

离散数学 (2023 秋) 作业一

截止日期: 9 月 20 日 11.20

- (20pt) 考虑一个边长为 1 的等边三角形:
证明在该三角形中任取五个点, 则其中存在两点使其距离不大于 $1/2$;
证明在该三角形中任取十个点, 则其中存在两点使其距离不大于 $1/3$;
确定 m_n , 使得在该三角形中任取 m_n 个点, 则其中存在两点使其距离不大于 $1/n$. (请让 m_n 尽可能的小, 越小得分越高).
- (20pt) 确定 n , 使得在 1 到 200 中任选 n 个数中必有两个数互素。
确定 n , 使得在 1 到 200 中任选 n 个数中必有两个数不互素。
(请让 n 尽可能的小, 越小得分越高) .
- (15 pt) $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 为实数且 $\sum_{i=1}^n a_i = A, \sum_{i=1}^n b_i = B$.
证明对于任意的整数 $k \in [n]$, 存在 $i, j \in [n]$ 使得 $\sum_{\ell=0}^{k-1} a_{i+\ell} b_{j+\ell} \geq \frac{k}{n^2} AB$. ($[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, $a_{i+\ell} = a_{i+\ell-n}$ 如果 $i+\ell > n$, $b_{j+\ell} = b_{j+\ell-n}$ 如果 $j+\ell > n$).
- (15 pt) 构造 n^2 个数的序列, 使得其中不存在长度为 $n+1$ 的递增子序列或递减子序列, 并证明。
- (15 pt) 考虑整数 a, b , 令 e 为集合 $\{sa + tb \mid s, t \in \mathbb{Z}\}$ 中最小的正整数, 证明 $e \mid a$ 且 $e \mid b$.
- (15 pt) 确定 n , 使得在平面上任取 n 个点 (这 n 个点无三点共线且互不重合), 则其中存在 4 个点构成凸四边形.
(请让 n 尽可能的小, 越小得分越高) .
- (20pt) 证明在平面上任取 $\binom{2k-4}{k-2} + 1$ 个点 (这些点无三点共线且互不重合), 总能找到其中 k 个点构成凸 k 边形。
(你能找到比 $\binom{2k-4}{k-2} + 1$ 更小的数使得上述成立么?)