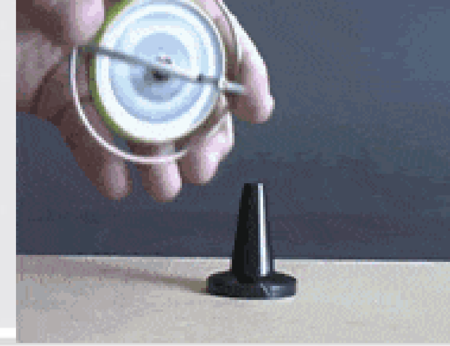
中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

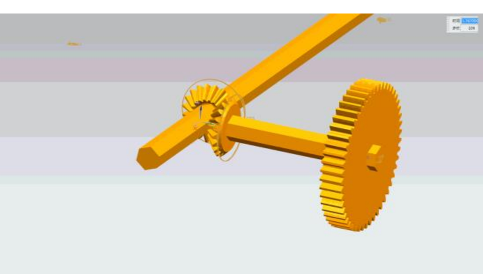


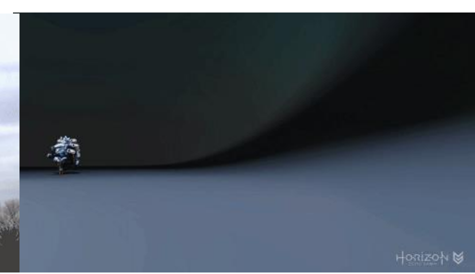
University Physics
大 学 物 理

第一部分 力 学
(刚体转动)

第五章 刚体转动

- 质点模型适用于讨论物体的**整体运动**，不考虑自身运动，或者研究的问题尺度远大于物体自身的尺度，无法对自身运动进行细致的研究
- 当需要研究物体的**自身运动**时，物体不能被看作质点
- 很多情况下，可以忽略物体在运动过程中的形变，将物体视为没有形变的物体，即**刚体**，**刚体内任意两点间的距离在运动中保持不变**
- **刚体的研究方法：**将刚体视为**无穷多质点组成的质点系**。每一质点的运动服从牛顿定律，而整个刚体的运动规律是所有质点运动规律的叠加。



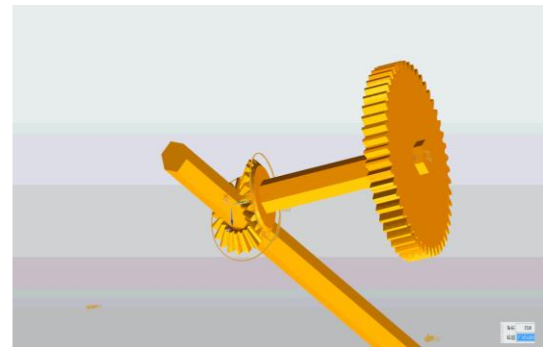



§ 5-1 刚体运动描述

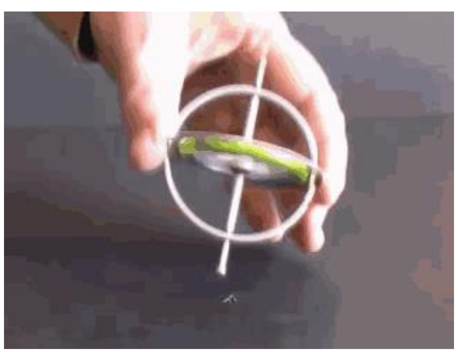
一、刚体运动的形式

□ 平动

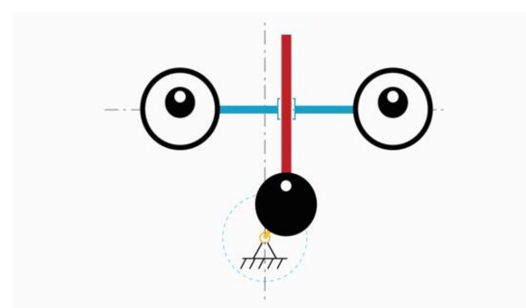
□ 定轴转动



□ 定点转动



□ 平面平行运动

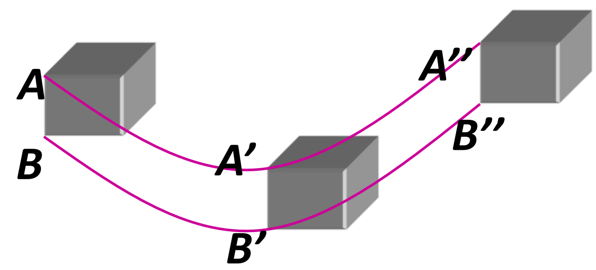


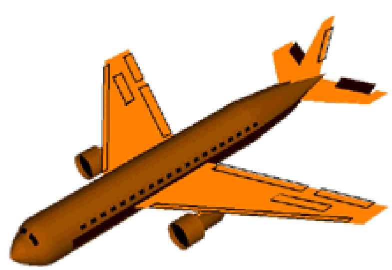
二、基本刚体运动的特点

□平动：刚体内任意两点连线的方向在运动中保持不变

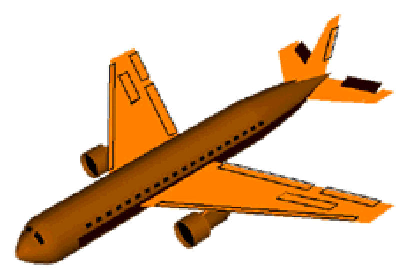
■可以是直线运动，也可以是二维或者三位曲线运动

■所有点的运动轨迹平行，一个点可以代表刚体运动

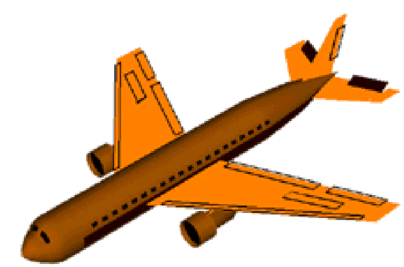




X轴平移（前/后）

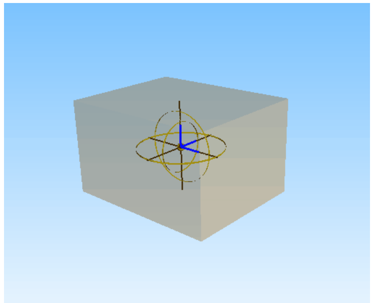


Y轴平移（左/右）



Z轴平移（上/下）

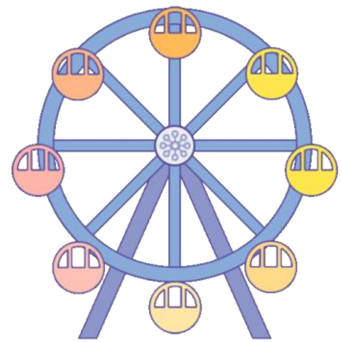
□转动：运动时刚体中任意两点间的连线不一定保持平行，我们称刚体转动



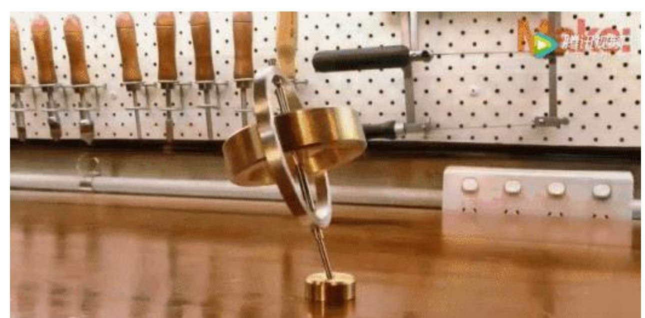
■定轴转动：刚体上所有质点均绕一固定直线作圆周运动，该直线称为定轴。

■**动轴转动**：刚体上所有质点都绕同一转轴作圆周运动，转轴在空间（定点、定向、任意）运动。

- **平面平行转动**：转轴始终保持平行，但是可以二维平动

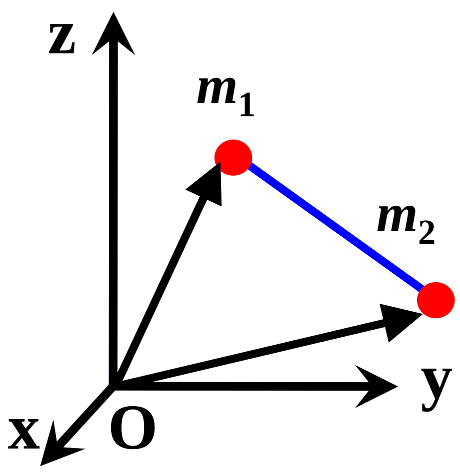


- **定点转动**：转轴始终通过一定点



三、刚体运动的自由度

- **自由度**：确定一个力学体系在空间的几何位置、位形所需**独立变量的个数**称为该体系的自由度。
  - 一个质点在空间有3个自由度
  - N个质点组成的质点系有3N个自由度
  - 一个约束条件就少一个自由度



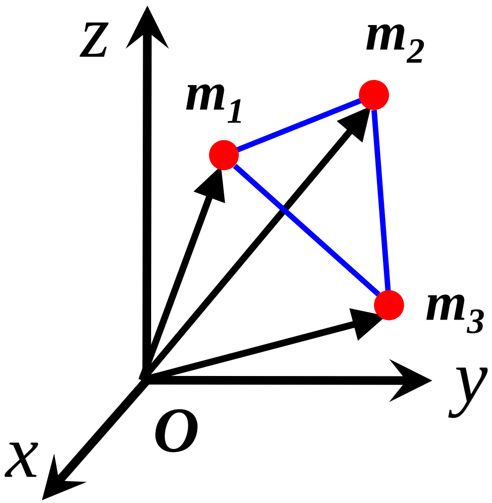
轻杆连接的2质点体系自由度5

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

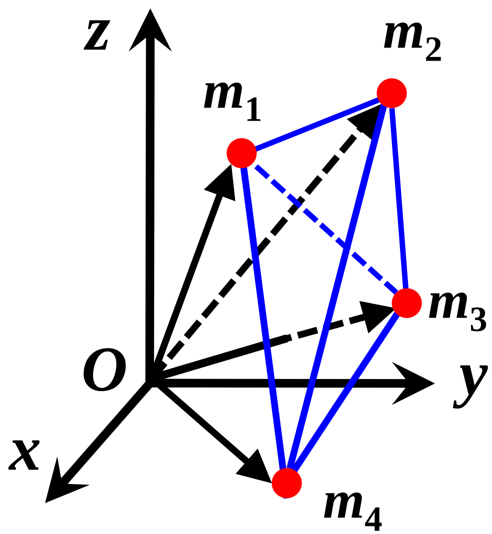
轻杆两两连接的3质点体系自由度6



$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$$
$$\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$
$$\vec{r}_3 = (x_3, y_3, z_3)$$

$$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$l_{23} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2}$$
$$l_{31} = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2}$$

例　轻杆两两连接的4质点体系自由度6



$$\vec{r}_1=(x_1,y_1,z_1),\quad \vec{r}_2=(x_2,y_2,z_2),$$
$$\vec{r}_3=(x_3,y_3,z_3),\quad \vec{r}_4=(x_4,y_4,z_4)$$

$$l_{12}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$l_{23}=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2}$$
$$l_{31}=\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2}$$
$$l_{41}=\sqrt{(x_4-x_1)^2+(y_4-y_1)^2+(z_4-z_1)^2}$$
$$l_{42}=\sqrt{(x_4-x_2)^2+(y_4-y_2)^2+(z_4-z_2)^2}$$
$$l_{43}=\sqrt{(x_4-x_3)^2+(y_4-y_3)^2+(z_4-z_3)^2}$$

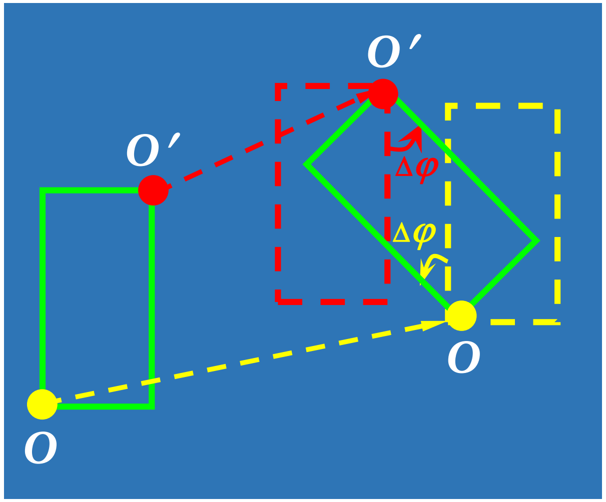
刚体运动的自由度

- 平动：自由度3
- 定轴转动：自由度1
- 定点转动：自由度3
- 平面平行运动：自由度3(质点平面运动＋刚体定轴转动)
- 一般运动（自由刚体）：自由度6

刚体的一般运动可以分解为平动和转动：选定刚体上某点为基点，刚体以基点平动（3个自由度），过基点的转轴（轴线2个自由度），绕轴的转动（一个自由度），总计六个自由度。

四、一般刚体运动的处理

- 刚体运动分解为基点的平动和绕该点的定点转动的合成
- 选择不同的基点平动速度就不同
- 转动角速度与基点的选择无关，角速度矢量的大小和方向都相同, 即刚体角速度是绝对的



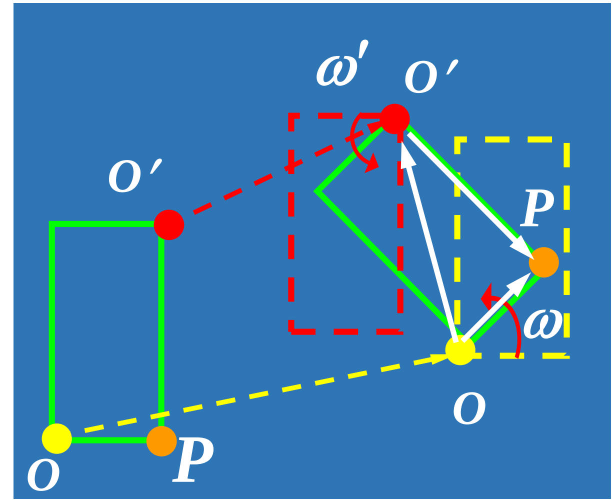
● 刚体角速度的绝对性证明

证明：如图选O为基点，P点的速度

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega}\times\overrightarrow{OP}$$

选O'为基点，设P点绕O'点有角速度ω′，则

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}'\times\overrightarrow{O'P}$$



$$\vec{v}_{O'} = \vec{v}_O + \vec{\omega}\times\overrightarrow{OO'}$$
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

$$\vec{v}_O + \vec{\omega}\times\overrightarrow{OP} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}'\times\overrightarrow{O'P} = \vec{v}_o + \vec{\omega}\times\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{O'P}\right) + \vec{\omega}'\times\overrightarrow{O'P}$$

由此得到 $\quad \vec{\omega}'\times\overrightarrow{O'P} - \vec{\omega}\times\overrightarrow{O'P} = 0$

$$\boxed{\vec{\omega}' = \vec{\omega}}$$

刚体的角速度矢量与基点无关

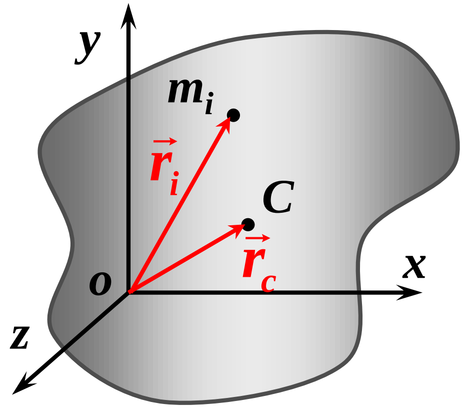
§ 5-2 刚体的质心运动

一、刚体质心

□ 质点系**质心位矢**：$\vec{r}_c = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$

$$x_c = \frac{\Sigma x_i m_i}{M},\quad y_c = \frac{\Sigma y_i m_i}{M},\quad z_c = \frac{\Sigma z_i m_i}{M}$$

$M = \sum m_i$ **质心质量**，即质点系总质量。



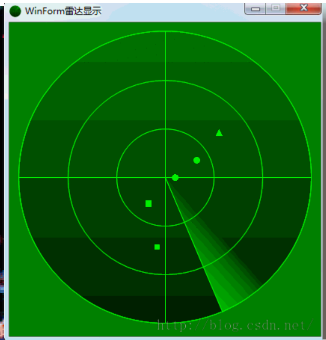
□ 质量连续分布的物体质心：$\vec{r}_c = \dfrac{\int \vec{r}dm}{M}$

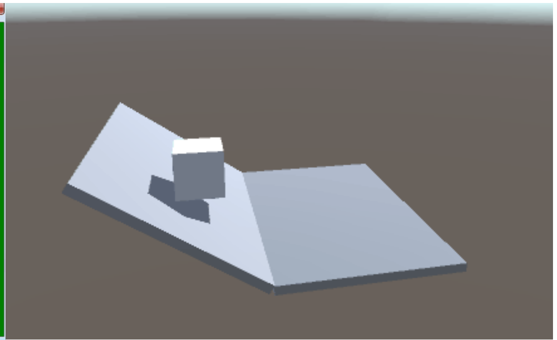
$$x_c = \frac{\int xdm}{M},\quad y_c = \frac{\int ydm}{M},\quad z_c = \frac{\int zdm}{M}$$

□ 质量分块分布体系的质心：$\vec{r}_c = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_{Ci}}{M}$

□ 说明：

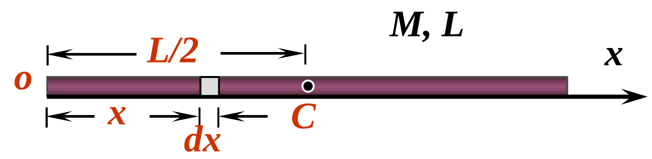
- 刚体质心在刚体中的位置确定，并固结在刚体上，该位置不因坐标系的不同选择而不同。
- 对质量分布均匀，形状对称的物体，质心是其几何中心
- 质心、重心是两个不同的概念，但物体不太大时，质心和重心位置重合
- 质心是刚体上的一个特殊的点，其运动代表了刚体的整体运动，如果刚体做平动，则质心的运动轨迹与刚体上所有点的运动轨迹平行





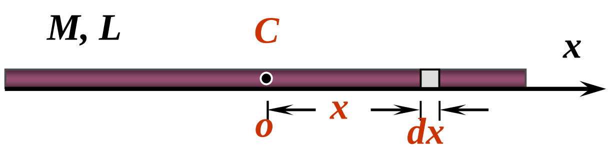
例　质量均匀的细杆质心

- 坐标原点选在一端



$$x_c = \frac{\int x dm}{M} = \frac{1}{M}\int x \frac{M}{L} dx = \frac{1}{L}\int_0^L x dx = \frac{1}{2} L$$

- 坐标原点选在杆中央



$$x_c = \frac{\int x dm}{M} = \frac{1}{M}\int x \frac{M}{L} dx = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x dx = 0$$

二、刚体质心运动定理

$$M\vec{a}_c = M\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = M\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\vec{r}_i}{M}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{d^2(m_i\vec{r}_i)}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i\left(\vec{F}_i^{\text{外}} + \sum_{j,j\neq i}\vec{F}_{ij}\right) = \sum_i \vec{F}_i^{\text{外}} = \vec{F}_{\text{外}}$$

$$\boxed{M\vec{a}_c = \vec{F}_{\text{外}}}$$

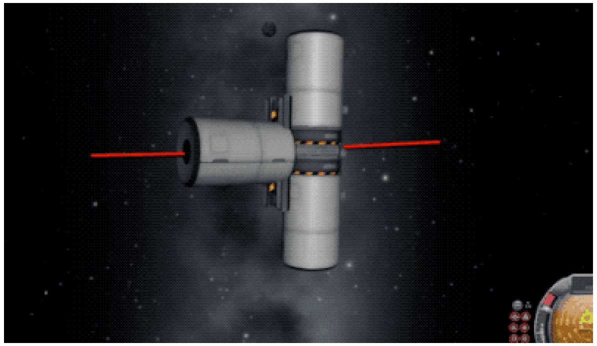
$$\begin{cases} M = \sum M_i \\ \vec{r}_c = \dfrac{\sum m_i\vec{r}_i}{M},\ \vec{v}_c = \dfrac{d\vec{r}_c}{dt},\ \vec{a}_c = \dfrac{d\vec{v}_c}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} \\ \vec{F}_{\text{外}} = \sum \vec{F}_i^{\text{外}} \end{cases}$$

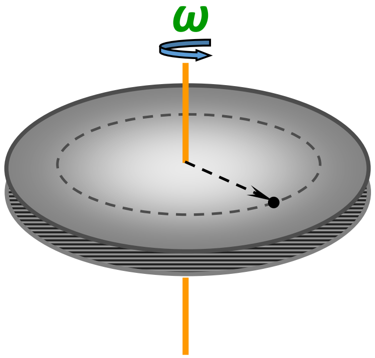
质心加速度与质心质量的乘积等于刚体所受外力矢量和。

§ 5-3　刚体的定轴转动

一、定轴转动特点

- 轴固定不动，即认为轴线上的点速度为零
- 轴外刚体上的点相同时间内转过相同的角度
- 刚体上所有点的角速度相同
- 角速度可以更好地描述刚体运动。

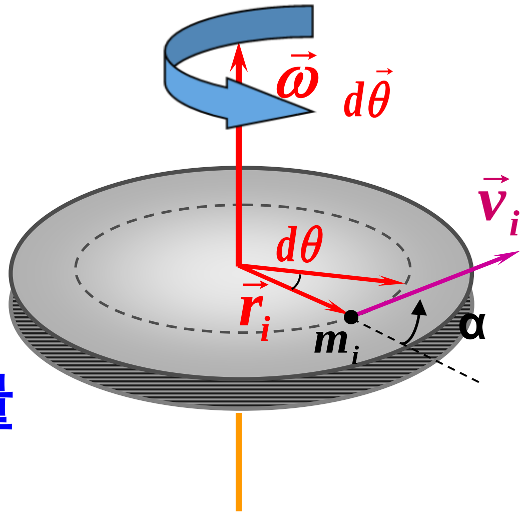




二、刚体定轴转动的角量描述

■ 角位移矢量：dt时间内位矢转过的角度。

$$d\vec{\theta} \quad (rad)$$ 方向沿转轴，右手系



■ 角速度矢量：角位移的时间变化率。

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \qquad (rad/s)$$ 方向同角位移矢量

■ 角加速度矢量：角速度的时间变化率。

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (rad/s^2)$$ 方向沿着转轴，ω增加方向

角加速度与角速度增量同向：

加速转动时，α与ω同向

减速转动时，α与ω反向

■ 角量与线量的关系：

$$\vec{v}_i = \vec{\omega}\times\vec{r}_i\ ,\quad \vec{a}_{it} = \vec{\alpha}\times\vec{r}_i\ ,\quad \vec{a}_{in} = \vec{\omega}\times\vec{v}_i = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i\right)$$

说明：

- 刚体定轴转动时转轴固定不动，所以各角量可用标量表示。

- 刚体定轴转动时，各质元角量 $\mathrm{d}\vec{\theta},\vec{\omega},\vec{\alpha}$ 均相同，但各质元线量 $d\vec{r}_i,\vec{v}_i,\vec{a}_i$ 均不同。

缆索绕过定滑轮拉动升降机，滑轮半径 $r=0.5m$，如果$t=0$时升降机从静止开始以加速度 $a=0.4m/s^2$ 匀加速上升，且缆索与滑轮之间不打滑，求：1)滑轮的角加速度；2)t=5s 时滑轮的角速度；3)5s内滑轮转过的圈数 。

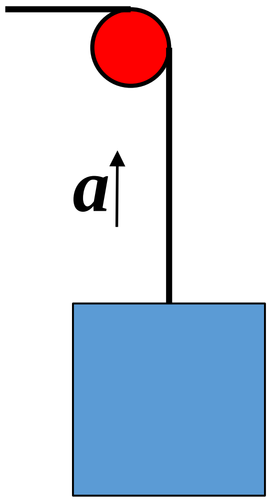
解：不打滑则升降机和轮缘上切向加速度相同

$$\alpha r = a \qquad \alpha = \frac{a}{r} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8\, rad/s^2$$

$$\omega = \alpha t = 0.8 \times 5 = 4\, rad/s$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2} \times 0.8 \times 25 = 10 rad$$

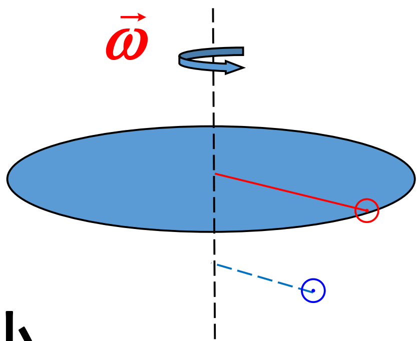
$$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} = 1.6$$



三、刚体定轴转动的角动量和转动惯量

一个质点在平面内做圆周运动对于圆心的**角动量**为：

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = mr^2\vec{\omega}$$



刚体的各个质点都绕转轴做圆周运动

$$\vec{L}_i = \Delta m_i r_i^{\,2}\vec{\omega}$$

各个质点元角动量方向相同，直接取角动量大小

$$L = \sum_i L_i = \sum_i \left(\Delta m_i r_i^{\,2}\omega\right) = \left(\sum_i \Delta m_i r_i^{\,2}\right)\omega$$

定义：$J = \sum_i \Delta m_i r_i^{\,2}$　　　则有 $L = \omega J$

J:刚体绕**转轴**的**转动惯量**，单位：$kg{\cdot}m^2$

四、转动惯量的计算

刚体转动惯量 $\boxed{J=\int r^2 dm}$

- r是质量元dm到转轴的垂直距离
- 转动惯量是刚体转动时惯性大小的量度，它的大小取决于：

(1) 刚体质量； (2) 质量的分布； (3) 转轴的位置。

- 三种质量分布模型

质量体分布时： $dm=\rho dV$ ρ 为质量体密度

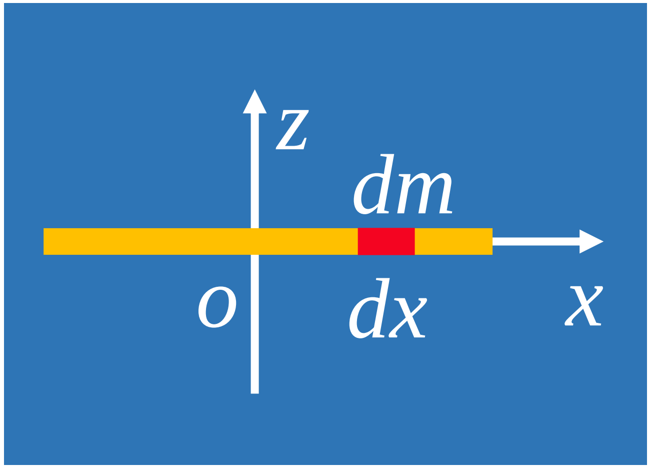
质量面分布时： $dm=\sigma dS$ σ 为质量面密度

质量线分布时： $dm=\lambda dl$ λ 为质量线密度

几种典型形状刚体的转动惯量计算

均匀细棒

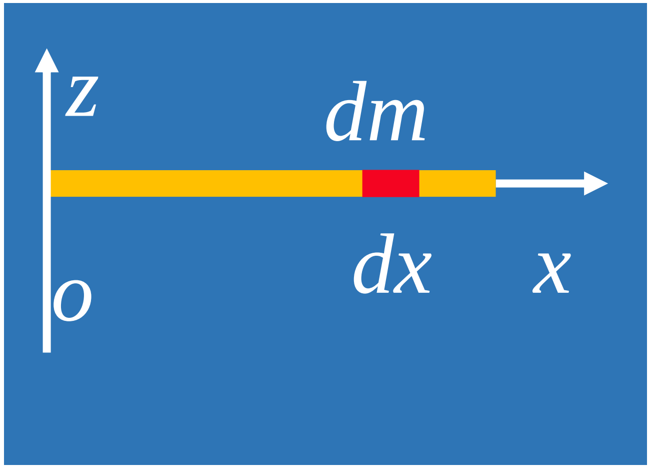
a) 转轴过中心与杆垂直



$$J = \int r^2 \mathrm{d}m$$

$$= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} \mathrm{d}x = \frac{1}{12} m l^2$$

b) 转轴过棒一端与棒垂直



$$J = \int r^2 \mathrm{d}m$$

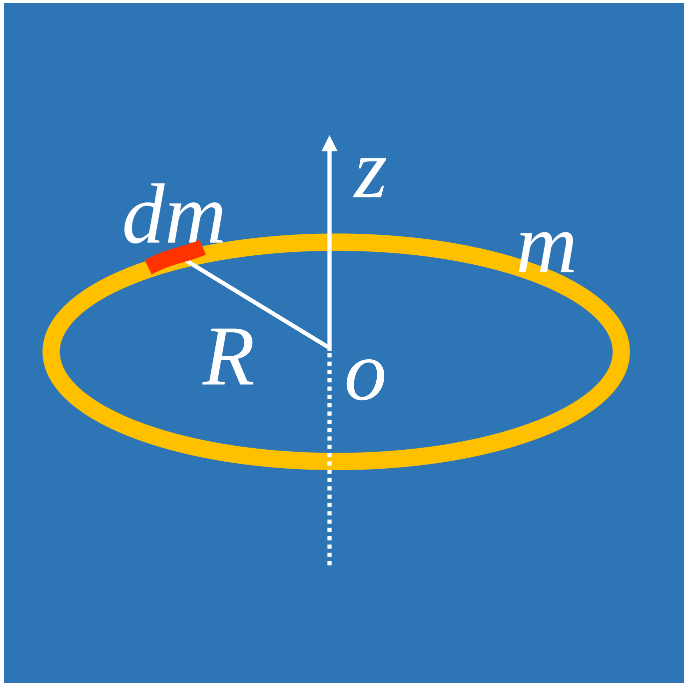
$$= \int_0^l x^2 \frac{m}{l} \mathrm{d}x = \frac{1}{3} m l^2$$

■ 均匀细园环

转轴过圆心与环面垂直

$$dm = \lambda dl \qquad \lambda = \frac{m}{2\pi R}$$

$$J = \int R^2 dm = \lambda R^2 \int_0^{2\pi R} dl = mR^2$$



问题：如何计算园环转轴通过园环直径的转动惯量？

■均匀圆盘绕中心轴的转动惯量

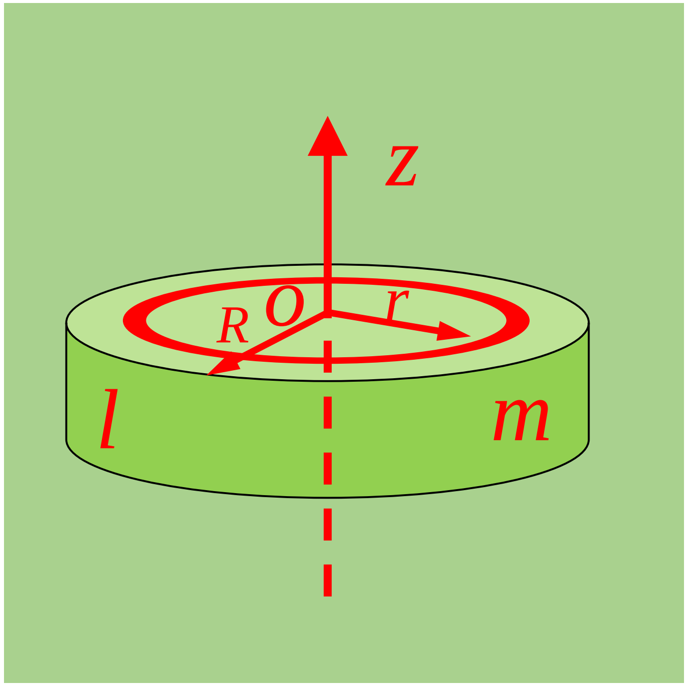
质量m, 半径R, 厚l, 转轴过圆心与环面垂直

$$\mathrm{d}J = r^2\mathrm{d}m \qquad \rho = \frac{m}{\pi R^2 l} \qquad \mathrm{d}m = \rho 2\pi r l \mathrm{d}r = \frac{2m}{R^2} r\mathrm{d}r$$

$$J = \int r^2 dm$$

$$= \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 \mathrm{d}r$$

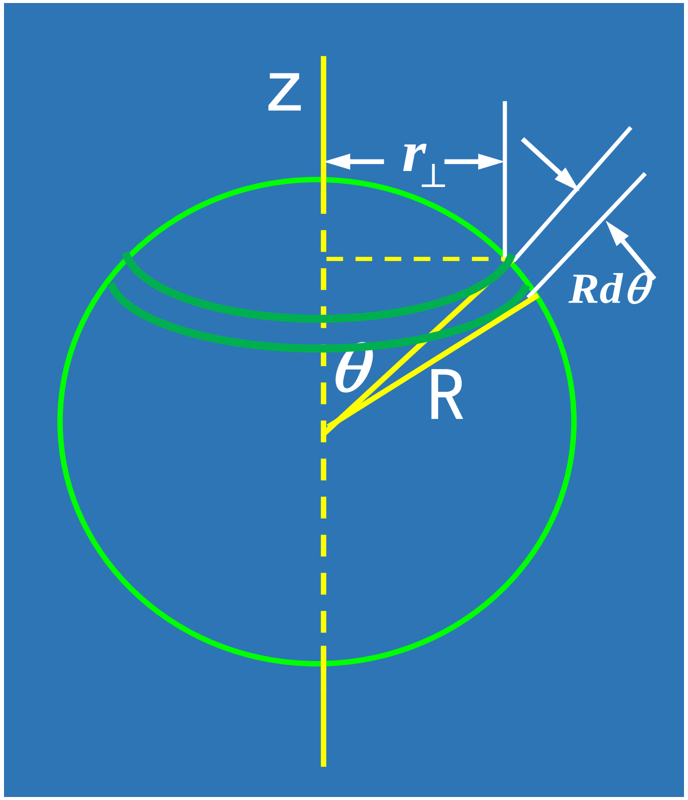
$$= \frac{1}{2} mR^2$$



圆柱的转动惯量?

■ 均匀薄球壳绕直径的转动惯量

$$\sigma = \frac{m}{4\pi R^2} \qquad r_\perp = R\sin\theta$$



环带面积 $\mathrm{d}S = 2\pi r_\perp R d\theta$

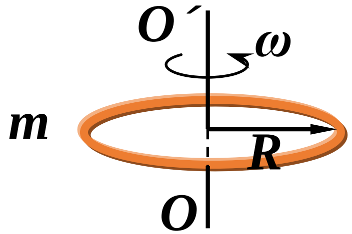
环带质量

$$\mathrm{d}m = \sigma dS = \frac{m}{2}\sin\theta d\theta$$

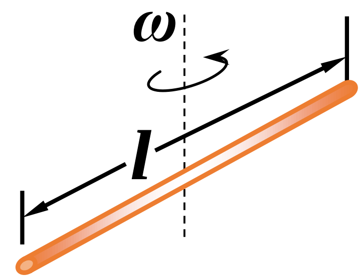
均匀薄球壳转动惯量

$$J = \int_{-R}^{R} r_\perp^2 dm = \frac{mR^2}{2}\int_0^{-\pi}\sin^3\theta d\theta = \frac{2}{3}mR^2$$

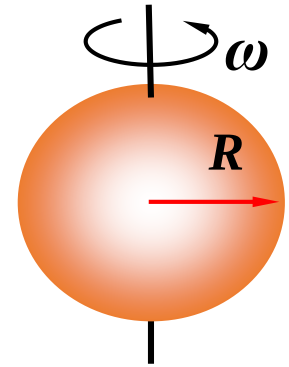
典型形状刚体的转动惯量



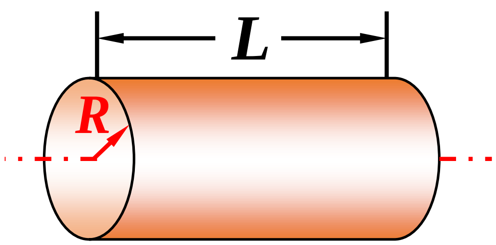
圆环 $J=mR^2$



细圆棒 $J=\frac{1}{12}ml^2$

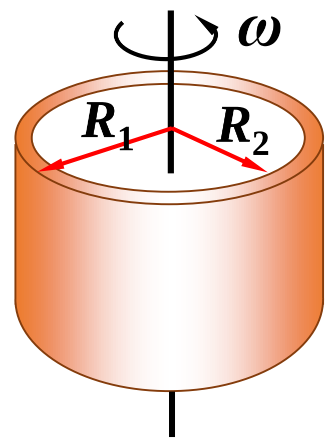


圆球 $J=\frac{2}{5}mR^2$



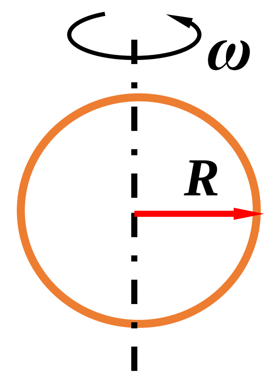
圆柱

$J=\frac{1}{2}mR^2$



圆筒

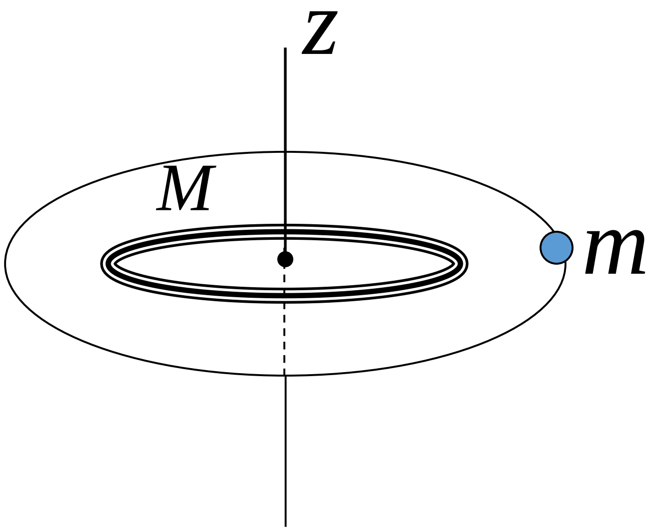
$J=\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$



球壳

$J=\frac{2}{3}mR^2$

例 求组合刚体的转动惯量。如图所示，一质量为M、半径为R的圆盘，边缘粘一质量为m的质点，试求对中心轴oz的转动惯量。



解：圆环dm的转动惯量为r^2dm

$$J_{盘}=\int_0^R r^2\sigma 2\pi r dr$$

$$=\frac{1}{2}\sigma\pi R^4=\frac{1}{2}MR^2$$

$$J_{总}=\frac{1}{2}MR^2+mR^2$$

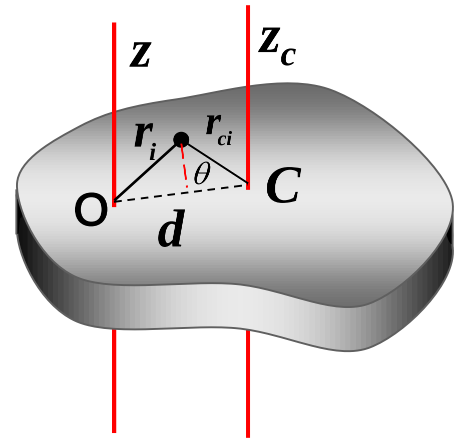
转动惯量三要素：转轴、质量和分布

转动惯量的两个定理

平行轴定理

设z_c为过刚体质心的转轴，z轴与z_c平行，两转轴相距d，则：

$$J = J_c + md^2$$



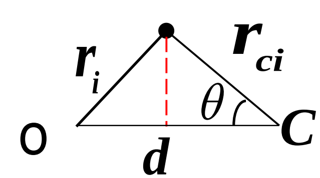
- md^2 相当于质量全部集中于c时，对z轴的转动惯量
- 刚体对通过质心转轴的转动惯量最小

证明： $r_i^2 = r_{ci}^2 + d^2 - 2dr_{ci}\cos\theta$

$$J_o = \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \sum_i \Delta m_i (r_{ci}^2 + d^2 - 2dr_{ci}\cos\theta)$$

$$= \sum_i \Delta m_i r_{ci}^2 + \sum_i \Delta m_i d^2 + \sum_i 2d\Delta m_i r_{ci}\cos\theta$$

$$= J_c + md^2$$



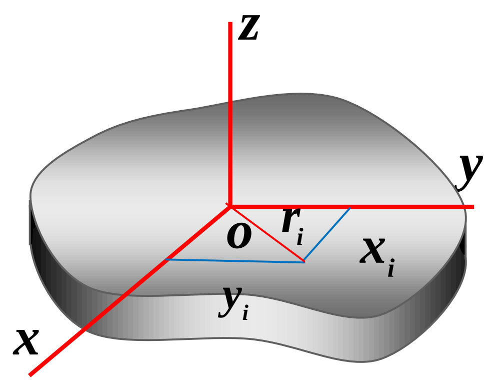
$$r_{ci}\cos\theta = x_{ci}$$

$$\sum_i \Delta m_i x_{ci} = mx_{cc} = 0$$

■ 正交轴定理

薄板刚体对**板内两正交轴**的转动惯量之和等于刚体对过两轴交点并垂直于板面的转轴的转动惯量。

$$J_z = J_x + J_y$$



证明： $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$

$$J_z = \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

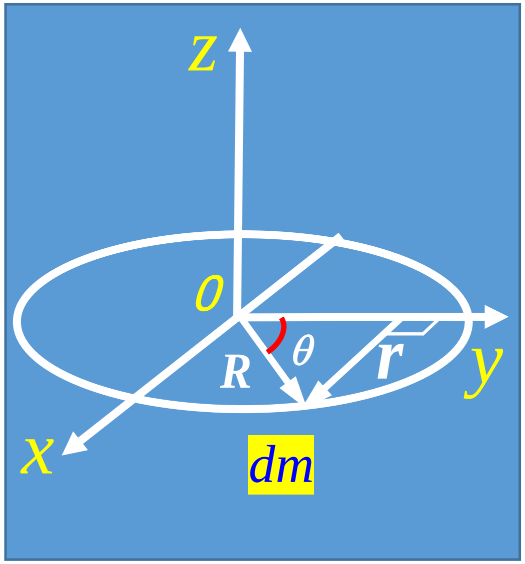
$$= \sum_i \Delta m_i x_i^2 + \sum_i \Delta m_i y_i^2$$

$$= J_y + J_x$$

例 求质量为*m*、半径为*R*的细圆环绕直径转动的转动惯量。

解1： 用λ表示细圆环的线质量密度

$$\lambda = m/2\pi R \qquad dm = \lambda ds = \lambda R d\theta$$



$$J_y = \int r^2 dm = 2\int_0^{\pi} (R\sin\theta)^2 \lambda R d\theta$$

$$= 2\lambda R^3 \int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta = \frac{2\pi\lambda R^3}{2} = \frac{mR^2}{2}$$

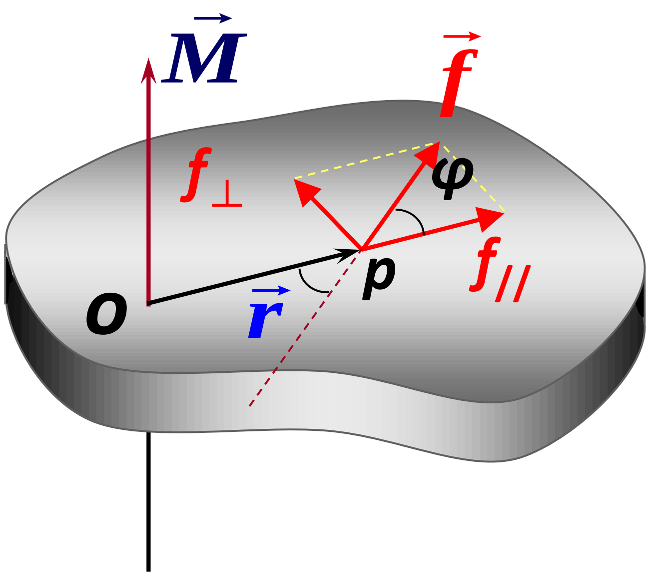
解2：垂直轴定理 $J_z = J_x + J_y$（质量分布在xy平面内）

已知圆环绕中心轴： $J_z = mR^2$， $J_x = J_y = J_z/2$

§ 5-4 刚体转动定理

- 力的效果(影响)与力的大小、方向、作用点都有关
- 定轴转动刚体: 平行转轴方向的外力分力不起作用
- 只需考虑外力在垂直于轴的平面内的分力

- 实际对转轴转动有作用的是力在转动平面内垂直于转动半径的分量

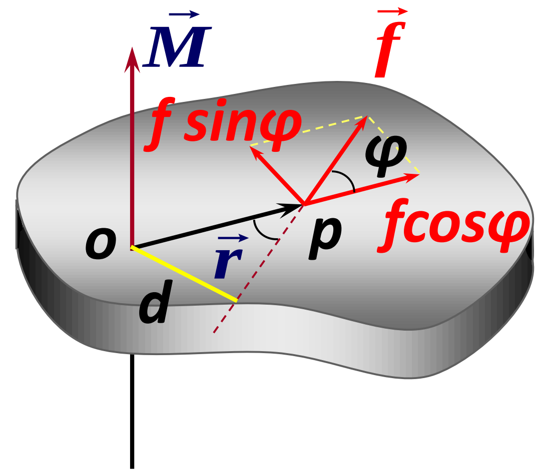


一、力矩：

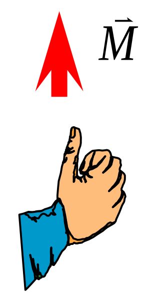
- 定义外力相对于某固定轴的力矩为：

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{f} \qquad (N \cdot m)$$

$\vec{r}$：转动半径，作用点垂直于转轴的矢量半径



- 力矩的大小：$M = \left|\vec{r} \times \vec{f}\right| = rf\sin\varphi$



- 力对转轴的力臂：

$$d = r\sin\varphi, \quad \boxed{M = fd}$$

- 转动平面内轴垂直分力

$$f_{\perp} = f\sin\varphi, \quad \boxed{M = f_{\perp} r}$$

- 当有几个外力同时作用于刚体时，合外力矩等于各外力力矩的矢量和：

$$\vec{M}=\vec{M}_1+\vec{M}_2+\cdots+\vec{M}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i$$

- 对于作定轴转动的刚体，合外力矩可用代数和表示：

$$M=M_1+M_2+\cdots+M_n=\sum_{i=1}^{n}M_i$$

- 刚体所受合外力为零时，合外力矩不一定为零，反之亦然。

力矩和力的作用点有关系，计算合力的时候无需考虑作用点

二、刚体的转动定理：

刚体中第i个质元对转轴的角动量为：

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

对时间求导：

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$$= \vec{v}_i \times m_i\vec{v}_i + \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \vec{M}_i$$

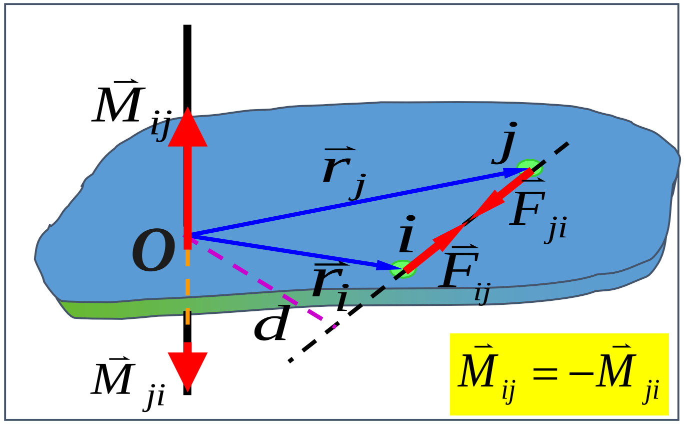
其中： $\vec{f}_i = \dfrac{d\vec{p}_i}{dt}$ 为第i个质元所受的作用力；

$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{f}_i$ 为 f_i对转轴的力矩。

对整个刚体： $$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_i \vec{L}_i=\sum_i \vec{M}_i$$

$\sum_i \vec{M}_i$ 为所有质元所受外力矩和内力矩的矢量和：

$$\sum_i \vec{M}_i=\sum_i \vec{M}_{i外}+\sum_i \vec{M}_{i内}$$



刚体内作用力和反作用力的力矩互相抵消

设 $\vec{M}$ 为刚体所受的合外力矩，则： $$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$$

刚体的转动定理：刚体所受的合外力矩等于刚体对同一转轴角动量的时间变化率。

非相对论情况下，转动惯量J为常量：

$$\therefore \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\alpha}$$

所以，经典力学中刚体的**转动定理**可表示为：

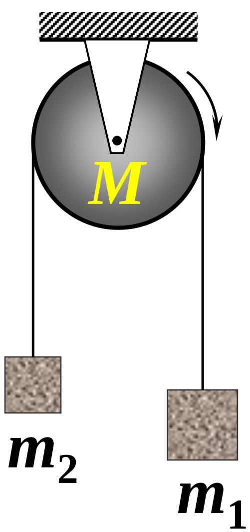
$$\boxed{\vec{M} = J\vec{\alpha}}$$

当外力矩一定时，转动惯量越大，则角加速度越小。说明转动惯量J是刚体转动惯性大小的量度。

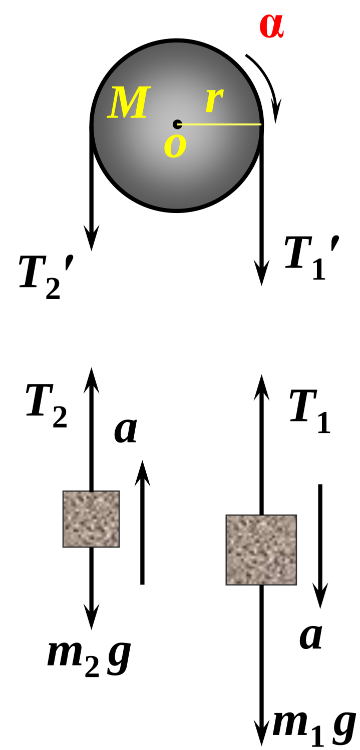
设 $m_1 > m_2$，定滑轮可看作匀质圆盘，其质量为M而半径为r 。绳的质量不计且与滑轮无相对滑动，滑轮轴的摩擦力不计。求：m_1 、 m_2的加速度及绳中的张力。

隔离滑轮及重物，画受力分析图。

因绳的质量不计，所以：$T_1' = T_1$， $T_2' = T_2$。



$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 a \\ \boxed{T_1 r - T_2 r = J\alpha = \dfrac{1}{2} M r^2 \alpha} \\ \boxed{a = r\alpha} \end{cases}$$



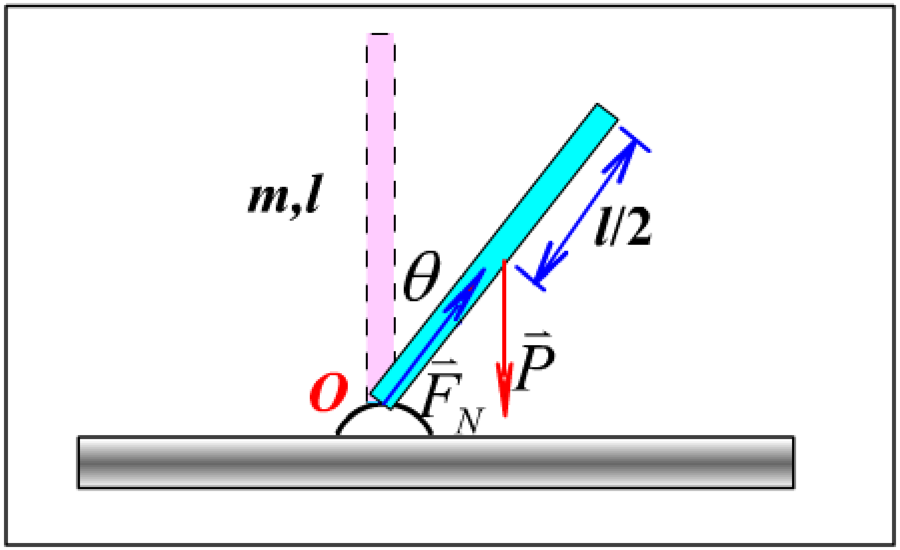
解方程，得：

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2} g \\ T_1 = \dfrac{2m_2 + M/2}{m_1 + m_2 + M/2} m_1 g \\ T_2 = \dfrac{2m_1 + M/2}{m_1 + m_2 + M/2} m_2 g \end{cases}$$

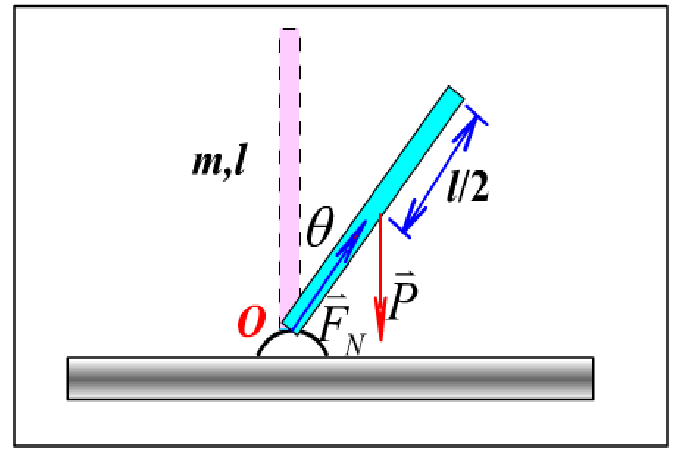
若滑轮质量不计，即$M=0$，则：

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \\ T_1 = T_2 = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \end{cases}$$

长 l 质量m匀质细杆竖直放置，其下端与一固定铰链O相接，可绕其转动。受到微扰，细杆将在重力作用下由静止开始绕铰链O 转动 。试计算细杆转动到与竖直线成 θ 角时的角加速度和角速度 。



解　细杆受重力矩作用下定轴转动，由转动定律得



$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta = J\alpha,\quad J=\frac{1}{3}ml^2$$

得　$$\alpha=\frac{3g}{2l}\sin\theta$$

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\qquad \therefore\ \boldsymbol{\omega}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=\frac{3\boldsymbol{g}}{2\boldsymbol{l}}\sin\boldsymbol{\theta}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$$

代入初始条件积分 得　$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$$

§5-5 刚体的角动量定理

一、刚体的角动量定理：

由转动定理： $\vec{M}dt = d\vec{L}$

$$\therefore \quad \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}dt = \int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2} d\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = J\vec{\omega}_2 - J\vec{\omega}_1$$

式中 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}dt$ 称为合外力矩在 $\Delta t = t_2 - t_1$内的冲量矩$(N\cdot m\cdot s)$。

- 角动量定理：刚体所受合外力矩的冲量矩等于刚体在同该时间内的角动量增量。
- 转动定理可以理解为角动量定理的微分形式
- 角动量定理描述了力矩的时间积累效应：外力矩持续作用一段时间后，刚体的角动量发生改变，对于定轴转动表现为角速度改变

二、角动量守恒定律：

- 当物体所受合外力矩为零时，有：

$$\vec{L} = J\vec{\omega} = \text{常矢量} \qquad (\text{当}\vec{M} = 0\text{时})$$

当物体所受合外力矩为零时，物体的角动量保持不变。

- 系统角动量守恒条件是系统收到的外力矩矢量和为零，内力矩不改变系统的角动量，只会影响角动量在系统内部的分配

- 角动量守恒的两种情况：
  - 转动惯量和角速度都不变；
  - 转动惯量和角速度都改变，但两者的乘积保持不变。

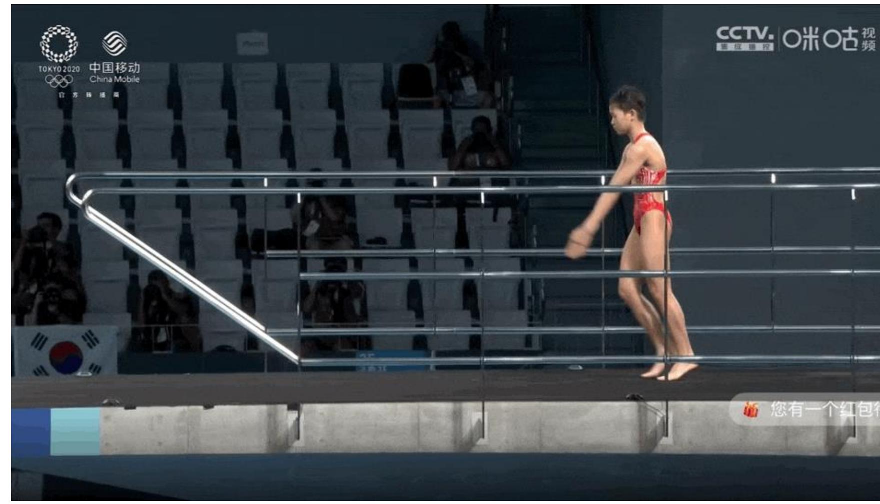
若 J不变，ω不变；若 J 变，ω也变，但 $L=J\omega$不变

角动量守恒例子

- 花样滑冰

● 跳水

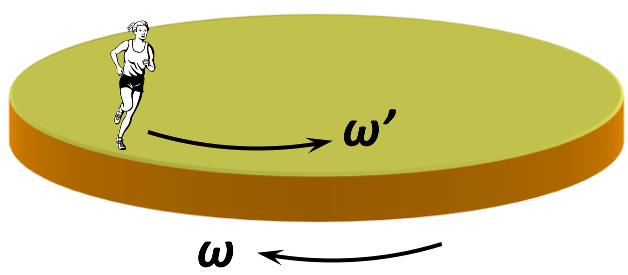

CCTV.com
央视网


TOKYO 2020
中国移动
China Mobile
CCTV. 咪咕视频


CCTV 13
新闻
KAZAN 2015
7月30日
星期四

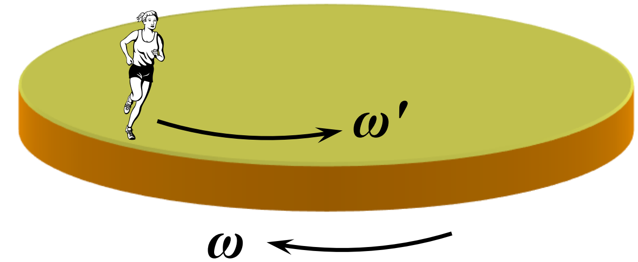

CCTV.com
TOKYO 2020

质量为 M，半径为R的转台，可绕垂直中心轴无摩擦地转动，质量为m的人站在台边。开始时，人与转台都静止。若人沿台边走动一周。求：转台和人相对地面各转动了多少角度？



设人对地角速度ω'，转台对地角速度ω，人对转台角速度ω_{rel}，则：

$$\omega' = \omega_{rel} + \omega$$



人与转台系统地角动量守恒：

$$\frac{1}{2}MR^2\omega + mR^2\omega' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega' = -\frac{M}{2m}\omega \qquad \omega' = \frac{M}{M+2m}\omega_{rel}$$

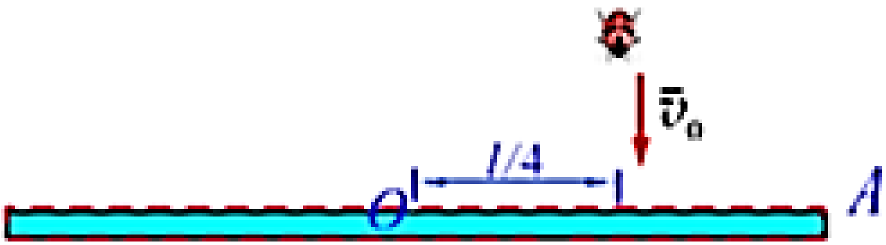
所以人对地转过的角度：（设T为人沿转台走一周所需时间）

$$\theta' = \omega' T = \frac{M}{M+2m}\omega_{rel} \cdot T = \frac{2\pi M}{M+2m}$$

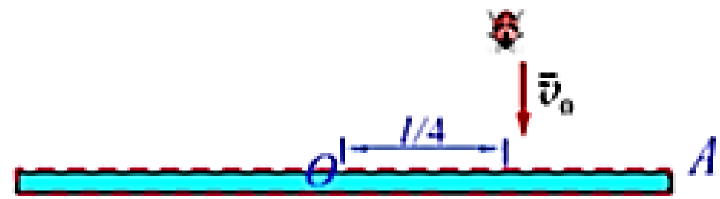
转台对地转过的角度：$\theta = \omega T = -\frac{2m}{M}\omega' \cdot T = -\frac{4\pi m}{M+2m}$

负号表示人与转台的转动方向相反。

质量很小长度为l 的均匀细杆,可绕过其中心 O 并与纸面垂直的轴在竖直平面内转动。当细杆静止于水平位置时，有一只小虫以速率v_0垂直落在距点O为 $l/4$ 处, 并背离点O 向细杆的端点A 爬行。设小虫与细杆的质量均为m，问:欲使细杆以恒定的角速度转动, 小虫应以多大速率向细杆端点爬行?

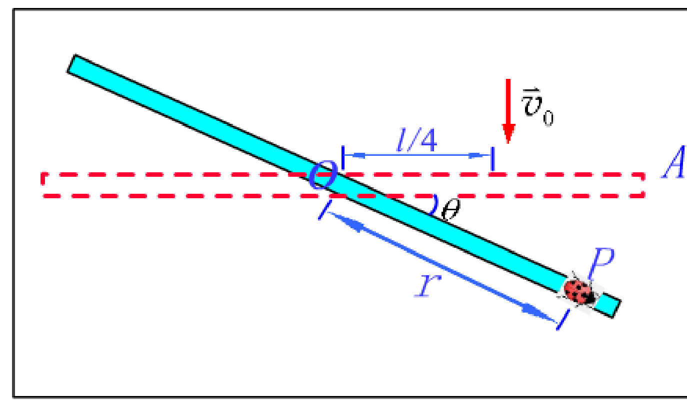


解 小虫与细杆的碰撞视为完全非弹性碰撞，碰撞前后系统角动量守恒



$$mv_0\frac{l}{4}=\left[\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{4}\right)^2\right]\omega \qquad \omega=\frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$$

此后过程由角动量定理

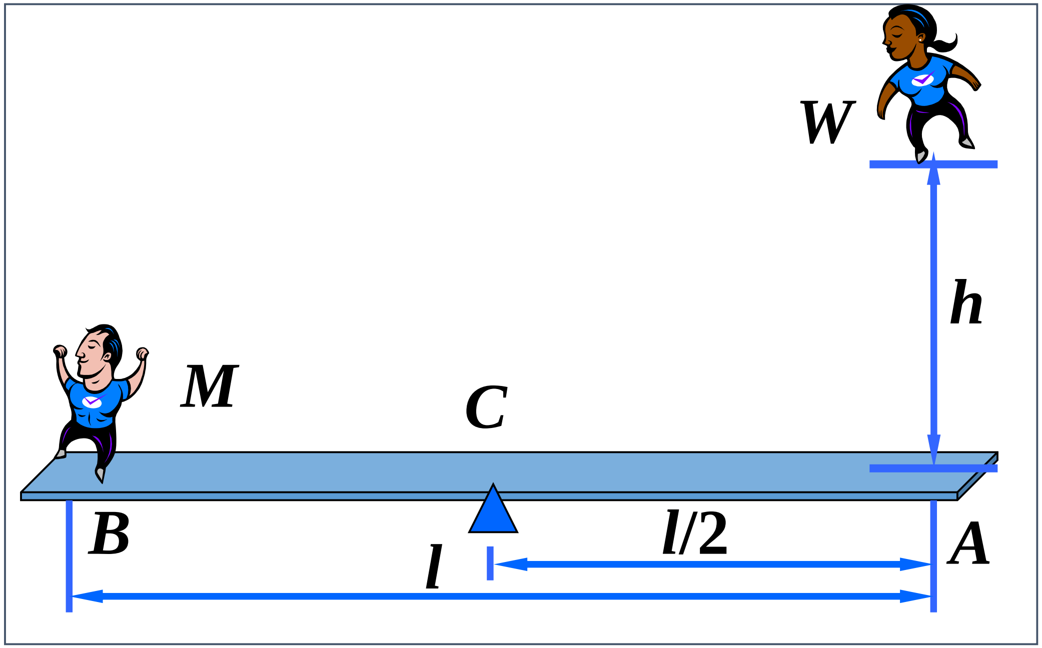


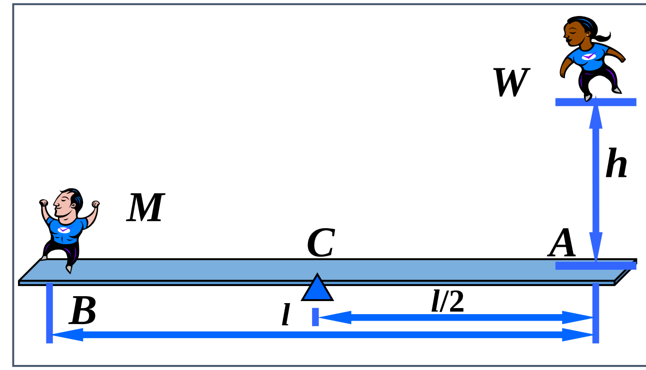
$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\boxed{\frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{dJ}}{\mathrm{d}t}}$$

$$mgr\cos\theta=\boxed{\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{12}ml^2+mr^2\right)=2mr\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}}$$

考虑到 $\theta=\omega t$ $$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{2\omega}\cos\omega t=\frac{7lg}{24v_0}\cos\left(\frac{12v_0}{7l}t\right)$$

一杂技演员 W 由距水平跷板高为 h 处自由下落到跷板的一端A,并把跷板另一端的演员 M 弹了起来.设跷板是匀质的,长度为l,质量为 m' , 跷板可绕中部支撑点C 在竖直平面内转动,演员的质量均为m. 假定演员W落在跷板上,与跷板的碰撞是完全非弹性碰撞.问演员M可弹起多高?





解 碰撞前 W 落在 A点的速度

$$v_W = (2gh)^{1/2}$$

碰撞后的瞬间, W、M及翘板具有相同的角速度ω,把W、M和跷板作为一个系统, 角动量守恒

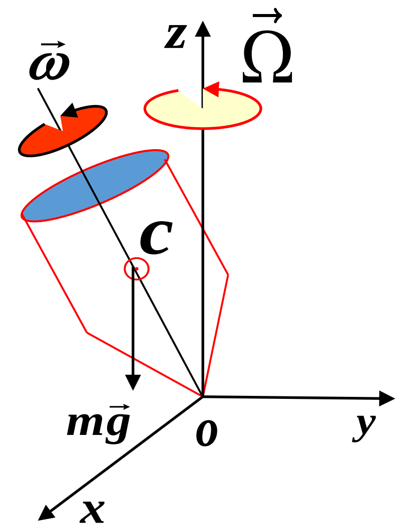
$$m v_W \frac{l}{2} = J\omega + 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \omega = \frac{1}{12} m' l^2 \omega + \frac{1}{2} m l^2 \omega$$

解得 $$\omega = \frac{m v_W l/2}{m' l^2/12 + m l^2/2} = \frac{6m(2gh)^{1/2}}{(m' + 6m) l}$$

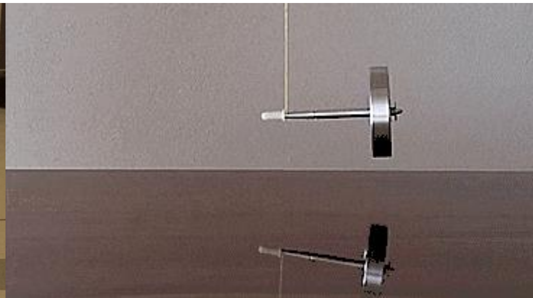
演员 M 以 $u=\omega l/2$ 起跳, 达到的高度 $$h' = \frac{u^2}{2g} = \left(\frac{3m}{m' + 6m}\right)^2 h$$

三、陀螺运动

- 定点转动的陀螺通常有三个运动：**自转、进动、章动**
  - 转动：陀螺在绕自身对称轴线的转动
  - 进动：陀螺对称轴绕竖直轴OZ回转
  - 章动：陀螺对称轴在竖直平面内上下摆动
- 陀螺运动过程中受到向下的重力作用，但急速旋转的陀螺不会倾倒

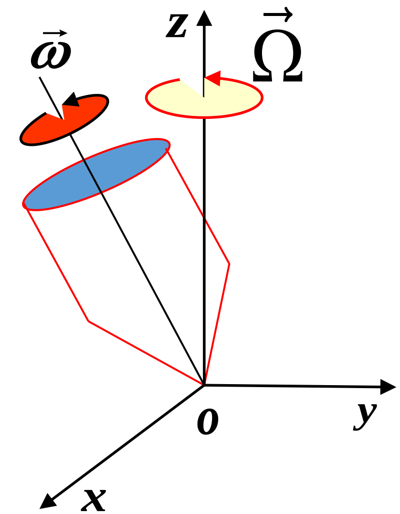




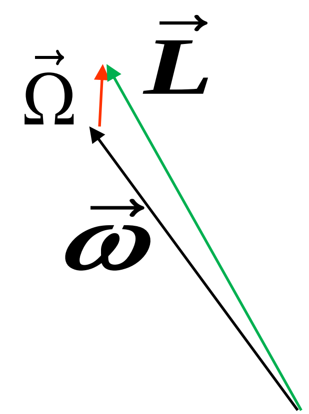


□ 陀螺的角动量

- 陀螺绕着轴快速**自转**，角速度$\vec{\omega}$
- 自转轴围绕着竖直轴**进动**，角速度$\vec{\Omega}$
- 暂不考虑章动，总角动量



$$\vec{L} = \vec{L}_{\omega} + \vec{L}_{\Omega}$$



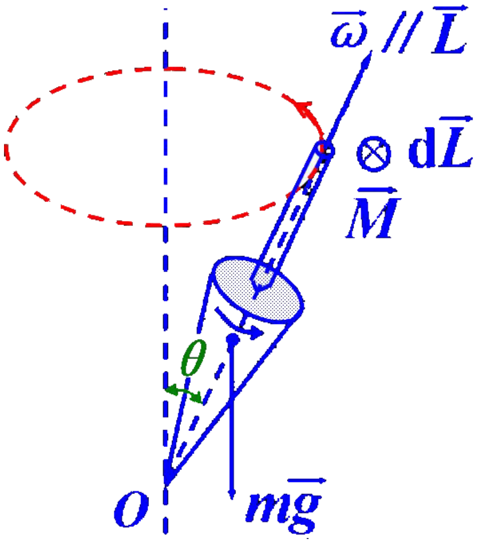
- 由于 Ω 很小，L 近似为自转角动量

$$\vec{L} \approx \vec{L}_{\omega}, \quad \vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

□ 重力矩

- 如果自旋轴垂直水平面，M=0，转轴不变，始终在竖直方向
- 如果陀螺不正，自旋轴与竖直方向成 θ 角

$$\vec{M}=\vec{r}_c\times m\vec{g}\neq 0$$



- 重力作用方向朝下，对O点会产生重力力矩，力矩方向沿进动方向

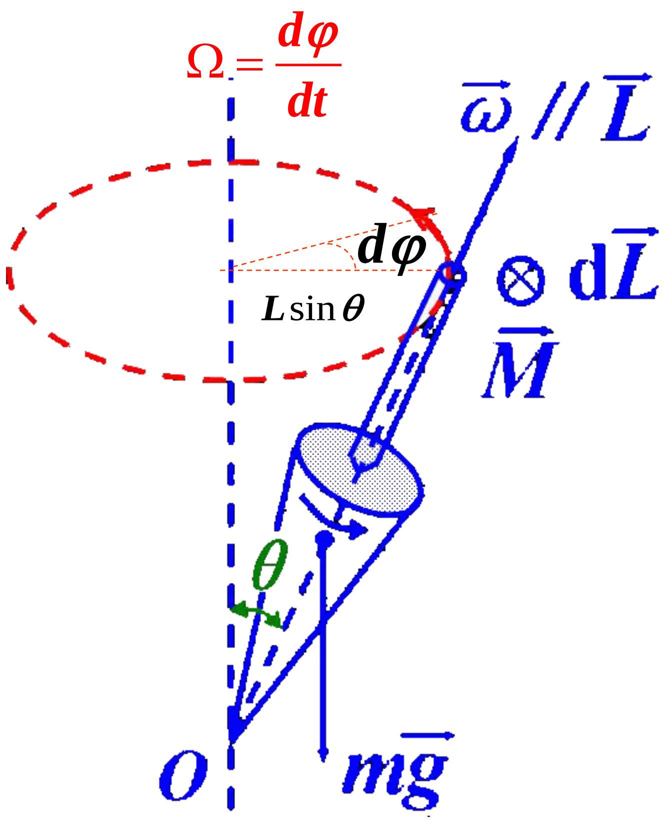
陀螺进动

$$\vec{M}dt = d\vec{L} = \vec{e}_\varphi L\sin\theta d\varphi$$

进动角速度 $$\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$M = r_c mg\sin\theta$$

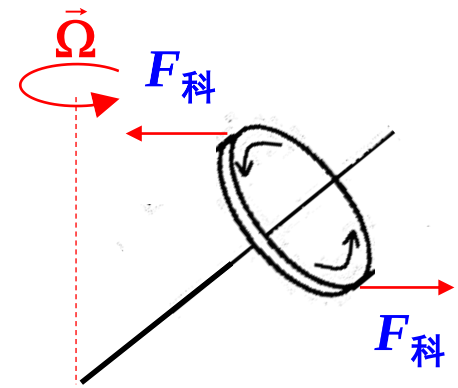
$$\therefore \quad \Omega = \frac{r_c mg}{L}$$



当刚体自转角速度很大时，进动角速度较小；

在刚体自转角速度很小时，进动角速度却较大。

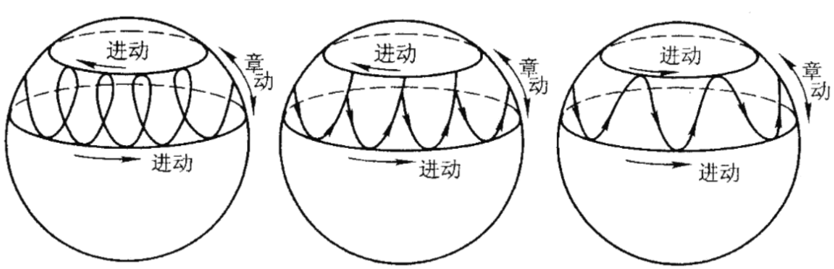
□ 陀螺在重力作用下不会倾覆的原因



- **回转力矩**：陀螺进动的同时还在自转，其上沿和下沿的速度方向不同，在随着陀螺进动的参考系中，科里奥利力上沿向左，下沿向右，形成了一个将陀螺回转轴向上抬升的力矩，称为“回转力矩”。

- **章动**：回转轴交替地向下倾侧与向上抬升的运动

  - 当回转力矩和重力矩相等时，陀螺理论上可以稳定地“自转+进动”
  - 当回转力矩小于重力力矩，自转轴开始下倾
  - 下倾后自转速度加快，回转力矩增大，自转轴上升，
  - 回转轴交替地下倾与上升，即产生章动。



§5-6 刚体定轴转动动能定理

一、力矩的功：

- 刚体定轴转动时，刚体内每一对质元间相对位移为零，内力做功为零，所以只需考虑外力做功

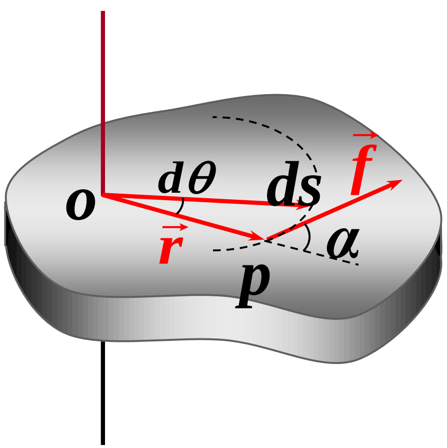
- 外力的元功

设刚体在外力作用下产生位移$d\vec{r}$，则外力作功：

$$dA = \vec{f}\cdot d\vec{r} = f\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cdot ds = f\,r\sin\alpha\cdot d\theta$$

$f\,r\sin\alpha = M$ 外力对转轴的力矩

所以：$dA = Md\theta$



- 当刚体在外力矩作用下由角位置θ_0转到θ时，外力矩作功：

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta$$

- 外力矩的功率为：

$$P = \frac{dA}{dt} = M\frac{d\theta}{dt} = M\omega \qquad (N\cdot m/s)$$

功率一定时，转速越低则外力矩越大。

二、刚体的转动动能：

刚体定轴转动时，某质元m_i的动能为：

$$E_{ki}=\frac{1}{2}m_i v_i^2=\frac{1}{2}(m_i r_i^2)\omega^2$$

整个刚体的动能为：

$$E_k=\sum_i \frac{1}{2}(m_i r_i^2)\omega^2=\frac{1}{2}\sum_i (m_i r_i^2)\omega^2$$

即：$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}J\omega^2}$$ 刚体的转动动能

**转动动能是刚体转动时动能的角量表示，而不是区别于平动动能的另一种形式的能量。

三、刚体定轴转动的动能定理：

由转动定理：

$$M = J\alpha = J\frac{d\omega}{dt} = J\frac{d\omega}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = J\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

得： $Md\theta = J\omega d\omega$

$$\therefore \quad A = \int_{\theta_0}^{\theta} Md\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} J\omega d\omega = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$$

刚体定轴转动动能定理：

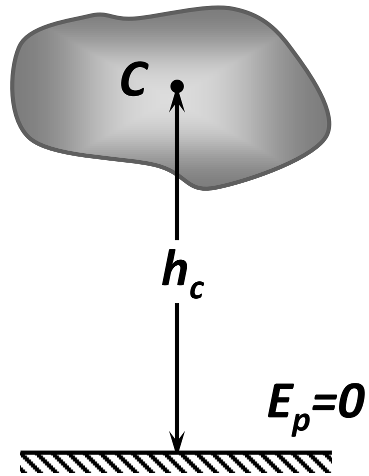
合外力矩对定轴转动刚体所作的功等于刚体转动动能的增量。

四、刚体的重力势能

取地面为重力零势能面，对刚体上质量元dm_i，其重力势能为：

$$dE_p = dm_i \, gh_i$$

$$E_p = \int dE_p = \int dm_i gh_i = g\int h_i dm_i = mgh_c$$

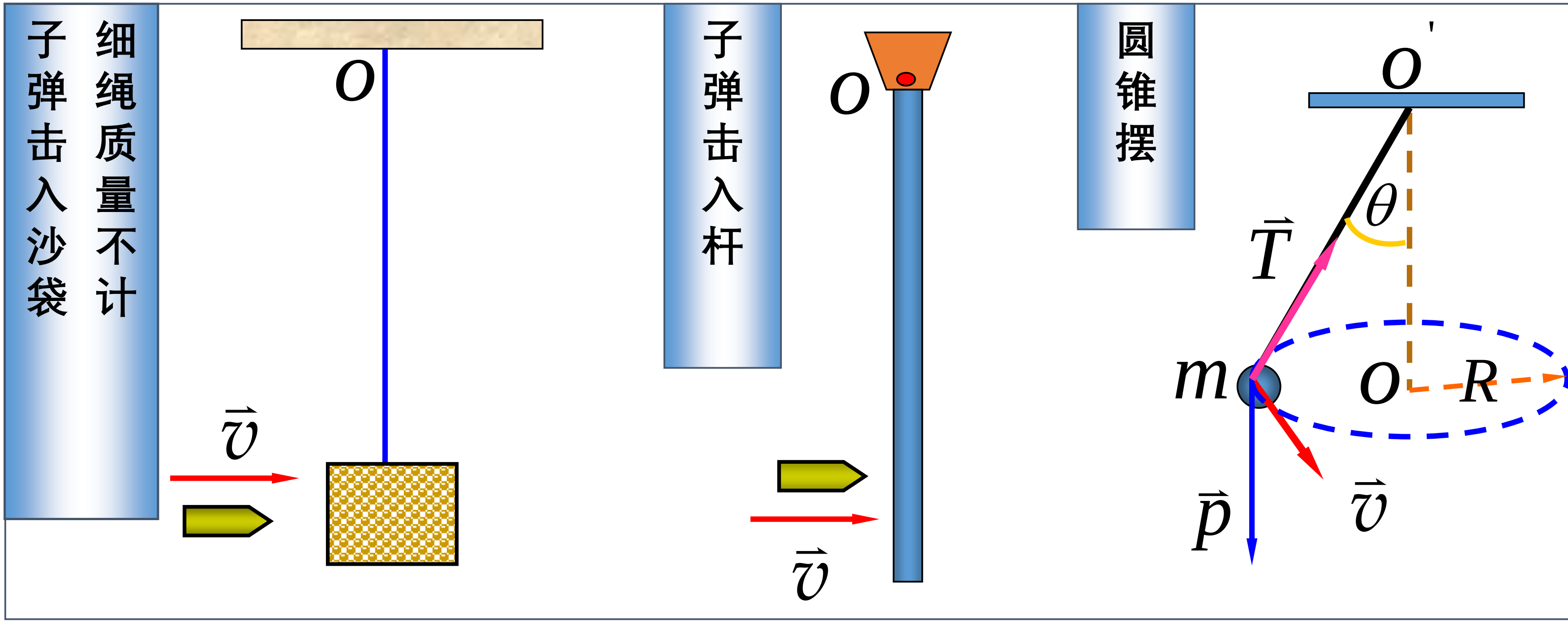


- 刚体的重力势能即为将刚体的全部质量集中于质心时，质心所拥有的重力势能

$$\boxed{E_p = mgh_c}$$

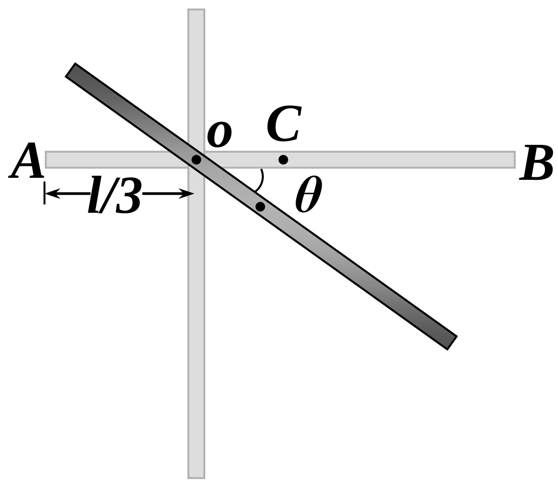
- 若转轴通过质心，则刚体的重力势能在刚体转动时保持不变

	质点直线运动（刚体平动）	刚体定轴转动
运动学	$v=\dfrac{dx}{dt},\quad a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$	$\omega=\dfrac{d\theta}{dt},\quad \alpha=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$
	匀变速直线运动 $\begin{cases} v=v_0+at \\ x-x_0=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2 \\ v^2-v_0^2=2a(x-x_0) \end{cases}$	匀变速转动 $\begin{cases} \omega=\omega_0+\alpha t \\ \theta-\theta_0=\omega_0 t+\dfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2-\omega_0^2=2\alpha(\theta-\theta_0) \end{cases}$
动力学	牛顿第二定律 $F=ma$	转动定律 $M=J\alpha$
	动量定理 $\int F dt=mv-mv_0$	角动量定理 $\int M\,dt=J\omega-J\omega_0$
	动量守恒 $\sum mv=$ 常量	角动量守恒 $\sum J\omega=$ 常量
	动能定理 $\int F\,dx=\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}mv_0^2$	动能定理 $\int M\,d\theta=\dfrac{1}{2}J\omega^2-\dfrac{1}{2}J\omega_0^2$

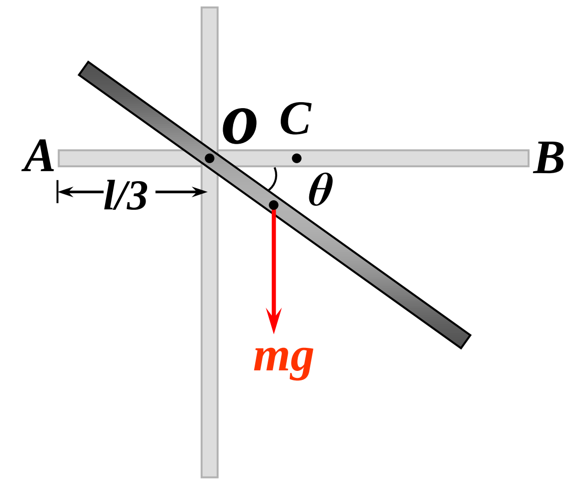


以子弹和沙袋为系统	以子弹和杆为系统	圆锥摆系统
动量守恒；	动量不守恒；	动量不守恒；
角动量守恒；	角动量守恒；	角动量守恒；
机械能不守恒．	机械能不守恒．	机械能守恒．

例 质量 m 长 l 的均匀细杆，可绕水平转轴在竖直平面内无摩擦转动。转轴离杆一端 $l/3$，设杆由水平位置自由转下，求：(1)杆在水平位置时的角加速度；(2)杆在竖直位置时的角速度和角加速度；(3)杆在竖直位置时对转轴的作用力。



(1)重力的作用点在质心C， $\overline{OC}=\dfrac{l}{6}$



由转动定理： $\dfrac{1}{6}mgl=J_o\alpha$

$$J=\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{6}\right)^2=\frac{1}{9}ml^2$$

得： $\alpha=\dfrac{3g}{2l}$

(2)机械能守恒： $\dfrac{1}{6}mgl=\dfrac{1}{2}J_0\omega^2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{9}ml^2\times\omega^2$

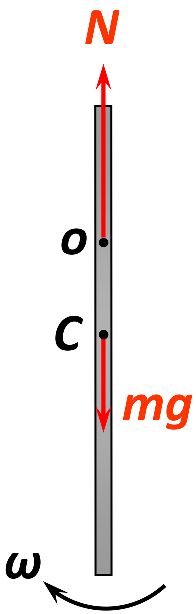
得： $\omega=\sqrt{\dfrac{3g}{l}}$，$\alpha=0$（合外力矩等于零）

(3) 由质心运动定理：

$$N - mg = ma_c = m\frac{v_c^2}{l/6} = \frac{6m}{l}\cdot\left(\frac{l}{6}\omega\right)^2$$

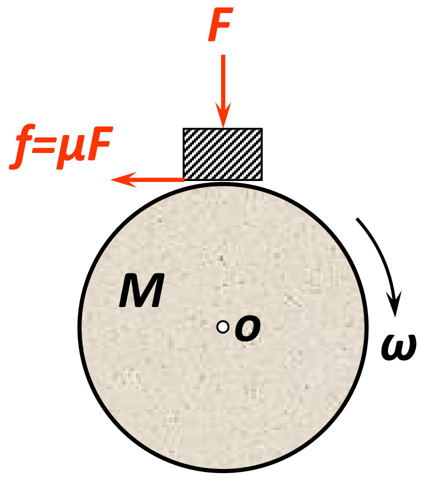
$$= \frac{l}{6}m\cdot\frac{3g}{l} = \frac{1}{2}mg$$

所以： $N = mg + \frac{1}{2}mg = \frac{3}{2}mg$



杆对转轴的作用力大小等于N，但方向向下。

例　一磨轮半径0.10*m*，质量25*kg*，以50*r/s*的转速转动.用工具以200*N*的正压力作用在轮边缘，使它在10s内停止转动，求工具与磨轮之间的摩擦因数。



摩擦阻力矩： $M=\mu FR$

磨轮转动惯量：$J=\dfrac{1}{2}MR^2$

由转动定理： $\alpha=\dfrac{M}{J}=\dfrac{2\mu F}{MR}$

β为常量，所以磨轮作匀变速转动： $\omega=\omega_0-\alpha t \Rightarrow \alpha=\dfrac{\omega_0}{t}$

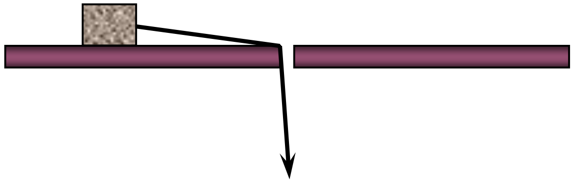
$$\therefore \quad \mu=\frac{MR\omega_0}{2Ft}=\frac{25\times0.1\times2\pi\times50}{2\times200\times10}\approx0.196$$

一质量为0.05*kg*的物块系于绳的一端，绳的另一端从光滑水平面上的小孔穿过，物块和小孔的距离原为0.2*m*并以角速度3*rad/s*绕小孔旋转。现向下拉绳使物块运动半径减为0.1*m* ，求：(1)物块旋转的角速度大小；(2)物块动能的变化。

(1)由角动量守恒：

$$(mr_1^2)\omega_1=(mr_2^2)\omega_2$$

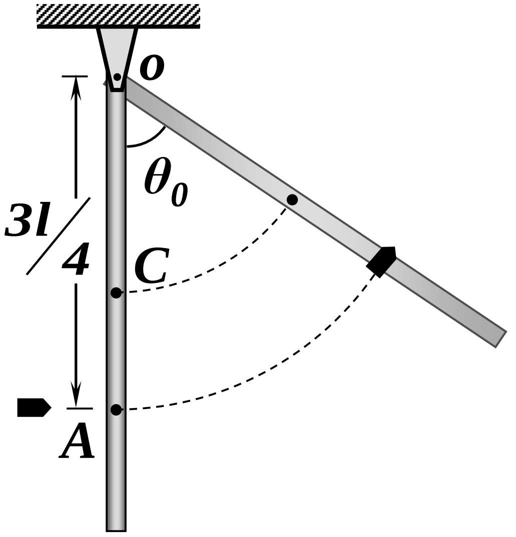
$$\omega_2=(\frac{r_1^2}{r_2^2})\omega_1=12\ rad/s$$



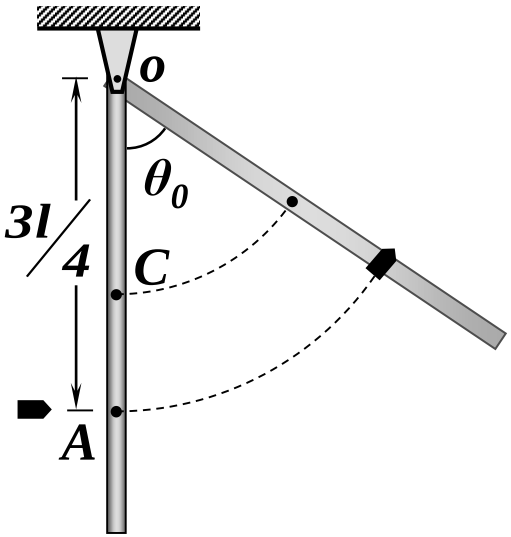
(2)物块动能的增加：

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}m(r_2^2\omega_2^2-r_1^2\omega_1^2)=0.027\ J$$

长l = 0.40m的匀质木棒，质量M=1.00kg，可绕水平轴o在竖直平面内无摩擦转动，开始时棒处于竖直位置，现有质量m=8g，v=200m/s的子弹从A点射入棒中。AO=$3l/4$，求(1)棒开始运动时的角速度；(2)棒的最大偏转角。



(1)棒和子弹的转动惯量：



$$J_M = \frac{1}{3}Ml^2$$

$$J_m = m(\frac{3}{4}l)^2 = \frac{9}{16}ml^2$$

由角动量守恒：

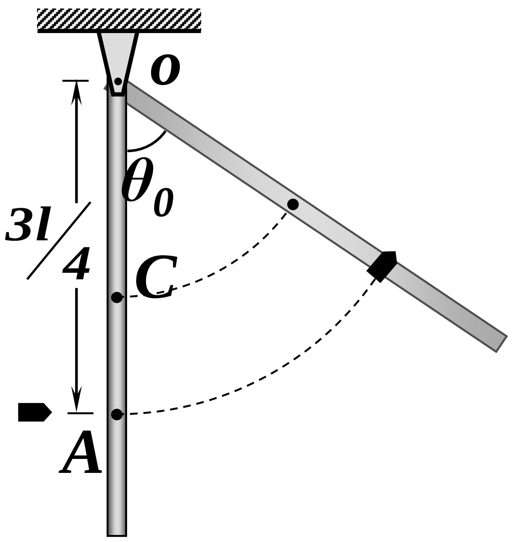
$$\frac{9}{16}ml^2 \times \frac{v}{\frac{3}{4}l} = (\frac{1}{3}Ml^2 + \frac{9}{16}ml^2)\omega$$

求得： $$\omega = \frac{36mv}{(16M+27m)l} = 8.88\,(rad/s)$$

(2)设棒的最大偏转角为θ_0，由机械能守恒：

$$\frac{1}{2}(J_M+J_m)\omega^2=Mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta_0)+mg\frac{3l}{4}(1-\cos\theta_0)$$

$$\Rightarrow\cos\theta_0=1-\frac{2(J_M+J_m)\omega^2}{(2M+3m)gl}$$



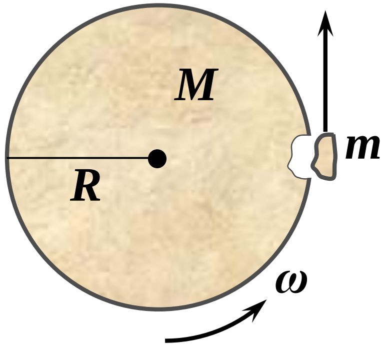
求得：

$$\cos\theta_0=-0.0758,\ \theta_0=94^\circ16'$$

一质量为M 、半径为R的飞轮，以角速度ω绕通过中心的水平轴转动。在某瞬时有一质量为m的碎片从轮缘上飞出，碎片飞出时的飞行方向竖直向上。 求：(1)碎片的飞行高度；(2)缺损飞轮的角速度、角动量和转动动能。

(1)由机械能守恒：

$$mgh = \frac{1}{2} mR^2\omega^2 \Rightarrow \quad h = \frac{R^2\omega^2}{2g}$$



(2)缺损飞轮的转动惯量：

$$J_m = \frac{1}{2}MR^2 - mR^2$$

缺损飞轮的角速度仍为ω

角动量： $$L' = J'\omega = (\frac{1}{2}M - m)R^2\omega$$

转动动能： $$E_k = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}M - m)R^2\omega^2 = \frac{1}{4}(M - 2m)R^2\omega^2$$

运动定律

牛顿定律

转动定律

动量定理

动能定理

角动量定理

功能原理

质心运动定理柯尼希定理

平行轴定理

守恒条件

动量守恒： $\sum \vec{F}_{外}=0$

角动量守恒： $\sum \vec{M}_{外}=0$

机械能守恒： $\sum A_{外}+\sum A_{非保内}=0$

刚体机械能守恒： $\sum A_{外}=0$