离散数学（2023 秋）作业八

1. 两个矩阵 $A_{n\times n}$ 和 $B_{n\times n}$ 被称作置换相似是指存在置换矩阵 $P_{n\times n}$ 使得 $A_{n\times n}=P_{n\times n}B_{n\times n}P_{n\times n}^{-1}$. 设 $A_{n\times n}$ 为有向图 $D=(V,E)$ 的邻接矩阵，证明:

   (a) $A_{n\times n}$ 置换相似于 $\begin{pmatrix} O_{m\times m} & B \\ C & O_{n-m\times n-m}\end{pmatrix}$ 等价于 D 是二部图。

   (b) $A_{n\times n}$ 置换相似于 $\begin{pmatrix} B_{m\times m} & O \\ O & C_{n-m\times n-m}\end{pmatrix}$ 等价于 D 不连通。

   (c) $A_{n\times n}$ 置换相似于 $\begin{pmatrix} B_{m\times m} & B' \\ O & C_{n-m\times n-m}\end{pmatrix}$ 等价于 D 不强连通。

   (d) $I_{n\times n}+A_{n\times n}+A_{n\times n}^2+\cdots+A_{n\times n}^{|V|-1}>0$ 等价于 D 强连通。

   这里，O 表示全零矩阵，I 表示单位矩阵。

2. 一个(无向)图被称作林(Forest)是指该图没有 Cycle。对图 $G=(V,E)$，设 C 是 G 的连通分量的个数，证明 G 是林等价于 $|V|-C=|E|$。

3. 设图 $G=(V,E)$ 是树，且 G 含有至少一条边，图 G 中一条 path 的长度是指这条 path 包含的边的个数。证明:

   (a) G 中最长的 path 的两个端点的度数都为 1.

   (b) G 中所有最长的 path 至少包含一个公共顶点。

   (c) 设 G 中最长 path 的长度为 $2k-3$（$k\geq 3$），则 G 中含有至少 $|V|-k$ 条长度不小于 k 的 path.

4. 设图 $G=(V,E)$ 是平面图，设 F 是 G 中面的个数，C 是 G 中连通分量的个数。证明 $|V|-|E|+F=C+1$。

5. 设图 $G=(V,E)$ 是简单二部连通平面图且 $|V|>2$，证明 $|E|\leq 2|V|-4$.

6. 设图 $G = (V, E)$ 是简单平面图且 $|V| > 2$，证明 $|E| \leq 3|V| - 6$.