作业：

P26.

15. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$

错误：$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n)^2}$

$= 0+0+\cdots+0=0$.

注：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2}\right)$，lim 与无穷求和一般不能交换.

① $\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}\to 0$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \cdots = 0$.

② $\underset{\downarrow\atop 0}{\frac{n}{(2n)^2}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{n}{(n+1)^2}\to 0 \qquad n\to\infty$.

例：$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$.　考虑 $\{a_n\}$ 极限.

解. 先说明收敛.

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0$

$a_n \leqslant \frac{n}{n+1} < 1$.

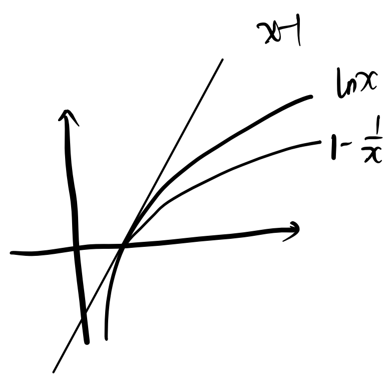
$\Rightarrow \{a_n\}$ 收敛

- $a_n \geqslant \frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.
- $\ln x \leqslant x-1\ (x>1)$ 从而 $\frac{1}{n} \geqslant \ln\frac{n+1}{n}$

从而 $a_n \geqslant \ln(2n+1)-\ln(n+1)=\ln\frac{2n+1}{n+1}$

$\ln x \geqslant 1-\frac{1}{x}\ (x>1)$ 从而 $\frac{1}{n+1}\leqslant \ln\frac{n+1}{n}$

从而 $a_n \leqslant \ln 2n-\ln n=\ln 2$.



由夹逼原理，知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2$. $\square$

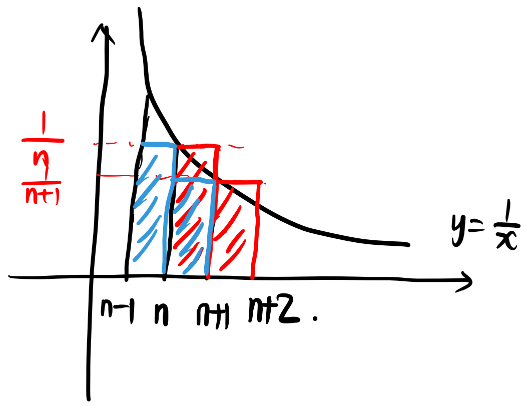
注：这里开盒不等式：$\begin{cases} \ln x \leq x-1 \\ \ln x \geq 1-\frac{1}{x} \end{cases}$ 如何找到.

方法是看出 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. 同时 $\frac{1}{x}$ 为单调递减数列.

从而见右图.

红色部分高于 $y=\frac{1}{x}$，从而可用 $y=\frac{1}{x}$ 积分得到下界估计.

蓝色部分低于 $y=\frac{1}{x}$，从而可用 $y=\frac{1}{x}$ 积分得到上界估计.



例：$H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$. 求证：$\{H_n\}$ 发散到 $+\infty$.

证：① $H_{2^n} = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

$$> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{n}{2}+1 \to \infty.$$

从而 H_{2^n} 发散.

②. 即证 $\{H_n\}$ 不为 Cauchy 列.

$\forall N>0,\quad n>N,\quad H_{2n}-H_n = \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.

③ 用上述方法.

$$\frac{1}{n} \geq \ln\frac{n+1}{n}$$

从而 $H_n \geq 1+\ln\frac{n+1}{2} \to \infty$. $\square$

P27 26. $\frac{0}{0}$ 型 Stolz 定理的证明.

Pf. 只证 A 有限. $A=\pm\infty$ 时方法类似.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} = A.$$

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon>0$. $\exists N>0$, $n>N$时, $A-\varepsilon < \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} < A+\varepsilon.$

$\vdots$

$$A-\varepsilon < \frac{a_{n+p-1} - a_{n+p}}{b_{n+p-1} - b_{n+p}} < A+\varepsilon.$$

$\Rightarrow$ $$A-\varepsilon < \frac{a_n - a_{n+p}}{b_n - b_{n+p}} < A+\varepsilon$$

令 $p\to\infty$. $b_{n+p}\to 0$, $a_{n+p}\to 0$. 从而 $A-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < A+\varepsilon$. $\boxed{/\!/}$

习题:

- 若有 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 则在数列 $\{a_n\}$ 中必有最小值.

证: 令 $M=a_1$, $\exists N>0$, $\forall n>N$, $a_n > a_1$.

从而 $\min_{1\le k\le N}\{a_k\} = \min_{n}\{a_n\}$. $\boxed{/\!/}$.

注: 可以类比到连续函数. 寻找最值就可以只考虑有限区域上.

- $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \alpha$.

证: 先考虑 $\alpha=0$. 则 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N>0$, $n>N$时, $|x_n|<\varepsilon$.

又 $\{x_n\}$ 收敛, $\exists M>0$. $|x_n|<M$. $\forall n$.

从而 $$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = \frac{x_{N+1}+\cdots+x_n}{n} + \frac{x_1+\cdots+x_N}{n} = S_1+S_2$$

小 $|S_1| < \frac{n-N}{n}\varepsilon < \varepsilon$.

+

少 $|S_2| < \frac{N}{n} M$

令 $\tilde{N} = [\frac{NM}{\varepsilon}]+1$，则 $n>\tilde{N}$，$|\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}|<2\varepsilon$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = 0$.

类似，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(x_1-\alpha)+\cdots+(x_n-\alpha)}{n} = 0$ （$\alpha\neq 0$时）.

$\boxed{/\!/}$

• $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = 0 \not\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

例: $x_n = (-1)^n$.

注: 上述 Cesaro 极限，在 Fourier 级数中会用到.

• $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1y_n+\cdots+x_ny_1}{n} = \alpha\beta$.

证: 先设 $\alpha,\beta=0$. 由$\{x_n\}$ $\{y_n\}$均收敛，$\exists M>0$, s.t. $|x_n|, |y_n|\leq M$, $\forall n$.

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N>0$, $n>N$时, $|x_n|<\varepsilon$, $|y_n|<\varepsilon$.

则 $\frac{x_1y_n+\cdots+x_ny_1}{n} = \frac{x_1y_n+\cdots+x_{n-N}y_N}{n} + \frac{x_{n-N+1}y_{N-1}+\cdots+x_ny_1}{n}$

$= S_1 + S_2$.

$|S_1| \leq \frac{\varepsilon\cdot M(n-N)}{n} < M\varepsilon$.　　小

+

$|S_2| \leq \frac{N\cdot M^2}{n}$　　少

从而 令 $\tilde{N} = [\frac{NM^2}{\varepsilon}]+1$，则 $n>\tilde{N}$时，$S_2<\varepsilon$.

则 $n > \tilde{N}$, $\frac{x_1y_n+\cdots+x_ny_1}{n} < (M+1)\varepsilon$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1y_n+\cdots+x_ny_1}{n} = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1y_n+\cdots+x_ny_1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_1+\cdots+y_n}{n}\alpha + \frac{(x_1-\alpha)y_n+\cdots+(x_n-\alpha)y_1}{n}.$$

$$= \alpha\beta + 0.$$

$$= \alpha\beta \qquad \square$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x)-x}{x^3}$.

$$\frac{\sin(\tan x)-x}{x^3}$$

$$= \frac{\sin(\tan x)-\tan x}{x^3} + \frac{\tan x - x}{x^3}$$

$$= \frac{\sin(\tan x)-\tan x}{(\tan x)^3}\cdot\frac{(\tan x)^3}{x^3} + \frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$\frac{\sin t - t}{t^3} = -\frac{1}{6} \qquad \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{\sin x - x + x(1-\cos x)}{x^3}$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ 原式 $= \frac{1}{6}$.