离散数学（2023 秋）作业七

截止时间：1 月 5 日 2.00

1. (10pt) 考虑 100 个顶点的完全图 K_{100}，对它的边进行红蓝染色使得每个顶点有偶数条 (可能为零) 邻边为红色，证明其中有三个顶点，他们红色邻边的数量相同。

2. (10pt) 给出 K_8 的一种红蓝染色方案使得其中既没有红色 K_4 也没有蓝色 K_3。

3. (20pt) 记 $r(a, b)$ 为最小的正整数 n（如果这样的正整数存在的话）使得对 K_n 进行红蓝染色则其中或者有红色 K_a 或者有蓝色 K_b。

   证明 $r(a, b) \leq r(a-1, b) + r(a, b-1)$，

   证明 $r(a, b) \leq \binom{a+b-2}{a-1}$。

4. (10pt) 证明任何简单无向图中总存在顶点度数相同的两个顶点。

5. (15pt) 考虑连通简单无向图 $G = (V, E)$，令 $\delta = \min_{x \in V} \deg(x)$ 为图 G 中最小的顶点度数，若 $|V| > 2\delta$，则 G 包含长至少为 2δ 的 path。

6. (15pt) 一个无向图 $G = (V, E)$ 被称作二部图（bipartite graph）是指 V 可以分成两个不相交的子集 $V_1 \cup V_2$ 使得 E 中的每条边均有一个端点属于 V_1，另一个端点属于 V_2。

   (a) 证明无向图 G 是二部图等价于 G 中不存在长度为奇数的 cycle.

   (b) 若一个二部图 G 含有奇数个顶点，则 G 中不存在 Hamilton cycle。

7. (10pt) 证明无向图 $G = (V, E)$ 有 Euler circuit 等价于 G 是连通的且 G 可以分解成若干个边不想交的 cycle 的并。

8. (10pt) 证明对于任意无向图 G，可以对其的边定向得到有向图 D，使得对于任意顶点 x，有 $|\deg_D^+(x) - \deg_D^-(x)| \leq 1$.

9. (20pt) 考虑连通有向图 $D = (V, E)$.

(a) 证明若对于任意 $x \in V$，都有 $|\deg_D^+(x) - \deg_D^-(x)| \leq 1$，且任何边 $a \in E$ 均包含在奇数个有向 cycle 中，则 D 是 Euler 图。

(b) 说明上述命题的逆命题不成立。