第八次作业

6.

(2) $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx$

取围道如图:

设 $f(z)=\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$　极点 $0, \pm bi$ 都是一阶极点

由留数定理

$$2\pi i \,\mathrm{Res}(f, bi) = \int_{-R}^{-r} f(x)\,dx + \int_{r}^{R} f(x)\,dx + \left(\int_{C_r} + \int_{C_R}\right) f(z)\,dz \quad \cdots\cdots (1)$$

$$2\pi i \,\mathrm{Res}(f, bi) = -\frac{e^{-ab}}{b^2}\pi i$$

移项,并对(1)式左右取虚部,得到

$$\left(\int_{-R}^{-r} + \int_{r}^{R}\right)\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx = -\frac{e^{-ab}}{b^2}\pi - \mathrm{Im}\left(\int_{C_r} + \int_{C_R} f(z)\,dz\right) \quad \cdots (2)$$

由5.2.2 引理2. $\lim\limits_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\,dz = -\pi i \,\mathrm{Res}(f,0) = -\frac{\pi i}{b^2}$

由5.2.2. 引理3.(Jordan引理), $\lim\limits_{R\to 0}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0$

对(2)两端取 $r\to 0$　$R\to+\infty$ 的极限

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx = -\frac{e^{-ab}}{b^2}\pi + \frac{\pi}{b^2} = \frac{1-e^{-ab}}{b^2}\cdot\pi.$$

故 $I = \frac{1-e^{-ab}}{2b^2}\pi$

6. (4).

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2ax - 1}{x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2bx - 1}{x^2}\,dx$$

bi

极点

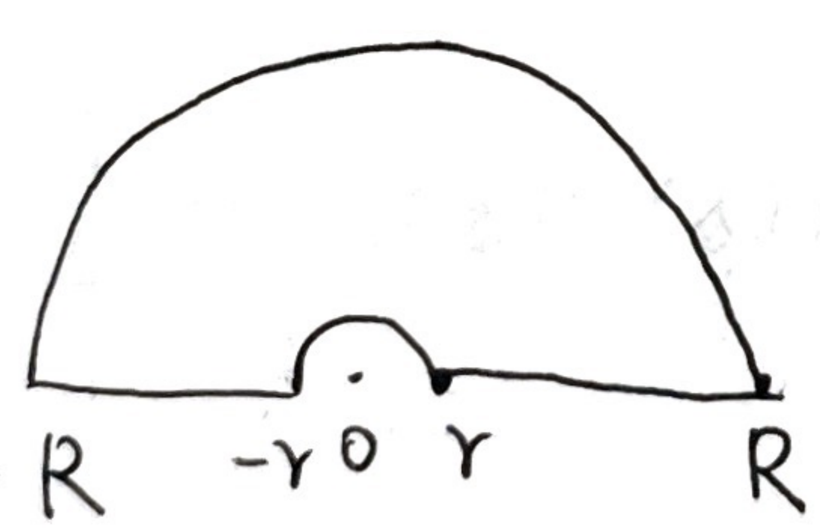
令 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2ax - 1}{x^2}\,dx \overset{u=2ax}{=\!=} 2a\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos u - 1}{u^2}\,du.$

故 $\displaystyle I = (a-b)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos u - 1}{u^2}\,du.$

到此有多种作法.

方法1. 设 $f(z) = \dfrac{e^{iz}-1}{z^2}$ 取围道:

$)\,dz)$



方法~~基本~~同~~本~~节 例5.

5.2.5

~~答案~~

最后结果 ↓

$(b-a)\cdot\pi$

方法2. ~~读~~ 用分部积分降低分母幂次

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos u - 1}{u^2}\,du = 2\int_0^\infty \frac{\cos u - 1}{u^2}\,du$$

$$= 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos u - 1}{u^2}\,du$$

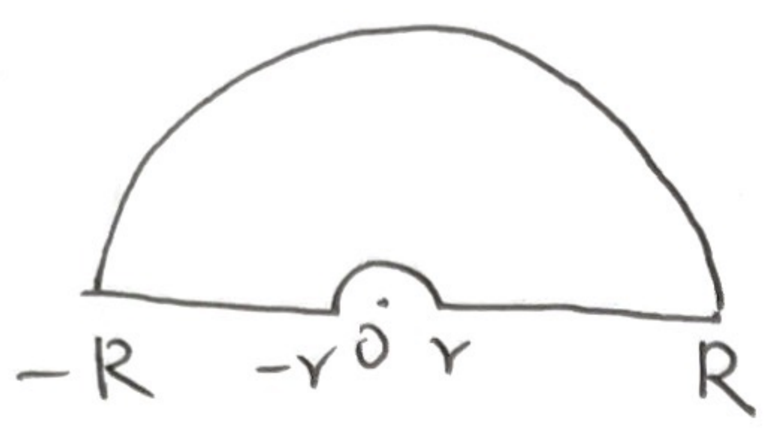
$$= -2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} \cos u - 1\; d\frac{1}{u}$$

$$\overset{\text{分部积分}}{=\!=} -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\cos u - 1}{u}\Big|_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du \right)$$

$$= -2\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\cos\varepsilon - 1}{\varepsilon} - 2\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$$

$$= 0 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du.$$

再取

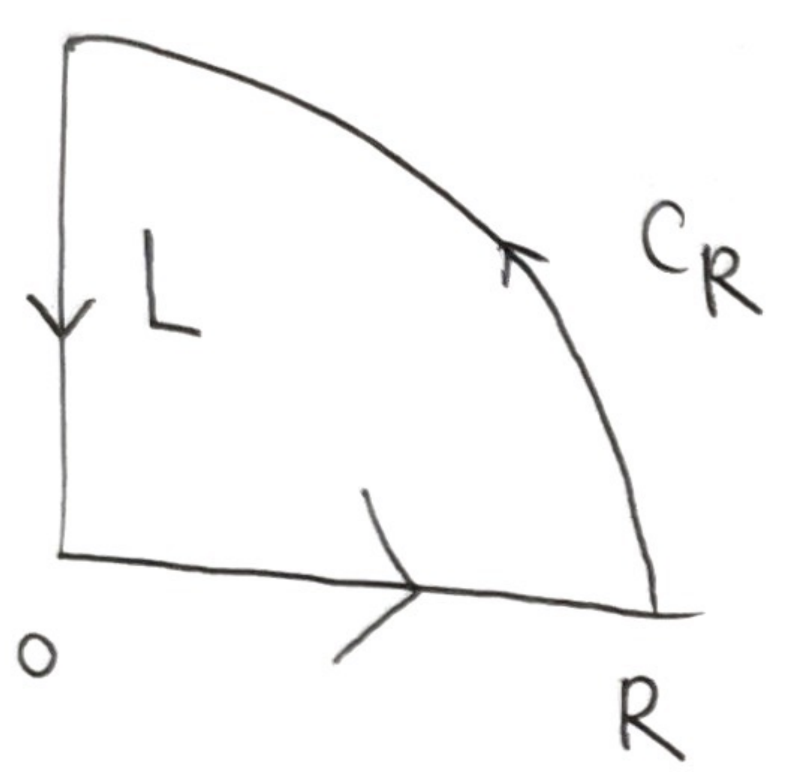


$f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ 计算

(参考课堂 $\int_0^{\infty} \dfrac{\sin x - x}{x^3}\,dx$ 的计算)

之前的考题

7. (1)



取围道如左　设 $f(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-z}}{z}$

注意 0 是 f 的可去奇点

定义 $f(0) = 1+i$　则 f 在复平面解析

由 Cauchy 定理　$\int_0^R f(x)\,dx + \int_L f(z)\,dz = -\int_{C_R} f(z)\,dz$

即两端取实部，并且在 $\int_L f(z)\,dz$ 上用 $z = ix$　$x \in (0,R)$ 参数化

有　$\mathrm{Re}\int_0^R f(x)\,dx + \mathrm{Re}\int_L f(z)\,dz$

LHS 的实部 $= \displaystyle\int_0^R \frac{\cos x - e^{-x}}{x}\,dx - \int_0^R \frac{e^{-x} - \cos x}{x}\,dx$

$= 2\displaystyle\int_0^R \frac{\cos x - e^{-x}}{x}\,dx = -\mathrm{Re}\int_{C_R} f(z)\,dz \quad \cdots\cdots (3)$

$=$ RHS 的实部

下面用类似证明Jordan引理的办法估计

$$\int_{C_R} f(z)\,dz$$

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz}_{:=I_1} - \underbrace{\int_{C_R} \frac{e^{-z}}{z}\,dz}_{:=I_2}$$

$$|I_1| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} i e^{i(R\cos\theta + iR\sin\theta)}\,d\theta \right|$$

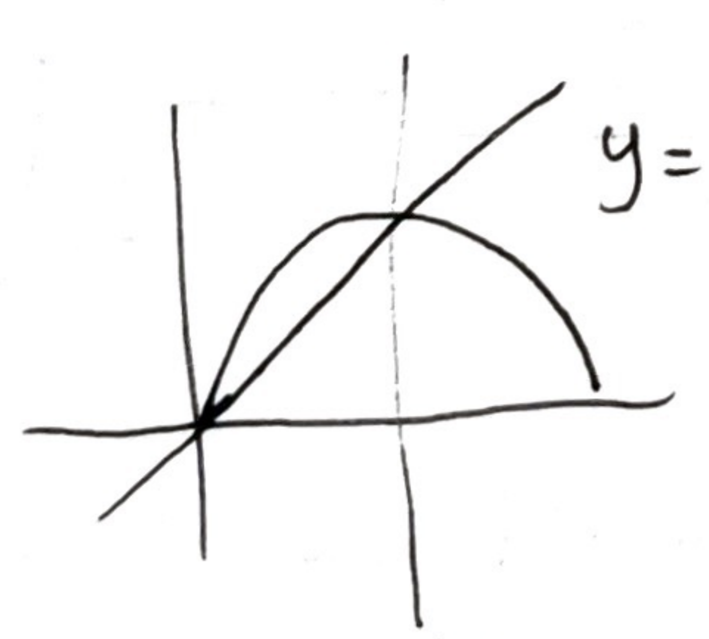
$$\leq \int_0^{\pi} \left| i e^{i(R\cos\theta + iR\sin\theta)} \right| d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\,d\theta$$

同理 $|I_2| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\cancel{\sin\theta}\cos\theta}\,d\theta$

注意到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\cos\theta}\,d\theta \xlongequal{\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta'}\,d\theta'$

故 $\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\,d\theta$

而



当 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 时

$\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\,d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\,d\theta$

$$\leq \int_0^{\infty} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2R}$$

故 $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$

对(3)两边R取极限，有

$$\lim \int_0^{\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x}\,dx = 0$$

9. (1) 设 $f(z)=2z^5-z^3+z^2-2z+8$

$g(z)=8$ （g 在 $|z|<1$ 无零点）

f g 在 $|z|=1$ 上无零点 当 $|z|=1$ 时

$$|f(z)-g(z)|=|2z^5-z^3+z^2-2z|\leq 2+1+1+2=6<8=|g(z)|$$

由 Rouché 定理 f 在 $|z|<1$ 内无零点

(3) 设 $f(z)=3z^n-e^z$ $g(z)=3z^n$ （g 在 $|z|<1$ 有 n 个零点）

当 $|z|$ 时，$|f(z)-g(z)|=|e^z|=e^{\operatorname{Re}z}\leq e^{|z|}\leq e^1=e<3=|g(z)|$

由 Rouché 定理 f 在 $|z|<1$ 内有 n 个零点

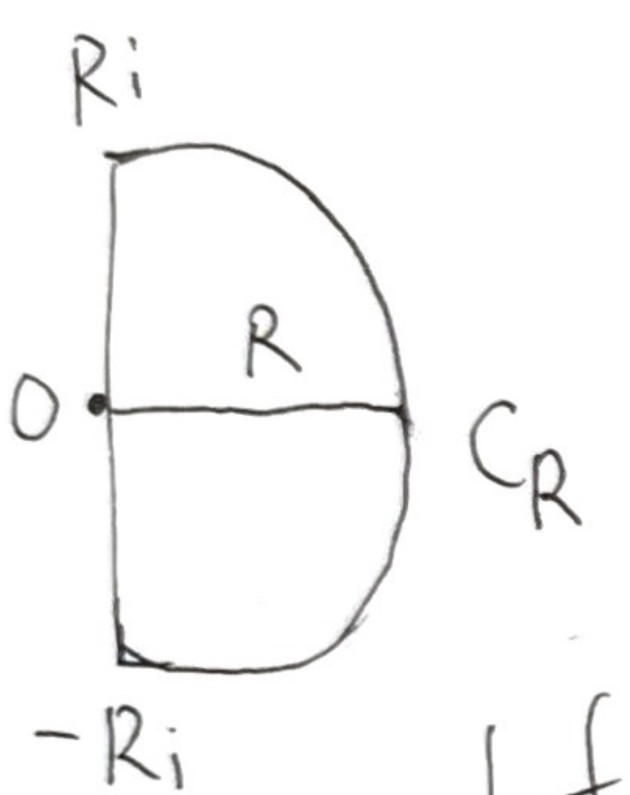
10. (2). 令 $f(z)=\lambda-z-e^{-z}$

$$g(z)=\lambda-z$$

在虚轴上 $|f(z)-g(z)|=|e^{-z}|=1$

$$|g(z)|=|\lambda-z|>\lambda$$

故 $|f(z)-g(z)|<|g(z)|$



在 C_R 上 $f(\cancel{z})$ 当 $z=Re^{i\theta}$

$-\pi\leq\theta<\pi$ 时

$$|f(z)-g(z)|=|e^{-z}|=|e^{-R\cos\theta}|<1$$

(因为 θ 在 $(-\pi,\pi)$ 上非负)

$$|g(z)|=|\lambda-z|=|z|-\lambda=R-\lambda$$

故当 $R>\lambda+1$ 时 $|f(z)-g(z)|<|g(z)|$

综上，由 Rouché 定理 在如图的半圆盘内 f 和 g 有相同的零点个数

故 $\forall R>\lambda+1$　f 在~~当~~如上半圆盘内只有 1 个零点

$\Rightarrow$　f 在右半平面只有 1 个零点

考虑　$f(x)=\lambda-x-e^{-x}$　　$x\in$ ~~$[0,+\infty)$~~ R

$f(0)=\lambda-1>0$　　$f(\lambda)=-e^{-\lambda}<0$

故由中值定理，f 在 $(0,\lambda)$ 内有零点

因为 f 在右半~~圆盘~~平面只有 1 个零点，故这一零点就是在 $(0,\lambda)$ 上的那个，是实数.

1

))

g 有相同

零点个数