离散数学（2023 秋）作业三

截止日期：11 月 8 日 11.20

1. (15pt) 证明下列群 G 是交换群

   (a) 对群 G 中任意元素 a，有 $a^2 = e$.

   (b) 对群 G 中任意元素 a, b，有 $(a * b)^2 = a^2 * b^2$.

2. (15pt) 对于任意群 G 中的元素 a，如果存在 r 使得 r 是满足 $a^r = e$ 的最小正整数，则称元素 a 的阶是 r，否则称 a 是无穷阶的。群中的两个元素称作是同阶的如果它们的阶一样（或者是相同的正整数，或者同为无穷阶），证明:

   (a) 对任意 $a \in G$，a 与它的逆 a^{-1} 同阶.

   (b) 对任意 $a, b \in G$，$a * b$ 与 $b * a$ 同阶.

3. (10pt) 对于群 G，定义

$$H = \{a \in G \mid \forall g \in G, a * g = g * a\}.$$

   H 称作 G 的中心，证明 H 是 G 的子群且 H 是交换群。

4. (20pt) 设 H, K 为群 G 的子群，

   (a) 证明 $H \cap K$ 也是 G 的子群。

   (b) 若 G 为有限群，$|G|/|H| = m$, $|G|/|K| = n$，证明 $|G|/|H \cap K| \leq mn$.

   (c) 给出反例说明 $H \cup K$ 未必是 G 的子群。

   (d) 证明 $H \cup K$ 是 G 的子群当且仅当 $H \subseteq K$ 或 $K \subseteq H$.

5. (10pt) 若群 G 的阶 $|G|$ 为素数，证明 G 是循环群。

6. (10pt) 若群 G 的阶 $|G|$ 为 pq，其中 p 和 q 均为素数且 $(p < q)$，证明 G 至多包含一个 q 阶子群。

7. (15pt) 证明任意群 G 都同构于一个置换群。

8. (10pt) 求出与 n 阶循环群同构的置换群。

9. (15pt) 考虑有限群 G 在有限集合 X 上的作用。对 $x \in X$, 令

$$O_x = \{z \in X \mid \exists g \in G \text{ s.t. } g(x) = z\}$$

为 x 所在的轨道，令

$$S_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$$

为 x 的固定子群。对 $a \in G$, 令

$$C_a = \{z \in X \mid a(z) = z\}.$$

   (a) 对任意 $x, y \in X$, 考虑它们的轨道 O_x 及，证明 $O_x = O_y$ 或 $O_x \cap O_y = \emptyset$.

   (b) 证明 $\sum_{z \in X} |S_z| = \sum_{g \in G} |C_g|$。

   (c) 令 k 表示该群作用的不同的轨道的数目，证明

$$k = \sum_{z \in X} \frac{1}{|O_z|} = \frac{\sum_{g \in G} |C_g|}{|G|}.$$