微积分第一次习题课讲义

2023 年 9 月 20 日

习题 1.1

2. 证明 $\sqrt{6}$ 是无理数。更进一步，如果在自然数 a 的质数分解中，至少有一个质数因子出现奇数次，则 $\sqrt{a}$ 是无理数。

证明. 假设 $\sqrt{6}$ 是有理数，则设 $\sqrt{6}=\frac{p}{q}$，其中 p,q 互素。则有

$$p^2 = 6q^2 \tag{1}$$

于是 p 是偶数，设 $p=2m$, 代入 (1) 有

$$2m^2 = 3q^2 \tag{2}$$

因此 q 也是偶数。这与 p,q 互素的假设不符，矛盾。 □

注 1. 对于 a 是自然数的情形，可设 $a=q_1^{r_1}q_2^{r_2}\cdots q_n^{r_n}$，其中，$q_k$ 是质数，$r_k=0,1,\cdots(1\leq k\leq n)$，则 $\sqrt{a}=\sqrt{q_1^{r_1}q_2^{r_2}\cdots q_n^{r_n}}$。
对于 r_k 是偶数的 $q_k^{r_k}$ 可以直接开出平方根，但是若 r_k 是奇数，此时 $q_k^{r_k}$ 可类似 $\sqrt{3}$ 讨论出结果是无理数。后面这些数的乘积可以类似 $\sqrt{6}$ 的讨论，得出结论。但不可直接认为无理数 $\times$ 无理数是无理数。

拓展 1. 证明：若 $n\in\mathbb{N}^*$ 且 n 不属于完全平方数，则 $\sqrt{n}$ 是无理数。

证明. 用反证法。假设 $\sqrt{n}=p/q$, 其中 $p,q\in\mathbb{N}^*$。由于 n 不是完全平方数，故有 $m\in\mathbb{N}^*$, 使得 $m<p/q<m+1$, 由此得到 $0<p-mq<q$。在等式 $p^2=nq^2$ 的两边都减去 mpq, 得到 $p^2-mpq=nq^2-mpq$，这等价于

$$\frac{p}{q}=\frac{nq-mp}{p-mq}$$

令 $p_1 = nq - mp, q_1 = p - mq$。由于 $q_1 \in \mathbb{N}^*$ 且 $q_1 < q$，所以 $p_1 \in \mathbb{N}^*$ 且 $p_1 < p$。对等式

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$$

反复地进行同样的讨论，可以得到两串递减的正整数列

$$p > p_1 > p_2 > p_3 > \cdots \quad q > q_1 > q_2 > q_3 > \cdots$$

使得

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3} = \cdots$$

这是不可能的，因为从 p q 开始的正整数不可能无止境地递减下去。这就证明了 $\sqrt{n}$ 不可能是有理数。 □

5. 下列哪些集合有上下确界和最大最小值，如果存在请求出这些值。

1. 自然数集 $\mathbb{N}$
2. $(0,1)$ 中的所有有理数
3. $\{\frac{n}{m+n+1}|m,n \in \mathbb{N}\}$
4. $\{x \in \mathbb{R}|x^2 < 2\}$
5. $\{(1 - \frac{1}{n+1})|n \in \mathbb{N}\}$

解. *1. 无上确界和最大值，下确界为 0，最小值是 0*

2. 上确界为 1，下确界为 0，无最大值和最小值

3. 上确界是 1，下确界是 0，无最大值，最小值为 0

4. 上确界是 $\sqrt{2}$，下确界是 $-\sqrt{2}$，无最大值和最小值

5. 上确界是 1，下确界是 0，无最大值，最小值是 0

注 2. 如果一个集合存在最大值（最小值），则它的上确界（下确界）一定存在，且与最大值（最小值）相等，即上确界（下确界）可以理解为在一定容忍度（ϵ）下集合的最大值（最小值），即上确界（下确界）是最大值（最小值）在极限意义下的推广。

注 3. $\inf(-A) = -\sup A$,$\sup(-A) = -\inf A$.

7. 证明：若 A 和 B 是 $\mathbb{R}$ 中的非空有界集，则 $A\cap B$ 和 $A\cup B$ 也是有界集，且：

$$\inf(A\cup B)=\min\{\inf A,\inf B\},\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}$$
$$\inf(A\cap B)\geq\max\{\inf A,\inf B\},\sup(A\cap B)\leq\min\{\sup A,\sup B\}$$

证明. 对于 $A\cup B$，求其上确界和下确界方法类似，下面只给出上确界的证明：

注意到 $\sup(A\cup B)=\sup(\{x|x\in A\ or\ x\in B\})$, 因此 $\sup(A\cup B)\geq\sup A,\sup(A\cup B)\geq\sup B$.
不妨设 $\sup A\geq\sup B$, 则 $\forall x\in A\cup B$, 如果 $x\in A$, 则 $x\leq\sup A$, 否则 $x\in B$, 则 $x\leq\sup B\leq\sup A$, 因此 $\sup(A\cup B)\leq\sup A$. 综上, $\sup(A\cup B)=\sup A$.

对于 $A\cap B$, 类似地：

不妨设 $\inf A\leq\inf B$, 则 $\forall x\in A\cap B$, 则有 $x\in A,x\in B$, 因此 $x\geq\inf B\geq\inf A$，因此 $\inf(A\cap B)\geq\inf B$。上确界也类似。 □

注 4. 对于任何一个集合 A 而言，如果 $B\subset A$, 则 $\sup B\leq\sup A,\inf B\geq\inf A$.

12. 设 A,B 是 $\mathbb{R}$ 中非空有界集，且 A、B 中数都是非负实数，记 $AB=\{xy|x\in A,y\in B\}$，证明：

$$\inf(AB)=\inf A\cdot\inf B,\sup(AB)=\sup A\cdot\sup B.$$

证明. $\forall x\in A,y\in B,\inf A\leq x\leq\sup A,\inf B\leq y\leq\sup B\Rightarrow\inf A\cdot\inf B\leq xy\leq\sup A\cdot\sup B$. 即 $\inf A\cdot\inf B\leq\inf(AB)\leq\sup A\cdot\sup B$.

$\forall\epsilon>0,\exists x_0\in A,y_0\in B,s.t\ x_0<\inf A+\epsilon,y_0<\inf B+\epsilon$, 于是 $xy<\inf A\cdot\inf B+\epsilon(\inf A+\inf B+\epsilon)$。再由 ϵ 的任意性，可以得到 $\inf(AB)\leq\inf A\cdot\inf B$. 综上，$\inf A\cdot\inf B=\inf(AB)$，上确界证明类似。 □

14. 设 $n\geq 2$ 是自然数，证明：

$$(1+\frac{1}{n-1})^n>(1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

证明.

$$(\frac{n-1}{n})^n = \underbrace{\frac{n-1}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-1}{n}}_{\text{n 个}}\cdot 1 \overset{\text{均值不等式}}{\leq} (\frac{\frac{n-1}{n}\cdot n+1}{n+1})^{n+1} = (\frac{n}{n+1})^{n+1}$$

□

注 5. *这道题有很多解法：求导、Bernoulli 不等式 $\cdots$，但是要注意一个很显然的错误证法，如下：*

$$(1+\frac{1}{n-1})^n \geq 1+\frac{n}{n-1}$$
$$(1+\frac{1}{n})^{n+1} \geq 1+\frac{n+1}{n}$$
$$1+\frac{n}{n-1} > 1+\frac{n+1}{n}$$

注 6. *类似地，可以证明 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 是严格递增数列（留作练习）*

拓展 2. 证明：任意两个不同实数之间都存在无穷多个有理数和无理数。

证明. 等价于证明两个实数之间存在 1 个有理数和 1 个无理数。

不妨设 $a<b$，考虑 a,b 间的有理数。

令 $x=\frac{3}{4}a+\frac{1}{4}b, y=\frac{1}{4}a+\frac{3}{4}b$, 则有 $a<x<y<b$。

若 x,y 中至少有一个是有理数，则已经找到一个有理数。

若 x,y 均为无理数，不妨设 $[x]=[y]$, 否则 $Z=[y]$ 即为 a,b 间的一个有理数。

记 $\{x\},\{y\}$ 分别为 $0.\overline{x_1x_2...x_n...}, 0.\overline{y_1y_2...y_n...}$

设它们在第 k 位开始不同，则取 $Z=[y]+0.\overline{y_1y_2...y_k}$, 则 Z 即为 a,b 间的有理数。

进一步则可以找到无穷多个有理数使得 $0<z_1<z_2<...<z_n<...<b$

再考虑无理数，任取 a,b 间的两个有理数 $z_1<z_2$，则 $z_1+\frac{\sqrt{2}}{2}(z_2-z_1)$ 即为所求。

□

拓展 3. *习题 1.1 第 15 题*

习题 1.2

2. 已知 $f(x+1)=2x^2-x+1, g(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}(x\neq 0)$，写出 $f(x), g(x), f\circ g, g\circ f$ 的表达式

解. 设 $x+1=t, x+\frac{1}{x}=s, t\in\mathbb{R}, |s|\geq 2$, 因此,

$$f(t)=2(t-1)^2-(t-1)+1=2t^2-5t+4$$

同理,

$$g(s)=s^2-2$$

于是

$$f\circ g=f(g(s))=f(s^2-2)=2(s^2-2)^2-5(s^2-2)+4=2s^4-13s^2+22$$
$$g\circ f=g(f(t))=g(2t^2-5t+4)=(2t^2-5t+4)^2-2=4t^4-20t^3+41t^2-40t+14$$

即

$$f(x)=2x^2-5x+4, f\circ g(x)=2x^4-13x^2+22$$
$$g(x)=x^2-2, g\circ f(x)=4x^4-20x^3+41x^2-40x+14$$

6. 验证 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 是奇函数，并求出对应反函数

解.

$$y(-x)=\ln(\sqrt{(-x)^2+1}-x)=\ln(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x})=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-y(x)$$

因此 $y(x)$ 是奇函数。
反解 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$, 即

$$e^y=\sqrt{x^2+1}+x$$

同理,

$$e^{-y}=\sqrt{x^2+1}-x$$

联立，解得

$$x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

即 $y^{-1}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

拓展 4. 双曲函数：

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh^{-1} x = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$$
$$\cosh^{-1} x = \ln(\sqrt{x^2-1} + x)$$

15. 证明 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x < \tan x$$

证明. 考虑一个单位圆，当它的角度为 x 时，此时 x 对应扇形的弧长，由几何知识可以知道

$$\sin x < x < \tan x$$

结合 $y = \sin x$ 与 $y = \frac{2}{\pi}x$ 图像，我们可以发现

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x$$

□

注 7. 这里求导证明也可以。不过由于还没有学习导数知识，应尽量规避。

拓展 5. 几道有趣的判断题:

1. 周期函数一定具有最小正周期。
2. $f(x)$ 是周期函数，则 $f(x^2)$ 不是周期函数。
3. f 和 g 都不连续，则 $f+g, f\cdot g$ 都不连续。