2.9 静电能

- 真空中点电荷间的相互作用能
- 连续电荷分布的静电能
- 电荷体系在外电场中的静电能
- 电场的能量和能量密度

能量的基本概念

一、引入的目的：

1. 能量是物质的共同属性，是物质运动的普遍量度；
2. **能量守恒定律**是最有意义最有用的发现之一；
3. 便于研究不同形式能量的转换。

二、特点：

1. 是状态的单值函数，　属于整个系统；
2. 能量差才有意义；
3. 用做功来量度能量。

三、描述的方法：

要引入状态参量，规定零点能，然后用做功来计算能量。

定义

对一个带电系统而言，其带电过程总伴随着电荷相对运动。在这个过程中，外力必须克服电荷间的相互作用而作功。外界作功所消耗的能量将转换为带电系统的能量，**该能量定义为带电系统的静电能**。显然，静电能应由系统的电荷分布决定。

点电荷在外电场中的电势能就是静电能。

§2.9.1真空中点电荷间的相互作用能

- 设想空间中有多个点电荷，其带电量用 q_i 表示，相应的位置用 $\mathbf{r}_i$ 表示，任意两个点电荷间的距离可以由 $r_{ij}=|\mathbf{r}_{ij}|=|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|$ 给出，所谓点电荷之间的相互作用能，指的是与点电荷间的相对位置有关的静电能。
- 状态参量取为 $\mathbf{r}_{ij}$（$i, j = 1,2,\ldots,N$），$r_{ij} \to \infty$ 时，它们之间的静电相互作用消失，很自然地取这时的相互作用能为零。
- 我们用一种类似于数学归纳法的办法来计算由N个点电荷组成的静电体系的静电能.

两个点电荷时

- 一个点电荷q在电场U中的电势能$W=qU$
- 设电场U是由另一个点电荷Q产生的，于是点电荷q具有的电势能可以写作

$$W = qU = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}$$

- 同样地，上式也表示了Q在q的电场中的电势能；这电势能W属于点电荷q与Q组成的系统。

- **当两个点电荷**分别为q_1和q_2时，静电能为：

$$W_{12} = q_2 U_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_1}{r_{12}},$$

同样地,

$$W_{21} = q_1 U_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} = W_{12},$$

可将两个点电荷的静电能记为W_2, 为方便写成：

$$W_2 = \frac{1}{2}(W_{12} + W_{21}) = \frac{1}{2}(q_2 U_{12} + q_1 U_{21}),$$

- **三个点电荷的静电能**记为W_3，便为：

$$W_3 = \frac{1}{2}(W_{12} + W_{21} + W_{13} + W_{31} + W_{23} + W_{32})$$

- 于是可写成：

$$W_3=\frac{1}{2}(W_{12}+W_{21}+W_{13}+W_{31}+W_{23}+W_{32})$$

$$=\frac{1}{2}(q_2\underline{U_{12}}+q_1\underline{U_{21}}+q_3\underline{U_{13}}+q_1\underline{U_{31}}+q_3\underline{U_{23}}+q_2\underline{U_{32}})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}q_iU_i,\quad \text{其中}\quad U_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}U_{ji}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}\frac{q_j}{r_{ji}},$$

- ***U*** 代入 ***W***：

$$W_3=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{q_iq_j}{r_{ji}},$$

对N个点电荷系统：

$$W_N=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_iU_i,\text{其中}\ \ U_i=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}U_{ji}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\frac{q_j}{r_{ji}}$$

同理，将**U**代入**W** 得：

$$W_N=\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\sum_{i=1}^{N}q_iU_{ji}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_iq_j}{r_{ji}}.$$

对N+1个点电荷系统，可证（略）：

$$W_{N+1}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N+1}\sum_{i=1}^{N+1}\frac{q_iq_j}{r_{ji}}\overset{\text{记为}}{=}\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j,i=1\\j\neq i}}^{N+1}\frac{q_iq_j}{r_{ji}}.$$

§ 2.9.2连续电荷分布的静电能

首先讨论空间只有自由电荷的情形，这意味着电场空间中只允许导体和介电常量恒等于ε_0的物体（包括真空）存在。

1. **先考虑体电荷分布**的情况，电荷密度设为$\rho_e(\mathbf{r})$。将该体电荷无限分割并把每一小部分当作点电荷处理，则由前式可推得：

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_V \rho_e(\mathbf{r}) U_1(\mathbf{r}) dV, \qquad \textbf{(2.1)}$$

$U_1(\mathbf{r})$表示除$\rho_e(\mathbf{r})dV$外其余所有电荷在$\mathbf{r}$处产生的电势。

■ 分析$U_1(\mathbf{r})$和总电势$U(\mathbf{r})$的关系。设dV为一球体元，**由第一章1.5.5节例1.11的结果**，取$R_1 = 0$，$R_2 = a$。可求得电荷密度为 ρ_e、半径为a的均匀带电球体在球内产生的电势为：

$$U' = \frac{\rho_e}{6\varepsilon_0}\left(3a^2 - r^2\right),$$

它在球心处取极大值 $U'_m = \rho_e a^2 / 2\varepsilon_0$，故当$a \to 0$时有 $U'_m \to 0$ 即 $\boxed{U' \to 0}$ 。于是，$U_1(\mathbf{r}) \approx U(\mathbf{r})$

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\iiint_V \rho_e(\mathbf{r})U(\mathbf{r})dV.} \qquad \textbf{(2.2)}$$

2. 对面电荷分布的情形，设面电荷密度为 $\sigma_e(\boldsymbol{r})$ 。类似，将面电荷无限分割为圆状面电荷元 $\sigma_e(\boldsymbol{r})dS$ ，它在自身产生的电势不会大于 $\sigma_e a/2\varepsilon_0$ （a为面元半径，见第一章**1.5.5**节例**1.10**），该电势随 $dS\to 0$ （$a\to 0$)而趋于零。

于是， $U_1(\boldsymbol{r}) \approx U(\boldsymbol{r})$ ，其静电能为：

$$W_e = \frac{1}{2}\iint_S \sigma_e(\boldsymbol{r})U(\boldsymbol{r})dS \qquad \textbf{(2.3)}$$

3. 线电荷分布的情况，不能将静电能写为：

$$W_e = \frac{1}{2}\int_L \lambda_e(l)U(l)dl \quad 或 \quad W_e = \frac{1}{2}\int_L \lambda_e(l)U_1(l)dl$$

因为 $\lambda_e(l)dl$ 在自身所在处产生的电势不仅不趋于零，而且会按 $\ln r$（***r***为离线元***dl***的垂直距离）趋于无穷。进一步，可证$U_1(l)$也会趋于无穷大。

这在物理上意味着：要把电荷从极端分散状态压缩到一条几何线上，外界需要作无穷大的功。这显然是办不到的。因此，在计算静电能时，无论线径怎样小的带电体均不能当作线电荷处理。

4. 多个带电体组成的系统的静电能。设有N个带电体，体积分别为V_1，V_2…，V_N。可将空间的总电势$U(\mathbf{r})$分为两部分

$$U(\mathbf{r})=U_i(\mathbf{r})+U^{(i)}(\mathbf{r}),$$

式中$U_i(\mathbf{r})$表示除第$\boldsymbol{i}$个带电体外其余所有带电体在 $\mathbf{r}$ 处产生的电势，$U^{(i)}(\mathbf{r})$则表示第$\boldsymbol{i}$个带电体在 $\mathbf{r}$ 处产生的电势。按照前述结论，可得：

$$W_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho_e(\mathbf{r})U(\mathbf{r})dV=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho_e(\mathbf{r})[U_i(\mathbf{r})+U^{(i)}(r)]dV$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\iiint_{V_i}\rho_e(\mathbf{r})U^{(i)}(\mathbf{r})dV+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\iiint_{V_i}\rho_e(\mathbf{r})U_i(\mathbf{r})dV,$$

可写成：

$$W_e = W_{自} + W_{互},$$

其中，

$$W_{自} = \sum_{i=1}^{N} W_{自}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \iiint_{V_i} \rho_e(\mathbf{r}) U^{(i)}(\mathbf{r}) dV,$$ 叫**自能**

$$W_{互} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \iiint_{V_i} \rho_e(\mathbf{r}) U_i(\mathbf{r}) dV.$$ 叫**互能**

点电荷间、线电荷间可以计算互能。但是，不能计算点电荷、线电荷的自能（为无穷大）。

[例1] 求体电荷密度为 ρ_e、半径为 R 的均匀带电球的静电能（带电体的介电常量设为 ε_0）。

[解] 以球心为原点，取球坐标（r,θ,φ）。根据第一章**1.5.5**节例**1.11**的结果取 $R_1=0$，$R_2=R$，可得：

$$U(\boldsymbol{r})=\frac{\rho_e}{6\varepsilon_0}(3R^2-r^2)$$

于是，积分得：

$$W_e=\frac{1}{2}\iiint\limits_{r\le R}\rho_e\cdot\frac{\rho_e}{6\varepsilon_0}(3R^2-r^2)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi=\boxed{\frac{4\pi\rho_e^2R^5}{15\varepsilon_0}}.$$

当 ρ_e 固定时，W_e 将随 $R\to0$ 而趋于零。

如果用总电量 $q=4\pi R^3\rho_e/3$ 表示，上述结果可写成：

$$\boxed{W_e=\frac{3}{5}\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0R}\right)}.$$

这时若固定 q，令 $R\to0$，则 $W_e\to\infty$，即点电荷的自能发散。

5. 对带电导体，静电能公式可进一步简化。

导体的特点是电荷分布在外表面，整个导体是等势体。当求 N 个带电导体组成的体系的静电能时，应用前式可得如下结果：

$$W_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iint_{S_i}\sigma_e U dS=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}U_i\iint_{S_i}\sigma_e dS=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_i U_i,$$

式中q_i和U_i为第 i 个导体的电量和电势。

[例2]　一孤立带电导体球电量为q，半径为R，求其静电能。

[解]　对孤立导体球有$U=q/C$，$C=4\pi\varepsilon_0 R$。应用上式得：

$$W_e=\frac{1}{2}qU=\frac{1}{2C}q^2=\frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\right).$$

- 与例1的结果比较可知，对电量及半径相同的带电球，其静电自能与电荷分布有关。电荷集中分布于球面比均匀分布于整个球体的自能要小。

■如果假设电子的能量$W=mc^2$全部来自静电自能W_e，并取$W_e\approx e^2/(4\pi\varepsilon_0 r_e)$，则可求得电子的半径：

$$\boxed{r_e=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\approx 2.8\times10^{-15}\ \mathrm{m}}$$

r_e称为电子的经典半径。当然，电子的实际半径比r_e要小得多，因此不能作以上假设。

[例3] 求平行板电容器的静电能公式。

[解] 极板间的均匀各向同性电介质的介电常量为 ε 极板面积为 S，两极板间的间距为 d。接通电源后，极板带电分别为 Q_1 和 Q_2，且 $Q_2 = -Q_1 = Q$；两极板电势分别为 U_1 和 U_2，电势差为 $U = U_2 - U_1$。

■ 分析电容器充电过程，电源对电容器作功，使电源能量转化为电容器的静电能。在 q 由0增至Q的过程中，电源作功为：

$$A' = \int_0^Q u\,dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2C} Q^2.$$

则

$$W_e = A' = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} QU,$$

或写成：

$$W_e = \frac{1}{2} Q(U_2 - U_1) = \frac{1}{2}(Q_1 U_1 + Q_2 U_2).$$

这与前面的普适公式的结果一致。

***6.**简单介绍**空间存在电介质**的情形，我们限于线性无损耗介质。对于这种情形，随着自由电荷的搬运和电场的建立，介质将会产生极化并出现极化电荷。

一种简单而自然的办法是把极化电荷和自由电荷同等看待，将看成是总电荷密度 $\rho_e(\boldsymbol{r})$，即自由电荷密度 $\rho_{e0}(\boldsymbol{r})$ 和极化电荷密度 $\rho_e'(\boldsymbol{r})$ 之和，然后按前式定义系统的能量，即：

$$W_{e0} = \frac{1}{2}\iiint_{V_0} \rho_{e0}(\boldsymbol{r})U(\boldsymbol{r})dV + \frac{1}{2}\iiint_{V'} \rho_e'(\boldsymbol{r})U(\boldsymbol{r})dV$$

式中V_0和V'分别表示自由电荷和极化电荷所在的空间区域。我们将上面定义的能量记为W_{e0}，并把它称作系统的“宏观静电能”，它可以理解为在建立宏观电荷分布 $\rho_{e0}(\boldsymbol{r})$和 $\rho_e'(\boldsymbol{r})$ 过程中系统所贮存的静电能。

*■从另一个角度来分析，系统的能量W_e应等于在建立该指定状态过程中外界对系统所作的功A'，即：

$$W_e = A'.$$

W_{e0} 是否等于W_e 呢？否

理由在于，在介质中建立电场时，外界不仅要克服宏观电荷（包括自由电荷和极化电荷）之间的静电力作功，而且要克服分子内部（对位移极化情形）或分子之间（对取向极化情形）的相互作用作功。第一部分功转化为系统的宏观静电能W_{e0}；第二部分功称为“极化功”，它使介质极化。

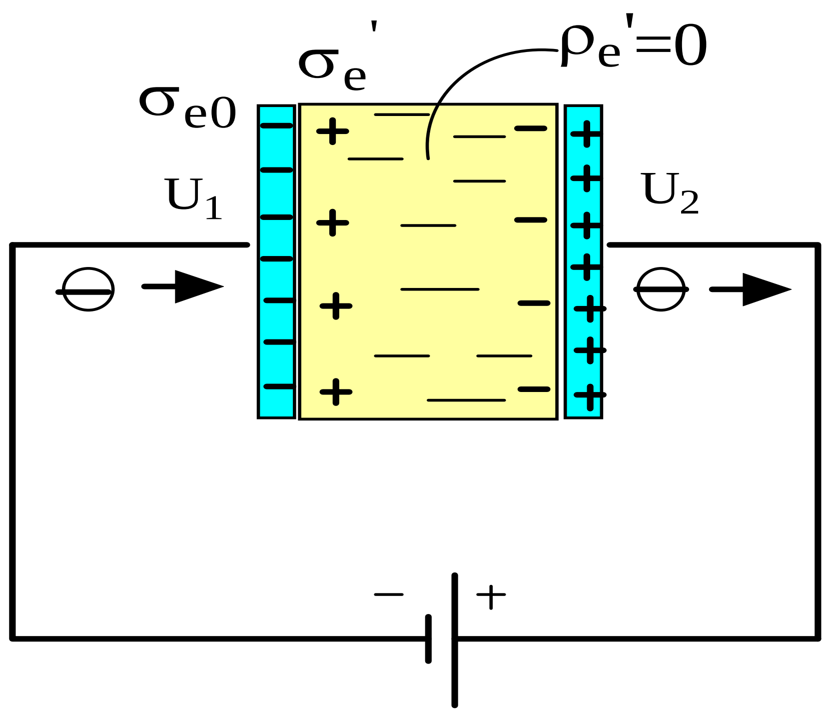
对线性无损耗介质，通过极化功转换到介质的能量称为极化能，记为$W_{极}$。所以：$W_e = W_{e0} + W_{极}$.

*[例如]　填充了均匀介质的平行板电容器（见右下图），极板自由面电荷σ_{e0}和介质极化面电荷σ'_e对宏观静电能W_{e0}都有贡献；而介质体内$\rho'_e=0$，虽然对W_{e0}无贡献，但介质内部那些因极化发生变形或改变排列状态的原子、分子也贮存了一部分能量，并造成σ'_e，它们相当于极化能$W_{极}$。

一定的电场对应于一定的介质极化状态。与此相应，宏观静电能与极化能存在着密切的关系。习惯上定义系统的静电能为：

$$W_e=W_{e0}+W_{极}.$$

在这种定义下，外界作功正好等于系统静电能的变化。



电容器充电时电源作功

*■例3启发我们，系统的静电能可用自由电荷与总电势来表达。可以一般地证明为：

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_{V_0} \rho_{e0}(\mathbf{r})U(\mathbf{r})dV.$$

物理解释：上式表示，外界在移动自由电荷过程中克服静电力作功，即对电场作功，转化为系统的静电能。
注意：U（$\mathbf{r}$）为总电势，自由电荷和极化电荷对它都有贡献。

又可推出极化能的表达式：

$$W_{极} = W_e - W_{e0} = -\frac{1}{2}\iiint_{V'} \rho'_e(\mathbf{r})U(\mathbf{r})dV.$$

式中右边的负号正好表示系统（即电场）对极化电荷作功，而不是外界克服静电力作功。

§2.9.3 电荷体系在外电场中的静电能

- 当**已知外场U**时，**点电荷q**在U中的电势能可以直接计算：$$W_e = qU.$$
W_e是q在外场U中的静电能，属于**相互作用能**。

- 当电荷体系为**N个点电荷**q_1，q_2，…，q_N构成的点电荷系统时，它在外电场U中的静电能为：
$$W_e = \sum_{i=1}^{N} q_i U(\boldsymbol{r}_i),$$

- 电荷密度为$\rho_e(\boldsymbol{r})$、体积为V的**带电体**，在外电场U中的静电能应为：
$$\boxed{W_e = \iiint_V \rho_e(\boldsymbol{r}) U(\boldsymbol{r}) dV.}$$

[例4] 求电偶极子在外电场中的静电能公式。

[解] 设电偶极子的电偶极矩为$\boldsymbol{p} = q\,\boldsymbol{l}$，则由上式可算得它在外电场$\boldsymbol{E}$ 中的静电能为：

$$W_e = -qU_- + qU_+ = q(U_+ - U_-) = q\boldsymbol{l}\cdot\nabla U,$$

即

$$\boxed{W_e = \boldsymbol{p}\cdot\nabla U = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}}$$

这也是电偶极子$\boldsymbol{p}$在外场$\boldsymbol{E}$中的**电势能**。

§2.9.4 电场的能量和能量密度

- **静电能贮存在哪里？**

前面导出的静电能公式都与电荷相联系。这给人一种印象，似乎静电能只贮存在电荷上，而电荷周围的空间——存在电场，其静电能为零！这是早期“超距作用”的观点。

■其后人们发现能量应当贮存在电场中，电相互作用是通过电场传递，同时应传递能量，这就是“近距作用”的观点。直到电磁波（电磁场在空间的传播）传递能量被证实后，才被广泛采纳。

为与近距作用观点一致，下面我们设法将有关静电能的公式用电场强度表示出来。

先从平行板电容器的静电能公式入手：

前面已得 $$W_e = \frac{1}{2} QU,$$

设电容器极板间填满均匀线性各向同性介质，则有 $Q = \sigma_{e0} S = DS$ 和 $U = Ed$，从而上述静电能公式可改用电场强度表示：

$$W_e = \frac{1}{2} DSEd = \frac{1}{2} DEV, \qquad \textbf{(4.1)}$$

式中 $V = Sd$ 为两极板间的体积，即电场空间的体积。定义单位体积的静电能为电能密度，则有：

$$w_e = \frac{1}{2} DE \qquad \textbf{(4.2)}$$

写成矢量式如下，对**线性无损耗介质**都适用：

$$w_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} \qquad \textbf{(4.3)}$$

式（**4.3**）表明，原认为局限于极板表面电荷之中的**静电能**，**实际上**是以电能密度**贮存于电场之中**。当空间电场不均匀时，总静电能应为：

$$W_e = \iiint_V w_e dV = \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}dV \qquad \textbf{(4.4)}$$

这样定义的静电能密度和静电能计入了介质的极化能，它**要求介质是线性无损耗的**。

[例5] 从电场的能量公式（**4.4**）出发，重新计算孤立带电导体球（电量为q，半径为R）的静电能。

[解] 由高斯定理可求得该导体球的电场强度大小为：

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\qquad (r\ge R);\qquad E=0,\qquad (r<R)$$

于是：

$$w_e=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4},\qquad (r\ge R)$$

$$W_e=\iiint_V w_e dV=\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_R^{\infty}\frac{1}{r^2}dr=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

上述结果与例**2**所得结果一致。这说明，在静电场范围内，式（**2.3**）和式（**4.4**）完全等效。

最后我们由式（**4.4**）进一步定义宏观静电能 W_{e0} 和介质极化能 $W_{极}$。将 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$ 代入式（**4.4**）得：

$$W_e = W_{e0} + W_{极}. \qquad \textbf{(4.5)}$$

式中：

$$W_{e0} = \frac{1}{2}\iiint \varepsilon_0 E^2 dV, \qquad \textbf{(4.6)}$$

$$W_{极} = \frac{1}{2}\iiint \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}dV. \qquad \textbf{(4.7)}$$

在静电学范围内，$\varepsilon_0 E^2/2$ 为宏观静电能密度，$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}/2$ 为**极化能密度**，二者之和等于静电能密度：

$$w_e = \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}/2$$