离散数学（2023 秋）作业四

此次作业不计分，强烈鼓励大家期中前完成!

1. 对于环 R，如果对任意 $a \in R$ 有 $a^2 = a$，证明 R 是交换环并且对任意 $a \in R$，有 $2a = 0$.

2. 设 I_1 和 I_2 是环 R 的理想，令

$$I_1 + I_2 = \{r_1 + r_2 \mid r_1 \in I_1, r_2 \in I_2\},$$

$$I_1 \cdot I_2 = \{\sum_{i=1}^{k} r_{1i} \cdot r_{2i} \mid r_{1i} \in I_1, r_{2i} \in I_2 (1 \leq i \leq k), k \in \mathbb{N}+\}.$$

   证明 $I_1 \cap I_2$, $I_1 + I_2$, $I_1 \cdot I_2$ 都是 R 的理想（注意环 R 未必交换）。

3. 考虑模 6 的剩余系所构成的环 $\langle \mathbb{Z}_6, +, \cdot \rangle$，在其中找出一个元素，它是素元但不是不可约元。

4. 证明：对于交换环 R，若 R 是整环，则 R 中素元必是不可约元。

5. 考虑环 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. 证明 3 是其中的不可约元但不是素元。

6. 设 R 为含幺交换整环，对于任意 $a \in R$ 且 $a \neq 0$，令 (a) 表示由 a 生成的理想。证明:

   (a) a 是素元当且仅当 (a) 是素理想。

   (b) 若 R 是主理想整环，则 a 是不可约元当且仅当 (a) 是极大理想。

   (c) 若 R 是主理想整环，则 R 中的极大理想必是素理想，进而 R 中的不可约元必是素元。

7. 整环 R 被称作欧式整环：如果存在一个从 R 中元素到非负整数集 $\mathbb{Z}$ 的映射 ϕ，使得

   (a) $\phi(a) = 0$ 当且仅当 $a = 0$。

(b) 对于任意 $a, b \in R$ 且 $b \neq 0$，均有 $q, r \in R$ 使得 $a = bq + r$，并且 $\phi(r) < \phi(b)$.

请给出一个欧式整环的例子，并证明欧式整环一定是主理想环。