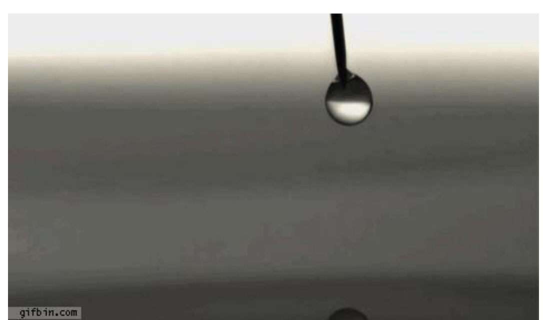
中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

University Physics
大 学 物 理

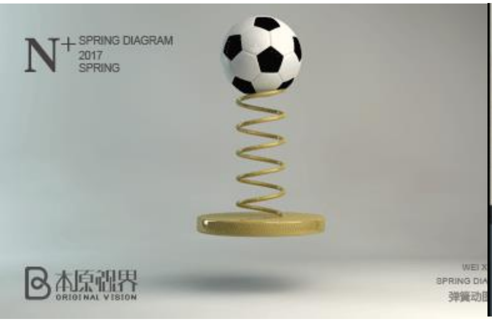
第一部分 力 学
(机械振动)

第六章　振　动

- **机械振动**：物体在一定位置附近作重复的往返运动，如钟摆的摆动、琴弦的振动、心脏的跳动、机器运转时的振动等。
- **广义的振动**：任何一个物理量随时间的周期性变化都可以称为振动，如交变电流、电磁震荡等。



- **简谐振动：** 最简单、最基本的振动
  - 它出现在许多物理现象中
  - 任何复杂的振动形式都可分解为若干简谐振动之和。

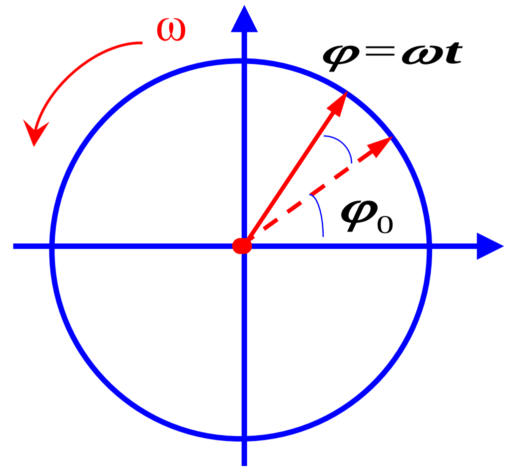




§ 6-1 简谐运动运动学描述

一、简谐运动方程

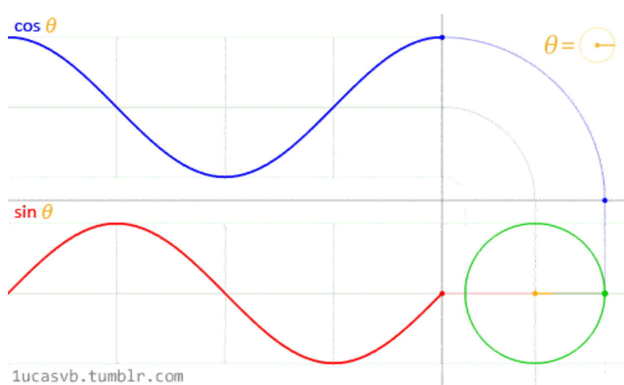
- 匀速率圆周运动在直径上的投影运动方程（分运动方程）：

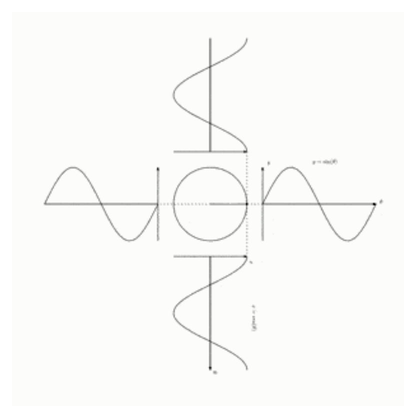


$$x(t)=R\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$y(t)=R\sin(\omega t+\varphi_0)$$

- 以时间的余弦（或正弦）函数表示位移（或角位移）的运动称为**简谐振动**。





二、简谐振动的特征量

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) = A\cos(\omega t + \varphi_0 + 2\pi) = A\cos\left[\omega(t + \frac{2\pi}{\omega}) + \varphi_0\right]$$

- **周期T：** 完成一次完全振动所需时间。
- **频率ν：** 单位时间内完成完全振动的次数。

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$ 单位：S

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$$ 单位：Hz=1/S

- 简谐振动的周期T和频率ν决定于ω。

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}}$$

ω称为**圆频率**或**角频率**。

- 简谐振动的运动方程也可写成：

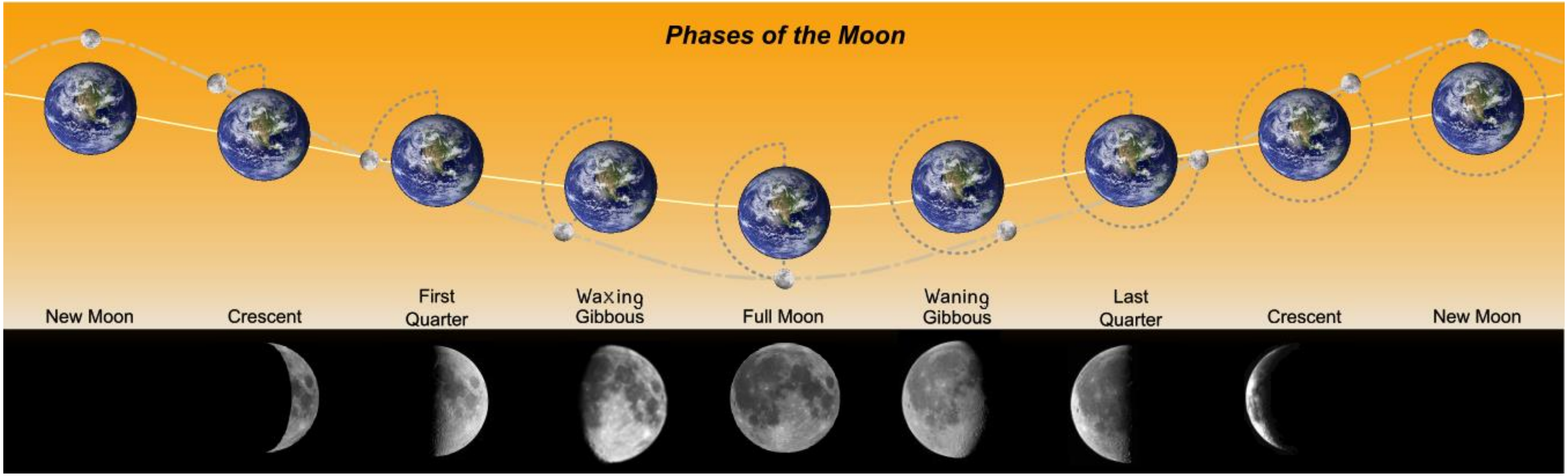
$$x = A\cos(2\pi\nu t + \varphi_0) \quad 或 \quad x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0)$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$-\pi < \varphi_0 \le \pi$$

- 振幅A：振动物体离开平衡点最大位移的绝对值。
- 相位$\omega t+\varphi_0$：决定振动物体运动状态的重要物理量。

  其中φ_0是 $t=0$ 时的相位，称为初相位。



三、简谐振动的速度和加速度

速度 $$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t+\varphi_0) = \upsilon_m\cos(\omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2})$$

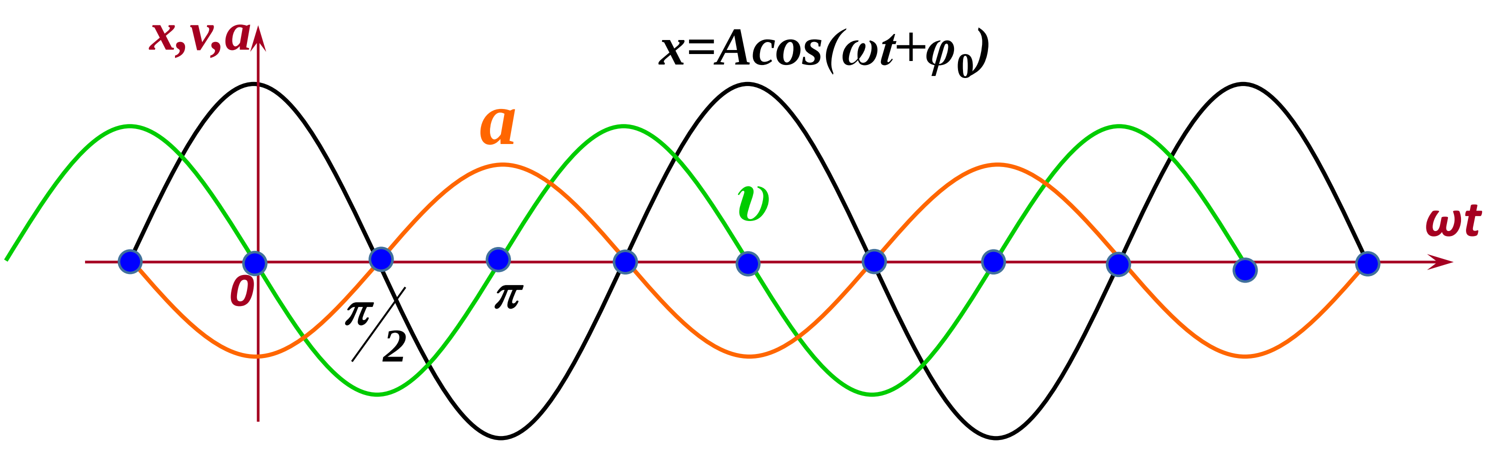
比x超前π/2

加速度 $$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$= a_m\cos(\omega t+\varphi_0+\pi)$$

比x超前π

$\upsilon_m = A\omega$ 速度振幅　　$a_m = A\omega^2$ 加速度振幅



四、两同频简谐振动间的相位差

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

相位差：$\boxed{\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1}$

两同频简谐振动的相位差等于它们的初相位之差。

$\Delta\varphi > 0$	$\Delta\varphi = 0$	$\Delta\varphi < 0$	$\Delta\varphi = \pi$
x_2超前x_1	x_2、x_1同相位	x_2落后于x_1	x_2、x_1反相位

五、由初始条件确定振幅A和初相位φ_0

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

设 $t=0$ 时，$x = x_0$、$\upsilon = \upsilon_0$

则：
$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 \\ \upsilon_0 = -A\omega\sin\varphi_0 \end{cases}$$

得：
$$\begin{cases} \boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{\upsilon_0^2}{\omega^2}}} \\ \boxed{\tan\varphi_0 = -\dfrac{\upsilon_0}{\omega x_0}} \end{cases}$$

$$-\pi < \varphi_0 \le \pi$$

初相位的象限的确定

$$x_0 = A\cos\varphi_0 \qquad v_0 = -A\sin\varphi_0$$

$$A = \sqrt{x_0^{\;2} + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}} \qquad \mathrm{tg}\,\varphi_0 = -\frac{\upsilon_0}{\omega x_0}$$

确定φ_0要根据x_0和v_0的正负进行判断：

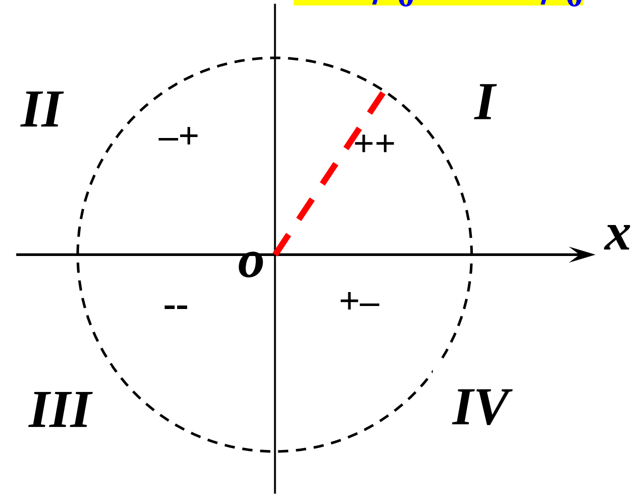
$\cos\varphi_0$、$\sin\varphi_0$

第一象限： $x_0>0$，$v_0<0$；

第二象限： $x_0<0$，$v_0<0$；

第三象限： $x_0<0$，$v_0>0$；

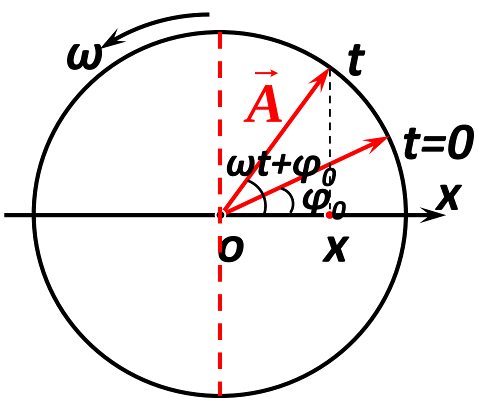
第四象限： $x_0>0$，$v_0>0$。



$-\pi < \varphi_0 \le \pi$

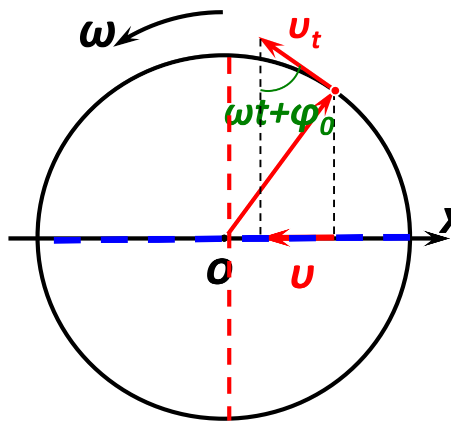
六、简谐运动问题的旋转矢量法处理

简谐振动可以视为匀速圆周运动在直径上的投影运动，故可以用一个以角速度ω旋转的矢量处理一些简谐运动的问题。



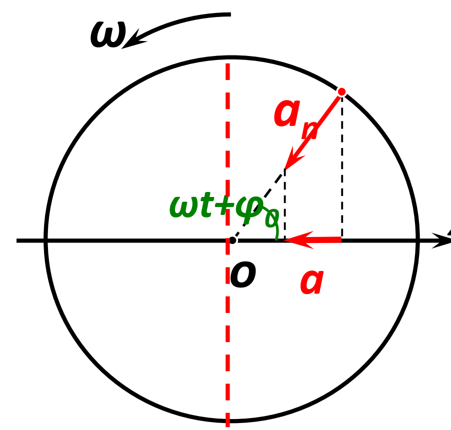
$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$



$$\upsilon_t = A\omega$$

$$\upsilon = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$



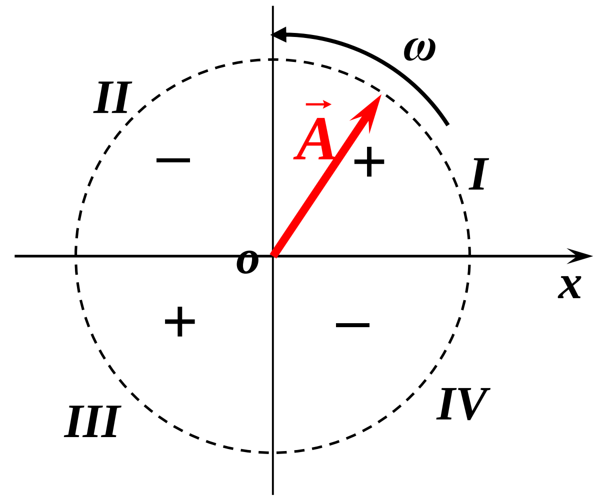
$$a_n = A\omega^2$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$$

由旋转矢量图可以方便的看出*x*、*v*、*a*的正负变化情况

由矢量表示法确定初相位

$$\boxed{\tan\varphi_0 = -\frac{\upsilon_0}{\omega x_0}}$$



- $\tan\varphi_0 > 0$ 时，φ_0在I、III象限内。

$$\begin{cases} \text{当}x_0>0\text{和}v_0<0\text{时，} \quad \varphi_0\text{在第}I\text{象限内；} \\ \text{当}x_0<0\text{和}v_0>0\text{时，} \quad \varphi_0\text{在第}III\text{象限内。} \end{cases}$$

位移速度方向相同

- $\tan\varphi_0 < 0$ 时，φ_0在II、IV象限内。

$$\begin{cases} \text{当}x_0<0\text{和}v_0<0\text{时，} \quad \varphi_0\text{在第}II\text{象限内；} \\ \text{当}x_0>0\text{和}v_0>0\text{时，} \quad \varphi_0\text{在第}IV\text{象限内。} \end{cases}$$

位移速度方向相反

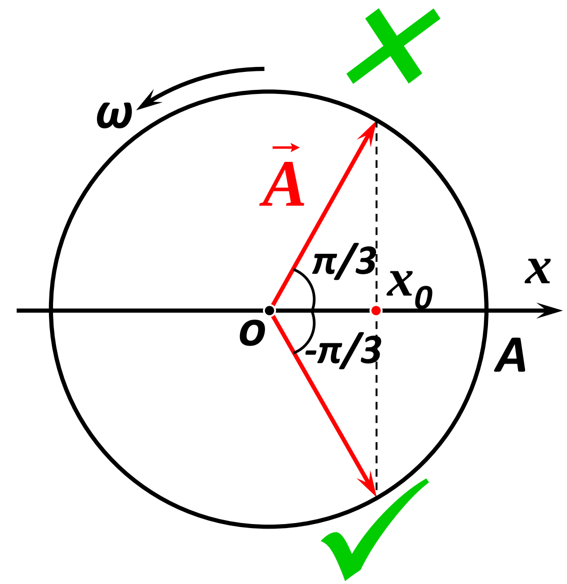
一质点沿x轴作简谐振动，A=0.1m，T=2s 。t=0时x_0=0.05m，且υ_0>0，求：（1）质点的振动方程；（2）t=0.5s时质点的位置、速度和加速度；（3）若某时刻质点在 x = –0.05m处且沿x轴负向运动，质点从该位置第一次回到平衡位置的时间？

(1) 设振动方程为： $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

$$A = 0.1m$$

$$\omega = 2\pi/T = \pi \ \ rad/s,$$

$$t = 0, \quad x_0 = 0.05, \quad \upsilon_0 > 0$$



由旋转矢量图： $\varphi_0 = -\pi/3$

$$\therefore \quad x = 0.1\cos(\pi t - \frac{\pi}{3}) \quad m$$

(2) $x = 0.1\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$

t=0.5s

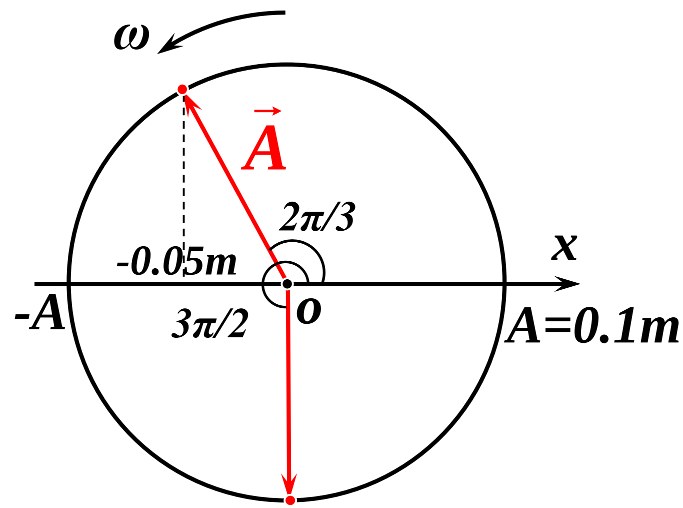
$$x = 0.1\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = 0.1\cos\frac{\pi}{6} \approx 0.0866m$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -0.1\pi\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) \approx -0.157m/s$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -0.1\pi^2\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) \approx -0.855m/s^2$$

(3) 某时刻质点在 $x = -0.05m$处且沿x轴负向运动

$x = -0.05m$，$v<0$时， $\varphi_1 = 2\pi/3$



第一次回到平衡位置时： $\varphi_2 = 3\pi/2$

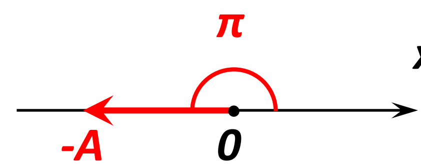
两位置相角之差：

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

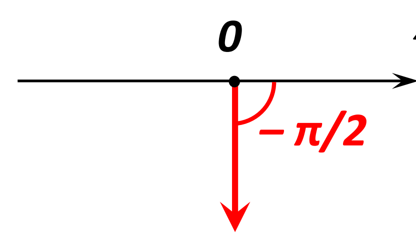
旋转矢量转过$\Delta\varphi$需时： $\Delta t = \dfrac{\Delta\varphi}{\omega} = \dfrac{5\pi}{6} \times \dfrac{1}{\pi} = \dfrac{5}{6} \quad (s)$

沿x轴做简谐振动的弹簧振子，振幅为A，周期为T，振动方程用余弦函数表示。$t=0$ 时，振子处于下列状态，求振动方程。

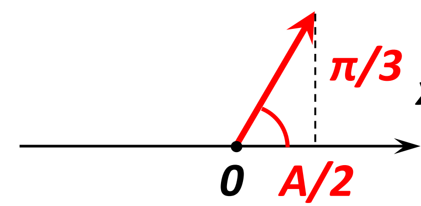
振动方程 $\boxed{x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_0)}$ 只需要求出φ_0



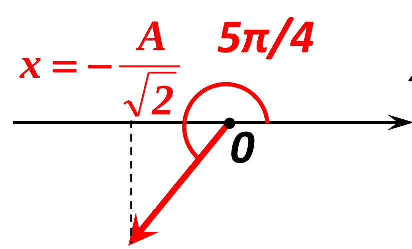
(1) $x_0 = -A$: $\varphi_0 = \pi$



(2) 过平衡位置向正方向运动： $\varphi_0 = -\pi/2$



(3) 过$x = A/2$ 处向负方向运动： $\varphi_0 = \pi/3$



(4) 过 $x = -\dfrac{A}{\sqrt{2}}$ 处向正方向运动：

$\varphi_0 = -3\pi/4$

§6-2 典型的简谐运动

一、简谐运动的动力学要求

- **回复力：** 力的方向始终指向平衡位置的力
- **线性力：** 力的大小与位移成正比

- 简谐振动的运动学特征

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\upsilon = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

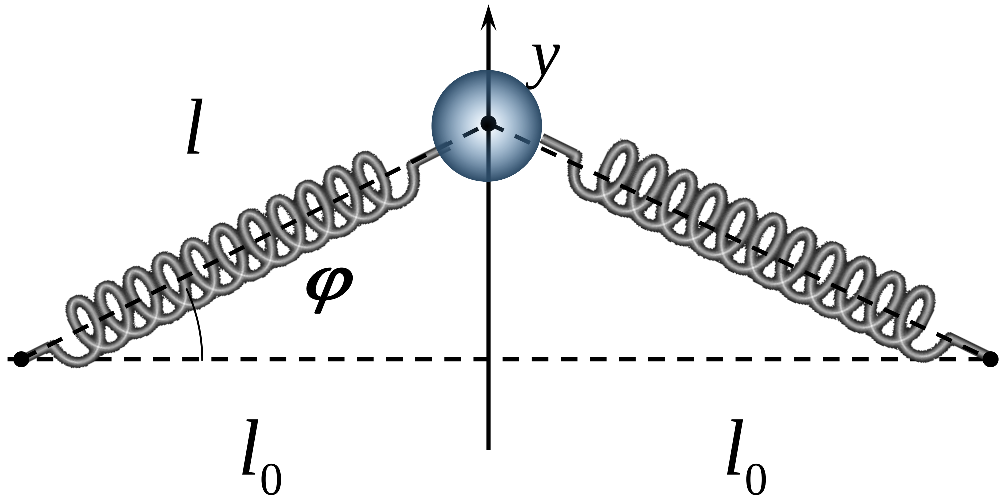
$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\therefore a = -\omega^2 x$$

即简谐振动的物体受力为： $F = ma = -m\omega^2 x$

- 简谐振动的动力学要求是**受线性回复力作用**

两个相同弹簧拉一个小球，求横向小位移时小球的受力



$$F_y = -2k(l - l_0)\sin\varphi = -2k\left(l - l_0\right)\frac{y}{l}$$

$$= -2k\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 + y^2}}\right)y \approx -\frac{k}{l_0^2}y^3$$

不是线性回复力

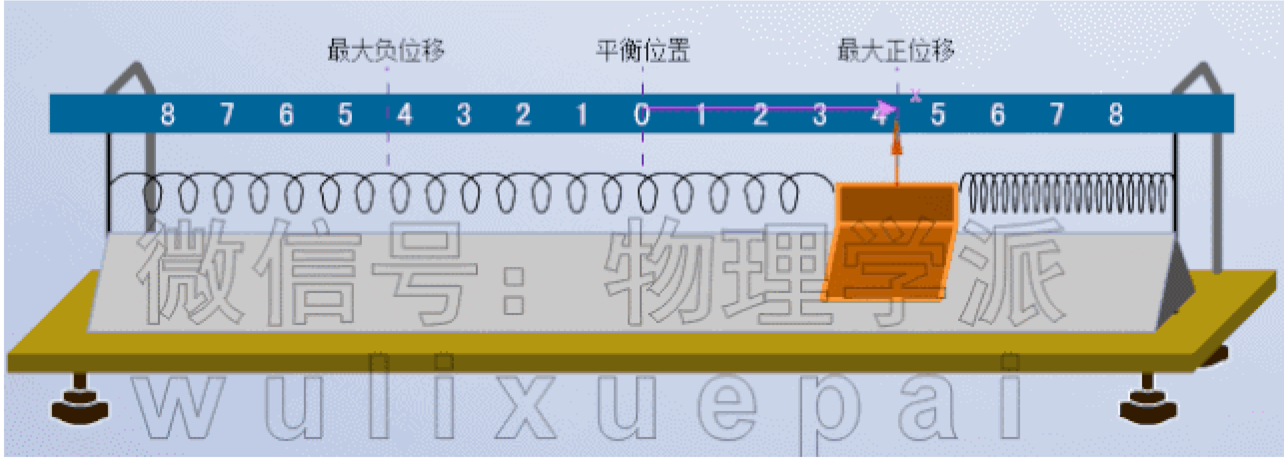
二、典型的简谐振动

□ 弹簧振子

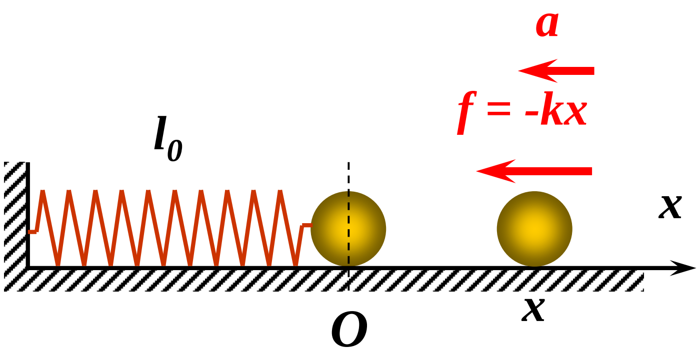
■ 弹簧振子模型：

弹簧质量不计，小球与水平面间无摩擦。

- 小球在弹力作用下运动
- 无阻尼自由振动



- 受力：弹力 $f = -kx = ma$



- 微分方程：$a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}x$

或：$\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$ 式中：$\boxed{\omega^2 = \dfrac{k}{m}}$

- 振动解：$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$ (ω：圆频率)

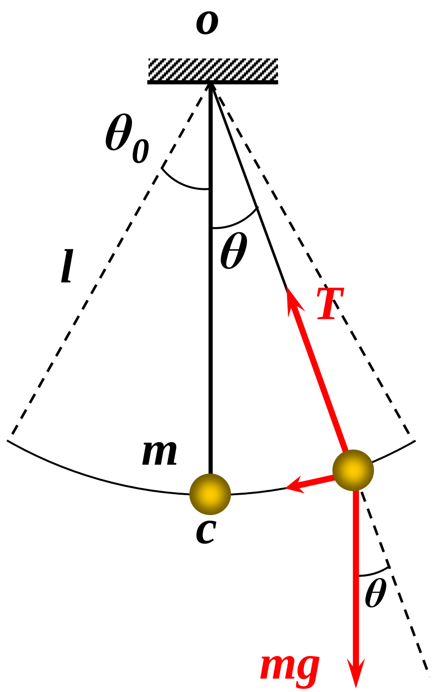
- 弹簧振子的周期和频率：

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

□ 单摆

■ 单摆假设:(1) $l >> d$（小球直径）；

(2) 忽略所有摩擦力的作用。



■ 受力：绳长方向二力平衡

重力切向分力 $F = -mg\sin\theta$

"–"号表示与角位移方向相反。

■ 微分方程 $m\dfrac{d^2 s}{dt^2} = ml\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$

得: $\boxed{\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\sin\theta = 0}$ 单摆的动力学方程

小角度近似：当单摆做小角度摆动（$\theta < 5^\circ$）时，

$$\sin\theta \approx \theta$$

得：

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0} \qquad \boxed{\omega^2 = \frac{g}{l}}$$

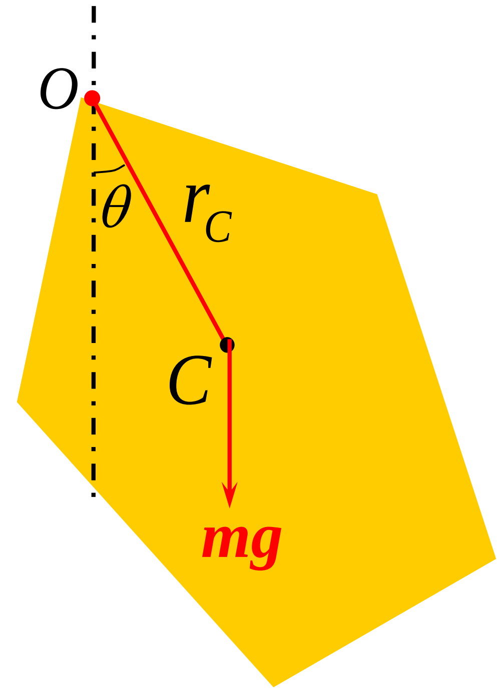
- 方程的解： $\boxed{\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)}$

当摆角很小时，单摆的运动为简谐振动。

- 振动的周期： $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$

单摆振动的周期与摆锤质量无关，只和摆线长度有关。

□ 复摆（物理摆）：



重力产生的恢复力矩：

$$M = -mgr_C \sin\theta$$

由转动定理：

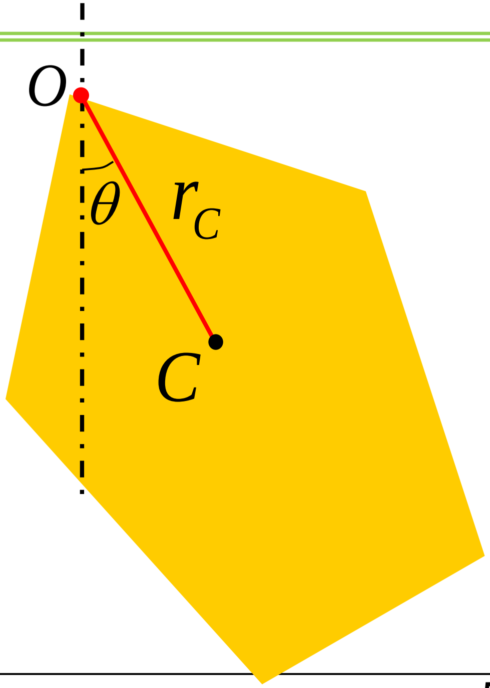
$$J_O \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgr_c \sin\theta \approx -mgr_c\theta$$

小角度近似（θ<5°）： $\sin\theta \approx \theta$

所以： $\boxed{\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0}$ $\boxed{\omega^2 = \dfrac{mr_c g}{J_O}}$

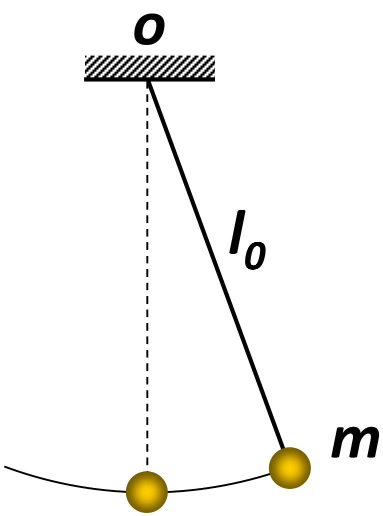
当摆角很小时，复摆的运动为简谐振动。

可倒摆测重力加速度



等效

$\Rightarrow$



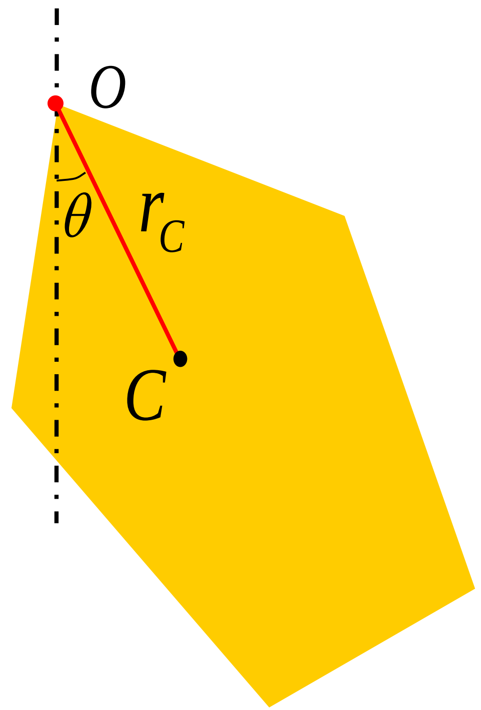
复摆: $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{J_O}{mr_cg}}$

单摆: $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{l_0}{g}}$

$l_0=\dfrac{J_O}{mr_C}$ 等值摆长

$l_0=\dfrac{2}{3}l$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J_O}{mgr_C}},\qquad J_O=J_C+mr_C^2$$



复摆的等值摆长

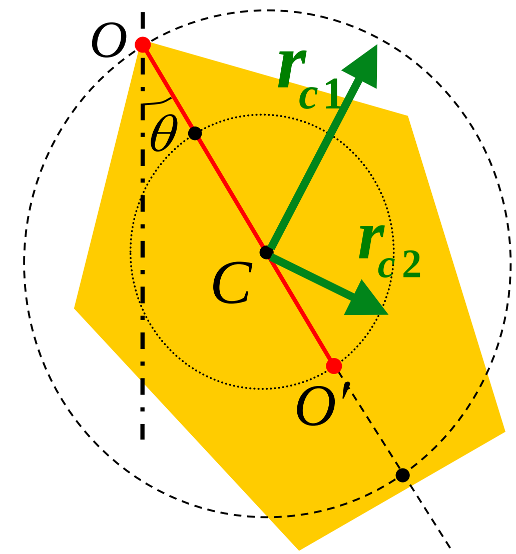
$$l_0\equiv\frac{J_O}{mr_C}=r_C+\frac{J_C}{mr_C}$$

$$T=2\pi\sqrt{l_0/g}$$

时间可以精确测量，如果能精确知道l_0, 就能精确测出重力加速度g，由定义式，l_0测量的困难在于J_c难确定。

$$l_0 = r_C + \frac{J_C}{m r_C} \Rightarrow r_c^2 - l_0 r_C + \frac{J_C}{m} = 0$$

$$\therefore r_{C1} + r_{C2} = l_0$$



在C点下方，满足 $l_0 = r_{c1} + r_{c2}$ 的点O'保持周期不变，称O'为 O的**倒逆点**。

复摆实验的目的是找出共轭点（O、O'），量出距离 $l_0 = \overline{OO'}$ 从而可以精确地测量重力加速g。

过C的任一直线上存在四个点周期相同，两组共轭点。

一劲度系数为k的轻弹簧上端固定，下端挂一质量为m的物体，使物体上下振动。证明该物体作简谐振动。

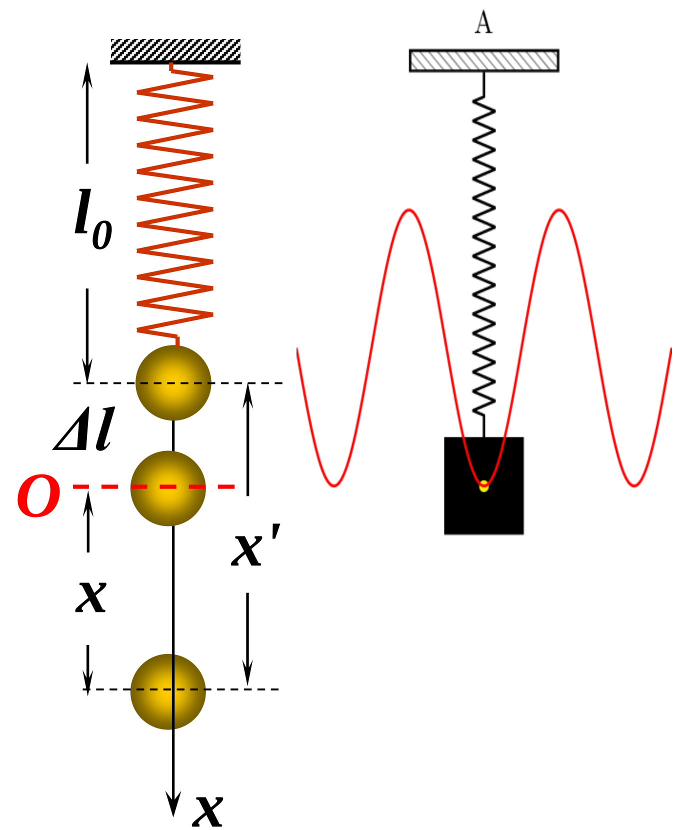
$$mg - kx' = m\frac{d^2x'}{dt^2}$$

即：$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \omega^2 x' - g = 0 \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

物体平衡时：$$mg = k\Delta l = k(x' - x)$$

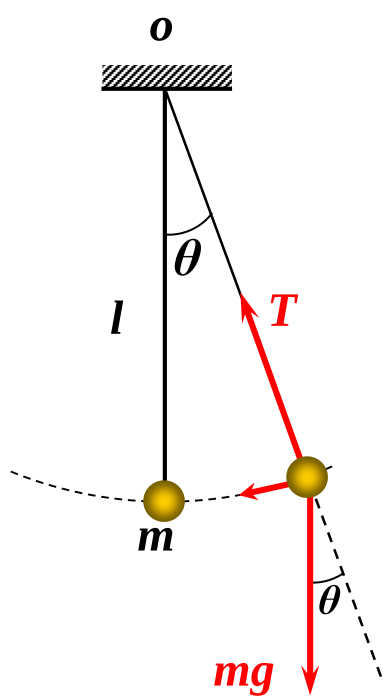
$$x' = \frac{mg}{k} + x = \frac{g}{\omega^2} + x$$

所以：$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$



该物体作简谐振动

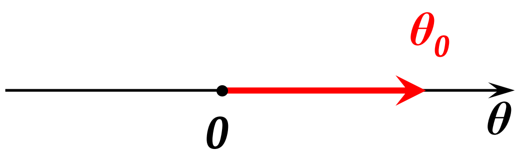
单摆 l=0.8m、m=0.30kg ，向右拉离平衡位置15°后自由释放。假设振动是简谐的，求：(1) ω、T ；(2) θ_0 、 φ_0、振动方程；(3) 最大角速度ω_{max}；(4) 绳中最大张力T



$$\boxed{\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

(1) $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}} = 3.5 rad/s,\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 1.795 s$

(2) 由旋转矢量图：



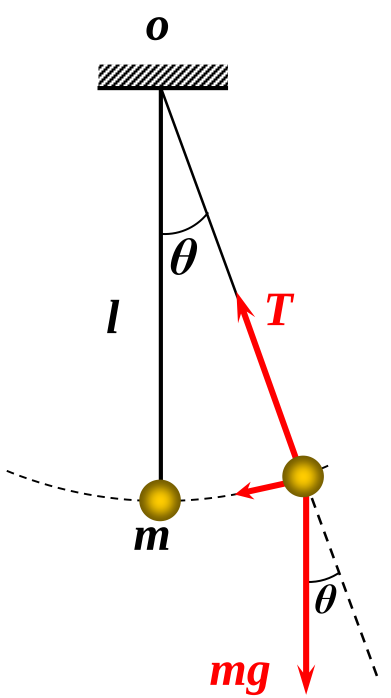
φ_0 =0， θ_0 =15° =0.262 *rad*

$\theta(t) = 0.262\ cos3.5t \quad (rad)$

(3) 最大角速度

$$\omega_{\max} = \frac{d\theta}{dt} = \theta_0\ \omega = 0.917 \quad (\mathrm{rad/s})$$

(4) 张力 $T = mg\cos\theta + m\dfrac{\upsilon^2}{l}$



当$\theta = 0$，即单摆处于平衡位置时，张力最大。

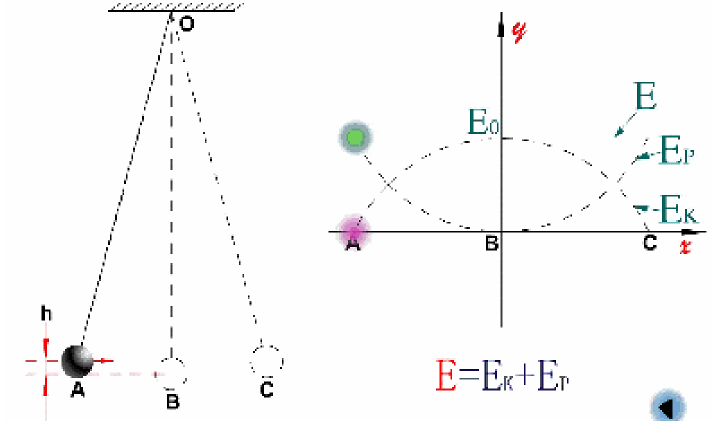
$$T_{max} = mg + m\frac{\upsilon_{max}^2}{l} = mg + ml\omega_{max}^2 = 3.14 N$$

§6-3 简谐运动的能量

一、弹簧振子的能量

□ 弹性势能：

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$



□ 动能：

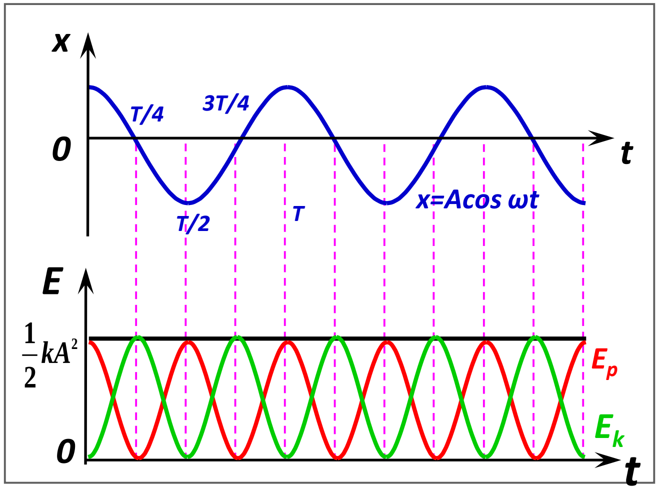
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

□ 机械能：

$$\boxed{E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_m^2}$$

二、能量的特点



- E_k、E_p的变化**频率**为简谐振动的**两倍**

$$E_p \propto \cos^2\omega = \frac{1}{2}(1+\cos 2\omega)$$

$$E_k \propto \sin^2\omega = \frac{1}{2}(1-\cos 2\omega)$$

- 总**机械能不变**，$E=E_k+E_p=$常量

- 动能和势能**平均值**各占机械能的**一半**

$$\bar{E}_k = \bar{E}_p = \frac{1}{2}E$$

$$\bar{E}_p = \frac{1}{T}\int_0^T E_p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)dt = \frac{1}{4}kA^2$$

$$\bar{E}_K = \frac{1}{T}\int_0^T E_K(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)dt = \frac{1}{4}kA^2$$

§6-4 阻尼振动

一、阻尼振动

- 阻尼振动：振幅（能量）不断减小的振动

- 阻尼类型
  - 摩擦阻尼---克服摩擦力作用，能量转为热能
  - 辐射阻尼----波的传播、辐射

- 弱阻尼：振子速度不太大时，阻尼力与速度成正比

$$f=-\gamma \upsilon=-\gamma \frac{dx}{dt}$$

γ：阻尼系数

二、阻尼振动动力学方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\gamma\frac{dx}{dt}-kx$$

令：$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 固有圆频率

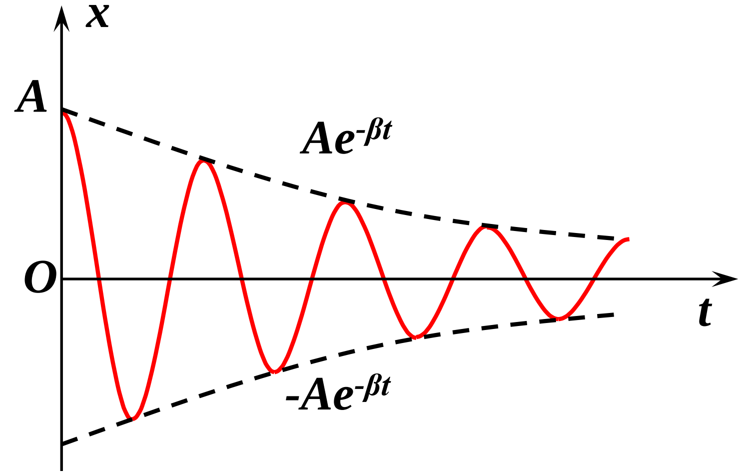
$\beta=\frac{\gamma}{2m}$ 阻尼因数

- 阻尼振动方程：$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$$

- 阻尼振动的状态类别
  - 欠阻尼状态（阻尼较小）：$\beta<\omega_0$
  - 过阻尼状态（阻尼较大）：$\beta>\omega_0$
  - 临界阻尼状态：$\beta=\omega_0$

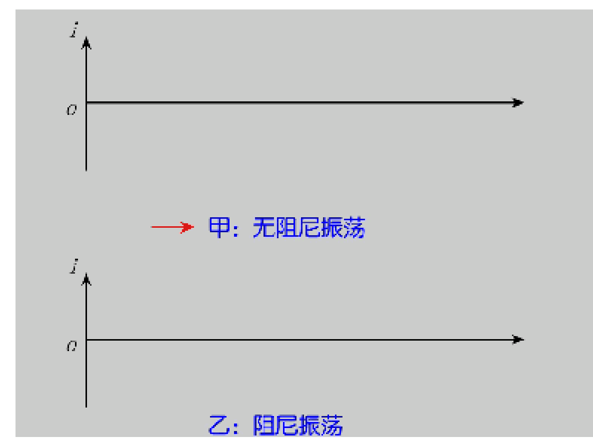
□ 欠阻尼状态（阻尼较小）： $\beta < \omega_0$

$$\boxed{x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega' t + \varphi_0)}$$



其中： $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} < \omega_0$

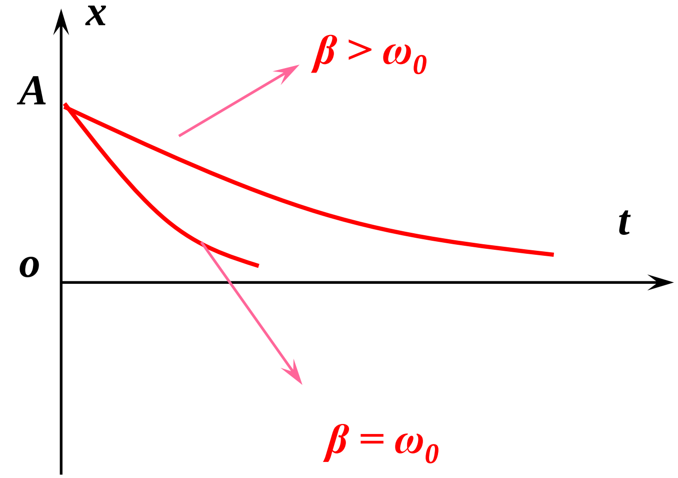
$$\therefore \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > T_0$$



- 振幅指数衰减的振动
- 阻尼越大，振幅衰减越快，周期越长

□ 过阻尼状态（阻尼较大）： $\beta > \omega_0$

$$x = C_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$



不振动，物体缓慢单向回到平衡位置

□ 临界阻尼状态： $\beta = \omega_0$

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\beta t}$$

不振动，物体快速单向回到平衡位置

□ 阻尼的应用：阻尼天平、灵敏检流计等

一、受迫振动

- 受迫振动:系统在持续的周期性外力作用下振动
  - 周期性外力称为驱动力、策动力
  - 受迫振动的振幅不变
- 弱阻尼、受迫振动方程

周期性外力

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\gamma\frac{dx}{dt}-kx+F_0\cos\omega t$$

令： $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$， $2\beta=\dfrac{\gamma}{m}$， $f_0=\dfrac{F_0}{m}$

得： $$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega t}$$

受迫振动方程的通解：

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi_0')+A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2\omega^2}},\quad \tan\varphi_0=-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

- 受迫振动为阻尼振动和稳态振动之和
- 长时间后受迫振动稳定，稳态振动周期等于驱动力周期
- 稳态振动与周期性外力有一相位差
- 系统固有频率、阻尼特性会影响稳态振动的振幅和相位差

二、共振

- 受迫振动的稳态解： $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad \tan\varphi_0 = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

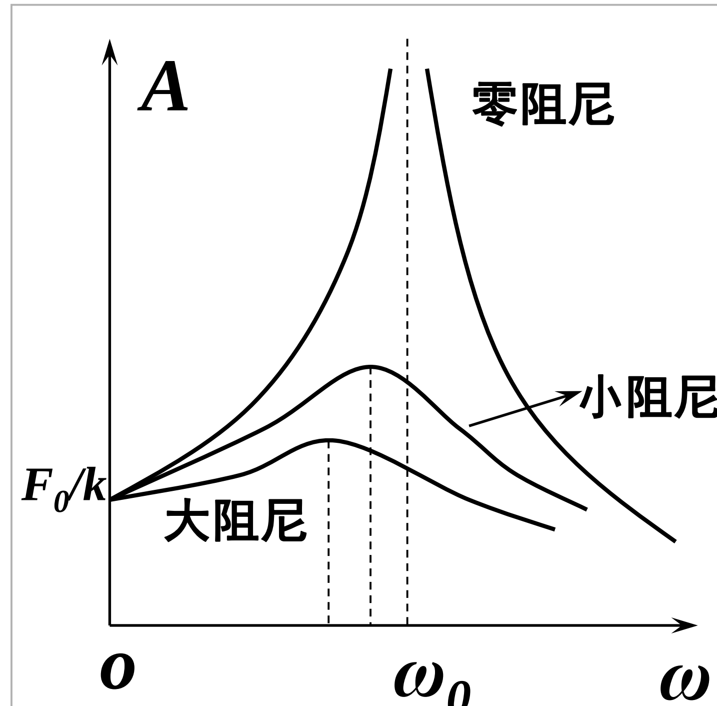
□ 位移共振、振幅共振：

$$A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2\omega^2}}=\frac{f_0}{\sqrt{\left[\omega^2-(\omega_0^2-2\beta^2)\right]^2+4\beta^2\left(\omega_0^2-\beta^2\right)}}$$

$$\boxed{\omega_m=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}$$

$$\boxed{A_{\max}=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}}$$

当 $\beta\to 0$时，$\omega_m\to\omega_0$，$A_m\to\infty$



频响曲线

□ 速度共振、能量共振：

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\frac{\omega f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\left(A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad \tan\varphi_0 = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

$$V = \frac{\omega f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{(1 - \omega_0^2/\omega^2)^2 + 4\beta^2}}$$

当 $\omega = \omega_0$ 时,速度振幅最大值 $V_{\max} = \dfrac{f_0}{2\beta}, \quad \varphi_0 = \pm\dfrac{\pi}{2}$

$$\boxed{V_{\max} = \frac{f_0}{2\beta} = \frac{f_0}{\gamma/m},\ \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_0) = \mp A\sin\omega t}$$

策动力 $F_{驱} = F_0 \cos\omega t$

稳定受迫振动的速度

$$v = \dot{x} = \mp\omega A\cos\omega t = \mp\frac{mf_0}{\gamma}\cos\omega t = \mp\frac{F_0}{\gamma}\cos\omega t$$

阻尼力 $f_{阻} = -\gamma v = \pm F_0 \cos\omega t$ **"取–"**

$$F_{阻}(t) = -F_{驱}(t)$$

速度共振时，驱动力和阻尼力时时相抵，所以这时振子以固有频率振动，犹如一个不受阻力的振子，振子的机械能恒定不变。

一、同方向同频率简谐振动的合成：

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{01}) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_{02})$$

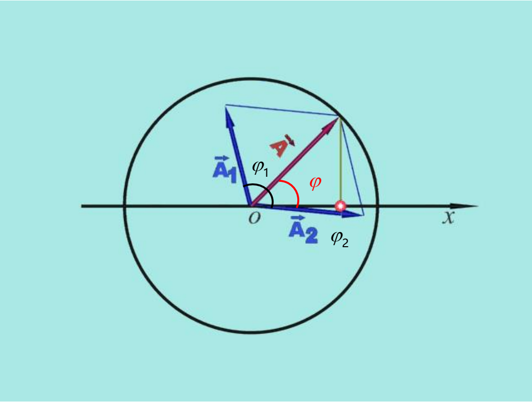
合振动：

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{01}) + A_2\cos(\omega t + \varphi_{02})$$

由三角知识可知合振动仍为频率为ω简谐振动：

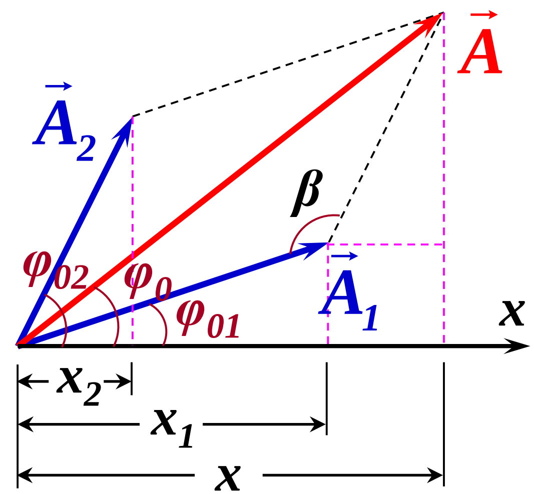
$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

从旋转矢量中也可以看出矢量和是同一频率的旋转矢量



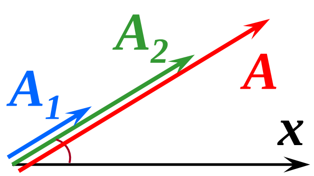
由 $t = 0$ 时的旋转矢量图：

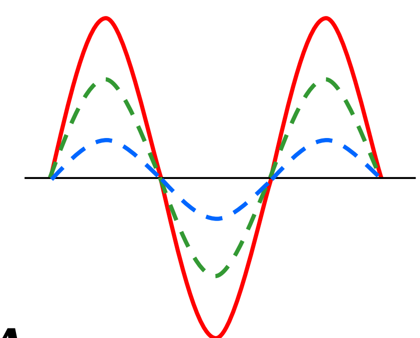
$$
\begin{cases}
\boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})}} \\
\boxed{\tan\varphi_0=\dfrac{A_1\sin\varphi_{01}+A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01}+A_2\cos\varphi_{02}}}
\end{cases}
$$



合振动振幅决定于两分振动**振幅**和两分振动**相位差**。

(1) $\Delta\varphi=\varphi_{02}-\varphi_{01}=\pm 2k\pi$

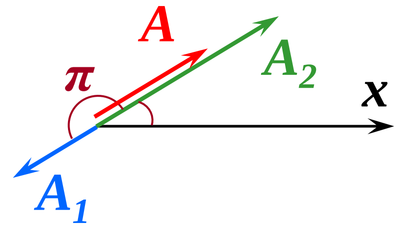


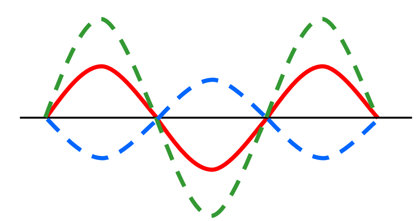


$A_{max}=A_1+A_2$

同相

(2) $\Delta\varphi=\varphi_{02}-\varphi_{01}=\pm(2k+1)\pi$



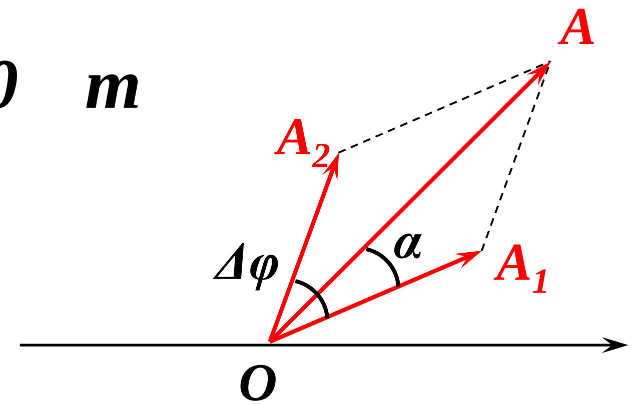


$A_{min}=|A_1-A_2|$

反相

两个同方向、同频率简谐振动。合振动振幅为0.20m，合振动与第一振动相位差为$\pi/6$，第一振动振幅为0.173m。求第二振动振幅及第一、第二振动间的相位差。

$$A_2 = \sqrt{A^2 + A_1^2 + 2A_1A\ \cos\alpha} = 0.10 \quad m$$



（矢量合成）

$$\because \quad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$$

$$\therefore \cos\Delta\varphi = \frac{A^2 - A_1^2 - A_2^2}{2A_1A_2} = 2.05\times10^{-3}$$

$$\therefore \Delta\varphi \approx \frac{\pi}{2}$$

二、同方向不同频率简谐振动的合成

当两个分振动频率不同时，$\Delta\varphi$ 将不断变化。所以合振动振幅也将不断变化。此时，合振动不是简谐振动。

设： $x_1 = A\cos(\omega_1 t)$ $\quad$ $x_2 = A\cos(\omega_2 t)$

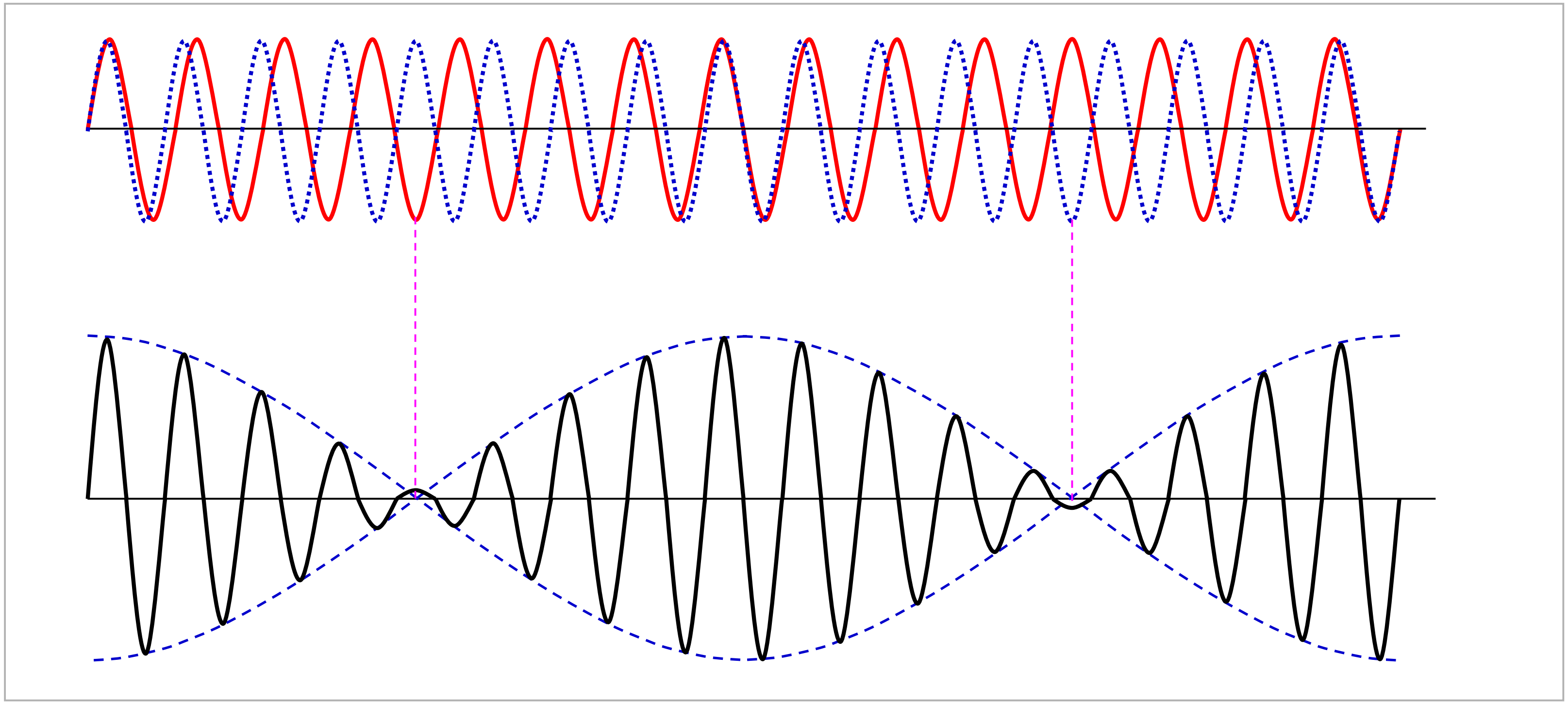
合振动： $x = x_1 + x_2 = A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$

$$= 2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right)$$

随t变化缓慢 $\qquad$ 随t变化迅速

若将 $\left|2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\right|$ 作为合振动的振幅，则：

合振动振幅在 0 ~ 2A 之间变化，称**振幅被调制。**



若两个分振动频率不同之和远大于两分振动的频率之差时，合振动振幅也时而加强，时而减弱的现象又称为**拍**，合振动变化的频率称为**拍频**。

$$\boxed{\nu = \nu_2 - \nu_1}$$

三、同频率垂直简谐振动的合成：

设两个同频率简谐振动分别沿 x 和 y 方向：

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}) \\ y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}) \end{cases}$$

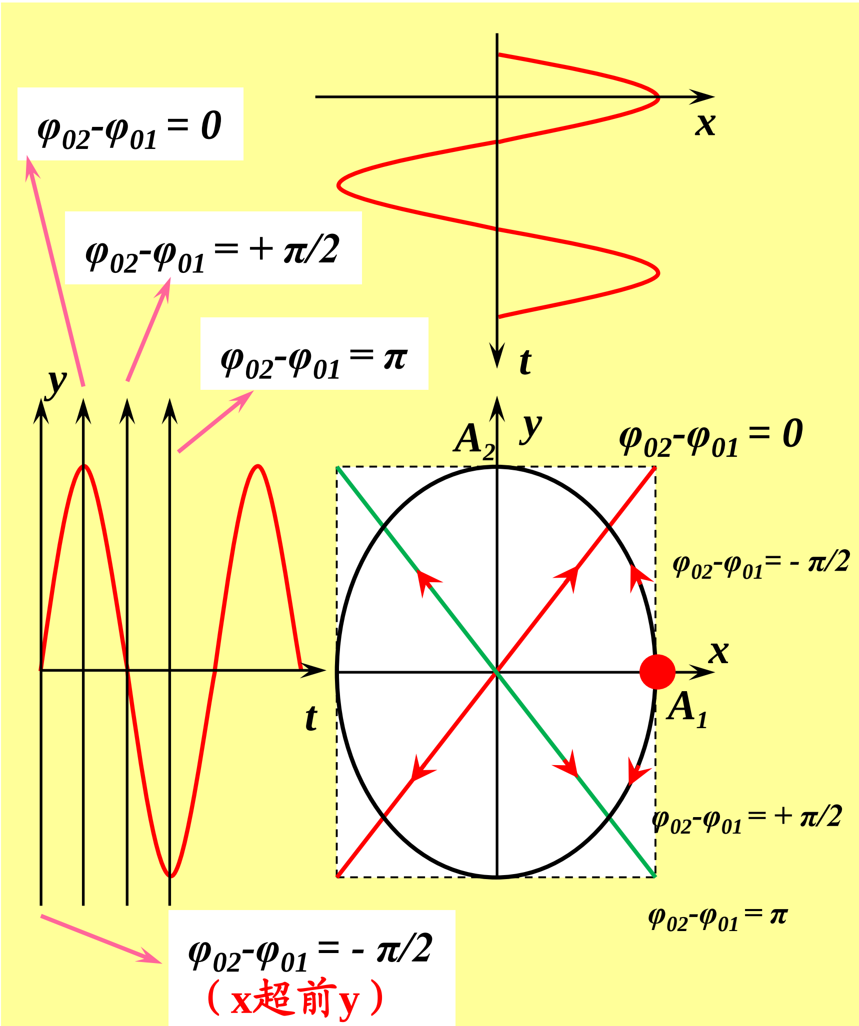
消去 t 后得轨迹方程：

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \sin^2(\varphi_{02} - \varphi_{01})}$$

椭圆型方程

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})=\sin^2(\varphi_{02}-\varphi_{01})}$$

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega t+\varphi_{01}) \\ y = A_2\cos(\omega t+\varphi_{02}) \end{cases}$$



(1) $\varphi_{02}-\varphi_{01}=2k\pi$：

$$\boxed{y=\frac{A_2}{A_1}x}$$

I、III象限中直线

(2) $\varphi_{02}-\varphi_{01}=(2k+1)\pi$：

$$\boxed{y=-\frac{A_2}{A_1}x}$$

II、IV象限中直线

(3) $\varphi_{02}-\varphi_{01}=2k\pi\pm\pi/2$： 正椭圆

(4) 其他情况：斜椭圆

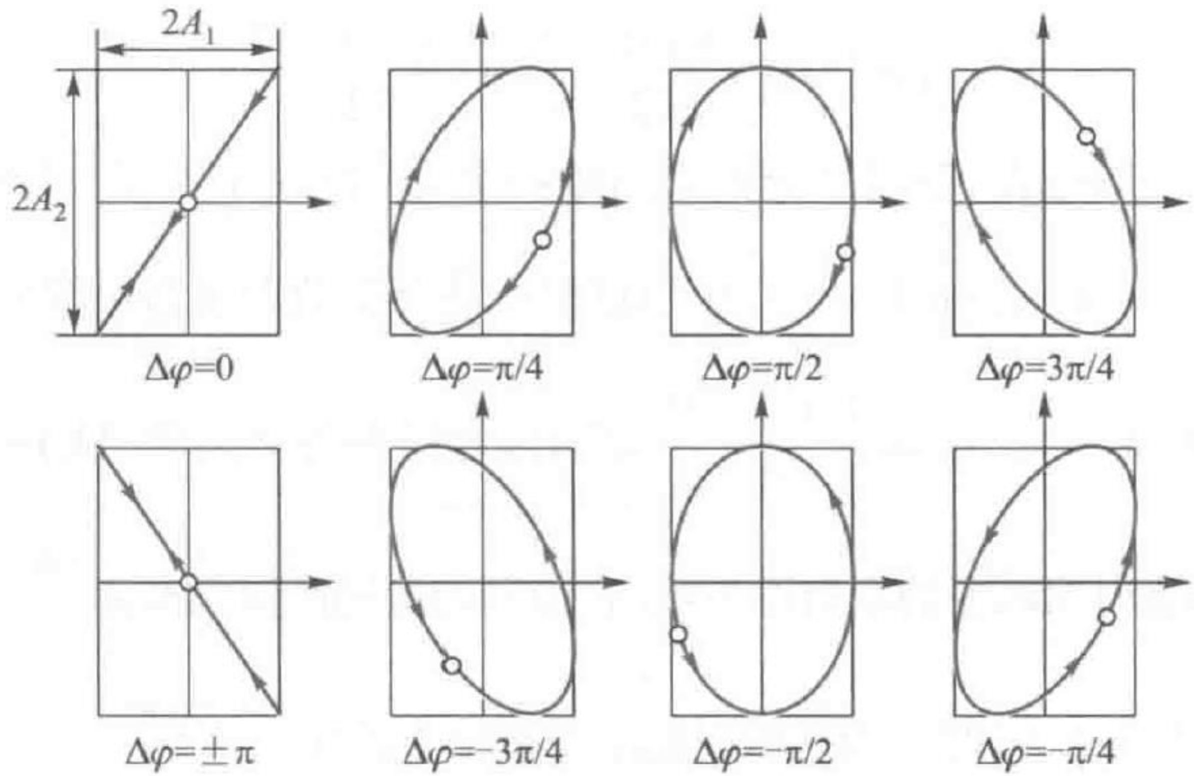


图 11.1-21　两个相互垂直的同频率、不同相位差的简谐振动的合成

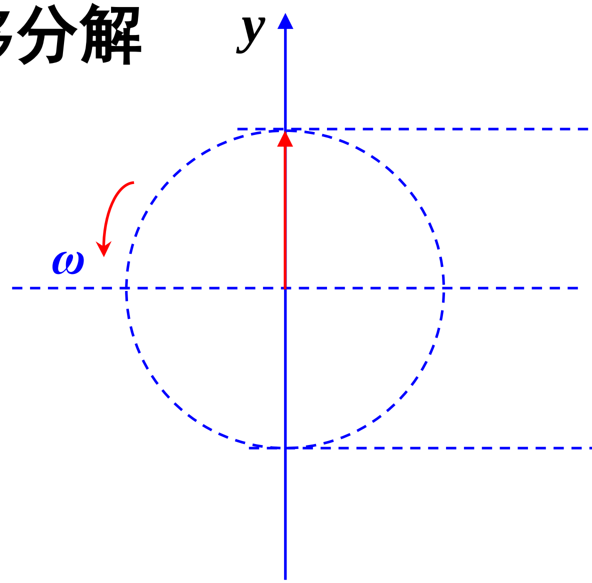
- $\Delta\varphi=\varphi_{02}-\varphi_{01}$,　　$-2\pi<\Delta\varphi<2\pi$

  顺：　$0<\Delta\varphi<\pi$,　$-2\pi<\Delta\varphi<-\pi$

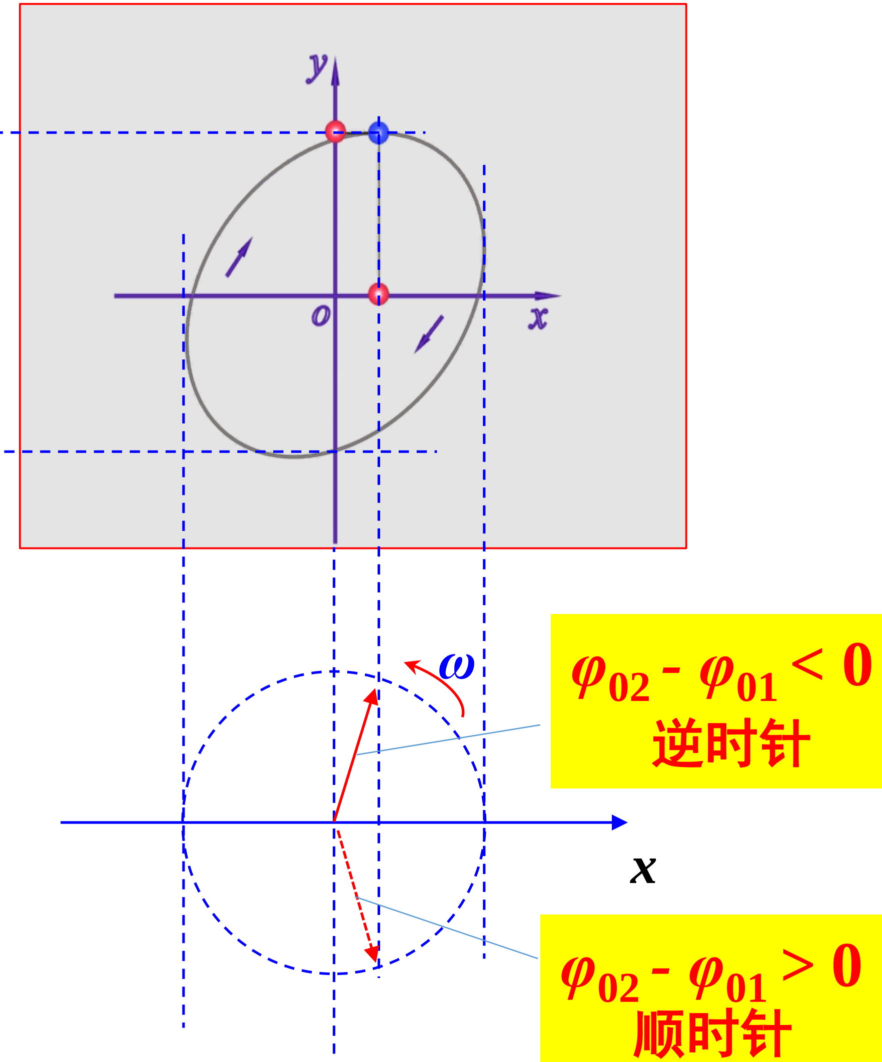
  逆：$-\pi<\Delta\varphi<0$,　　$\pi<\Delta\varphi<2\pi$

合成图形的旋转方向

■ **位移分解**



$$y = A_y \cos(\omega t + \varphi_{02})$$



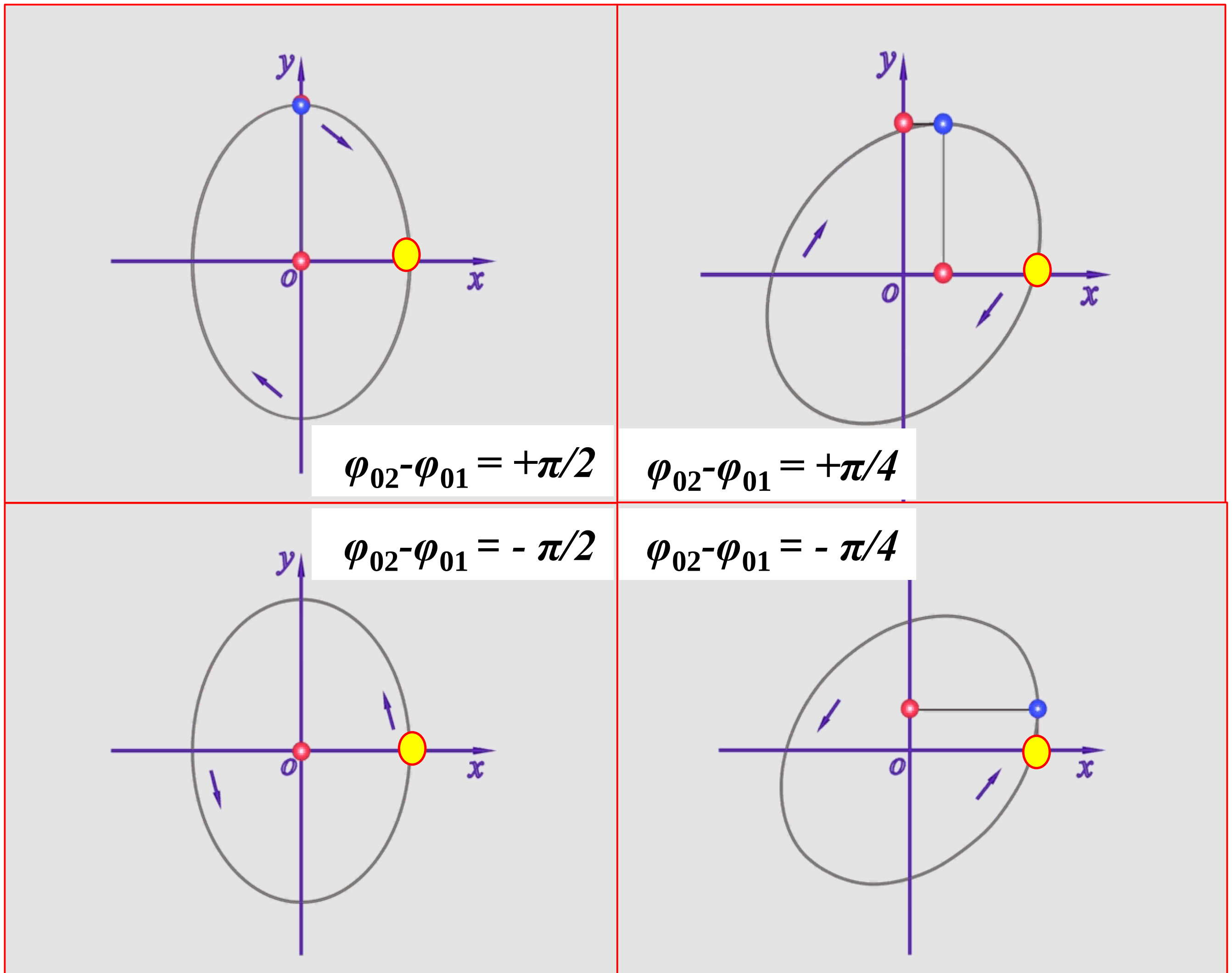
$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_{01})$$

● **Tips：找切点！**

■ 速度判断

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_{01}) \qquad v_x = -\omega A_x \sin(\omega t + \varphi_{01})$$

$$y = A_y \cos(\omega t + \varphi_{02}) \qquad v_y = -\omega A_y \sin(\omega t + \varphi_{02})$$



顺： $0 < \Delta\varphi < \pi$,

$-2\pi < \Delta\varphi < -\pi$

逆： $-\pi < \Delta\varphi < 0$

$\pi < \Delta\varphi < 2\pi$

四、不同频率垂直简谐振动的合成：

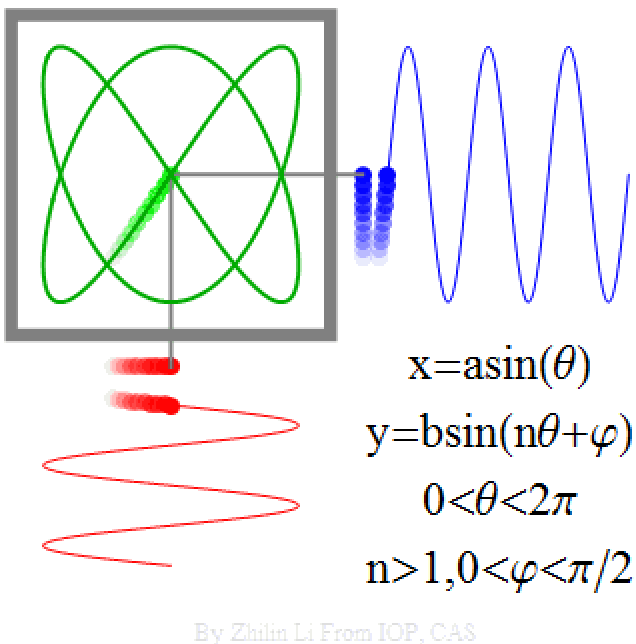
设两个频率不同的简谐振动分别沿 x 和 y 方向：

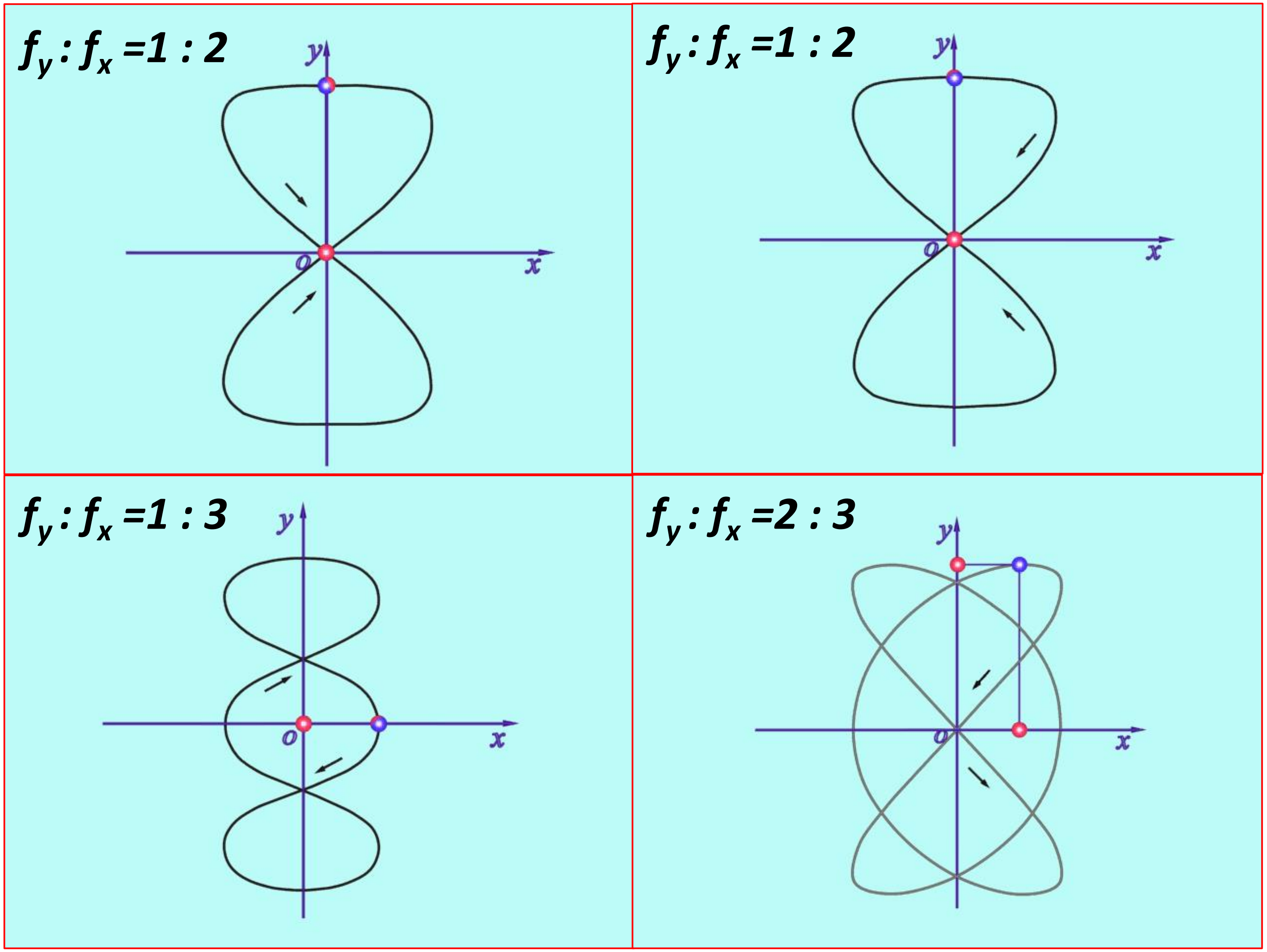
$$\begin{cases} x = A_1 \cos\omega_1 t \\ y = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta) \end{cases}$$

则相位差：

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t + \delta$$

当两个分振动频率ω_1、ω_2成简单整数比时，合振动轨迹是稳定的封闭曲线称为李萨如图线。





频率比等于矩形外框切点数之比