



第三章 稳恒电流

§ 3.1 稳恒条件

§ 3.2 欧姆定律与焦耳定律

§ 3.3 电源与电动势

§ 3.4 基尔霍夫定律

基本知识

- 电流的**定义**：在导体中，电荷的定向运动就是电流。
- 稳恒电流的**定义**：不随时间变化的电流即稳恒电流。
- 有稳恒电流时**导体的状况**：导体中**自由电荷的分布**也不会随时间变化，**所产生的电场**也不随时间变化，称为**恒定电场**，即**导体内存在着非零的电场**，而且：
 - (1) 它与电流之间的依赖关系满足一定的实验规律，该规律反映了导体的导电性质；
 - (2) 恒定电场本质上属于静电场，同样满足静电场的基本规律，以下将不加区别地将恒定电场称为静电场；
 - (3) 电流既是电荷的运动，它本身**满足电荷守恒定律**。
- **对比静电场**情况，处于**静电平衡的导体**显示出彻底的“抗电性”，表现为**导体内电场强度必须处处为零**。₂



§ 3.1 稳恒条件

- 一、 电流强度和电流密度
- 二、 电流的物理图像
- 三、 电流连续方程
- 四、 稳恒条件

一、 电流强度和电流密度

■ 中学里接触到直流电路的时候，曾引入电流强度：

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (3.1.1)$$

电流强度的单位为库仑/秒，称为安[培]，符号为A。

■ 用电流强度描述导体中电荷的宏观流动性质似乎太“粗糙”。（1）不能描述电流沿截面的分布情况；（2）不能描述电流的方向，即正电荷移动的方向。

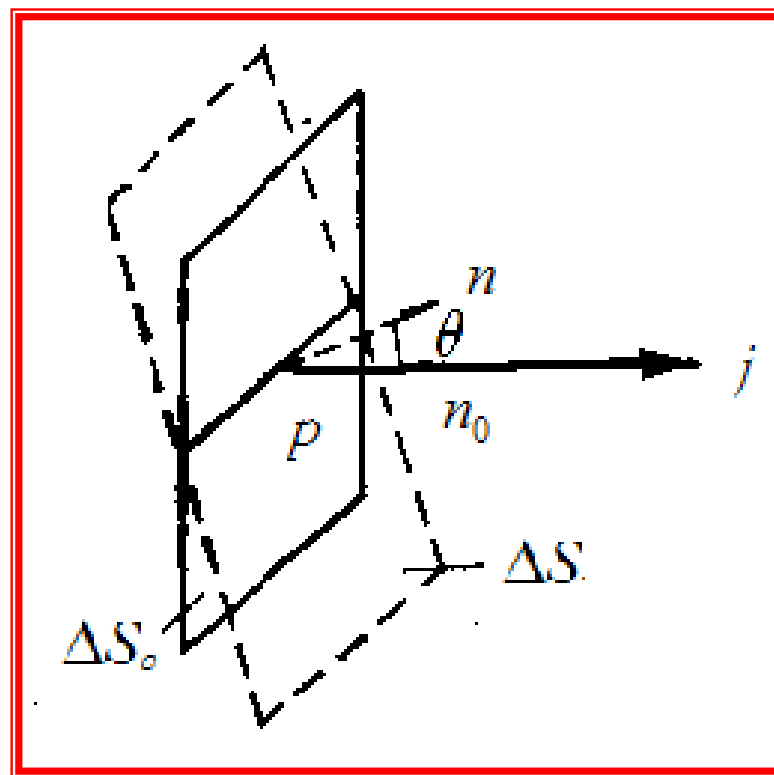
■ 为了描述导体中各点电流的大小和方向，人们引入一个更“精细”的物理量——电流密度。

■ **电流密度的定义**：考虑导体中某一给定点 P ，在该点沿电流方向作一单位矢量 \mathbf{n}_0 ，并取一面元 ΔS_0 与 \mathbf{n}_0 垂直，如图所示。设通过 ΔS_0 的电流强度为 ΔI ，则定义 P 点处电流密度的大小为：

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S_0}. \quad (3.1.2)$$

单位为**安培/米²** ($\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$)。为了使电流密度能同时表示出 P 点处电流的方向，可将电流密度定义为一个矢量，其**方向**与 \mathbf{n}_0 同向，表示**正电荷移动的方向**，即：

$$\mathbf{j} = \frac{\Delta I}{\Delta S_0} \mathbf{n}_0 \quad (3.1.3)$$



电流密度的定义

■ 由上述定义可见，**电流密度是一个矢量**，它的**方向**表示导体中某点电流的方向，**数值**等于通过垂直于该点电流方向的单位面积的电流强度。这样定义的**电流密度是空间位置的函数 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$** ，它细致地描述了导体中的电流分布，也称为**电流场**。

■ 类似静电场，对**电流场**也可以通过引入“**电流线**”来进行形象描述。电流线即电流所在空间的一组曲线，其上任一点的**切线方向**和该点的电流密度方向一致。一束这样的电流线围成的管状区域称为**电流管**。

■ 已知导体中某点 P 的电流密度，可以求得通过该点任一面元 ΔS 的电流强度 $\Delta I = j\Delta S_0 = j\Delta S \cos \theta$ 。又可写成 **$\Delta I = \mathbf{j} \cdot \Delta \mathbf{S}$** 。

通过 S 面的电流强度 I ：

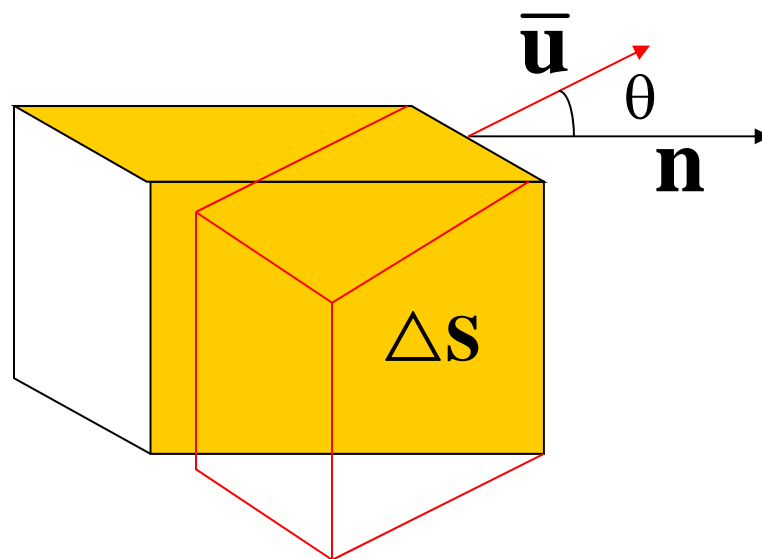
$$I = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.1.4)_6$$

二、电流的物理图像

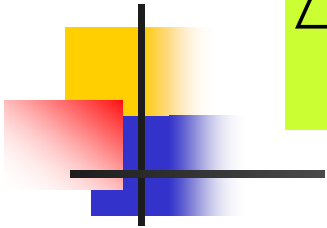
■ 电流是电荷的定向运动，即导体中载流子在外力，例如电场，作用下的定向运动所产生。下面以通电导线为例，说明其物理图像。

■ 带正电荷的金属原子核 \oplus 不动，载流子是电子 \ominus ，是电子运动。

■ 按电流的定义，在导体中如果有 k 种带电粒子，



其中第 i 种带电粒子的电量、数密度、平均速度分别为 $q_i, n_i, \bar{\mathbf{u}}_i$ ，则有：



$$\Delta I = \sum_{i=1}^k q_i n_i \bar{\mathbf{u}}_i \cdot \Delta \mathbf{S} = \sum_{i=1}^k \rho_{ei} \bar{\mathbf{u}}_i \cdot \Delta \mathbf{S}$$

$$\therefore \Delta I = \mathbf{j} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

$$\therefore \mathbf{j} = \sum_{i=1}^k \rho_{ei} \bar{\mathbf{u}}_i = \sum_{i=1}^k q_i n_i \bar{\mathbf{u}}_i$$

■ 在载流金属导线中只有两种带电粒子：

$$\sum_{i=1}^2 \rho_{ei} = \rho_{e+} + \rho_{e-} = 0, \quad \text{整体电中性}$$

$$\mathbf{j} = \rho_{e+} \bar{\mathbf{u}}_+ + \rho_{e-} \bar{\mathbf{u}}_- = \rho_{e-} \bar{\mathbf{u}}_- = -en \bar{\mathbf{u}}_- \neq 0.$$

■ 当不载流金属导线整体运动时：

$$\therefore \bar{\mathbf{u}}_+ = \bar{\mathbf{u}}_-,$$

$$\therefore \mathbf{j} = \bar{\mathbf{u}}_+ (\rho_{e+} + \rho_{e-}) = 0.$$

【例】一般载流金属导线中的情况。

$$j \sim 10^6 \text{ 安培/米}^2,$$

$$n \sim 10^{29} / \text{米}^3,$$

$$q = e \sim 10^{-19} \text{ 库仑}.$$

$$\therefore \mathbf{j} = -en\bar{\mathbf{u}}_- \Rightarrow$$

$$\therefore |\bar{\mathbf{u}}_-| = \frac{j}{en} \sim \frac{10^6}{10^{-19} \times 10^{29}} \sim 10^{-4} (\text{米/秒}).$$

可见电子的平均定向速度是很慢的，但为何电源一接通立即灯亮呢？这是由于电场的传播速度为光速C。

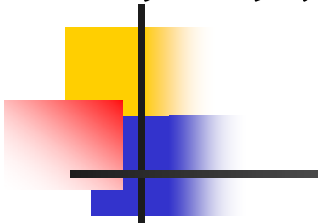
三、 电流连续方程

- 电流连续方程是电荷守恒定律的数学表示。
- 按照电荷守恒定律：在孤立系统内，电荷的代数和保持不变，电荷只能由一个物体转移到另一个物体，或由物体的某一部分转移到其它部分。
- 如果在导体内任取一闭合曲面 S ，所围区域为 V ，则某段时间内流出该曲面 S 的电量应当等于同一段时间内区域 V 中电量的减少。

若在 S 面上规定面积元矢量 $d\mathbf{S}$ 指向外法线方向，则单位时间内由 S 面流出的电量应为：

$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

与此同时，单位时间内 V 中电量的减少为：


$$-\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_e dV = -\iiint_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV,$$

根据**电荷守恒定律**，应有：

$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt} = -\iiint_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV.$$

即为**电流连续方程的积分形式**。

用数学高斯公式，立即得：
$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{j}) dV = -\iiint_V \frac{\partial \rho_e}{\partial t} dV,$$

鉴于 V 的任意性，于是可得
电流连续方程的微分形式：

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0.$$

说明:

$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}$$

(1) 由于电荷守恒定律的普遍性，上述**电流连续方程也是普遍成立的**，与载流导体的物理性质无关；

(2) **类比静电场的高斯定理**，可**借助电流线**作如下形象解释。电流线只能起、止于电荷随时间变化的地方。在**电流线的起点附近的区域中**，由 $dq/dt < 0$ ，会出现负电荷的不断累积，即电荷密度不断减小；

而在**电流线的终点附近的区域中**则有 $dq/dt > 0$ ，会出现正电荷的不断累积，即电荷密度不断增加；

对于电荷密度不随时间变化的地方，电流线既无起点又无终点，即**电流线不可能中断**。

四、稳恒条件

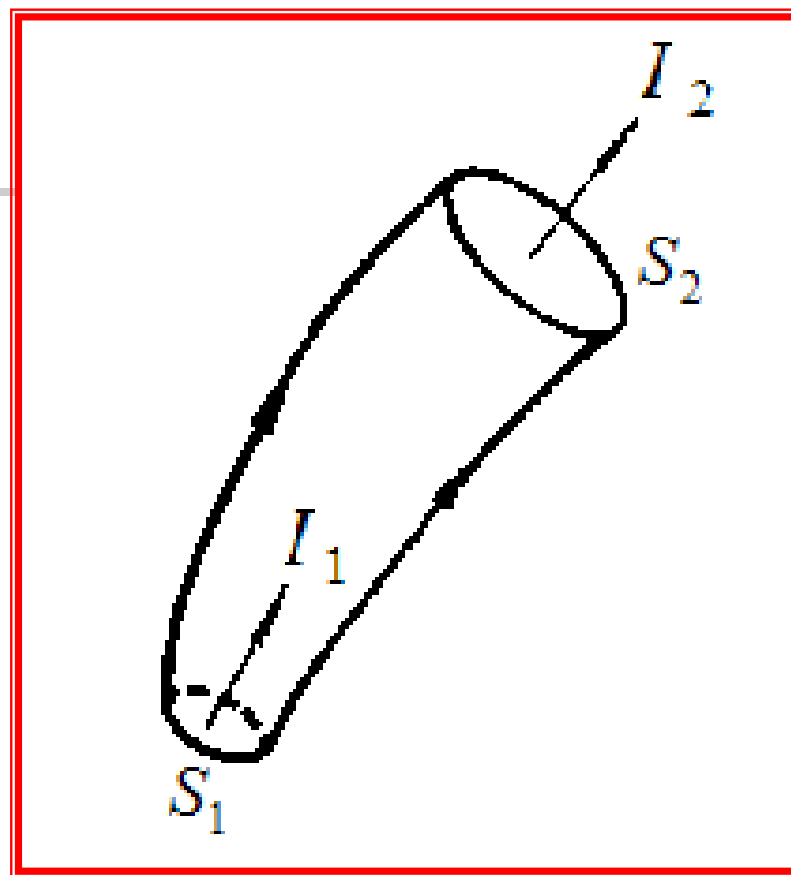
从电流连续方程出发，立刻可导出稳恒电流应满足的条件。对**稳恒电流**来说，导体内各点**电流密度应与时间无关**，要求 **dq/dt 与时间无关**，如果不为零，则造成电荷不断积累，电场随时间变化，将破坏电流的稳定，所以： $\frac{dq}{dt} = 0$ ， $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$ ，于是：

$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0, \text{ 或 } \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

称做**稳恒条件**的积分形式和微分形式。稳恒条件表明，**电荷分布将不会**因稳恒电流的存在而**随时间变化**，所以由它产生的电场必然是**静电场**。

■说明：借助于电流线和电流管的概念，可以对稳恒条件作如下形象解释：**(1)** 电流线不可能有起点和终点，即稳恒电流的**电流线或电流管一定是闭合的**；**(2)** 沿任一电流管各截面的**电流强度都相等**。

- 通常的直流电路由导线连接而成，电流线沿着导线分布，从而导线本身就是一个电流管。
- 由上述结论可知，直流电路（或者说稳恒电路）应当是闭合的；且沿一段没有分支的电路，各处的电流强度必定相等。



沿电流管的电流强度相等



§ 3.2 欧姆定律与焦耳定律

一、欧姆定律

二、焦耳定律

三、经典电子论观点解释

四、欧姆定律的失效问题

五、导电介质

现在我们来分析导体中电流和电场的关系。

一、欧姆定律

中学已知，由实验得在直流电路中导线内，欧姆定律为：

$$I = \frac{U}{R} \quad \text{或} \quad U = IR, \quad (3.2.1)$$

■ 电阻的倒数叫做**电导**，用 **G** 表示： $G = \frac{1}{R}$. (3.2.2)
单位是（欧[姆]）⁻¹，称为**西[门子]**，符号为 **S** 。

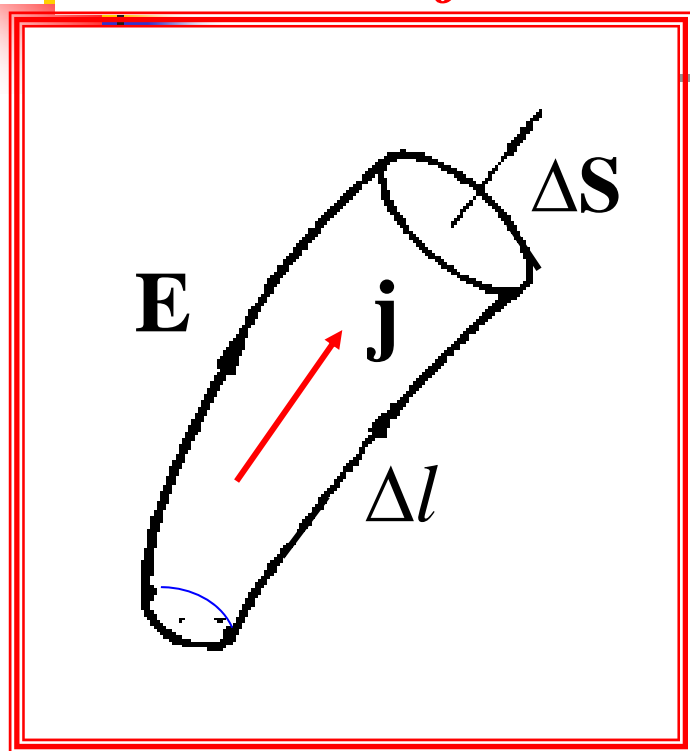
$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3.2.3)$$

■ 电阻率的倒数称为**电导率**，用 σ 表示：

$$\sigma = \frac{1}{\rho}. \quad (3.2.4)$$

电导率的单位为(欧·米)⁻¹，或 **$S \cdot m^{-1}$** 。

为了更细致地描述导体的导电规律，我们应当逐点分析电流密度 j 和电场强度 E 之间的关系。取一段电流管



如左图，现在有： $\Delta I = \frac{\Delta U}{R}$,

式中 $\Delta I = j\Delta S$, $R = \rho \frac{\Delta l}{\Delta S} = \frac{\Delta l}{\sigma \Delta S}$

在电流管情况下有 $\Delta U = E\Delta l$

于是，

$$j\Delta S = \frac{E\Delta l}{\Delta l / (\sigma \Delta S)} = \sigma E \Delta S, \quad j = \sigma E$$

既然 j 和 E 同向，上式可写成：

$$j = \sigma E. \quad (3.2.5)$$

这就是电流密度的欧姆定律。称它为欧姆定律的微分形式，而把式（3.2.1）称为欧姆定律的积分形式。

■ **说明：**欧姆定律的微分形式更为细致地描述了导体的导电规律。

- (1) 便于用场的观点阐述稳恒电路的基本原理；
 - (2) 从它出发便于说明金属导电的微观机制；
 - (3) 也便于研究大块导体中电流和电场的分布规律；
 - (4) 欧姆定律的微分形式比积分形式适用范围更广。
- 例如对非稳恒情况，实验证明，欧姆定律的微分形式仍在一定范围内适用于这类非稳恒情况。

二、焦耳定律

中学已学焦耳定律为： $P_e = IU = \frac{U^2}{R} = RI^2$.

单位体积的热功率称为热功率密度，用 p 表示，有
 $p = P/V = I^2 R / V$ 。

类似推导欧姆定律的微分形式（3.2.5）的做法，考虑一段长 Δl 、截面积 ΔS 的电流管，由

$$I = j\Delta S, \quad R = \frac{\Delta l}{\sigma\Delta S}, \quad V = \Delta S\Delta l,$$

将这三个量代入 p 中，得：

$$p = \frac{j^2}{\sigma}.$$

上式即焦耳定律的微分形式。

三、经典电子论观点解释欧姆定律和焦耳定律

以金属导体为例，对欧姆定律和焦耳定律作出经典的微观解释。

- 定性地描绘一下金属的微观结构。金属中的原子倾向于失去部分电子而成为正离子。全部正离子在金属中周期有序排列，形成所谓“晶体点阵”或“晶格”。脱离原子的电子称为自由电子，它们不再为一特定的正离子所束缚，而是为全体正离子所共有。
- 在无外电场或其它原因（如温度梯度、数密度梯度等）时，金属中的自由电子好象气体中的分子一样不停地作无规热运动，不会发生定向运动，因而 $j = 0$ 。

■当有外电场时：自由电子将受力而获得一加速度，但是电子不会无限制地加速——→而会与晶格碰撞发生散射，从而改变运动方向和速率——→并将部分能量转移给晶格上的正离子，使其热振动加剧——→金属具有电阻和金属发热的原因。

在电场力和碰撞力的共同作用下，自由电子的总体运动为一逆着外电场方向的漂移运动，最终产生沿电场方向的宏观电流。

■来定量分析电子的漂移速度。假设经碰撞后电子对原来的运动方向完全丧失“记忆”，即沿各个方向等概率散射，其宏观定向速度 $u_0 = 0$ 。此后，电子在电场力作用下定向加速，直到下一次碰撞为止。

在相邻两次碰撞之间，电子自由飞行，获得的宏观定向末速 $\mathbf{u}_1 = \mathbf{a} \cdot \bar{\tau} = -e\bar{\tau}\mathbf{E} / m$ ， $\bar{\tau}$ 为电子在相邻两次碰撞之间的平均自由飞行时间。

若电子的平均自由程为 $\bar{\lambda}$ ，平均热运动速率为 \bar{v} ，所以，

$$\bar{\tau} = \bar{\lambda} / \left[\bar{v} + \left(\frac{u_1}{2} \right) \right]$$

一般情况下 $\bar{v} \gg u_1$ ，则 $\bar{\tau} = \bar{\lambda} / \bar{v}$ 。电子的漂移速度 \mathbf{u} 应是碰撞前后宏观定向速度的平均，即

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 = -\frac{e\bar{\lambda}}{2m\bar{v}}\mathbf{E}$$

■ 下面分析 j 和 u 的关系。为此，在导体中某点 P 作一面元 ΔS 与 u 垂直。经过时间 Δt 后，电子漂移的距离为 $u \Delta t$ 。以 ΔS 为底， $u \Delta t$ 为高，逆着 u 的方向作一柱体（下图），则在 Δt 时间内，柱体中的电子将全部通过 ΔS 。设电子的数密度为 n 。因柱体的体积 $u \Delta t \Delta S$ ，故共有 $nu \Delta t \Delta S$ 个电子。因此，通过 ΔS 的电流强度为

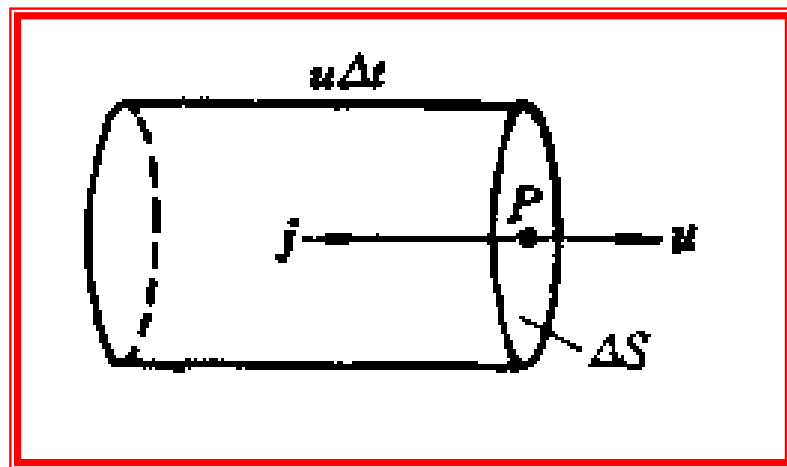
$$\Delta I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = neu \Delta S,$$

电流密度的大小为：

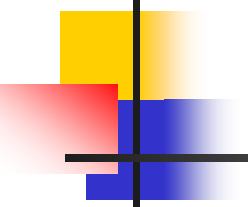
$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S} = neu, \quad \vec{j} = -ne\vec{u}.$$

将式 \vec{u} 代入上式得：

$$\vec{j} = \frac{ne^2 \bar{\lambda}}{2m\bar{v}} \vec{E}$$



与欧姆定律 $j = \sigma E$ 比较，可求得电导率的表达式如下：


$$\sigma = \frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{v}}$$

我们不仅解释了欧姆定律，而且导出了电导率与微观量平均值的关系。这一关系从定性上讲是对的。例如，

$$\sigma \propto \frac{1}{\bar{v}} \propto \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad T \uparrow \quad \text{则} \quad \sigma \downarrow . \quad \text{定性符合}$$

要对金属的导电规律进行严格定量的处理，需要用到量子理论。

四、欧姆定律的失效问题

主要表现是 j 与 E 或者说 I 与 U 的比例关系遭到破坏，而代之以非线性关系。下面就几种重要的情况进行讨论。

(1) 电场很强时，例如在金属中 $E > 10^3 \sim 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ 时，则 $F \uparrow, a \uparrow, \therefore |u| \uparrow$ ，此时 $|u| \sim \bar{v}$ ，故计算 $\bar{\tau}$ 时不能忽略 $|u|$ ，于是，便有 $\bar{\tau}(E)$ ，从而 j 与 E 的关系是非线性的。另外，高速运动的电子与晶格的正离子碰撞将使正离子进一步电离，这时有 $n = n(E)$ 。这将加剧 j 和 E 之间的非线性关系。

(2) 低气压下的电离气体， $\bar{\lambda} \uparrow \uparrow, \bar{\tau} \uparrow \uparrow$ ，则 $|u| \uparrow \uparrow$ 从而导致欧姆定律失效，其理由同前。

(3) 高频交变电场中的导体内, E 的方向变的太快。

(4) 晶体管、电子管等器件, I 与 U 的关系也是非线性的, 在电子学中会讨论它们的导电特性。

(5) 各向异性晶体中, σ 是张量, j 与 E 不再同向。

(6) 超导体中。

五、导电介质

导电介质：既有绝缘介质的特性，又有导电的特性。



既满足**稳恒电流**的基本方程，也满足**介质**的基本方程。

基本方程

导体介质的电学规律

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV$$

导体介质中的本构方程

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$


导体介质中的边值关系

$$j_{2n} = j_{1n}$$

$$E_{2t} = E_{1t}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0$$

基本思路

- 
- 稳恒电流和稳恒电场只与导电性质有关，与介电常数无关。
 - 总电荷分布由稳恒电场决定，也与介电常数无关。
 - 总电荷中极化电荷及自由电荷所占份额与介电常数有关。

$$U_{PQ} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电势

电场强度

总电荷

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_e dV$$

只与导体性质有关

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV$$

自由电荷

电位移矢量

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \vec{E}$$

极化强度

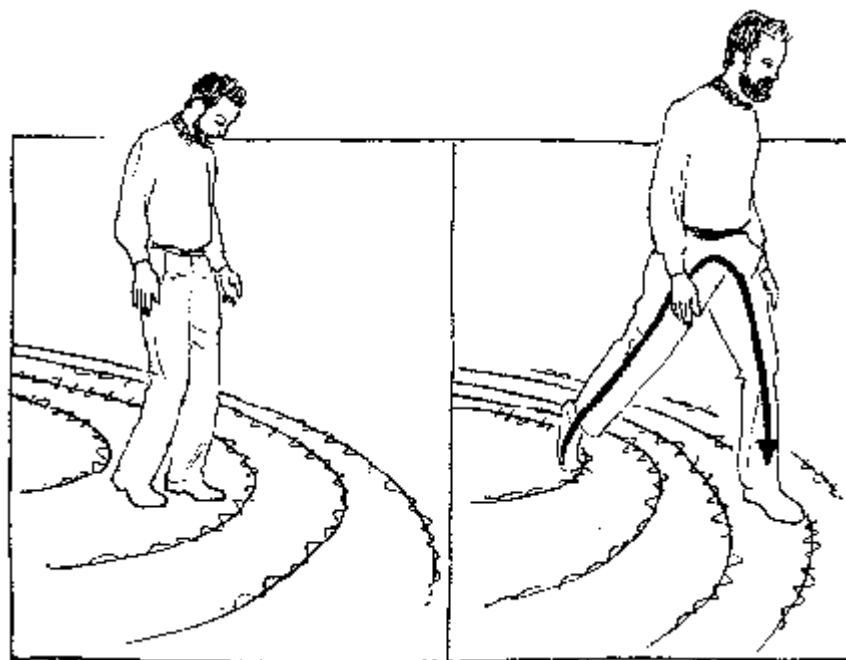
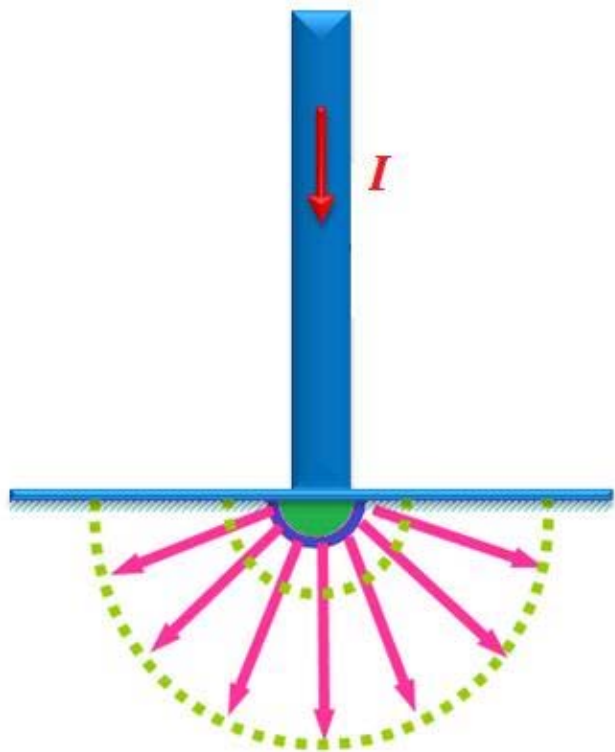
极化电荷

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n}$$

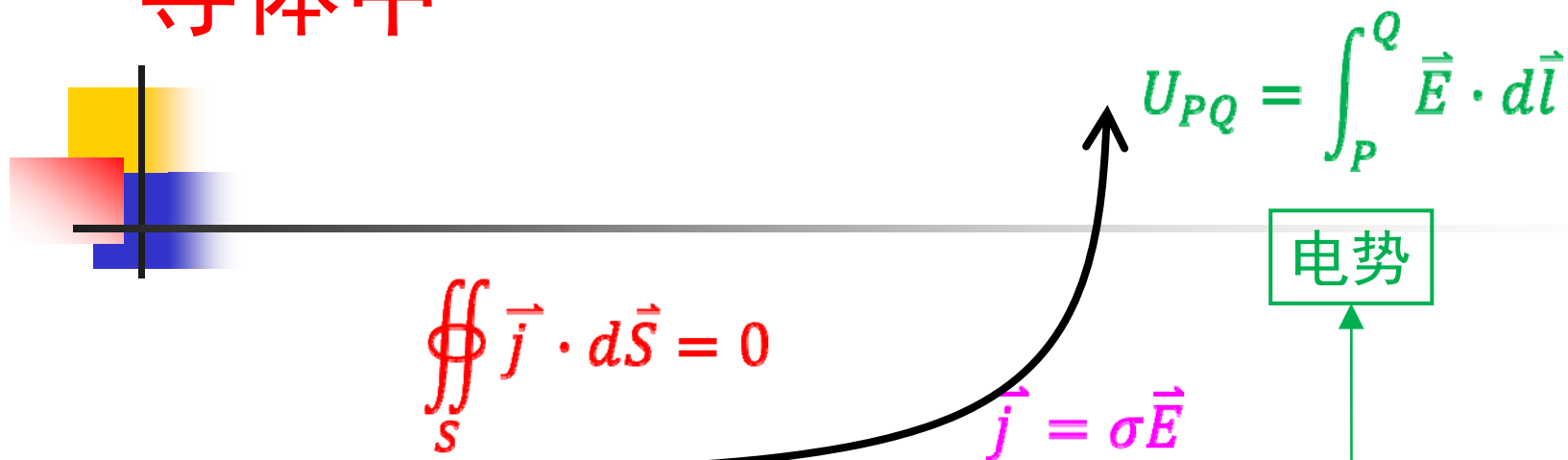
【例】电线被风吹断，一端触及地面，使得200A的电流由接触点流入大地。设地面水平，土地的电导率为 $10^{-2} (\Omega\text{m})^{-1}$ 。

(1) 当一个人走近输电线接地点时，两脚间(0.6m)产生跨步电压。求相距触地点1m和10m处的跨步电压；

(2) 大地中的电荷分布； (3) 接触点上的总电荷。



导体中


$$U_{PQ} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

电势

电流强度

电流密度

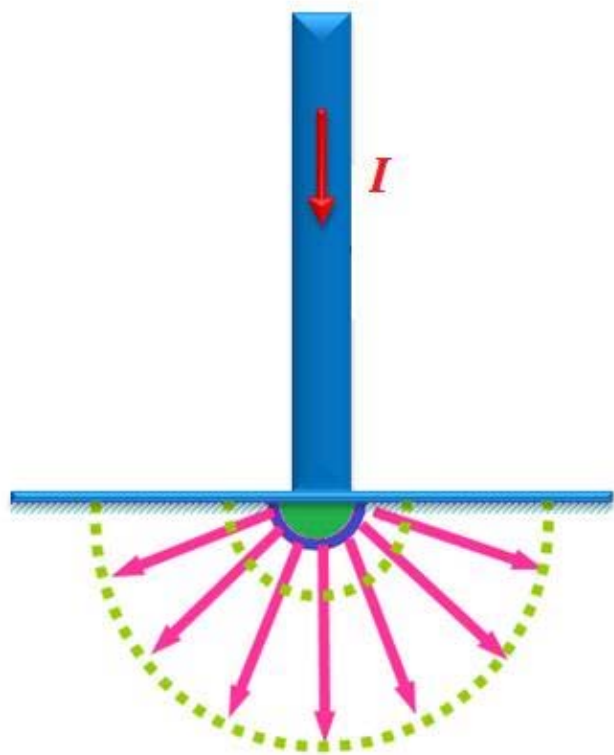
电场强度

总电荷

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_e dV$$

【解】 200A电流全部流入大地

以地面为底，半径为 r 作半球面，根据稳恒条件



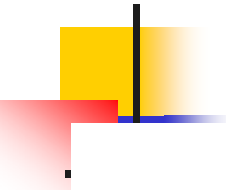
$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -I + j \cdot 2\pi r^2 = 0$$

$$j = \frac{I}{2\pi r^2} \quad \text{方向如图所示}$$

根据本构方程，可得电场强度

$$E = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma r^2}$$

进而可得地面上 $r=a$ 与 $r=b$ 之间的电势差


$$U_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{I dr}{2\pi\sigma r^2} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{(b-a)}{ab}$$

取 $a=1m, 10m$; $b-a=0.6m$; 得跨步电压分别为

$$\Delta U_{a=1} = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{(b-a)}{ab} = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{0.6}{1+0.6} = 1194 V$$

$$\Delta U_{a=10} = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{(b-a)}{ab} = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{0.6}{10(10+0.6)} = 18 V$$

(2) 大地中的电荷分布:

根据稳恒条件, 有: $\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$

代入欧姆定律: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

可得: $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$

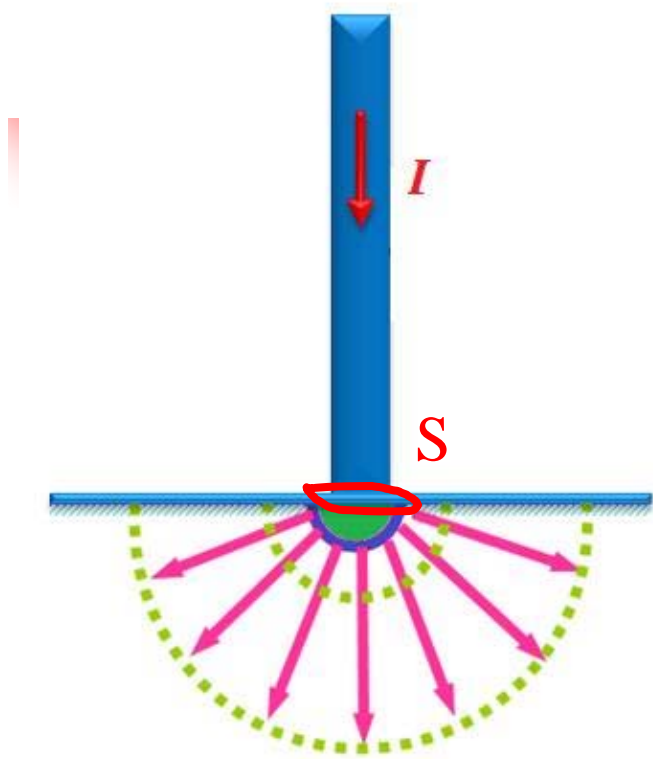
根据高斯定律: $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_e dV$

易得:

$$\rho_e \equiv 0$$

流过稳恒电流的均匀导体中, 电荷密度恒为零

(3) 大地与电线接触点（面）上的电荷分布：



任取一封闭曲面 S , 正好包住接触点（面）

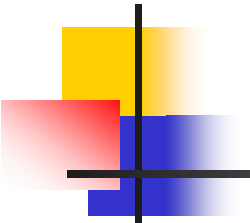
根据稳恒条件, 有: $\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$

S 可分为两部分, 电线中与大地中:

$$S = S_1 + S_2$$

则有: $\iint_{S_1} \vec{j}_1 \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{j}_2 \cdot d\vec{S} = 0$

$$\iint_{S_2} \vec{j}_2 \cdot d\vec{S} = - \iint_{S_1} \vec{j}_1 \cdot d\vec{S} = I$$



$$\sigma_2 \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = -\sigma_1 \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = I$$

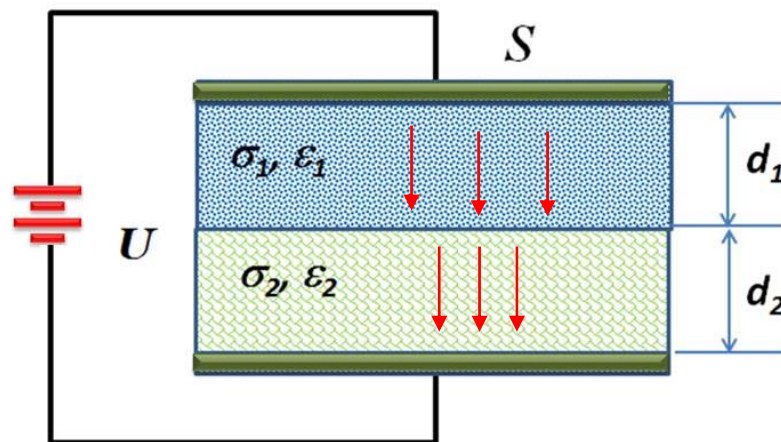
$$\iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{I}{\sigma_2} \quad \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{I}{\sigma_1} \approx 0$$

根据高斯定理：

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\varepsilon_0} &= \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{I}{\sigma_1} + \frac{I}{\sigma_2} \approx \frac{I}{\sigma_2} = \frac{I}{\sigma} \quad Q \approx \frac{\varepsilon_0 I}{\sigma} \end{aligned}$$

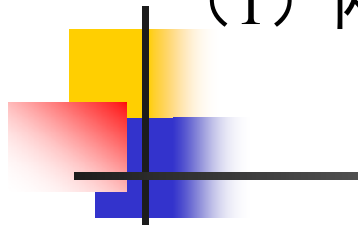
【例3.5】一平行板电容器两极板的面积为 S ，两极间充满两层均匀导电介质，当两极间加电势差为 U 时，略去边缘效应，求：

- (1) 通过电容器的电流；
- (2) 电流密度；
- (3) 交界面上的面电荷密度；
- (4) 两个极板之间漏电时间常数。



【解】

(1) 两层介质的电阻分别为：


$$R_1 = \rho_1 \frac{d_1}{S} = \frac{d_1}{\sigma_1 S} \quad R_2 = \rho_2 \frac{d_2}{S} = \frac{d_2}{\sigma_2 S}$$

两极板间总电阻：

$$R = R_1 + R_2 = \frac{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}{\sigma_1 \sigma_2 S}$$

通过电容器的电流：

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 S U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

(2) 电流密度

$$j = \frac{I}{S} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

(3) 求电荷密度分布，先求电场强度和电位移矢量



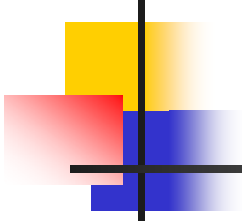
由欧姆定律可得：

$$E_1 = \frac{j}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \quad E_2 = \frac{j}{\sigma_2} = \frac{\sigma_1 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

由电介质本构方程可得：

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_1 \sigma_2 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \quad D_2 = \varepsilon_2 E_2 = \frac{\varepsilon_2 \sigma_1 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

总电荷密度：


$$\sigma_e = \varepsilon_0(E_2 - E_1) = \frac{\varepsilon_0(\sigma_1 - \sigma_2)U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

自由电荷密度：

$$\sigma_{e0} = D_2 - D_1 = \frac{(\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2)U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

介质界面可以有自由电荷

极化电荷密度：

$$\sigma'_e = \sigma_e - \sigma_{e0} = \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_2)\sigma_1 - (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\sigma_2}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} U$$

(4) 时间常数


$$\tau = RC$$

$$R = R_1 + R_2 = \frac{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}{\sigma_1 \sigma_2 S}$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S}} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 S}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2}$$

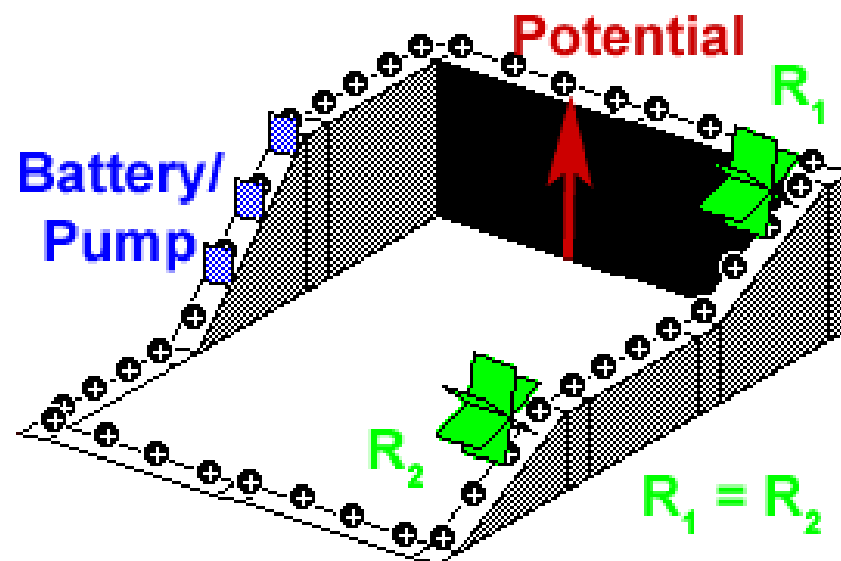
$$\tau = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\sigma_1 \sigma_2} \frac{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2}$$

与电容器的面积无关

求解静电场或者稳恒电流（电场）的问题，
核心是得到**电场强度**分布

§ 3.3 电源与电动势

- 一、电源与电动势
- 二、常见的几种电源
- 三、全电路欧姆定律
- 四、稳恒电路中静电场的作用



分析与介绍

如何产生稳恒电流？

■ 稳恒电流 j 是闭合的，导线中的电场是静电场：

静电场 \longrightarrow 静电力（保守力） \longrightarrow 电场线不闭合
 \longrightarrow 正电荷只能沿电场线 \longrightarrow 造成电荷堆积
 \longrightarrow 不能产生稳恒电流。

■ 所以，为了产生稳恒电流，必须还有非静电力，使正电荷逆着电场线的方向运动，从低电势返回高电势。

■ 常见的非静电力有以下几种：

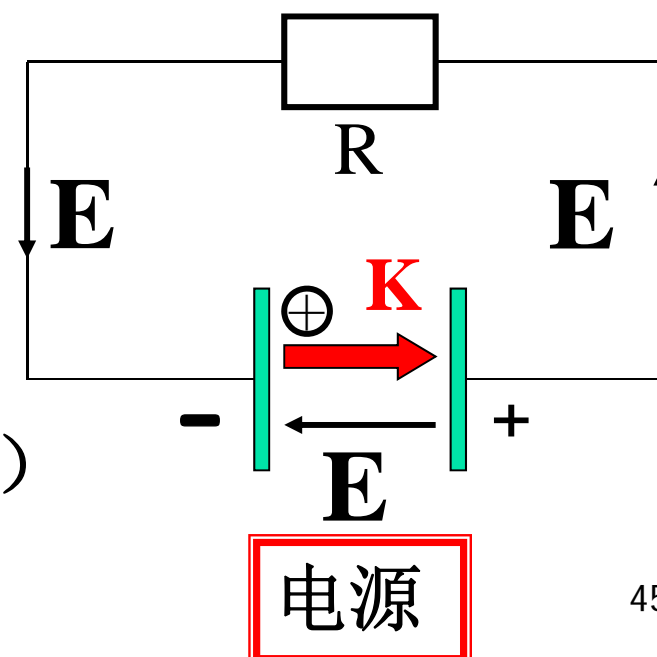
（1）溶液中离子对极板的化学亲和力；

- (2) 温度梯度和电子浓度梯度相联系的扩散作用；
- (3) 光电效应；
- (4) 核力、核能 (α 放射性源)；
- (5) 磁场对运动电荷的洛伦兹力；
- (6) 变化磁场产生涡旋电场对电荷的作用力。

一、电源与电动势

■ 提供非静电力的装置称电源。

其特点是，在电源内部提供的非静电力 K 不断将正电荷从负极 (-) 搬运到正极 (+)，如右图所示。



■定量表达电源内非静电力的物理量是 \mathbf{K} ，它为**单位正电荷受力**，方向与静电场 \mathbf{E} 相反。

■当一外电路与电源**接通**时，电源的另一作用是，它通过**极板及外电路各处累积的电荷**在**外电路中产生静电场 \mathbf{E}** ，使电流经外电路由正极指向负极。

■综上所述，电荷 q 在电路受力情况是：

在外电路 $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$ ； 在电源内 $\mathbf{F}=q(\mathbf{K}+\mathbf{E})$

在外电路 $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$ ； 在电源内 $\mathbf{j}=\sigma_{\text{内}}(\mathbf{K}+\mathbf{E})$

■实际应用中，描述电源的性质，更常用的不是 \mathbf{K} ，而是 \mathcal{E} ，它定义为：
称为**电动势**。

$$\mathcal{E} = \int_{-}^{+} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{L}$$

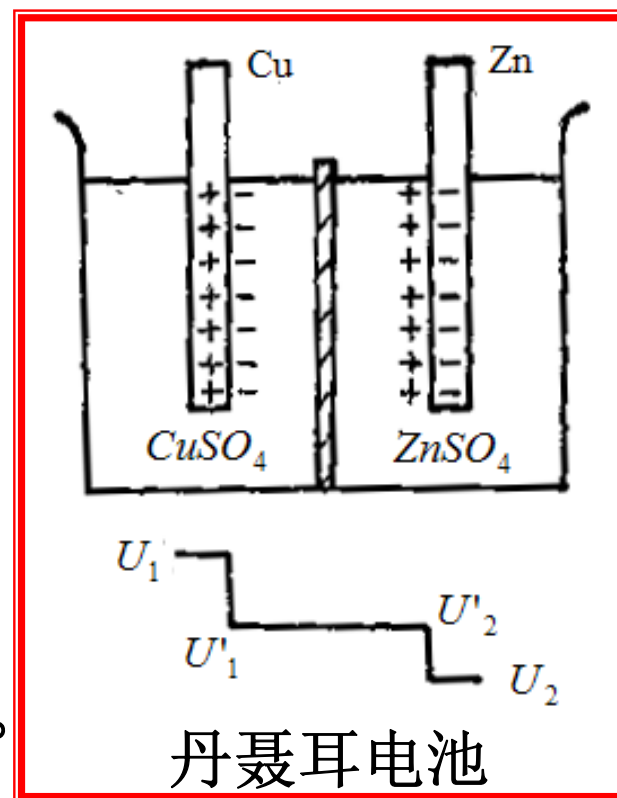
(电源内)

可与电势比较理解它的物理意义，其单位也是**伏特**。

二、常见的几种电源

(1)化学电池： 各类**干电池**和**蓄电池**都属于化学电池，它将化学反应释放的能量转换为电能，即**通过化学反应提供非静电力**，使正、负电荷分离并在两极板上累积造成**静电力**，直到**非静电力与静电力达到平衡**，形成两极间的电势差。

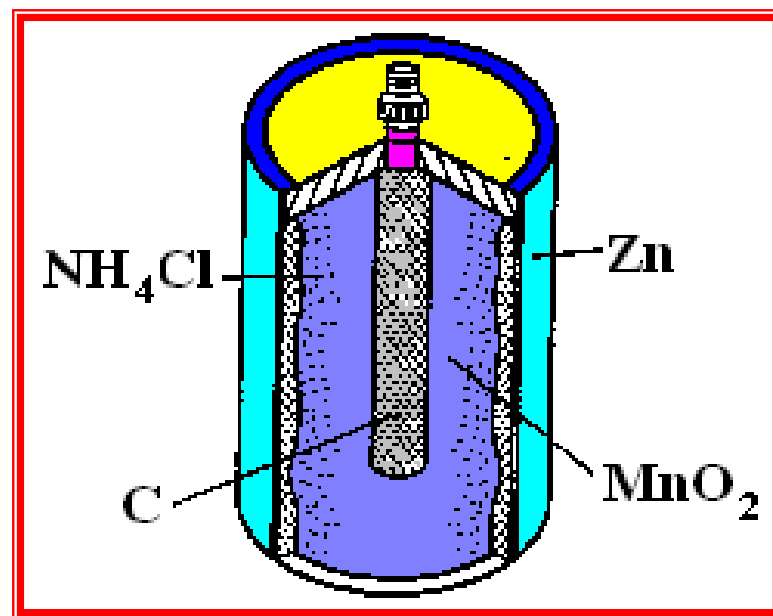
最先发明的电源之一——**伏打电池**，由浸在稀硫酸溶液中一块铜片和一块锌片组成。由于化学反应，铜片带正电形成正极，锌片带负电形成负极。后来改进为**丹聂耳电池**。它是一种蓄电池，可以充放电。



日常使用的各种型号的干电池、银锌纽扣电池、锂电池等都是化学电池。

(2) 光电池

这类电池将光能转变为电能。最常见的如太阳能电池。其简单原理是，当太阳光照到对光敏感的金属表面时，通过光电效应，金属表面发射电子，这些电子被收集到另一邻近的金属表面，造成正、负电荷分离，产生电动势。主要有硅、硫化镉、锑化镉以及砷化镓等太阳能电池。



干电池的结构示意

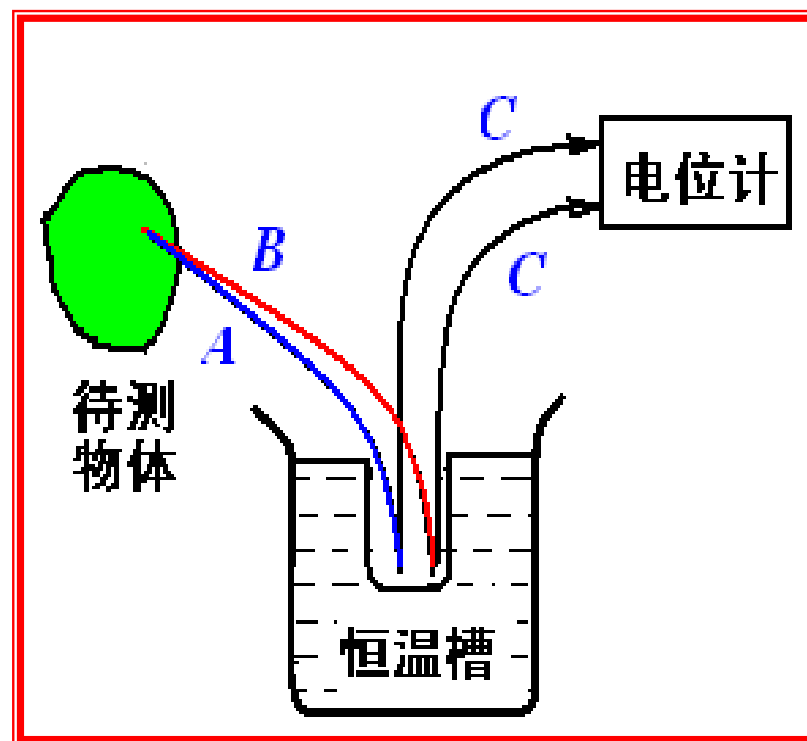
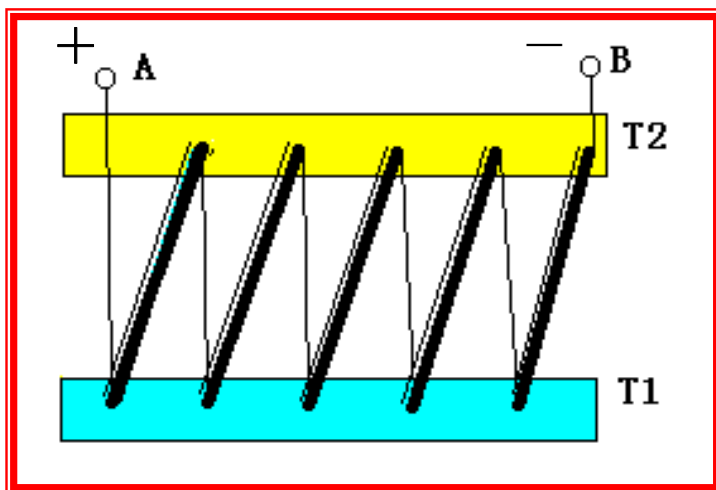
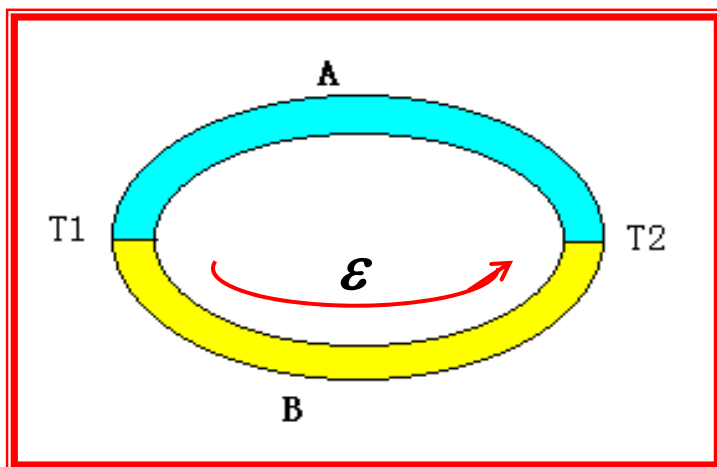


太阳能电池阵列

(3) 温差发电器

这类发电器利用温差电效应把热能直接转化成电能。

温差电效应和温差电堆示意图



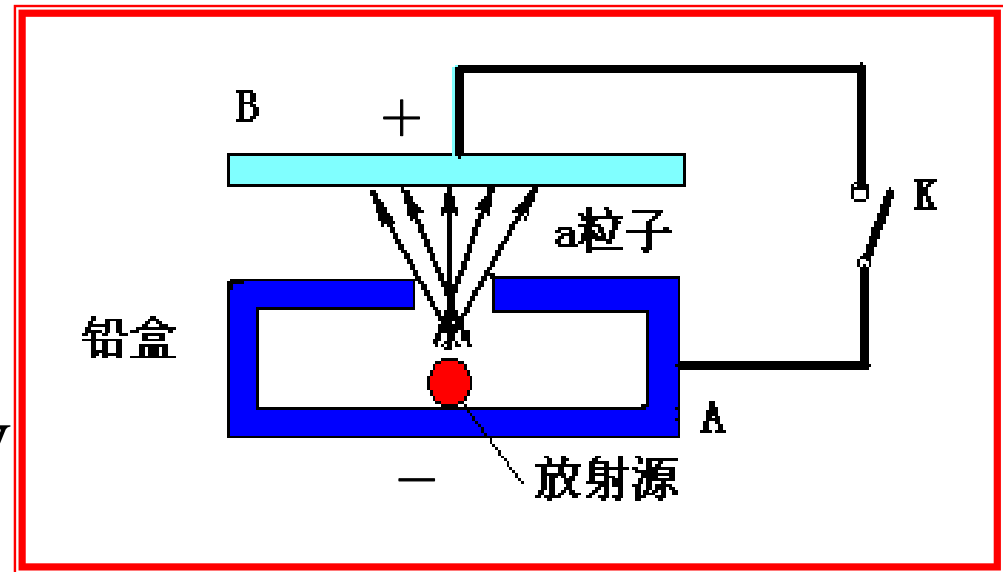
用温差电偶测温度

(4) 核能电池

这种电池将核能直接转化为电能。

$$2e \int_A^B \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} m_\alpha v^2 = 5 \times 10^6 \text{ eV}$$

$$\mathcal{E} = \int_A^B \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = 2.5 \times 10^6 \text{ V.}$$



核能电池示意图

(5) 直流发电机

它通过电磁感应（见第七章）将机械能，如水的势能和风的动能转换为电能。

三、全电路欧姆定律

当电源两极断开、电源内部处于平衡状态时，有：

$$E + K = 0.$$

当外电路接通时，电路中将出现电流，这时电源内应有：

$$E + K = j / \sigma.$$

电源两端的电压，即所谓路端电压，等于静电场力通过外电路把单位正电荷从正极移到负极所作的功，即

$$U = U_+ - U_- = \int_{+(外)}^- E \cdot dl.$$

经电源内部积分可得：

$$\int_{+(内)}^- E \cdot dl = \int_{-(内)}^+ K \cdot dl + \int_{+(内)}^- \frac{j}{\sigma} \cdot dl.$$

$$\because \int_{+(内)}^{-} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{+(外)}^{-} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = U, \quad \int_{+(内)}^{-} \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = \int_{+(内)}^{-} \rho_{内} \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{S}}{S} d\mathbf{l}$$

代入前式得：

$$U = \mathcal{E} - I \int_{-(内)}^{+} \frac{\rho}{S} d\mathbf{l} = \mathcal{E} - Ir$$

■该式就是全电路欧姆定律，式中 r 为电源内阻。第二项取负号意味着电流的正向在电源内部由负极指向正极。

对外电路有： $U = \int_{+(外)}^{-} \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = IR$ ， R 是外电路的电阻。

得：

$$\mathcal{E} = IR + Ir = I(R + r).$$

说明：稳恒电路的特点

(1) 电动势 \mathcal{E} 和内阻 r 是电源的两个特征量，由电源的性质确定，与外电路无关；

(2) 路端电压 U 与电路中的电流 I 有关。开路时 ($I = 0$) $U = \mathcal{E}$ ，开路测电动势，闭路测路端电压；

(3) 使用大内阻的伏特计或万用表测量电源电动势， R 越大， I 便越小，测得的路端电压 U 越接近电源的电动势，因电源内阻 r 一般都很小。

(4) 使用电源应避免使电源短路，因电源内阻小，短路造成 I 很大，烧坏电源。

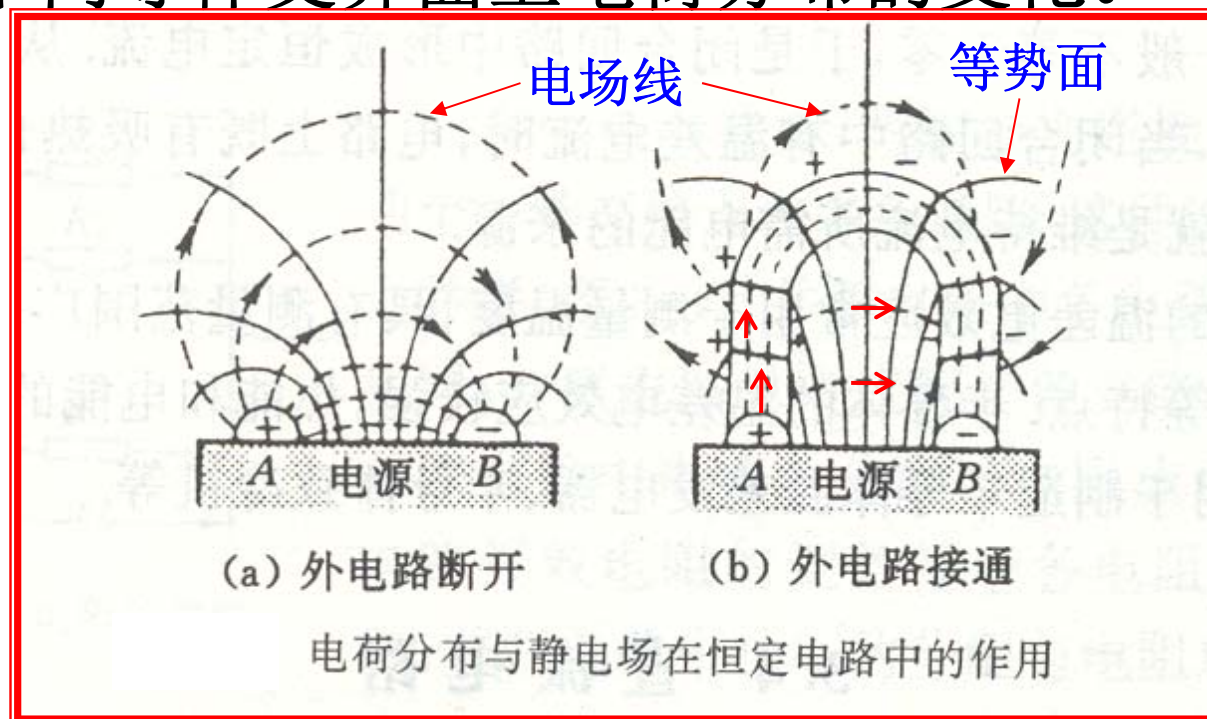
(5) 外电路的均匀导体中，无净电荷，

$$\because \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \therefore \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \text{即 } \rho_e = 0_{33}$$

四、稳恒电路中静电场的作用

主要体现在以下两个方面：

(1) **调节电荷分布的作用**。在电流达到稳恒的过程中，这种调节作用不仅表现在导线表面上的电荷分布的变化，还包括非均匀导体内部体电荷分布的变化，以及在两种不同导体交界面上电荷分布的变化。



(2) 起着能量的中转作用。在闭合电路中，静电场作的总功为零。但是，在电源外部以及电源内部**不存在非静电力的地方**，静电场将正电荷从高电势处送到低电势处，作功为正，使电场能减少；**存在非静电力的地方**，非静电力把正电荷从低电势处送到高电势处，反抗静电场作功，消耗非静电能，使电场能增加。电路上消耗的能量归根到底是非静电力提供的。

(3) 静电场与非静电力合在一起保证了电流的闭合性。