# 第一次电磁学习题课

PB20020569 李中枢 电子信息工程

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

# 内容

- 一、作业答案
- 二、球、柱坐标系下的微分积分
- 三、小量近似的计算
- 四、积分定理与δ函数

01

# 作业答案

# 作业答案

1.2 电磁学建立初期曾采用一种单位制——静电单位制(esu)，静电单位制是把库仑定律写成 $F = q_1q_2/r^2$，并且长度、质量和时间用厘米、克和秒(即 CGS 制)，请导出静电单位制中电量与国际单位制中电量(即库仑)的转换关系，并且把密立根油滴实验测定的静电单位制电子电量 $e = 4.774\times10^{-10}$转换成国际单位制中的电量。

- 考虑单位电荷单位长度的作用力。$q_1$=$q_2$=1C,r=1m
- 国际单位制下：$F_0=\frac{kq_1q_2}{r^2}$，静电单位制下：$F_1=\frac{q_1'q_2'}{r_0^2}$，设 $q_1'$ = $q_2'$=x,$r_0$=100cm
- 左式=9x $10^9$ kg·m/ $s^2$，右式 = $\frac{x^2}{100^2} = 9\times10^{14}g\cdot cm/s^2$ ,x=3x $10^9$，故1C=3x$10^9$esu，
- 1esu=3.3x$10^{-10}$,1e=1.6x$10^{-19}$C.

# 作业答案

1.3 把总电量为 $Q$ 的同一种电荷分成两部分，一部分均匀分布在地球上，另一部分均匀分布在月球上，使它们之间的库仑力正好抵消万有引力。已知 $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9.00\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}$，引力常数 $G = 6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$，地球质量 $m = 5.98\times10^{24}\ \mathrm{kg}$，月球质量 $m = 7.34\times10^{22}\ \mathrm{kg}$。

(1) 求 $Q$ 的最小值；

(2) 如果电荷分配与质量成正比，求 $Q$ 值。

1.3 解：(1) 由受力平衡 $\frac{kq_1q_2}{r^2} = \frac{GMm}{r^2}$　$q_1$、$q_2$ 分别为地球、月球上的电荷

$\Rightarrow q_1q_2 = 32.529738\times10^{26}\ C^2$

$Q = q_1+q_2 \geq 2\sqrt{q_1q_2} = 1.1407\times10^{14}C$　Q的最小值为 $1.1407\times10^{14}C$

(2) $\begin{cases} q_1q_2 = 32.52938\times10^{26}\ C^2 \\ \frac{q_1}{q_2} = \frac{M}{m} = 81.471 \end{cases}$

解得：$Q = q_1+q_2 = 5.210\times10^{14}C$

# 作业答案

1.4 如果人体内的正负电荷量不是严格相等，而是有亿分之一的偏差的，试计算两个人相距 1 m 之间的静电力，并计算两人之间的万有引力，比较这两个结果。假设人的体重为 50 kg，近似认为人体内的中子数和质子数量相等。如果人体之间的万有引力是电力的 1 万倍，请估计人体内正负电荷的偏差是多少。

1.4. 解：质子数约为 $\frac{25}{1.67\times10^{-27}} = 1.497\times10^{28}$

人体带电荷量 $q = 1.497\times10^{28}\times1.602\times10^{-19}\times10^{-8} = 23.982C$

$F = \frac{kq_1q_2}{r^2} = 5.17\times10^{12}N$

$F_{引} = \frac{GMm}{r^2} = 1.67\times10^{-7}N$

记偏差为 $a$，$q = 1.497\times10^{28}\times1.602\times10^{-19}\cdot a$

$\frac{kq_1q_2}{r^2} = 1.67\times10^{-11}N \Rightarrow a = 1.797\times10^{-20}$

# 作业答案

1.5 在地球周围的大气中，电场平均值约为 150 N·C$^{-1}$，方向向下。为了使一个质量为 0.5 kg 的带电小球“悬浮”在此电场中，(1) 计算小球上的电量和正负值；(2) 如果小球的密度很小，只有 $\rho = 0.1$ g·cm$^{-3}$，请计算小球表面的电场，并讨论这个实验能否实现。

（1）受力平衡：mg+Eq=0,q=$-\frac{1}{30}C$

（2）m=ρ*$\frac{4}{3}$π$R^3$,R=0.11m,E=$\frac{kq}{R^2}$=2.5*$10^{10}$,表面电场大，空气被击穿。

# 作业答案

1.6 一个细圆环的半径为 $R$，均匀带电，带电量为 $Q$，在圆环的轴线上有一个均匀带电的直线，单位长度的带电量为 $\lambda$，起点在圆心处，终点在无限远处，求它们之间的库仑力。

Z

【解】 如图 1.1.20，环上的电荷元 $\mathrm{d}q=\frac{q}{2\pi}\mathrm{d}\phi$ 作用在直线上 $P$ 处电荷元 $\lambda\mathrm{d}x$ 上的库仑力其大小为

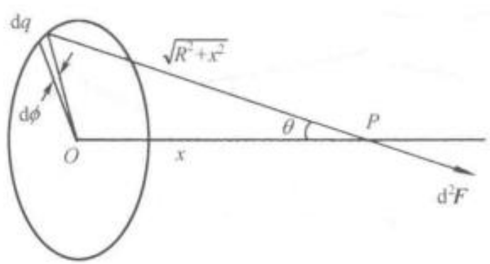



图 1.1.20

$$\mathrm{d}^2F=\frac{\lambda\mathrm{d}x\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)}=\frac{q\lambda}{8\pi^2\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}\phi}{R^2+x^2} \tag{1}$$

根据对称性，整个圆环上的电荷作用在 $\lambda\mathrm{d}x$ 上的力其大小为

$$\mathrm{d}F=\oint(\mathrm{d}^2F)\cos\theta=\frac{q\lambda}{8\pi^2\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}x}{R^2+x^2}\cos\theta\oint\mathrm{d}\phi=\frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\mathrm{d}x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \tag{2}$$

其方向沿轴线向外(当 $q\lambda>0$ 时)或向内(当 $q\lambda<0$ 时)。

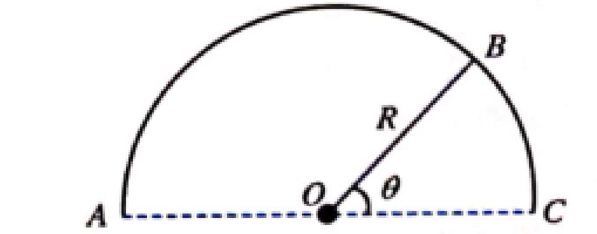
于是得圆环上的电荷作用在直线电荷上的力其大小为

$$F=\frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(R^2+x^2)^{3/2}}=\frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right]_0^{\infty}=\frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0R} \tag{3}$$

力的方向沿轴线向外(当 $q\lambda>0$ 时)或向内(当 $q\lambda<0$ 时)。

# 作业答案

1.11 电荷分布在半径为 $R$ 的半圆环上，线电荷密度为 $\lambda_0 \sin\theta$，$\lambda_0$ 为常数，$\theta$ 为半径 $OB$ 和直径 $AC$ 间的夹角。证明：$AC$ 上任一点的电场强度都与 $AC$ 垂直。




习题 1.11 图

原式<=>证明AC为等势面（线）。设x为AC上的点与O的距离，则θ方向的电荷元在该点的电势为$\frac{\lambda_0 sin(\theta)Rd\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2-2xRcos(\theta)}}$，

对θ积分，φ(x)= $\int_0^\pi \frac{\lambda_0 sin(\theta)Rd\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2-2xRcos(\theta)}}$,要证AC等势,即证

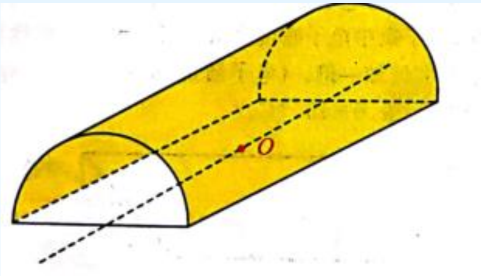
$\int_0^\pi \frac{\lambda_0 sin(\theta)Rd\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2-2xRcos(\theta)}}$与x无关。

$$\int_0^\pi \frac{\lambda_0 sin(\theta)Rd\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2-2xRcos(\theta)}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{x^2+R^2-2xRcos(\theta)}}{2xR}\Big|_0^\pi = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

与x无关，证毕

# 作业答案

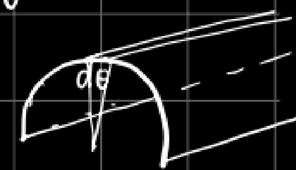
1.13 半径为 $R$ 的无限长半圆柱薄筒，均匀带电，单位面积的电量为 $\sigma$，求半圆柱轴线上一点 $O$ 的场强.




习题 1.13 图

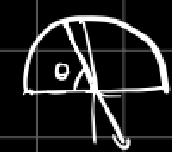
1.13 解：在圆柱上取一条与轴线平行的很窄的无限长条 $d\theta$

取一个以该长条为轴线的圆柱高斯面，半径为 $R$




$$E\cdot 2\pi R h=\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot R\cdot d\theta\cdot h\cdot\sigma \Rightarrow E=\frac{\sigma\, d\theta}{2\pi\varepsilon_0}$$

由对称性，轴线上的点的电场与轴线垂直向下.




$$dE=\frac{\sigma\, d\theta}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\sin\theta$$

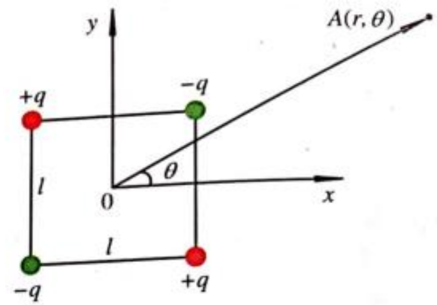
$$E=\int_0^{\pi}\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\sin\theta\, d\theta$$

$$=\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\cdot 2=\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}$$

则轴线上的电场强度 $E$ 为 $\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}$，方向轴垂直于轴线竖直向下.

# 作业答案

1.15 面电四极子如图所示，点 $A(r,\theta)$ 与电四极子共面，极轴（$\theta=0$）通过正方形中心并与两边平行。设 $r\gg l$，求面电四极子在 $A$ 点产生的电场强度。




习题 1.15 图

【解】（1）四个点电荷在 $P(r,\theta)$ 点产生的电势为

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_3}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_4}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}\right]$$

式中［参见图 1.4.35(2)］

$$r_1=\sqrt{r^2+\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2-2r\frac{l}{\sqrt{2}}\cos(135^\circ-\theta)}$$

$$=r\sqrt{1+\frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2-\frac{l}{r}(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$r_2=\sqrt{r^2+\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2-2r\frac{l}{\sqrt{2}}\cos(45^\circ-\theta)}$$

$$=r\sqrt{1+\frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2-\frac{l}{r}(\sin\theta+\cos\theta)}$$

$$r_3=\sqrt{r^2+\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2-2r\frac{l}{\sqrt{2}}\cos(45^\circ+\theta)}$$

$$=r\sqrt{1+\frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2+\frac{l}{r}(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$r_4=\sqrt{r^2+\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2-2r\frac{l}{\sqrt{2}}\cos(135^\circ+\theta)}$$

# 作业答案

$$=r\sqrt{1+\frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2+\frac{l}{r}(\sin\theta+\cos\theta)} \tag{5}$$

为了求出 $r\gg l$ 时式(1)方括号内的值，利用公式

$$(1+x)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\cdots,\qquad (x^2<1) \tag{6}$$

把$\frac{1}{r_1}$、$\frac{1}{r_2}$、$\frac{1}{r_3}$和$\frac{1}{r_4}$等展开，取近似到$\left(\frac{l}{r}\right)^2$项如下：

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2-\frac{l}{r}(\sin\theta-\cos\theta)\right\}^{-1/2}$$

$$\approx\frac{1}{r}\left\{1-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2-\frac{l}{r}(\sin\theta-\cos\theta)\right]+\frac{3}{8}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2-\frac{l}{r}(\sin\theta-\cos\theta)\right]^2\right\}$$

$$\approx\frac{1}{r}\left\{1-\frac{1}{4}\frac{l^2}{r^2}+\frac{l}{2r}(\sin\theta-\cos\theta)+\frac{3}{8}\frac{l^2}{r^2}-\frac{3}{4}\frac{l^2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\right\} \tag{7}$$

$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2-\frac{l}{r}(\sin\theta+\cos\theta)\right\}^{-1/2}$$

$$\approx\frac{1}{r}\left\{1-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2-\frac{l}{r}(\sin\theta+\cos\theta)\right]+\frac{3}{8}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2-\frac{l}{r}(\sin\theta+\cos\theta)\right]^2\right\}$$

$$\approx\frac{1}{r}\left\{1-\frac{1}{4}\frac{l^2}{r^2}+\frac{l}{2r}(\sin\theta+\cos\theta)+\frac{3}{8}\frac{l^2}{r^2}+\frac{3}{4}\frac{l^2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\right\} \tag{8}$$

$$\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2+\frac{l}{r}(\sin\theta-\cos\theta)\right\}^{-1/2}$$

$$\approx\frac{1}{r}\left\{1-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2+\frac{l}{r}(\sin\theta-\cos\theta)\right]+\frac{3}{8}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2+\frac{l}{r}(\sin\theta-\cos\theta)\right]^2\right\}$$

$$\approx\frac{1}{r}\left\{1-\frac{1}{4}\frac{l^2}{r^2}-\frac{l}{2r}(\sin\theta-\cos\theta)+\frac{3}{8}\frac{l^2}{r^2}-\frac{3}{4}\frac{l^2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\right\} \tag{9}$$

$$\frac{1}{r_4}=\frac{1}{r}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2+\frac{l}{r}(\sin\theta+\cos\theta)\right\}^{-1/2}$$

$$\approx\frac{1}{r}\left\{1-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2+\frac{l}{r}(\sin\theta+\cos\theta)\right]+\frac{3}{8}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{l}{r}\right)^2+\frac{l}{r}(\sin\theta+\cos\theta)\right]^2\right\}$$

$$\approx\frac{1}{r}\left\{1-\frac{1}{4}\frac{l^2}{r^2}-\frac{l}{2r}(\sin\theta+\cos\theta)+\frac{3}{8}\frac{l^2}{r^2}+\frac{3}{4}\frac{l^2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\right\} \tag{10}$$

相加便得

$$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}=\frac{1}{r}\left\{\frac{l}{2r}(\sin\theta-\cos\theta)-\frac{3}{4}\frac{l^2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\right.$$

$$-\frac{l}{2r}(\sin\theta+\cos\theta)-\frac{3}{4}\frac{l^2}{r^2}\sin\theta\cos\theta$$

$$-\frac{l}{2r}(\sin\theta-\cos\theta)-\frac{3}{4}\frac{l^2}{r^2}\sin\theta\cos\theta$$

$$\left.+\frac{l}{2r}(\sin\theta+\cos\theta)-\frac{3}{4}\frac{l^2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\right\}$$

$$=\frac{1}{r}\left\{-3\frac{l^2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\right\} \tag{11}$$

代入式(1)便得

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left\{-3\frac{l^2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\right\}=-\frac{3ql^2\sin\theta\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{12}$$

(2)由 $U$ 求电场强度如下：

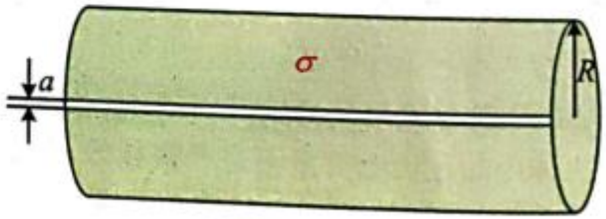
$$\boldsymbol{E}=-\nabla U=-\frac{\partial U}{\partial r}\boldsymbol{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$=\frac{3ql^2\sin\theta\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^3}\right)\boldsymbol{e}_r+\frac{3ql^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\cos\theta\right)\boldsymbol{e}_\theta$$

$$=\frac{3ql^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\left[-3\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_r+(2\cos^2\theta-1)\boldsymbol{e}_\theta\right] \tag{13}$$

# 作业答案

1.18 一个无限长半径为 $R$ 的圆柱面均匀带电，电荷密度为 $\sigma$，圆柱面上有一条宽度为 $a(a \ll R)$ 无限长的狭缝，如图所示，求圆柱面内外任一点的电场强度。




习题 1.18 图

外部：等价于一个线电荷密2$\pi$R,位于圆心中轴线的无限长带电直线与一个位于狭缝处，线电荷密度为-σa的无限长直导线的电场求和。
内部：等价于一个位于狭缝处，线电荷密度为-σa的无限长直导线的电场(带电圆柱在内部无电场。)
这道题很多同学没有写电场方向。

$$\vec{E}_{内} = -\frac{\sigma a}{2\pi\varepsilon_0 r'}\vec{e}_{r'}, \quad \vec{E}_{外} = \frac{R\sigma}{r\varepsilon_0}\vec{e}_r - \frac{\sigma a}{2\pi\varepsilon_0 r'}\vec{e}_{r'}.$$

r是以圆柱中心为参考点，r’是以狭缝为参考点。

# 作业答案

1.20 在半导体 p-n 结附近总是堆积着正、负电荷，在 n 区内有正电荷，p 区内有负电荷，两区电荷的代数和为 0。我们把 p-n 结看成一对带正、负电荷的无限大平板，它们相互接触(见图)。取坐标 $x$ 的原点在 p，n 区的交界面上，n 区的范围是 $-x_n \leqslant x \leqslant 0$，p 区的范围是 $0 \leqslant x \leqslant x_p$。设两区内电荷体分布是均匀的，

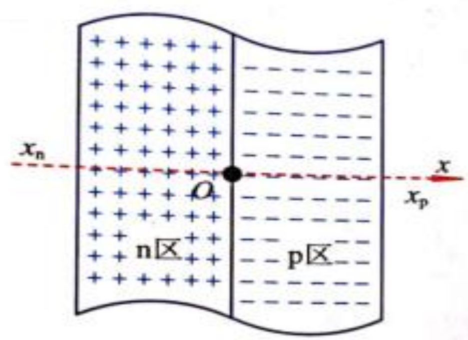
n 区：$\rho_e(x) = N_D e$；

P 区：$\rho_e(x) = -N_A e$；

这称为突变结模型，这里 $N_D$、$N_A$ 是常数，且 $N_A x_p = N_D x_n$，证明电场的分布为

(1) n 区：$E(x) = \dfrac{N_D e}{\varepsilon_0}(x_n + x)$；

(2) p 区：$E(x) = \dfrac{N_A e}{\varepsilon_0}(x_p - x)$。




习题 1.20 图

1.20. 解:(1) 由对称性, 电场只有 $x$ 分量.

在 $x_n$ 中取高斯面为圆柱面沿 $x$ 方向, 半径为 $r$, 高为 $x_p+x$

由高斯定理. $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\Sigma q$

$\Sigma q = (-N_D e\cdot x - N_A e\cdot x_p)\cdot 4\pi r^2$

$\Rightarrow E\cdot 2\pi r^2 = (-N_D e\cdot x - N_A e\cdot x_p)\cdot 2\pi r^2\cdot \frac{1}{\varepsilon_0}$ $\quad N_A x_p = N_D\cdot x_n$

$E(x) = \frac{N_D e}{\varepsilon_0}(x+x_n)$

(2) 在 p 区中, 同理可得

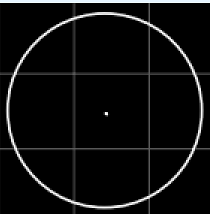
$E\cdot 2\pi r^2 = (-N_p e\cdot x + N_D e\cdot x_n)\cdot 2\pi r^2\cdot \frac{1}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E(x) = \frac{N_D e}{\varepsilon_0}(x_p - x)$

# 作业答案

1.21　一个电荷体密度按 $\rho = \rho_0 e^{-kr}/r$ 对称分布的球体，求球体内任一点的电场强度。

1.21. 解：设球体内一点距离为 R



取高斯面为同球心的，半径为 r 的球壳

$$\Sigma q = \int_0^R 4\pi r^2 \cdot \rho_0 \cdot e^{-kr}/r \cdot dr$$

$$= 4\pi\rho_0 \int_0^R r \cdot e^{-kr} dr$$

$$= 4\pi\rho_0 \cdot \left( -\frac{r}{k} e^{-kr} \Big|_0^R + \int_0^R \frac{1}{k} e^{-kr} dr \right)$$

$$= 4\pi\rho_0 \cdot \left( -\frac{R}{k} e^{-kR} + \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} e^{-kR} \right)$$

$$= \frac{4\pi\rho_0}{k} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k} e^{-kR} - R e^{-kR} \right)$$

则 $E \cdot 4\pi R^2 = \frac{4\pi\rho_0}{k\varepsilon_0} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k} e^{-kR} - R e^{-kR} \right)$

$E = \frac{\rho_0}{k\varepsilon_0 R^2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k} e^{-kR} - R e^{-kR} \right)$　R为点到球心的距离

# 作业答案

1.22 假定地球原来是电中性的，必须将多少千克的电子从地球表面移走（假定剩余的正电荷分布在地球表面），从而使地球表面的电势为 1 V？

1.22. 解：球壳外的电场满足 $4\pi r^2 \cdot E = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$.

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$　r为到球心的距离

$U = \int_R^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_R^{+\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} dr = 1V$

解得：$Q = 4\pi\varepsilon_0 R$

$m_{电} = \frac{Q}{e} \times m_0 = 4 \times 10^{-15} kg$

# 作业答案

1.25 半径为 $R_1$ 的导体球外有同心的导体球壳，壳的内外半径分别为 $R_2$ 和 $R_3$，已知球壳带的电量为 $Q$，球的电势为 0。求内球的电荷量和球壳的电势。

1.25、解：设球壳内、外侧电荷分别为 $Q_1$，$Q_2$

$$Q_1+Q_2=Q$$

导体球外侧带电 $Q'=-Q_1$

内球是等势体，考虑球心处电势

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q'}{R_1}+\frac{Q_1}{R_2}+\frac{Q_2}{R_3}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{Q_1}{R_1}+\frac{Q_1}{R_2}+\frac{Q_2}{R_3}\right)=0$$

则 $\left(-\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)Q_1=-\frac{Q}{R_3}$

解得：$q=-\frac{R_1R_2}{R_1R_3-R_2R_3-R_1R_2}Q$　带电荷量为 $\frac{R_1R_2}{R_1R_3-R_2R_3-R_1R_2}Q$

球壳外的电场强度 $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q+q}{r^2}$

$$U=\int_{R_3}^{+\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{R_3}^{+\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q+q}{r^2}\cdot dr=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0R_3}$$

# 作业答案

1.28 求总电量为 $Q$、半径为 $R$ 的均匀带电圆环在轴线上距离圆心为 $x$ 处的各点的电势。假设环足够细，近似为线电荷。

1.28 解：圆环在x处的场强易得

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$U=\int_x^{+\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_x^{+\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$


1.29 已知空间某个区域的电势表达式为 $\varphi=A/\sqrt{x^2+y^2+a^2}$，其中 $A$ 和 $a$ 都是常数，求电场强度的~~3个分量值和总电场~~及其方向。

1.29. 解：

$$\vec{E}=-\nabla\cdot U=-\frac{Ax}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_x-\frac{Ay}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_y$$

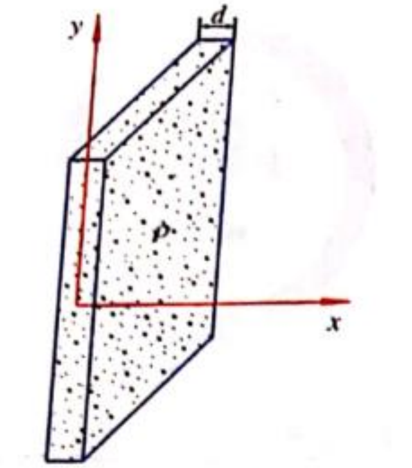
$$E_x=\frac{Ax}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\qquad E_y=\frac{Ay}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\qquad E_z=0$$

$$E_{总}=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=\frac{A\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

方向为 $\vec{e}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$

# 作业答案

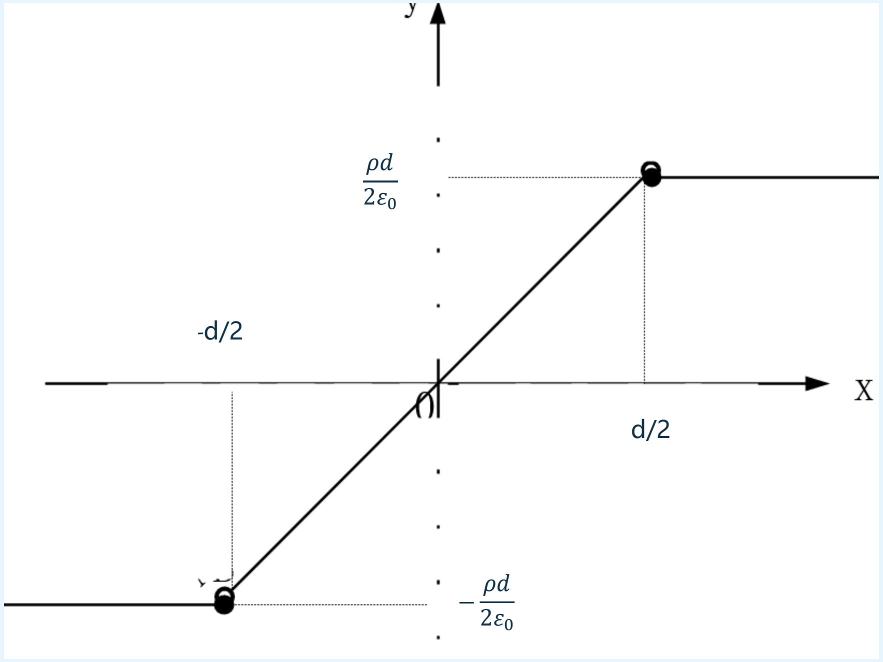
1.32 如图所示，在一厚度为 $d$ 的无穷大平板层内均匀地分布有正电荷，其密度为 $\rho$，求在平板层内及平板层外的电场强度 $E$，并作 $E(r)$ 图。




习题 1.32 图

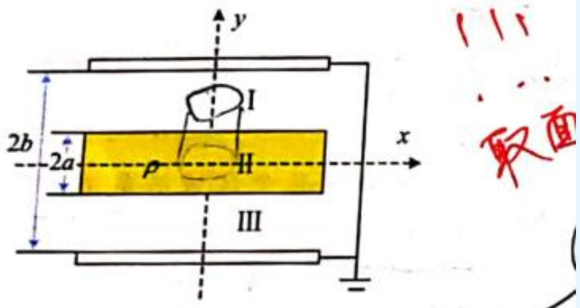
X>d/2: E= $\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{x}$, X<-d/2, E=- $\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{x}$

-d/2<x<d/2, E= $\frac{\rho x}{\varepsilon_0}\hat{x}$.



# 作业答案

1.33 如图所示是一个探测器模型，两个相距为 $2b$ 的接地导体板之间有一个长方形的均匀离子电荷饱和区，高度为 $2a$、电荷密度为 $r$，忽略边界效应，求两个接地板之间的电荷层内外 3 个区域 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 的电场和电势。




习题 1.33 图

1.33 解：对于Ⅱ区域，由高斯面为圆柱面，由高斯定理

$$2E_{\mathrm{II}}\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot r\cdot 2y\,\Delta S$$

$$\Rightarrow E_{\mathrm{II}} = \frac{r}{\varepsilon_0}y \qquad (-a\le y\le a)$$

对于Ⅰ区域，取高斯面为圆柱面，同理.

$E_{\mathrm{I}} = \frac{ar}{\varepsilon_0}$ 方向向上

对于Ⅲ区域，同理

$E_{\mathrm{III}} = \frac{ar}{\varepsilon_0}$ 方向向下.

两个接地导体板的电势为0

在Ⅰ区域内. $U_{\mathrm{I}} = \int \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_y^b \frac{ar}{\varepsilon_0}dy = \frac{ar}{\varepsilon_0}(b-y) \quad a\le y\le b$

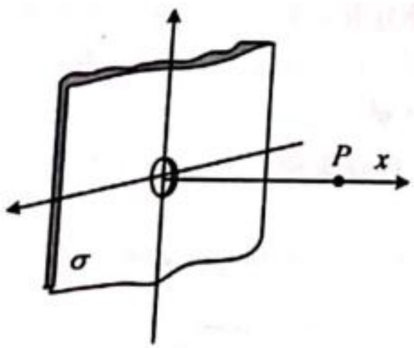
在Ⅲ区域内 $U_{\mathrm{III}} = \int \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_y^{-b} -\frac{ar}{\varepsilon_0}dy = \frac{ar}{\varepsilon_0}(b+y) \quad -b\le y\le -a$

在Ⅱ区域内 $U_{\mathrm{II}} - U_{\mathrm{I}} = \int \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_y^a \frac{ry}{\varepsilon_0}dy$，具有对称性

$$\Rightarrow U_{\mathrm{II}} = \frac{r}{\varepsilon_0}\left[-\frac{y^2}{2} + a\left(b-\frac{a}{2}\right)\right]$$

# 作业答案

1.34 一无限大均匀带电薄平板，电荷密度为 $\sigma$，在平板中部有一个半径为 $r$ 的小圆孔。(1) 求圆孔中心轴线上与平板相距为 $x$ 的一点 $P$ 的电场强度；(2) 以圆孔中心为电势参考点，求该 $P$ 点的电势。




习题 1.34 图

(1) 取一圆环，$dE = \dfrac{\sigma x 2\pi r\,dr}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$E = \int_r^{+\infty} \frac{\sigma 2\pi x r\,dr}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0\cdot\sqrt{x^2+r^2}}$$

(2)

$$U = -\int_0^x \vec{E}\,dx = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\sqrt{x^2+r^2}\Big|_0^x = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+r^2} - r\right)$$

# 作业答案

所受的力。

1.36 一对无限长共轴圆筒，内外筒的半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$，圆筒面均匀带电，沿轴线方向单位长度的电量分别为 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$。（1）求各区域内的电场强度；（2）若 $\lambda_1=-\lambda_2$，情况如何？

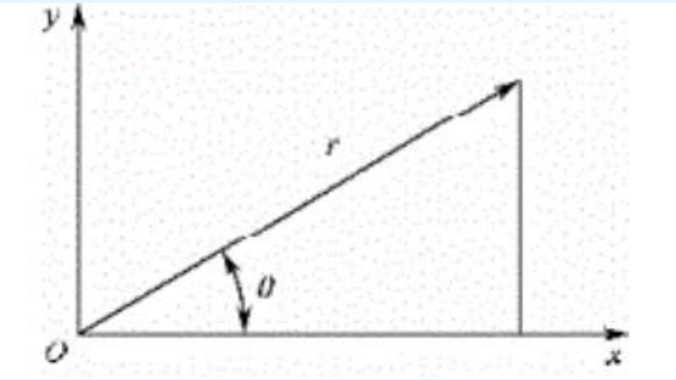
带电圆筒内部电场为0，外部等价于一个在圆心处的带电无限长直导线。故：R1内部电场为0，R1于R2之间电场为$E1=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$,R2外电场为$E2=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$.
若$\lambda_1=-\lambda_2$，则R2外电场为0，其余不变。

02

# 球柱坐标下的积分微分

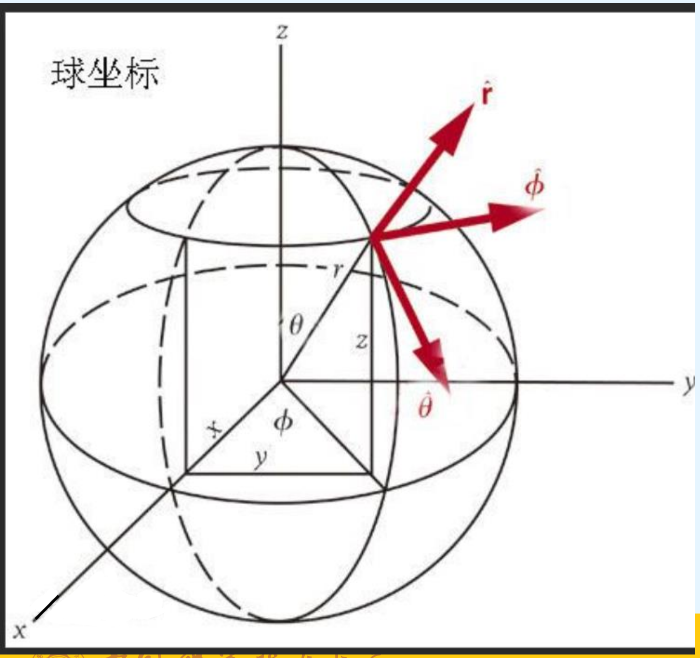
# 直角坐标于极坐标的积分微分

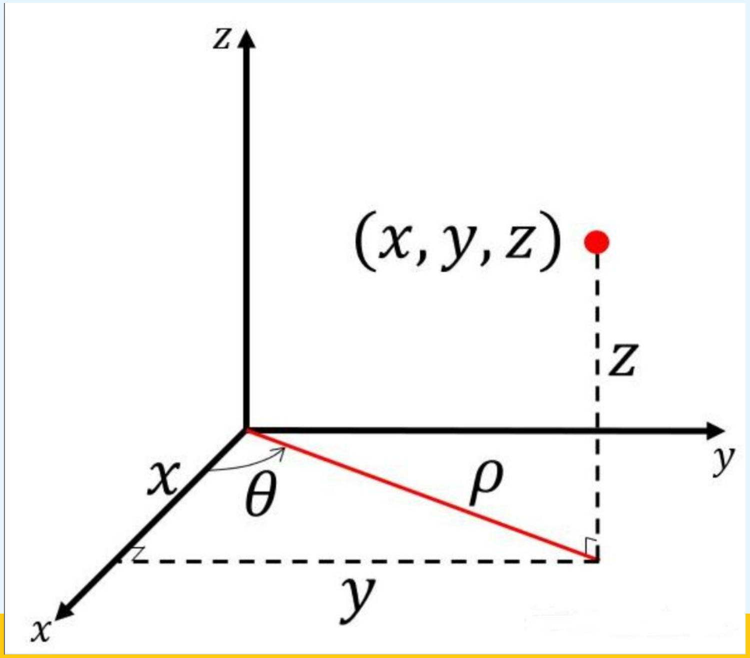
- 直角坐标系下：$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y}$
- 极坐标系下：$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}cos(\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{sin(\theta)}{r}$
- $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}sin(\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{cos(\theta)}{r}$，代入直角坐标系，
- $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{\partial}{r\partial \theta}\hat{\theta}$,其中$\hat{r} = \hat{x}\cos(\theta) + \hat{y}\sin(\theta)$, $\hat{\theta} = -\hat{x}\sin(\theta) + \hat{y}\cos(\theta)$.
- 积分：$\iint F(x,y)dxdy = \iint R(r,\theta)rdrd\theta$，可用雅可比行列式证明



# 球柱坐标下的积分微分

- 直角坐标系下：$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$
- 柱坐标下： $\nabla=\frac{\partial}{\partial \rho}\vec{e_\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e_\theta}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}$
- 球坐标下： $\nabla=\frac{\partial}{\partial r}\vec{e_r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e_\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi}$
- $\iiint F(x,y,z)dxdydz=\iiint U(\rho,\theta,z)rdrd\theta dz=\iiint V(r,\theta,\varphi)r^2\sin(\theta)drd\theta d\varphi$



03

# 小量近似

# 例题

**1.4.34** 四个点电荷在同一直线上，电荷量为 $q$ 的两个点电荷相距为 $2l$，在它们的连线中点，电荷量为 $-q$ 的两个点电荷重合在一起，如图 1.4.34 所示. 对于 $r \gg l$ 处的 $P(r,\theta)$ 点来说，这个电荷系统称为线性电四极子. 试证明：这线性电四极子在 $P(r,\theta)$ 点产生的电势和电场强度分别为

$$U=\frac{ql^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta-1)$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{3ql^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\left[(3\cos^2\theta-1)\boldsymbol{e}_r+2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_r\right]$$

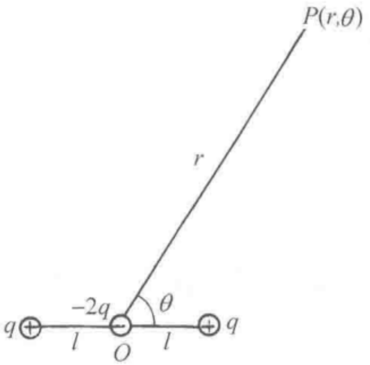



图 1.4.34

【证】 由图 1.4.34 可见，$P(r,\theta)$ 点的电势为

$$U=\frac{-2q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+l^2-2rl\cos\theta}}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+l^2+2rl\cos\theta}}$$

# 例题

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[-2+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{l^2}{r^2}-2\frac{l}{r}\cos\theta}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{l^2}{r^2}-2\frac{l}{r}\cos\theta}}\right] \tag{1}$$

式中两根号项可以利用公式

$$(1+x)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\cdots \quad (x^2<1) \tag{2}$$

展开，取近似如下：

$$\left(1+\frac{l^2}{r^2}-2\frac{l}{r}\cos\theta\right)^{-1/2}+\left(1+\frac{l^2}{r^2}+2\frac{l}{r}\cos\theta\right)^{-1/2}$$

$$\approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{r^2}-2\frac{l}{r}\cos\theta\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{l^2}{r^2}-2\frac{l}{r}\cos\theta\right)^2$$

$$+1-\frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{r^2}+2\frac{l}{r}\cos\theta\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{l^2}{r^2}+2\frac{l}{r}\cos\theta\right)^2$$

$$=2-\frac{l^2}{r^2}+3\frac{l^2}{r^2}\cos^2\theta \tag{3}$$

代入式(1)便得

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[-\frac{l^2}{r^2}+3\frac{l^2}{r^2}\cos^2\theta\right]=\frac{ql^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta-1) \tag{4}$$

电场强度为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla U=-\frac{\partial U}{\partial r}\boldsymbol{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$=-\frac{ql^2(3\cos^2\theta-1)}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^3}\right)\boldsymbol{e}_r-\frac{ql^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(3\cos^2\theta-1)\right]\boldsymbol{e}_\theta$$

$$=\frac{3ql^2(3\cos^2\theta-1)}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\boldsymbol{e}_r+\frac{6ql^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

$$=\frac{3ql^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\left[(3\cos^2\theta-1)\boldsymbol{e}_r+2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta\right] \tag{5}$$

# 例题

**1.4.40** 两条都均匀带电的无穷长平行直线，单位长度的电荷量分别为 $\lambda$ 和 $-\lambda$，相距为 $2a$，如图 1.4.40 所示（图中两带电直线都与纸面垂直），试求空间任一点 $P(x,y)$ 的电势.

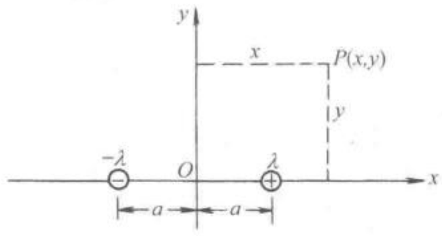



图 1.4.40

**【解】** $z$ 轴（与纸面垂直，图 1.4.40 中未画出）上坐标为 $z$ 处，两带电线上的电荷元 $\lambda dz$ 和 $-\lambda dz$ 在 $P(x,y)$ 点产生的电势为

$$dU = dU_+ + dU_-$$

$$= \frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} + \frac{-\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{dz}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} - \frac{dz}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right] \tag{1}$$

积分便得 $P(x,y)$ 点的电势为

$$U = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{z\to\infty}\Big\{\ln\left[\sqrt{z^2+(x-a)^2+y^2}+z\right]_{-z}^{z}$$

$$-\ln\left[\sqrt{z^2+(x+a)^2+y^2}+z\right]_{-z}^{z}\Big\}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{z\to\infty}\ln\left[\frac{\sqrt{z^2+(x-a)^2+y^2}+z}{\sqrt{z^2+(x-a)^2+y^2}-z}\times\frac{\sqrt{z^2+(x+a)^2+y^2}-z}{\sqrt{z^2+(x+a)^2+y^2}+z}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{z\to\infty}\ln\left[\frac{\sqrt{1+\frac{(x-a)^2+y^2}{z^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{(x-a)^2+y^2}{z^2}}-1}\times\frac{\sqrt{1+\frac{(x+a)^2+y^2}{z^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{(x+a)^2+y^2}{z^2}}+1}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{z\to\infty}\ln\left[\frac{1+\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2+y^2}{z^2}+1}{1+\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2+y^2}{z^2}-1}\times\frac{1+\frac{1}{2}\frac{(x+a)^2+y^2}{z^2}-1}{1+\frac{1}{2}\frac{(x+a)^2+y^2}{z^2}+1}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}\right]$$

04

# 积分定理与δ函数

# 积分定理

① Gauss 定理：

$$\int_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV=\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

$$\int_S \nabla_t\cdot\vec{A}\,dS=\oint_\ell \vec{A}\cdot\hat{n}\,d\ell \quad \text{（平面场）}$$

Stokes 定理：

$$\int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}=\oint_\ell \vec{A}\cdot d\vec{\ell}$$

$$\int_S (\nabla_t\times\vec{A})\cdot\hat{z}\,dS=\oint_\ell \vec{A}\cdot d\vec{\ell} \quad \text{（平面场）}$$

# δ函数的性质

- 一维下: $\delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty & x=x_0\\ 0 & x=其他\end{cases}$, $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$, $\delta(x)=\delta(-x)$
- 三维下: $\delta(\vec{r}-\vec{r_0})=\begin{cases}\infty & \vec{r}=\vec{r_0}\\ 0 & \vec{r}=其他\end{cases}$, $\int_V \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)dV=1\ (\vec{r}_0\in V)$
- $\delta(\vec{r}-\vec{r_0})=\delta(\vec{r_0}-\vec{r})$
- $\nabla\cdot(\frac{\vec{r}}{r^3})=4\pi\delta(\vec{r})$
- 证明: $\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$
- 左式= $\Delta\left(\frac{-1}{r}\right)$, r ≠0,代入，得$\Delta\left(\frac{-1}{r}\right)$=0.当r=0时，对包含原点在内得一个小圆做体积分，有 $\int_V\triangle(-\frac{1}{r})dV=\int_S\nabla(\frac{-1}{r})\vec{n}dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{r^2}r^2 sin(\theta)d\theta d\varphi$

  因此，$\nabla\cdot(\frac{\vec{r}}{r^3})=4\pi\delta(\vec{r})$。

# 谢谢！