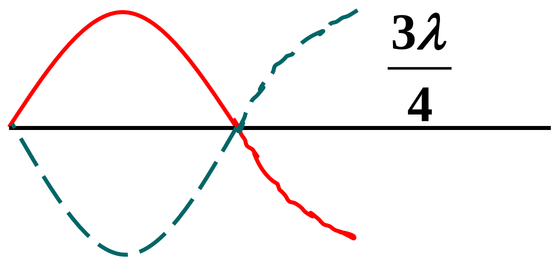
波速：$u=\sqrt{\frac{T}{\mu}}=\lambda_n \nu_n$ 所以：$\nu_n=\frac{u}{\lambda_n}=n\frac{u}{2L}=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad n=1,2,3,\cdots$

- 当n=1时，ν_1称为**基频**；n>1时，ν_n称为**倍频**
- 弦的线密度和弦长一定时，调节张力可改变声音的频率
- 弦乐如小提琴 $\lambda_n=\frac{2L}{n} \quad \upsilon_n=n\frac{u}{2L}$

□ 一端固定，一端自由的振动简正模式

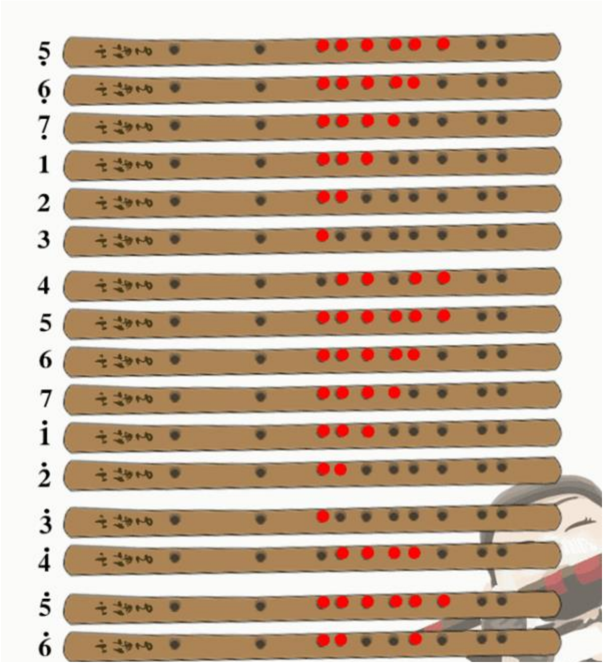




$$L=(n-\frac{1}{2})\frac{\lambda_n}{2} \qquad n=1,2,3\cdots$$

■ 吹奏乐如笛子

$$\lambda_n=\frac{2L}{2n-1} \qquad \upsilon_n=(2n-1)\frac{u}{2L}$$



§ 7-5 多普勒效应

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

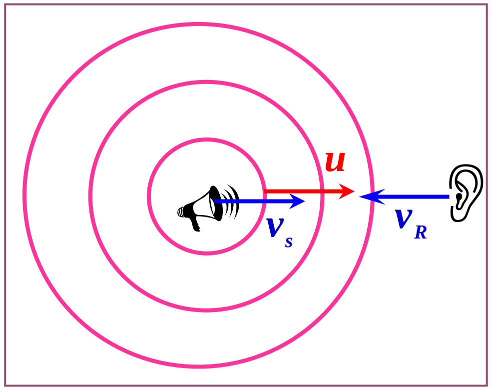
□ **多普勒效应：观测频率和波源、观测者的运动速度相关的现象，该效应由奥地利物理学家多普勒发现**

- **波源与观察者相对静止时，观察者测得的频率与波源相同**
- **但当波源和观察者相对介质运动时，观察者测得的频率与波源频率不同**
- **以波源和观察者沿两者连线方向运动为例讨论**

[一则视频解释什么是多普勒效应（the Doppler effect）？ _哔哩哔哩_bilibili]

□ 波源、接收者都静止（ $v_s = 0, v_R = 0$ ）：

$$\nu_s = \nu_R = \frac{u}{\lambda} \qquad u = \lambda\nu$$

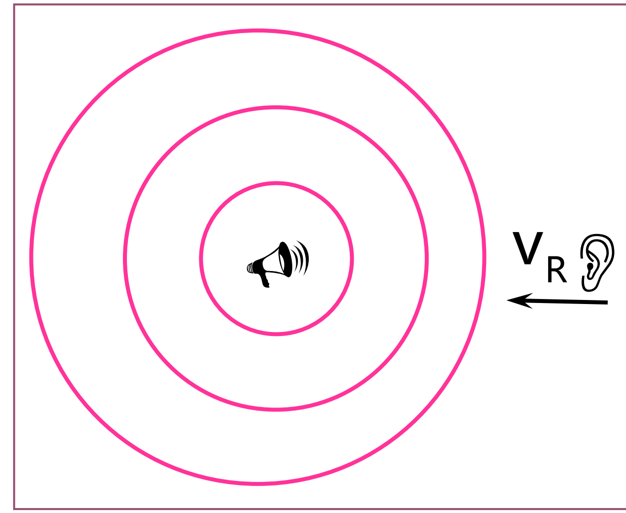


- 速度u由介质特性决定

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- 频率υ是介质中某点单位时间内振动的次数，或是单位时间通过该点的“完整波”的个数；
- 波长 λ 是指一个完整波在介质中沿波线展开的长度。

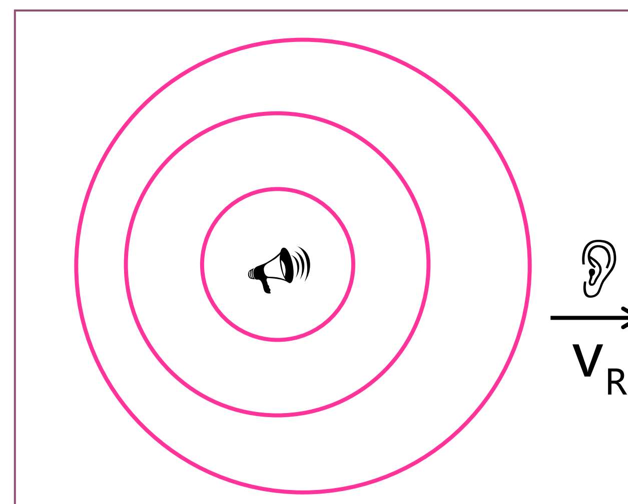
□ 波源静止、观察者运动（$\upsilon_S = 0$、$\upsilon_R \neq 0$）：



■ **观察者向着波源运动：**

波以$u+\upsilon_R$通过观察者，波长不变。

$$\nu' = \frac{u+\upsilon_R}{\lambda} = \frac{u+\upsilon_R}{u}\cdot\nu_s \quad (>\nu)$$



■ **观察者离开波源运动：**（$\upsilon_R < u$）

波以$u-\upsilon_R$通过观察者，波长不变。

$$\nu' = \frac{u-\upsilon_R}{\lambda} = \frac{u-\upsilon_R}{u}\cdot\nu_s \quad (<\nu)$$

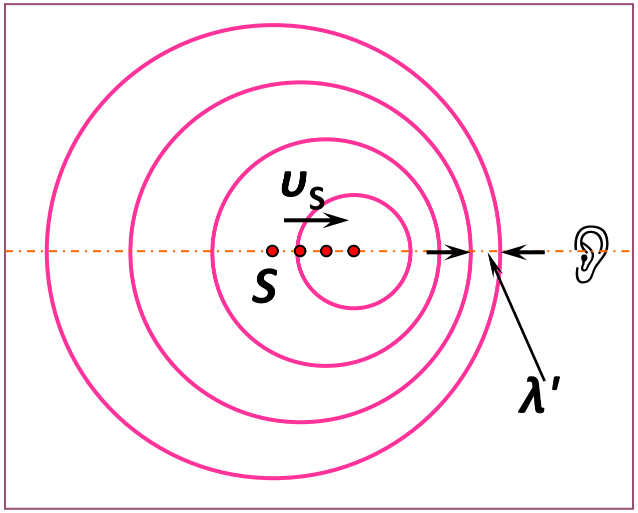
□ 观察者静止、波源运动（$\upsilon_R=0$ 、$\upsilon_S\neq0$ ）：

■ 波源向着观察者运动：

波速不变，波长变短：

$$\lambda'=\lambda-\upsilon_s T=(u-\upsilon_s)T$$

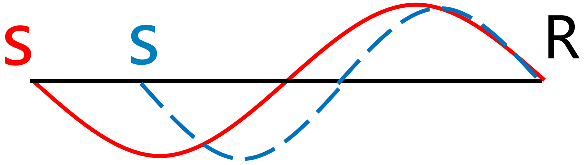
$$\boxed{\nu'=\frac{u}{\lambda'}=\frac{u}{u-\upsilon_s}\cdot\frac{1}{T}=\frac{u}{u-\upsilon_s}\cdot\nu_s\quad(>\nu_s)}$$



■ 波源离开观察者运动：

波速不变，波长变长：

$$\boxed{\nu'=\frac{u}{\lambda'}=\frac{u}{u+\upsilon_s}\cdot\frac{1}{T}=\frac{u}{u+\upsilon_s}\cdot\nu_s\quad(<\nu_s)}$$



□ 波源和观察者同时运动（$\upsilon_S \neq 0$ 、 $\upsilon_R \neq 0$ ）：

$$\boxed{\nu' = \frac{u \pm \upsilon_R}{u \mp \upsilon_S} \cdot \nu_s}$$

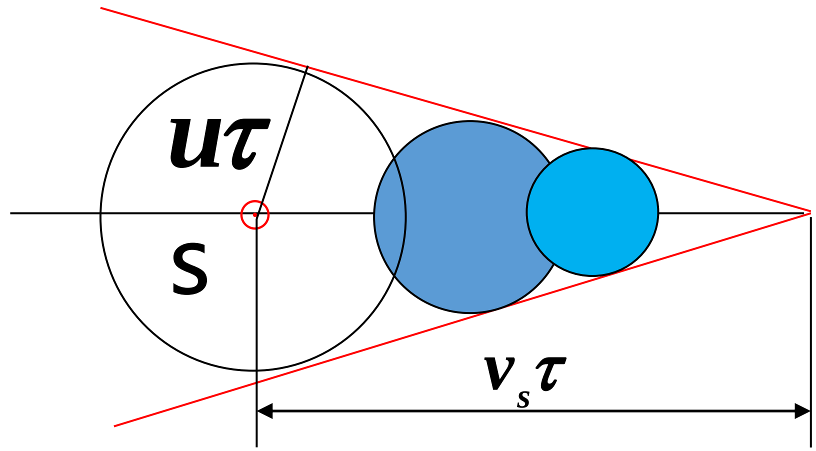
- 波源、观察者相互接近时，观测频率高于波源频率；相互远离时，观测频率低于波源频率。

- 波源运动和观察者运动对观测频率的影响不同。即使当$\upsilon_S = \upsilon_R$时，对频率的影响也不同。

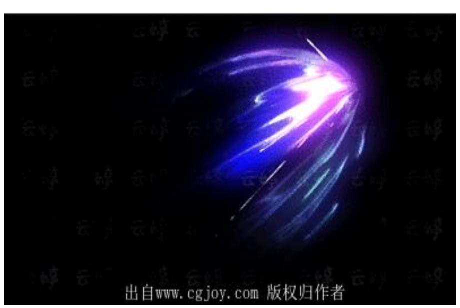
- 当运动不沿两者的连线时，只需考虑速度沿两者连线的分量即可。

电磁波、光波也有多普勒效应，但两者本质上是有差异的，是由于时间相对性造成的。

- 如果波源向着观察者运动的速度大于波速(即 $V_{源}>u$)，那么在这种情况下，急速运动着的波源前方不可能有任何波动产生，所有波前将被积压而聚集在一圆锥面上，如图。



- 这个圆锥面上，波的能量已被高度集中，容易造成巨大的破坏，这种波称为**冲击波**或**激波**。
- 由于激波面空气压强的突然变化，使物体遭到破坏。



*§7-6 波的能量

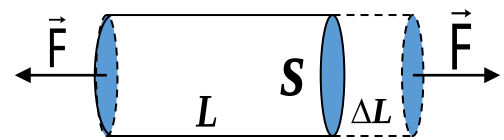
一、物体的弹性形变知识介绍

- **纵应变（正应变）：线应变**、无单位、无量纲

  形变量与原长的比，单位长度的形变

  直杆长度为L，横截面为S，两端受拉力（压力）F作用，杆沿轴线拉伸（压缩)，杆长度变化为ΔL

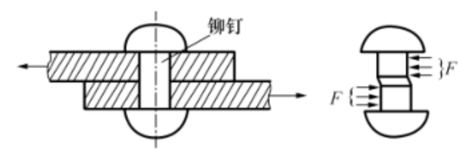
  纵应变 $\varepsilon = \Delta L / L$



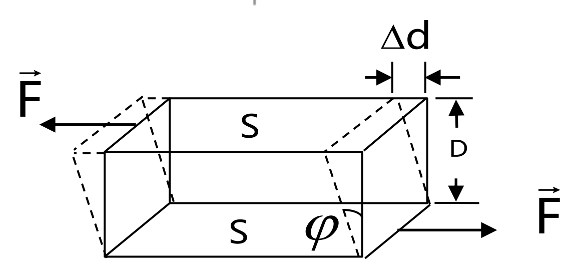
- **切应变（剪应变）：角应变**、单位-弧度、无量纲

  层错距离和层间距离比，单位垂直距离的层错

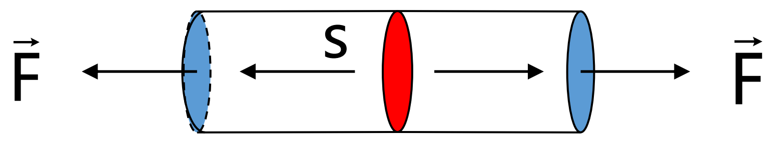
  长方体元上下表面施加大小相等力F，变为平行六面体，设长度不变。

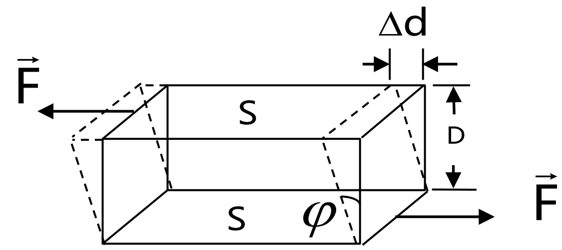


  切应变 $\dfrac{\Delta d}{D} = \tan\varphi \approx \varphi$



□ 应力：物体中单位面积上的受力，即各部分内力作用的强度





- 应力是矢量，方向就是内力F的方向，沿截面法向的分量称为正应力，沿切向的分量称为切应力

- 截面上内力与截面面积之比称作截面处的正应力（法向应力）

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{F}{S}$$

$\sigma \geq 0$	拉伸
$\sigma \leq 0$	压缩

- 对于切变：上下面受力F与面积之比叫做切应力（或剪应力）

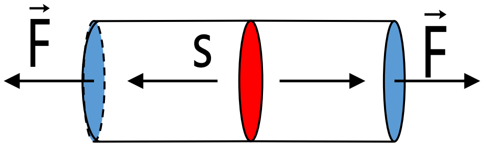
$$\tau = \frac{F}{S}$$

- 应力单位：Pa (N/m^2)，帕斯卡， 简称帕

- **胡克定律：** 对于弹性体，若应力在材料弹性限度内，则应力与应变成**正比**。

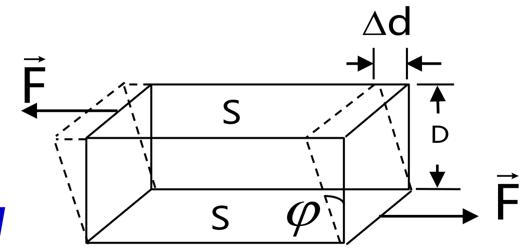
■ 纵变 $\sigma = Y\varepsilon$ Y称为杨氏模量

则 $F = \sigma s = Y\varepsilon s = Ys\dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{Ys}{l}\Delta l = k\Delta l$



■ 切变 $\tau = G\varphi$ G称为切变模量

则 $F = \tau s = G\varphi s = Gs\dfrac{\Delta d}{D} = \dfrac{Gs}{D}\Delta d = k'\Delta d$



■ 力的形式与弹簧模型类似：与形变成正比

□ 弹性形变势能

$$k=\frac{Ys}{l}\qquad k'=\frac{Gs}{D}$$

■ 纵变

$$W_p=\frac{1}{2}k(\Delta l)^2=\frac{1}{2}\frac{Ys}{l}(\Delta l)^2=\frac{1}{2}Ysl(\Delta l/l)^2=\frac{1}{2}YV(\Delta l/l)^2$$

单位体积内的势能 $w_p=\dfrac{W_p}{V}=\dfrac{1}{2}Y(\dfrac{\Delta l}{l})^2=\dfrac{1}{2}Y\varepsilon^2$

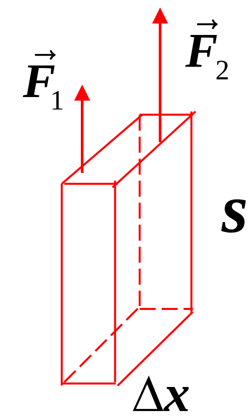
■ 切变

$$W_p=\frac{1}{2}k'(\Delta d)^2=\frac{1}{2}\frac{Gs}{D}(\Delta d)^2=\frac{1}{2}GsD(\Delta d/D)^2=\frac{1}{2}GV(\Delta d/D)^2$$

单位体积内的势能 $w_p=\dfrac{W_p}{V}=\dfrac{1}{2}G(\Delta d/D)^2=\dfrac{1}{2}G\varphi^2$

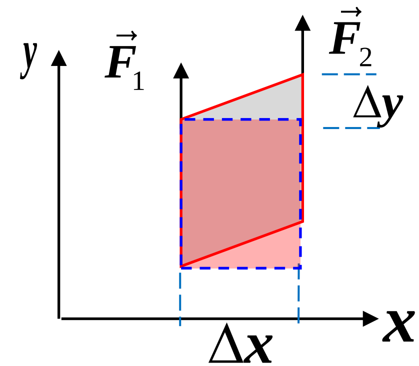
二、弹性介质中的波速

考虑一个处于x附近的小体积元，不同位置处两个面上力不相同，引起切变



切变力 $$F/s = G\varphi = G(\frac{\Delta d}{D}) = G(\frac{\Delta y}{\Delta x})$$

即 $$F = Gs(\frac{\partial y}{\partial x})$$



体积元上的合力

$$F_2 - F_1 = Gs\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] = Gs\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\Delta x$$

按牛顿定律 $f = ma$

$$\rho s \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = sG(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2})\Delta x \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

行波函数 $y(x,t) = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$ $\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

有横波速度： $u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

- 固体：
$$\begin{cases} u_{横} = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}} \\ u_{纵} = \sqrt{\dfrac{Y}{\rho}} \end{cases}$$

  G：固体的切变弹性模量

  Y：固体的杨氏弹性模量

- 张紧的软绳：$u_{绳} = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$　T：张力；μ：质量线密度

- 流体：$u = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}}$　B：流体的容变弹性模量

- 空气中的声波：$u_{声} = \sqrt{\dfrac{\gamma p}{\rho}} \approx 331\ {}^{m}\!/_{s}$

三、弹性介质中波的能量

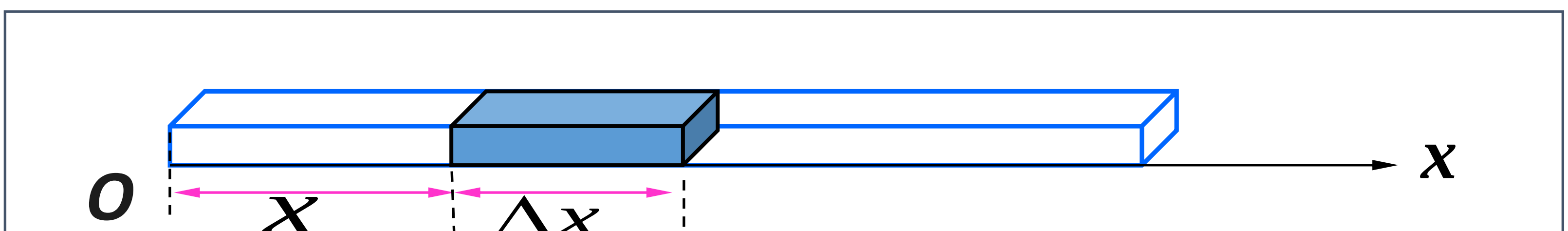
机械波在介质中传播时，各个质元均在平衡位置附近振动，因而具有振动动能和弹性势能。

$$\boxed{\text{机械波能量=质元动能+质元形变势能}}$$

设一列简谐横波沿均匀细杆传播，波的表达式：

$$y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$$ 振动速度： $$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\sin[\omega(t - x)]$$

细杆上任取体积元$\Delta V = S\Delta x$，其质量为$\Delta m = \rho\Delta V$。



□ 动能：

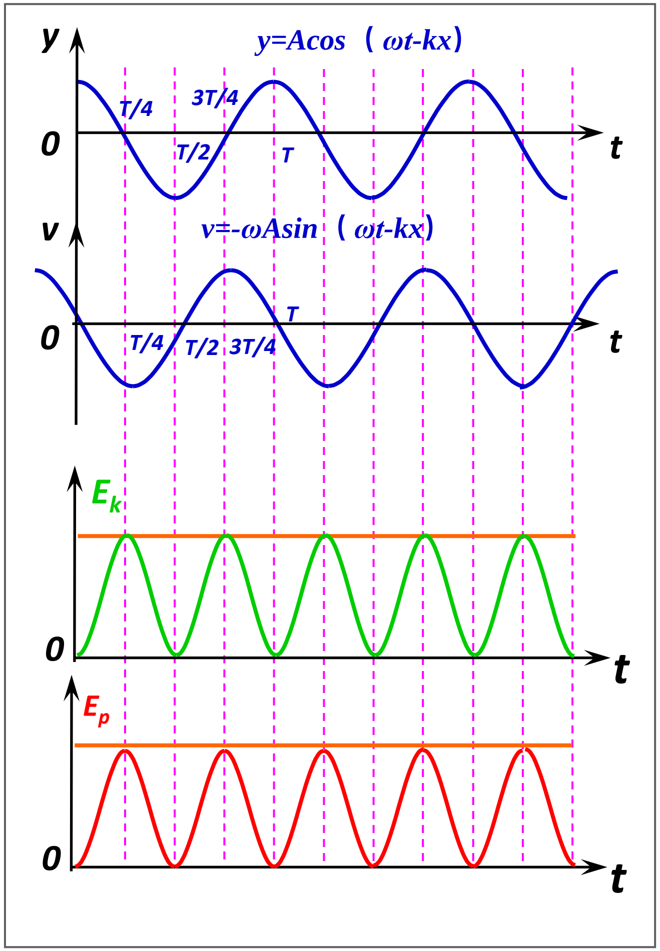
$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}(\Delta m)(\frac{\partial y}{\partial t})^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2 A^2 \sin^2\omega(t-\frac{x}{u})}$$

□ 势能：

$$w_p = \frac{W_p}{V} = \frac{1}{2}G(\Delta d/D)^2 = \frac{1}{2}G\varphi^2$$

$$\varphi = \frac{\partial y}{\partial x} \qquad u^2 = \frac{G}{\rho} \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{A\omega}{u}\sin\omega(t-\frac{x}{u})$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}G(\frac{\partial y}{\partial x})^2\Delta V = \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2 A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})}$$



- E_k、E_p随时间周期性变化且$E_k=E_p$
- E_k、E_p同相，即它们同时达到，最大值(过平衡位置时)；同时为零(最大位移时)

□ **机械能：**

$$E=E_k+E_p=\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

□ **波的能量密度**：单位体积介质内的能量。

$$w=\frac{E}{\Delta V}=\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})\qquad (J/m^3)$$

□ **波的平均能量密度**：能量密度在一个周期内的平均值。

$$\bar{w}=\frac{1}{T}\int_0^T wdt=\rho\omega^2A^2\frac{1}{T}\int_0^T\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})dt=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$$

- 波动质元机械能不守恒，而振动粒子的机械能守恒
- E增大时，体积元从一侧吸收能量；E减小时，从另一侧输出能量，从而实现能量的传递。

四、波的能流、能流密度：

能流： 单位时间内通过某一面积的波的能量。

平均能流： $\Delta E = \bar{w} u \Delta S = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cdot u \cdot \Delta S$

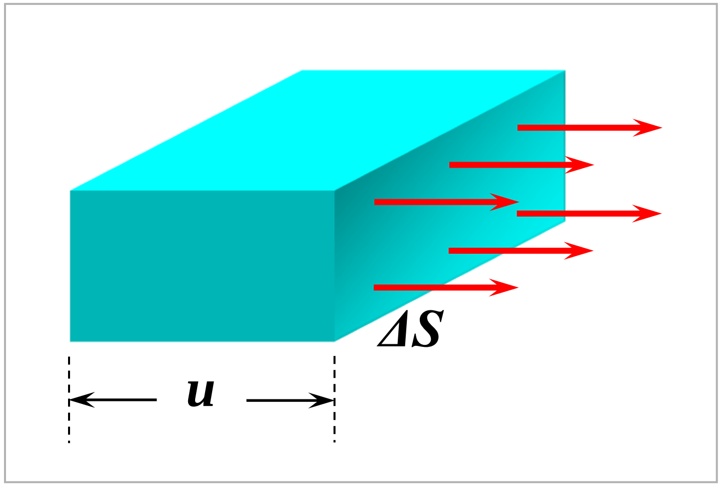
能流密度（波的强度）：

通过垂直于波传播方向单位面积的平均能流。

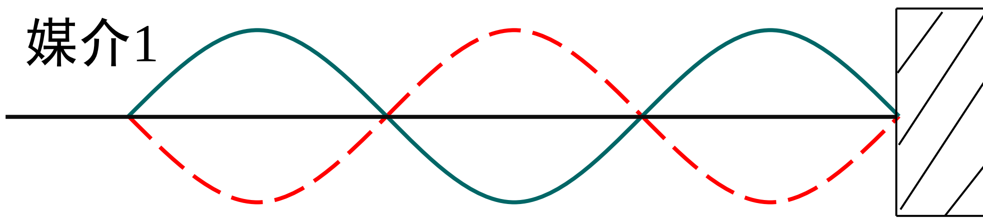
$$\boxed{I = \frac{\Delta E}{\Delta S} = \bar{w} u = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cdot u}$$

或：$$\boxed{\vec{I} = \bar{w} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \vec{u}}$$

单位：(W/m^2)



五、波反射



一列行波遇到两种介质的分界面时，会发生反射。入射波与反射波叠加可形成驻波。

定义：介质密度与波速的乘积 ρu 称为波阻。

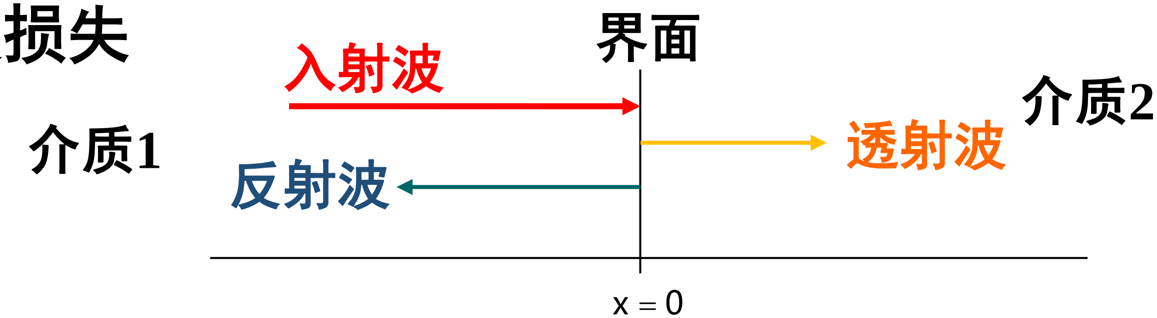
ρu大称为波密介质； ρu小称为波疏介质。

- **全波反射：**波从波密介质射到波疏介质表面时，入射波与反射波在反射点处相位相同，形成波腹。

- **半波反射：**波从波疏介质射到波密介质表面时，入射波与反射波在反射点处相位相反，形成波节。

■**半波损失**在反射点处反射波相位突变 π 的现象称为。

机械波半波损失



设入射波是 $\varphi_1 = A_1 \cos(\omega t - k_1 x)$ $\quad k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \dfrac{\omega}{u}$

反射波是 $\varphi_1' = A_1' \cos(\omega t + k_1 x + \phi_1)$

介质1中的机械波为

$$\xi_1(x,t) = \varphi_1(x,t) + \varphi_1'(x,t)$$
$$= A_1 \cos(\omega t - k_1 x) + A_1' \cos(\omega t + k_1 x + \varphi_1)$$

介质2中的透射机械波为

$$\xi_2(x,t) = \varphi_2(x,t) = A_2 \cos(\omega t - k_2 x + \varphi_2)$$

在界面两侧波的位移连续，应力相同

即 $\xi_1(0,t)=\xi_2(0,t)$ $\quad G_1\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\Big|_{x=0}=G_2\frac{\partial\xi_2}{\partial x}\Big|_{x=0}$

（切应力关系：$\tau=G\varphi=G\frac{\Delta d}{D}=G\frac{\partial y}{\partial x}$ 波速 $u=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$）

故有 $A_1\cos\omega t+A_1'\cos(\omega t+\varphi_1)=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

必有 $\begin{cases} A_1+A_1'\cos\varphi_1=A_2\cos\varphi_2 & \omega t=0 \\ A_1'\sin\varphi_1=A_2\sin\varphi_2 & \omega t=\pi/2 \end{cases}$ （位移相同）

对于应力

$$G_1k_1\left[A_1\sin\omega t-A_1'\sin(\omega t+\varphi_1)\right]=G_2k_2A_2\sin(\omega t+\varphi_2)$$

必有 $\rho_1u_1^2k_1(A_1-A_1'\cos\varphi_1)=\rho_2u_2^2k_2A_2\cos\varphi_2 \quad \omega t=\pi/2$

$-\rho_1u_1^2k_1A_1'\sin\varphi_1=\rho_2u_2^2k_2A_2\sin\varphi_2 \quad \omega t=0$

令声阻抗 $z_1=\rho_1u_1 \quad z_2=\rho_2u_2$ $\qquad k=\frac{\omega}{u}$

则有
$$z_1(A_1 - A_1'\cos\varphi_1) = z_2 A_2 \cos\varphi_2 \qquad (1)$$
$$-z_1 A_1' \sin\varphi_1 = z_2 A_2 \sin\varphi_2$$

方程组的解只能是 $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = 0$ φ_1，φ_2只能取0或π

由 $$A_1 + A_1'\cos\varphi_1 = A_2\cos\varphi_2 \qquad (2)$$

（2）式乘z_2减（1）式

得 $$z_2(A_1 + A_1'\cos\varphi_1) - z_1(A_1 - A_1'\cos\varphi_1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{A_1'}{A_1}\cos\varphi_1 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \qquad \frac{A_2}{A_1}\cos\varphi_2 = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}$$

若 $z_1 \geq z_2$ 则 $\varphi = 0$

若 $z_1 \leq z_2$ 则 $\varphi = \pi$ 半波损失

*§7-7 声波

在弹性介质中传播的机械波------统称为声波

典型可闻声波 $20 \sim 20000\,Hz$

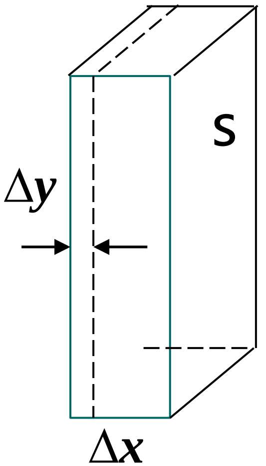
次声波 $10^{-4} \sim 20\,Hz$

超声波 $2\times10^{4} \sim 5\times10^{8}\,Hz$

声压: 介质中某点的压强与无声波传播时的压强之差称为瞬时声压

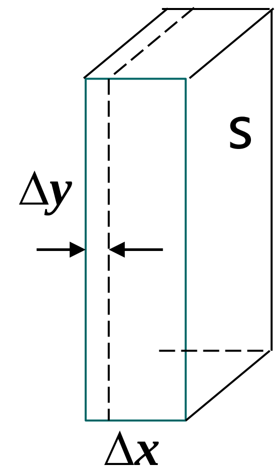
通常考虑声波为简谐纵波，其对应于体应变 $\dfrac{\Delta v}{v}$

按胡克定律 $\Delta p = -k\dfrac{\Delta v}{v}$



设振动方向为y，与传播方向相同传播

截面振动时基本不变。考察一个体积元



$$v_1 = s\bullet\Delta x \qquad v_2 = s\bullet(\Delta x - \Delta y)$$

$$\Delta v = v_2 - v_1 = -\Delta y\bullet s$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{-s\Delta y}{s\Delta x} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$y = A\cos\omega(t-\frac{x}{u}) \qquad u = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$$

声压 $p = k\dfrac{\partial y}{\partial x} = k\dfrac{\omega}{u}A\sin\omega(t-\dfrac{x}{u}) = \rho u\omega A\sin\omega(t-\dfrac{x}{u})$

声音强度由振动幅度的大小决定，以压力计算表示时称**声压**。

以能量来计算称声强

声波的能流密度称为**声强**。

单位时间在垂直于传播方向上、通过单位面积上的声波平均能量---平均能流密度

引起人听觉的声波有频率范围和声强范围

$$20 \sim 20000\,Hz \qquad 10W \cdot m^{-2} \sim 10^{-12} W \cdot m^{-2}$$

正常听觉反应的声强范围（$\nu = 1000\ Hz$）：

$$\begin{cases} \text{最低（闻域）：} & 10^{-12} \quad (W/m^2) \\ \text{最高（痛感域）：} & 1 \quad (W/m^2) \end{cases}$$

声强（I）与声压（P）的关系为：

$$I = \frac{p^2}{\rho u}$$

此时P为有效值

上述结论可以这样考虑

力 $F = p \cdot s$ 功 $w = F \cdot \Delta y$

单位时间、单位面积上的声波能量

$$I = p \Delta y / \Delta t = p \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u}) \qquad p = \rho u \omega A \sin\omega(t - \frac{x}{u})$$

$$I = \rho u \omega A \sin\omega(t - \frac{x}{u}) A\omega \sin\omega(t - \frac{x}{u})$$

$$= \rho u \omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$$

响度：人耳对声音强弱的主观感觉。

响度大致正比于声强的对数。

声强级：按对数标度的声强。

$$L = lg\frac{I}{I_0}$$ （单位：贝尔）

$$\boxed{L = 10\,lg\frac{I}{I_0}}$$ （单位：分贝 dB）

式中I_0为闻域的声强（$I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$）。

- 声强增大 10 倍，声强级增加 10 dB 。
- 声强增大 1 倍，声强级增加 3 dB 。

狗叫声功率约为*1mW*，设叫声向四周均匀传播，求*5m*远处的声强级；若两只狗在同一地方同时叫，则*5m*处的声强级为多少？

若不计空气对声波的吸收，则：

$$P = I \times 4\pi r^2$$

$r = 5m$ 处声波的强度（平均能流密度）：

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = 3.18 \times 10^{-6}\ W/m^2$$

$$\therefore \quad L = 10\lg\frac{I}{I_0} = 65\ dB$$

（$I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$）

两只狗同时叫时：

$$L' = 10\lg\frac{2I}{I_0} = 68\ dB$$