第二章作业答案

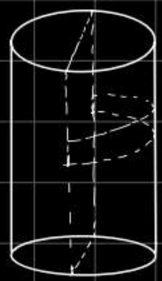
中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

01

作业答案

一无限长均匀带电的圆柱面，半径为 R，面电荷密度为 σ，假设沿轴线将其切开，求其中一半圆柱面单位长度所受的力。

1.35. 解：无限长圆柱面在空间中的电场强度为



$$E_t=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} & r=R+0\\ 0 & r=R-0\end{cases}$$

由受作用面元在自身两侧产生的电场

$$E_1=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} & r=R+0\\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} & r=R-0\end{cases}$$

电场径向分量 $E=E_t-E_1=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

在单位长度的半圆柱面上

$$F=\int E\,dq=\int_0^{\pi}\frac{\sigma^2 R}{2\varepsilon_0}\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{\sigma^2 R}{\varepsilon_0}$$ 方向沿中轴线的法线向外.

2.3 有 4 个导体板，如图所示，每个板带电量分别为 +5 C、+1 C、+1 C 和 +2 C，近似认为板为无限大，则 8 个面的电荷分别为多少？用一根导线把中间两个板接通，则 6 个面（A、B、C、F、G 和 H）的电量分别为多少？

2.3 解：对于前两块板取如图所示高斯面有

$\sigma_B + \sigma_C = 0$

同理：$\sigma_D + \sigma_E = 0$

$\sigma_F + \sigma_G = 0$

板内的电场强度为0有

$\sigma_A - \sigma_B - \sigma_C - \sigma_D - \sigma_E - \sigma_F - \sigma_G - \sigma_H = 0$

$Q_1 = (\sigma_A + \sigma_B)S = +5C$

$Q_2 = (\sigma_C + \sigma_D)S = +1C$

$Q_3 = (\sigma_E + \sigma_F)S = +1C$

$Q_4 = (\sigma_G + \sigma_H)S = +2C$

联立解得：
$$\begin{cases} Q_A = +4.5C & Q_E = -1.5C \\ Q_B = +0.5C & Q_F = +2.5C \\ Q_C = -0.5C & Q_G = -2.5C \\ Q_D = +1.5C & Q_H = +4.5C \end{cases}$$

(2) 接通导线后 $Q_D = Q_E = 0$

联立(1)中的方程
$$\begin{cases} Q_A = +4.5C & Q_E = 0 \\ Q_B = +0.5C & Q_F = +2.5C \\ Q_C = -0.5C & Q_G = -2.5C \\ Q_D = 0 & Q_H = +4.5C \end{cases}$$

2.5 两根平行的输电线半径均为 a 和 b，它们之间的距离为 d，假设 $d \gg a$，$d \gg b$，求单位长度的电容值。

2.5. 解：记输电线A的线电荷密度为 $+\lambda$，B为 $-\lambda$

两输电线之间的电场强度为 $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right)$

$$\Delta U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{d-b} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right) dr$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_a^{d-b} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right) dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{(d-a)(d-b)}{ab} \approx \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{d^2}{ab}$$

$$C = \frac{\lambda}{\Delta U} = 2\pi\varepsilon_0 \ln \frac{ab}{d^2}$$

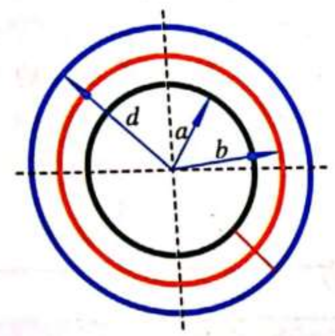
2.7 假设电容器电容为 C，充电前两个极板均带有正电量 Q，然后将其与电源电压为 U 的电池组连接充电，则最后两个极板上的电量是否等量异号？请用 Q，C 和 U 表示充电后极板的电量。

2.7. 解：充电后两极板内表面电荷量 $Q_{内}=\pm CU$

极板外表面电荷转移至电源而不带电荷

最终两极板上的电量等量异号，电量为 CU.

2.8 一个球形电容器由三个很薄的同心导体壳组成，它们的半径分别为 a，b，d。一根绝缘细导线通过中间壳层的一个小孔把内外球壳连接起来。忽略小孔的边缘效应。(1) 求此系统的电容；(2) 若在中间球壳上放置任意电量 Q，确定中间球壳内外表面上的电荷分布。



习题 2.8 图

2.8. 解：(1) 相当于两电容并联.

设内球壳电量为 Q.

$$\Delta U_{ab} = \int \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$\Delta U_{db} = \int \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_d^b -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\right)$$

$$C_{ab} = 4\pi\varepsilon_0\cdot\frac{ab}{b-a} \qquad C_{db} = 4\pi\varepsilon_0\cdot\frac{bd}{d-b}$$

$$C = C_{ab}+C_{db} = 4\pi\varepsilon_0 b\left(\frac{a}{b-a}+\frac{d}{d-b}\right)$$

(2) $$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_{ab}}{C_{db}} = \frac{d-b}{b-a}\cdot\frac{a}{d}$$

$$Q_1+Q_2 = Q$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = \dfrac{a(d-b)}{b(d-a)}Q \\ Q_2 = \dfrac{d(b-a)}{b(d-a)}Q \end{cases}$$

2.9 两块长与宽均为 a 和 b 的导体平板在制成平行板电容器时稍有偏斜，使两板间距一端为 d，另一端为 $d+h$，且 $h \ll d$，求该电容器的电容。

2.9. 解：将两极板划分为无数长为 a，宽为 dx 的细微长条.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{dQ}{\varepsilon_0 a dx}$$

$$U = Ed = \frac{dQ}{\varepsilon_0 a dx} \cdot \left(d + x \cdot \frac{h}{b}\right)$$

$$dC = \frac{dQ}{U} = \frac{\varepsilon_0 a dx}{d + x \cdot \frac{h}{b}}$$

$$C = \int_0^b dC = \int_0^b \frac{\varepsilon_0 a dx}{d + x \cdot \frac{h}{b}} = \frac{\varepsilon_0 ab}{h} \ln\left(\frac{h+d}{d}\right)$$

2.15 水分子是有极分子，一个水分子的电偶极矩为 0.61×10^{-30} C·m，若所有的水分子电矩都朝同一方向。(1) 试估算水的极化强度；(2) 直径为 1 mm 的水滴的电偶极矩有多大？距水 10 cm 处的电场强度有多大？

4.计算：

(1) $\vec{P} = \frac{\Sigma \vec{p}}{\Delta V} = \frac{3.35 \times 10^{22} \times 0.61 \times 10^{-30} \times 10^{6}}{1} = 2.04 \times 10^{-2}\ C/m^2$

(2) $\vec{p} = \vec{P} V = 1.07 \times 10^{-11}\ C \cdot m$

$E_r = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cos\theta = 192 \cos\theta\ V/m$ $\quad E_\theta = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \sin\theta = 96 \sin\theta\ V/m$

(电偶极子场强要记)

$E_\varphi = 0$；

.16 平行板电容器两极板相距 3.0 cm，其间放有两层相对介电常量分别为 $\varepsilon_{r1}=2$ 和 $\varepsilon_{r2}=3$ 的介质，位置与厚度如图所示。已知极板上面电荷密度为 σ，略去边缘效应，求：(1) 极板间各处 P、E 和 D 的值；(2) 极板间各处的电势（设 $V_A=0$）；(3) 3 个介质分界面的极化电荷面密度。

(1) $D=\varepsilon_1 E_1=\varepsilon_2 E_2$, $\varepsilon_1=\varepsilon_{r_1}\varepsilon_0$ $\varepsilon_2=\varepsilon_{r_2}\varepsilon_0$

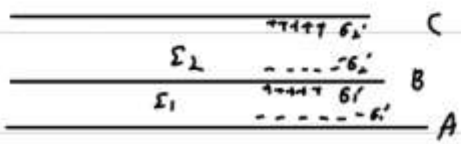
$D=\sigma \Rightarrow$ $E_1=\frac{\sigma}{\varepsilon_1}$ $E_2=\frac{\sigma}{\varepsilon_2}$

$P_1=D-\varepsilon_0 E_1=\frac{1}{2}\sigma$ $P_2=D-\varepsilon_0 E_2=\frac{2}{3}\sigma$

(2) $0<l\le 1cm$, $U(l)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}l$

$1cm<l\le 3cm$, $U(l)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot 0.01+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(l-0.01)$

(3)



如图, $\sigma_1'=\frac{\sigma}{2}$, $\sigma_2'=\frac{2}{3}\sigma$

故 $\sigma_A'=-\frac{\sigma}{2}$, $\sigma_B'=\frac{\sigma}{2}-\frac{2}{3}\sigma=-\frac{1}{6}\sigma$

$\sigma_C'=\frac{2}{3}\sigma$

17. 一个半径为 a 的导体球面套有一层厚度为 $b-a$ 的均匀电介质，电介质的介电常数为 ε，求空间的电势分布。

2.17. 解：当 $r>b$ 时，由高斯定理

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$U=\int_r^{+\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^{+\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

当 $a<r<b$ 时，由高斯定理

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

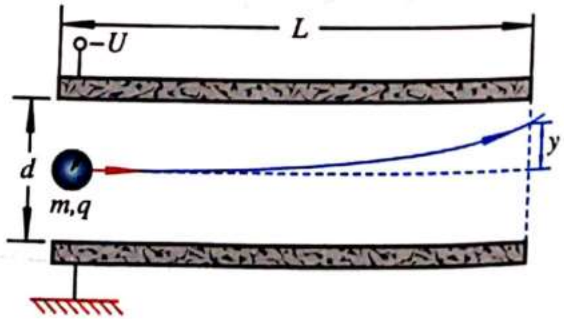
$$U=\int_r^{+\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^{b}\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}dr+\int_b^{+\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}+\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)$$

当 $0<r<a$ 时，由高斯定理

$$E=0$$

$$U=U_a\quad\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b}+\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

2.19 赫兹型喷墨打印机是利用喷流束上施加强电场时产生的静电雾化现象而制成的。喷射的角度随电压的变化而变化。如图所示，假设墨滴的半径为 $r=25\ \mu m$，电量为 $q=10^{-13}$ C，从喷嘴飞出的初速度为 $u_0=10\ m\cdot s^{-1}$，加速电压为 $U=2$ kV，极板的间距为 $d=5$ mm，长 $L=1$ cm，求墨滴飞行距离 L 后的偏离 y 和偏向角 θ。



习题 2.19 图

2.19. 解: $y=\frac{1}{2}at^2$

$a=\frac{Eq}{m}=\frac{Uq}{md}=\frac{3Uq}{4\pi r^3 d}$

$t=\frac{L}{u_0}$

$\Rightarrow y=\frac{3UqL^2}{8\pi r^3 d u_0^2}\approx 0.3056\,mm$

$\tan\theta=\frac{y}{L}\approx 3.498°$

2.20 球形电容器由半径为 R_1 的导体和与它同心的导体球壳构成，壳的内半径为 R_2，其间有两层均匀介质，分界面的半径为 a，相对介电常量分别为 ε_1 和 ε_2。(1) 求电容 C；(2) 当内球带电荷 $-Q$ 时，求介质表面上极化电荷的面密度 σ'。

(1) $E_1=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r^2}$ $\qquad U_1=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{a}\right)$ $\qquad U_2=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{R_2}\right)$

$$U=U_1+U_2,\quad C=\frac{Q}{U}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{R_2}\right)}$$

(2) 在 R_1 处，$\vec{P_1}=\varepsilon_0(\varepsilon_1-1)E=\dfrac{-Q}{4\pi R^2}\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_1}\right)\cdot\hat{s}$ $\quad \vec{P_2}=\dfrac{-Q}{4\pi R^2}\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_2}\right)\cdot\hat{s}$

此处 $\hat{s}$ 指向外法向的单位矢量

$$\sigma_{R_1}'=\vec{P_1}\cdot-\hat{s}=\frac{Q}{4\pi R_1^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)$$

$$\sigma_a'=\vec{p_1}-\vec{p_2}=\frac{-Q}{4\pi a^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)$$

$$\sigma_{R_2}'=\vec{P_2}\cdot\hat{s}=\frac{-Q}{4\pi R_2^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)$$

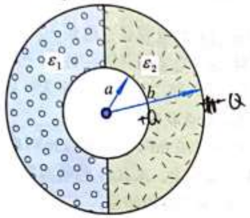
极化电荷分布如图，

在内表面上，法向矢量向内

在外表面上，法向矢量向外、

这道题很多同学写错了方向，务必要明白极化电荷何时取正何时取负（作业上并未扣分，请同学们自行核查）

2.21 如图所示，在内外半径为 a、b 的球形电容器的两个极板之间的区域中，一半充满绝对介电常量为 ε_1、另一半充满绝对介电常量为 ε_2 的线性均匀介质。内外极板自由电荷带电量分别为 $+Q$ 和 $-Q$，求：(1) 两种介质中的电场强度；(2) 系统的电容。



习题 2.21 图

2.21. 解：(1) 两种介质中的电压相同，两电场强度相同.

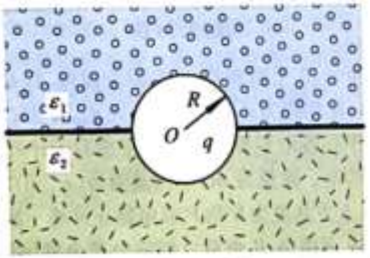
由高斯定理： $\varepsilon_1 E\cdot 2\pi r^2 + \varepsilon_2 E\cdot 2\pi r^2 = Q$

$$E = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}$$

(2) $$U = \int_a^b E\cdot dr = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)ab}{b-a}$$

2.22 如图所示，一导体球外充满两半无限电介质，介电常量分别为 ε_1 和 ε_2，介质界面为通过球心的无限平面。设导体球半径为 R，总电荷为 q，求空间电场分布和导体球表面的自由面电荷分布。



习题 2.22 图

2.22. 解：由于球体为等势体，由高斯定理

$$\varepsilon_1 E\cdot 2\pi r^2 + \varepsilon_2 E\cdot 2\pi r^2 = q$$

$$E = \frac{q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

$$\sigma_1 = D_1 = \varepsilon_1 \vec{E}$$

$$\sigma_2 = D_2 = \varepsilon_2 \vec{E}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

球体与 ε_1 介质接触的半球面电荷 $Q_1 = \dfrac{\varepsilon_1 q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$

另一半球面电荷 $Q_2 = \dfrac{\varepsilon_2 q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$

23 半径为 R 的金属球，外面包有一层相对介电常数为 $\varepsilon_r=2$ 的均匀电解质材料，内外半径分别为 $R_1=R$，$R_2=2R$，介质球内均匀分布着电量为 q_0 的自由电荷，金属球接地，求介质外表面的电势。

2.23. 解：设金属球带电荷为Q

球体外的电场分布为：$E=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

计算得介电球体外表面电势为 $\varphi=\frac{Q+q}{8\pi\varepsilon_0 R}$

对于介电球内由高斯定理：$D\cdot 4\pi r^2=Q+\frac{r^3-R^3}{7R^3}\cdot q$ $\quad E=\frac{D}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$

由金属球外表面电势为0计算得 $\varphi=-\int_R^{2R}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{Q+q}{8\pi\varepsilon_0 R}$

$\Rightarrow Q=-\frac{16}{21}q$

有 $\varphi=\frac{5q}{168\pi\varepsilon_0 R}$

2.26 一同心球形电容器由两个同心薄球壳构成，外球壳半径为 5 cm，内球壳半径可以任意选择，两球壳之间充满各向同性的均匀介质，电介质的击穿强度为 $2.0\times10^7\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$，求该电容器所能承受的最大电压。

2.26. 解：由高斯定理，介质中的电场强度

$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$

$U=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}dr$

$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$

$\frac{Q}{4\pi\varepsilon}=E\cdot r^2$ $\quad$ E最大值在R_1处取值，$E_{max}\cdot R_1^2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}$

$\Rightarrow U=E\cdot R_1^2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=-\frac{E}{R_2}R_1^2+ER_1$

当 $R_1=\frac{R_2}{2}$ 时，$U_{max}=\frac{1}{4}E_{max}\cdot R_2=2.5\times10^5\,V$

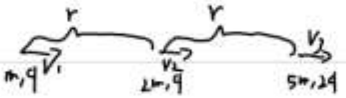
2.28 真空中电荷 q 均匀分布在半径为 a 的球内，假设球的相对介电常数为 ε_r，求电场的储能。

$$E=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r>a)\\[2ex] \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r a^3} & (r<a)\end{cases}$$

$$D=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi r^2} & (r>a)\\[2ex] \dfrac{qr}{4\pi a^3} & (r<a)\end{cases}$$

$$W=\frac{1}{2}\int \vec{D}\cdot\vec{E}=\frac{1}{2}\int_0^a \vec{D}\cdot\vec{E}\,dV+\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\vec{D}\cdot\vec{E}\,dV$$

$$=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(1+\frac{1}{5\varepsilon_r}\right)$$



$$m\frac{dv_1}{dt}=\frac{k\cdot q^2}{r_1}+\frac{2kq^2}{r_2}=kq^2($$

$$\begin{cases}v_1^2+2v_2^2+5v_3^2=\dfrac{2q^2}{\pi\varepsilon_0 r m}\\ v_1+2v_2+5v_3=0\end{cases}$$

$v_3>v_2>v_1$

$r_1=\int_0^t (v_1-v_2)dt+r$

$r_2=\int_0^t (v_1-v_3)dt+2r$

初始状态，$F_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q^2}{4r^2}+\frac{q^2}{r^2}\right)$

$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3q^2}{2r^2}\right)$ 向左

$F_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{r^2}\right)$ 向左

$F_3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{5q^2}{2r^2}\right)$ 向右

$F_1:F_2:F_3=3:2:-5$ （向左为正）

$a_1:a_2:a_3=3:1:-1$

$\Delta v_1:\Delta v_2:\Delta v_3=3:1:-1$，故 $\Delta x_{12}=r+(\Delta v_1-\Delta v_2)\Delta t=\Delta x_{23}$

在 Δt 之后，1和2之间距离 = 2和3之间距离

$F_1:F_2:F_3=3:2:-5$

依次类推，此后 $\forall$ 时刻，$F_1:F_2:F_3=3:2:-5$

$v_1:v_2:v_3=3:1:-1$

$P_1:P_2:P_3=3:2:-5$

$E_{k1}:E_{k2}:E_{k3}=9:2:5$

2.31 半径为 R 的一个雨滴（假设雨滴为导体），带有电量 Q，今将它打破成两个完全相同的雨滴，并分开到很远，静电能改变多少？如果分成 n 个完全相同的小雨滴，最终分散到无限远处，则静电能又改变了多少？

2.31

$W_1 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$ n个时，$r = \frac{R}{\sqrt[3]{n}}$

$W_2 = \frac{1}{2}\sum q_i U_i = \frac{n}{2}\cdot\frac{Q}{n}\cdot\frac{\frac{Q}{n}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} = \frac{Q^2\cdot\sqrt[3]{n}}{8\pi\varepsilon_0 nR}$

$\Delta W = \left(\frac{\sqrt[3]{n}}{n} - 1\right)\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

（水是导体，导体电荷均匀分布在表面）

2.36 已知在内半径为 R_1、外半径为 R_2 的接地金属球壳内部充满着均匀空间电荷密度 ρ。求：(1) 系统的静电能；(2) 球心处的电势。

2.36

$E_r = \frac{r}{3\varepsilon_0}\rho$

$U(r) = \int_r^{R_1} E\,dr = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R_1^2 - r^2)$

$W_e = \frac{1}{2}\iiint q_i U_i = \frac{1}{2}\int_0^{R_1} U(r)\rho\cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\rho R_1^5}{45\varepsilon_0}$

2.38 一个半径为 a 的带电球，其体电荷密度在球内随离球心距离 r 的变化关系为 $\rho = Ar^{1/2}$，式中 A 为常数。求：(1) 球内~~和球外各处的电场~~；(2) 球内和球外各处的电势；(3) 该球的自能。

2.38 解：(1) 在 $0<r<a$ 时，取球形高斯面

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\Sigma q$$

$$\Sigma q = \int_0^r \rho\cdot 4\pi r^2 dr = \frac{8\pi A}{7}\cdot r^{\frac{7}{2}}$$

$$E_1 = \frac{2Ar^{\frac{3}{2}}}{7\varepsilon_0}$$

在 $r>a$ 时，取高斯面

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\Sigma q$$

$$\Sigma q = \int_0^a \rho\cdot 4\pi r^2 dr = \frac{8\pi A a^{\frac{7}{2}}}{7}$$

$$E_2 = \frac{2Aa^{\frac{7}{2}}}{7\varepsilon_0 r^2}$$

(2) 在 $r>a$ 时，$U = \int_r^{+\infty} E_2\cdot dr = \frac{2Aa^{\frac{7}{2}}}{7\varepsilon_0 r}$

在 $0<r<a$ 时，$U = \int_r^{+\infty} E dr = \int_r^a E_1 dr + \int_a^{+\infty}$

$$= \frac{2A}{5\varepsilon_0}a^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{35}$$

(3) $W = \frac{1}{2}\iiint_V U(\vec{r})\cdot\rho(\vec{r})\cdot dV$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a \left(\frac{2A}{5\varepsilon_0}a^{\frac{5}{2}} - \frac{4A}{35\varepsilon_0}r^{\frac{5}{2}}\right)\cdot Ar^{\frac{1}{2}}\cdot 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{4\pi A^2}{21\varepsilon_0}a^6$$

(4) 取 $U_1 = \frac{2A}{5\varepsilon_0}a^{\frac{5}{2}}$

$$Q = \frac{8\pi A a^{\frac{7}{2}}}{7}$$

$$C_1 = \frac{Q}{U} = \frac{20\pi\varepsilon_0 a}{7}$$

$$C_{平} = \frac{C_1+C_2}{2} = \frac{24\pi\varepsilon_0 a}{7}$$

取 $U_2 = \frac{2A}{7\varepsilon_0}a^{\frac{5}{2}}$

$$Q = \frac{8\pi A a^{\frac{7}{2}}}{7}$$

$$C_2 = 4\pi\varepsilon_0 a$$

谢谢！