



## 第二章 静电场中的导体和电介质

---

§ 2.1 物质的电性质

§ 2.2 静电场中的导体

§ 2.3 电容与电容器

§ 2.4 电介质

§ 2.5 极化强度矢量 $\mathbf{P}$

§ 2.6 电介质中静电场的基本定理

§ 2.7 静电场的能量

# 静电场与物质的相互作用

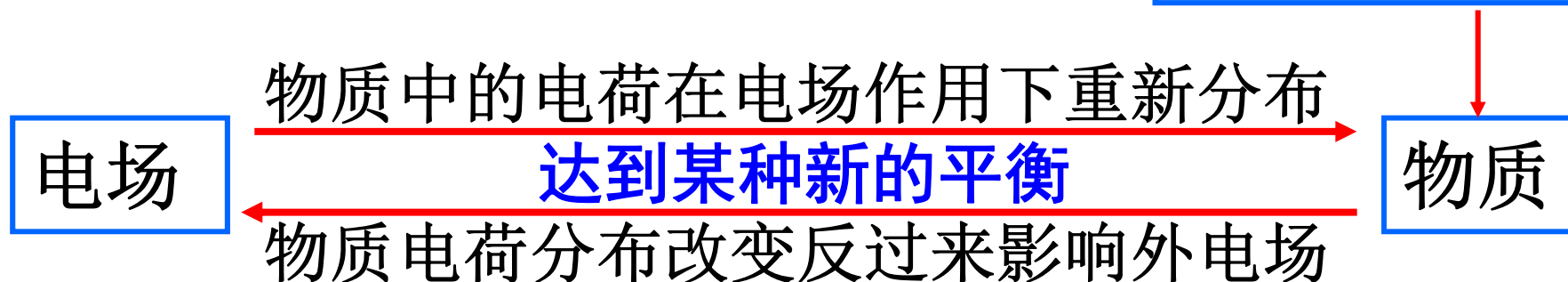
## ■ 物质存在形式:

- 由基本粒子乃至原子、分子构成的实体存在形式
- 以场的形式存在，如电场，具有能量，能量交换
- 物质的**实体**与**场**是物质存在的**两种基本形式**

■ 物质: **复杂的电荷系统**，由原子/分子/离子构成

## ■ 电场与物质**相互作用的过程**:

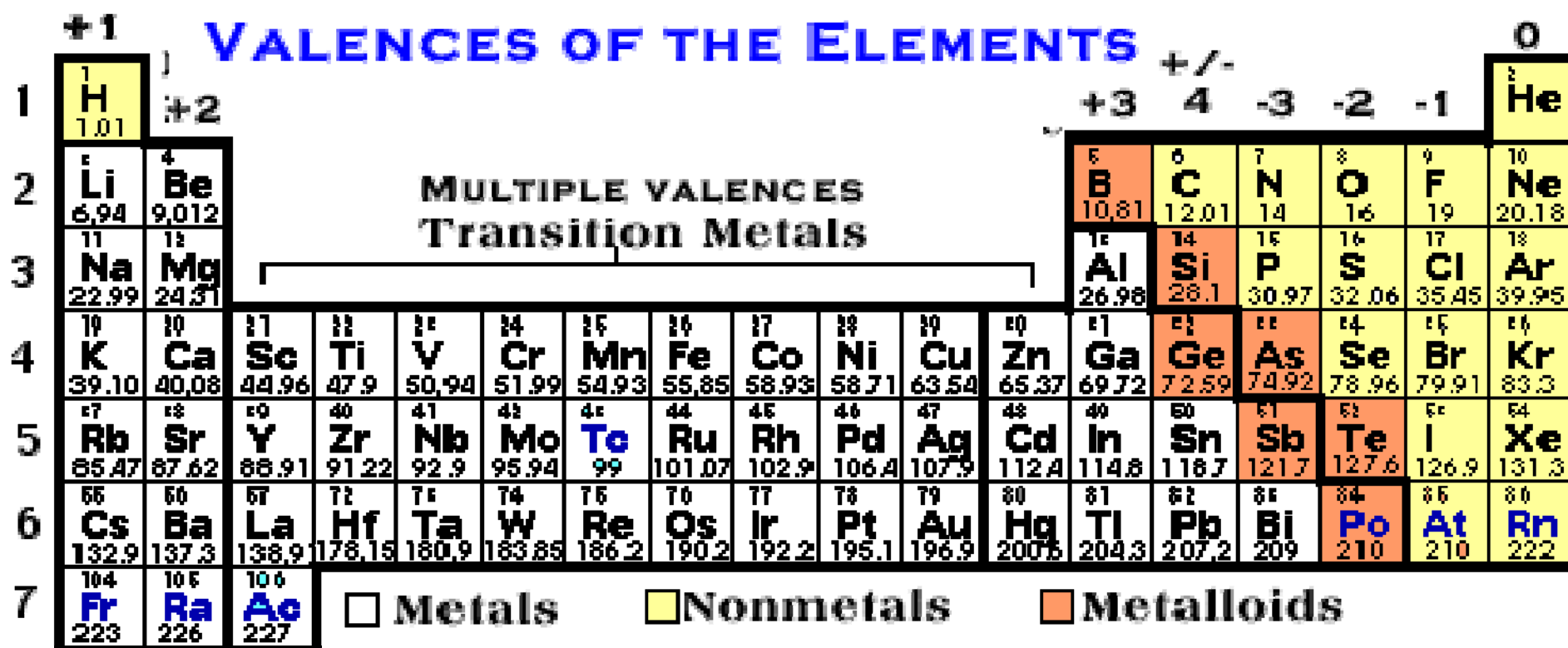
电性质差异



## § 2.1 物质的电性质

### 1、物质的电性质

- 各种物质电性质不同
- 早在1729年，英国人格雷发现金属和丝绸的电性质不同
  - 金属能很快把电荷转移到别的地方，使自己不带电
  - 丝绸不能转移电荷，但是可以带电
- 不同物质中，或者同一种物质在不同环境下，电子的状态不一样，导致自由电荷的转移能力差别很大，物质的导电性能迥异。

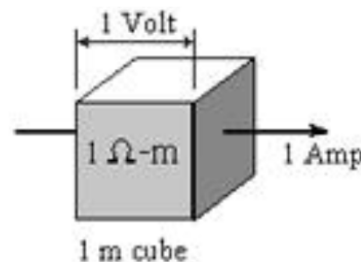


# 电阻率

电阻:  $R = \frac{U}{I}$

单位:  $\Omega$

电阻率:  $\rho = \frac{RS}{l}$



单位:  $\Omega\text{m}$

- 电阻率与物质的性质有关，与尺寸无关。
- 电阻率反映在一定温度压强条件下物质的导电能力，是物质的原子结构决定的属性。
- 根据电阻率，人们把材料分为导体、半导体和绝缘体。



# 导体

---

- 转移和传导电荷能力很强的材料，或者说电荷很容易在其中移动的物质。
- 电阻率在 $10^{-8}$ - $10^{-6} \Omega\text{m}$ 之间
- 常见导体
  - 固体：金属、合金、石墨、人体、地等
  - 液态：电解液等
  - 气态：各种电离气体
- 导体中存在着大量的自由电子，数密度约为 $n_e \sim 10^{22}/\text{cm}^3$

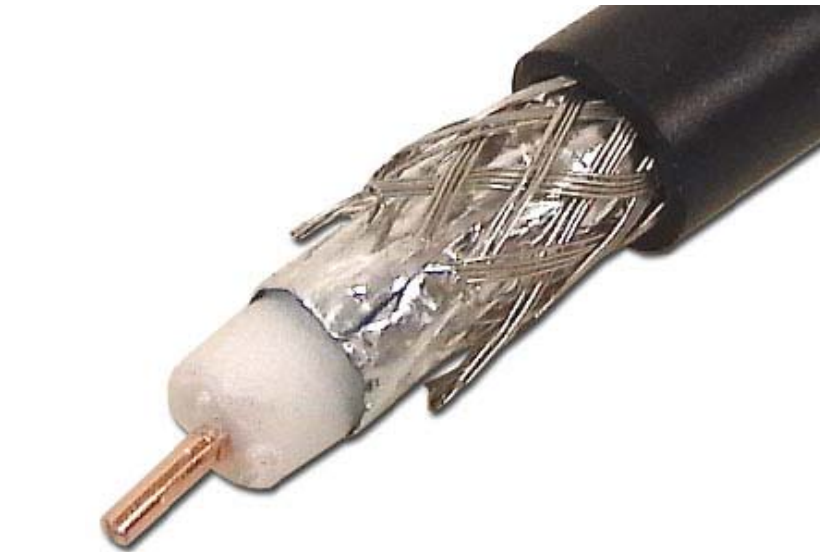


# 绝缘体

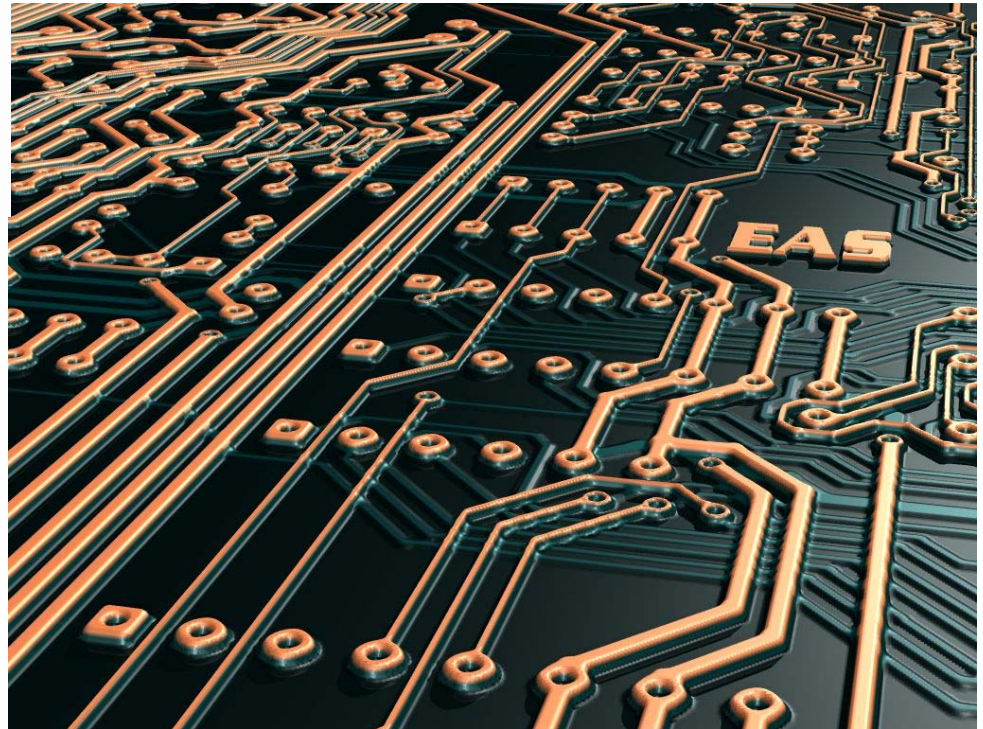
---

- 转移和传导电荷能力很差的材料，或者说电荷在其中很难移动的物质。
- 电阻率在 $10^6$ - $10^{18} \Omega\text{m}$ 之间
- 常见绝缘体
  - 固体：玻璃、橡胶、塑料、瓷器、云母、纸等
  - 液态：如各种油
  - 气态：未电离的各种气体

电缆



印刷线路板



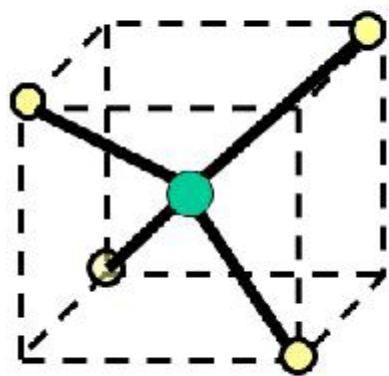




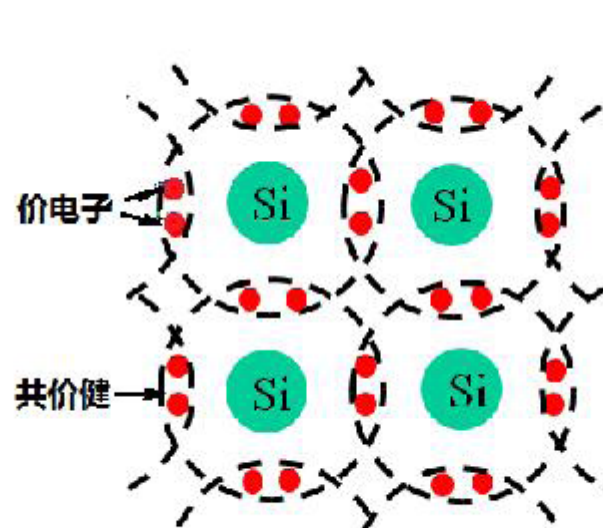
# 半导体

---

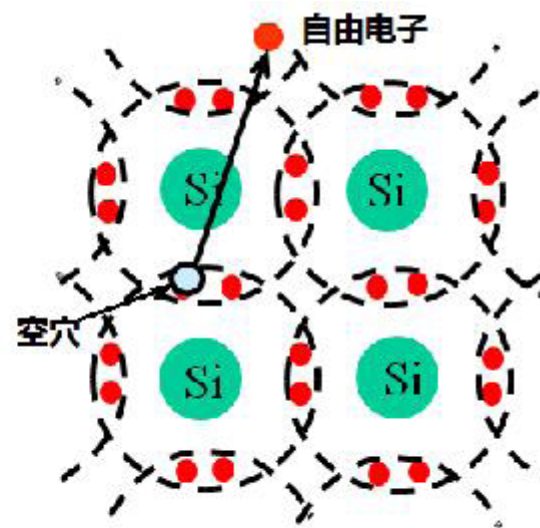
- 半导体材料的导电性能介于导体与绝缘体之间。
- 电阻率在 $10^{-6}$ - $10^6 \Omega\text{m}$ 之间
- 常见半导体有
  - Si, Ge
  - GaP, InSb, InAs, GaSb, GaAs, GaN, SiC.



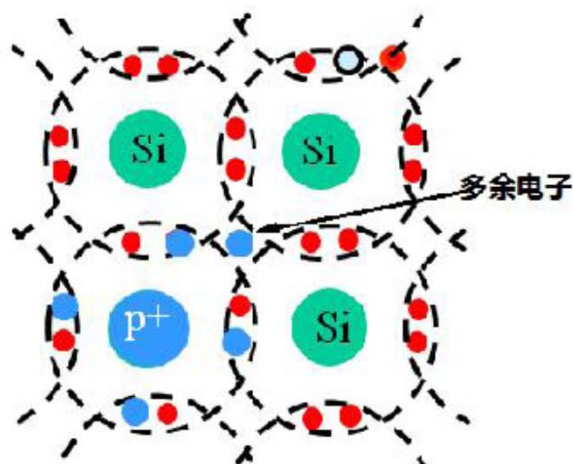
(a) 硅单晶结构



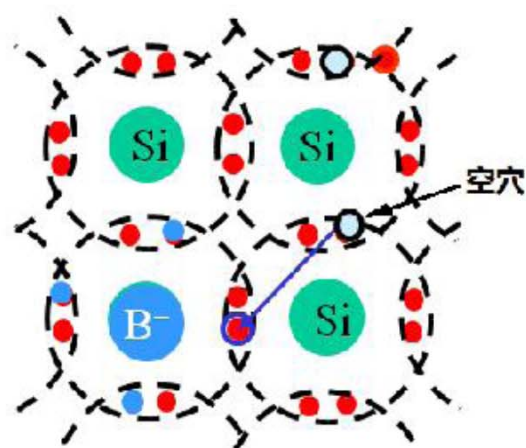
(b) 共价键结构



(c) 本征激发

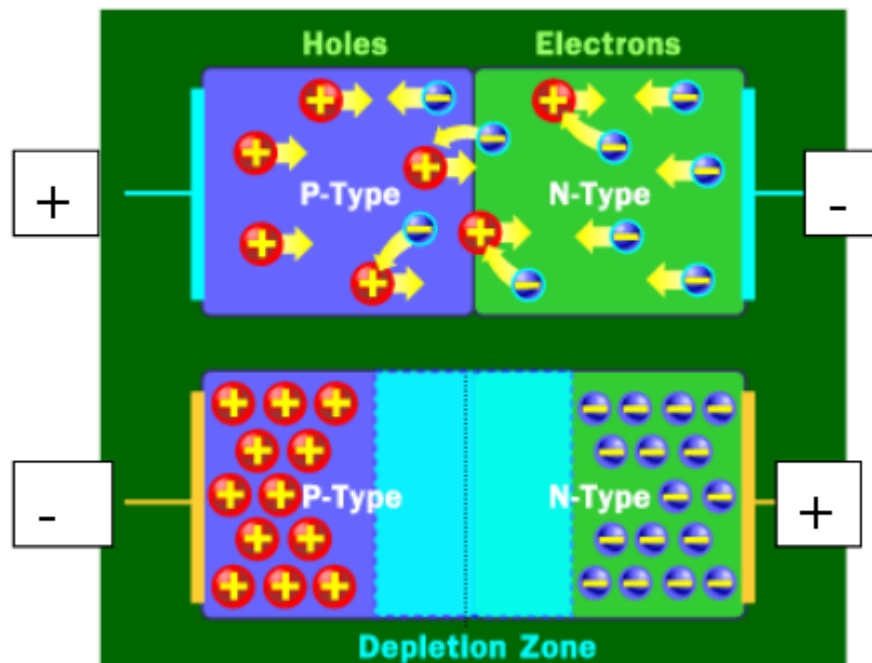
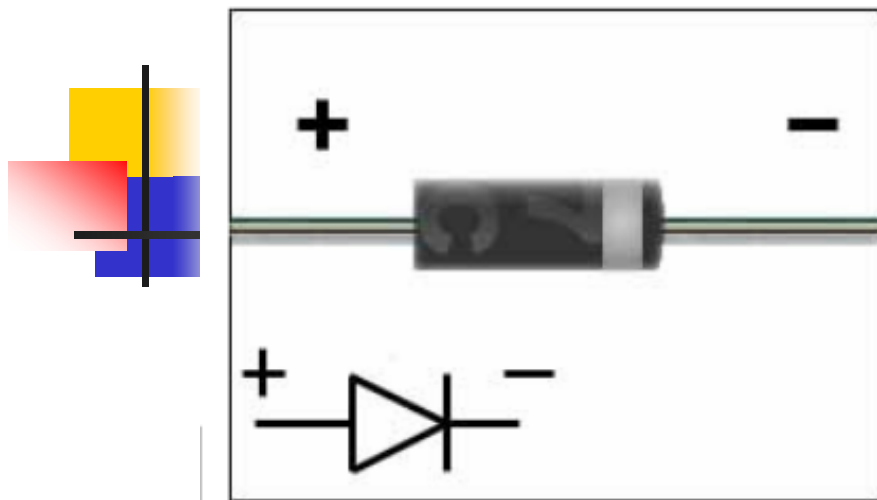


(a) 掺入磷后，磷多余的电子贡献为自由电子

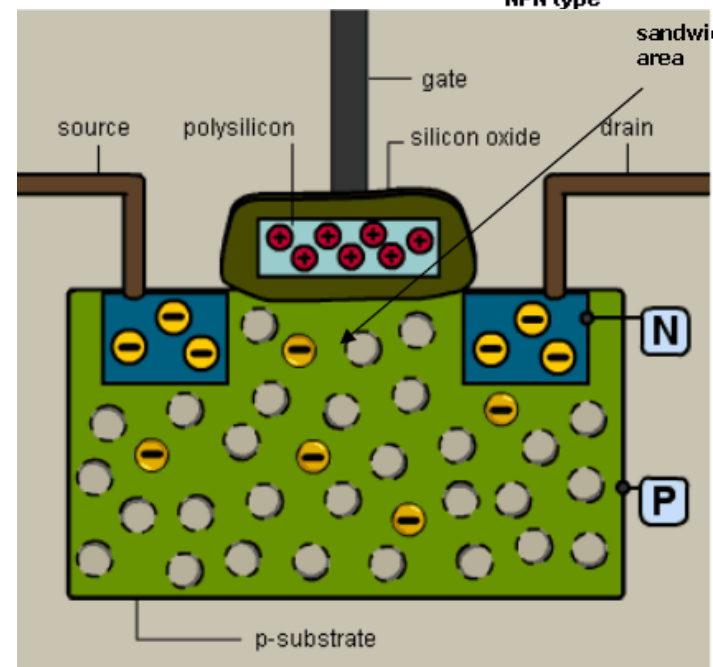
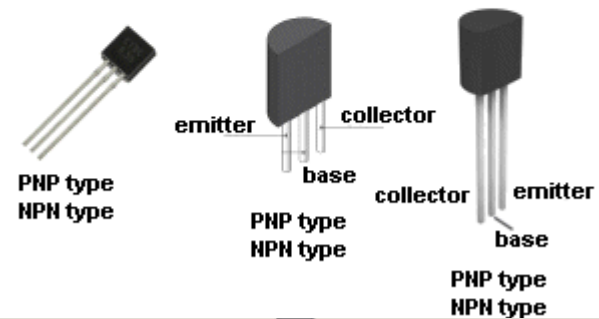
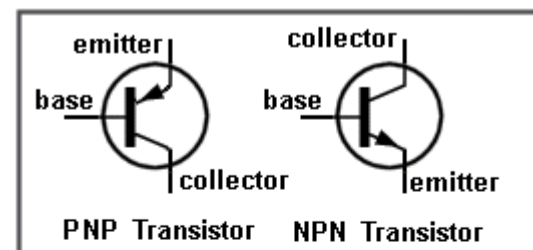


(b) 掺入硼后，硼接收一个电子成为离子，空穴增多。

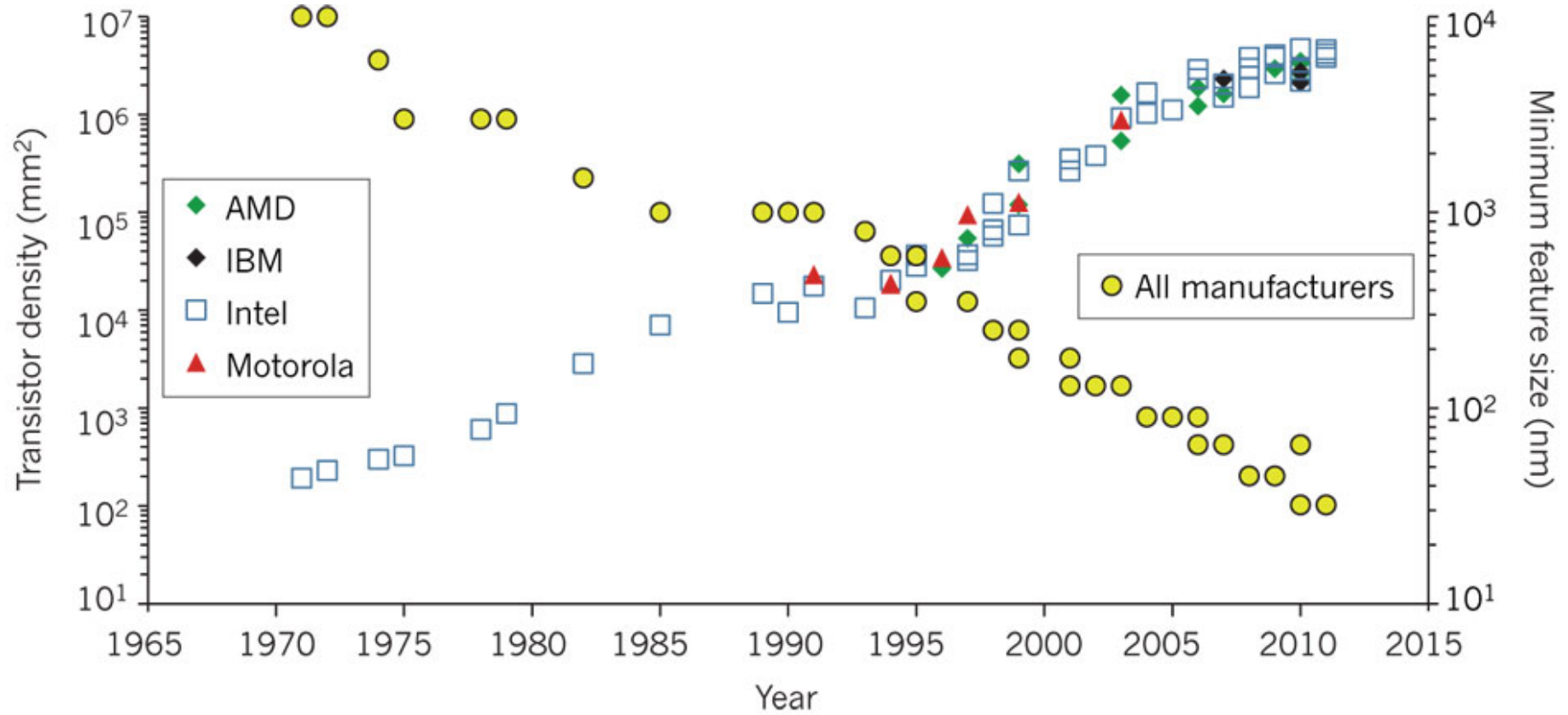
## 二极管



## 晶体管



## 晶体管的发展

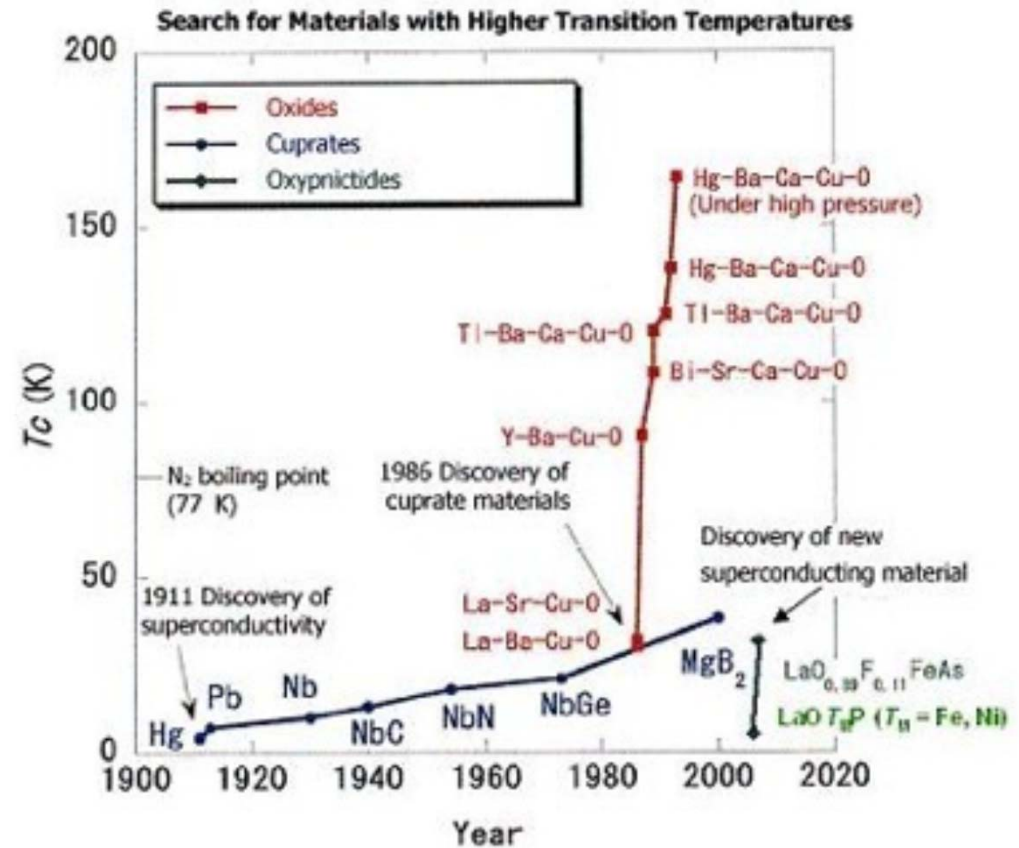
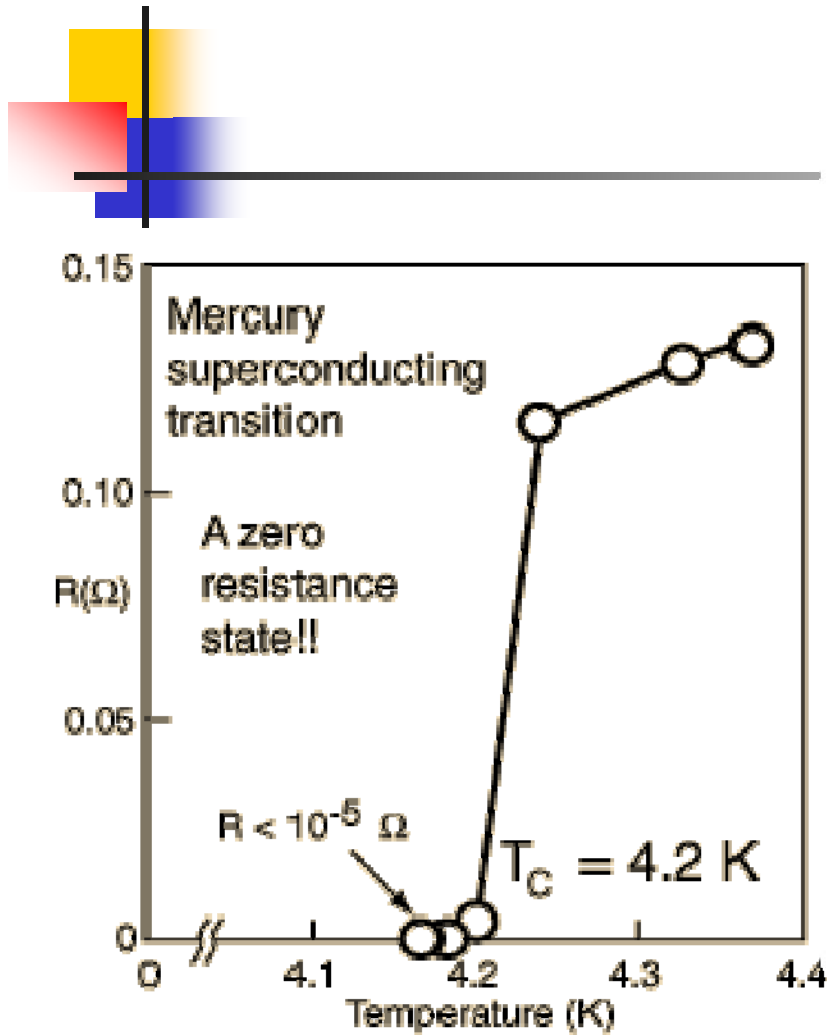




# 超导体

---

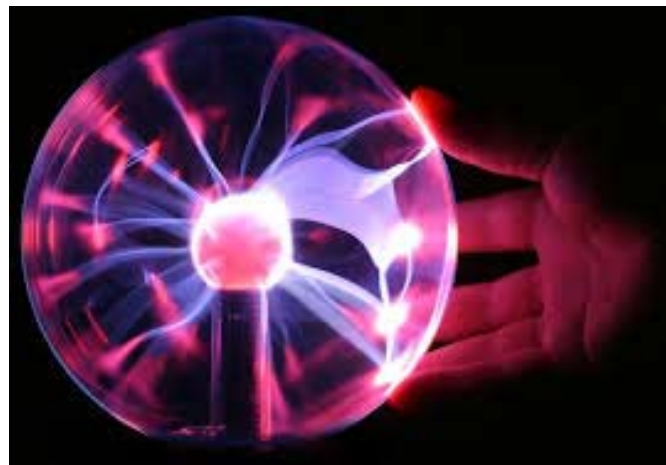
- 某些金属或合金的温度降到接近绝对零度某一温度 $T_c$ 时，其电阻突然变为零或接近于零，这种现象称为超导现象。 $T_c$ 称为超导体的临界温度。
- 现代超导重力仪的观测表明，超导态物体的电阻率必定小于 $10^{-28} \Omega \cdot m$ ，远远小于正常金属迄今所能达到的最低电阻率 $10^{-8} \Omega \cdot m$ ，因此，可以认为超导态的电阻率确实为零。
- 导电机制：库伯对



2008年中国科学技术大学物理学院  
陈仙辉教授发现铁基新超导体。

# 等离子体

- 等离子体是部分或完全电离的气体，由大量自由电子和正离子以及中性原子、分子组成。
- 物理性质主要由电磁相互作用决定。
- 等离子体在宏观上是近似电中性的，即从宏观上说，所含的正电荷与负电荷几乎处处相等。
- 物质的第四态。





# 载流子——可以自由移动的带电物质微粒

物质导电取决于有载流子！

- 金属导体：原子最外层的价电子，自由电子
- 电解质：载流子是正、负离子
- 电离气体：载流子是电子和正、负离子
- 绝缘材料：微量自由电子，本征离子，杂质离子
- 半导体：载流子为
  - n型半导体中的自由电子
  - p型半导体中的空穴
- 超导体：载流子为电子对，又称库珀对



## 2、电场对电荷系统的作用

■ 电场对物质作用  电场对物质内部电荷的作用

■ 外场对物质作用力：

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (2.1.1)$$

$$\mathbf{F} = \iiint_V \rho_e \mathbf{E} dV, \mathbf{F} = \iint_S \sigma_e \mathbf{E} dS, \mathbf{F} = \int_L \lambda_e \mathbf{E} dl. \quad (2.1.2)$$

■ 电场 $\mathbf{E}$ 为外场，即施力带电体产生的电场，不包括受力带电体的电场；

■ 受力带电体已经不限于试探电荷，所以受力带电体对施力电荷的分布，即对施力带电体的电场存在影响；

■  $\mathbf{E}$ 是经过受力带电体影响之后的施力带电体的电场。

## ■ $E = E_t - E_1$ (2.1.3)

- $E_t$  施力和受力带电体的总电场
- $E_1$  为受力带电体产生的电场
- $E$  为施力带电体的电场，即外场

## ■ 讨论

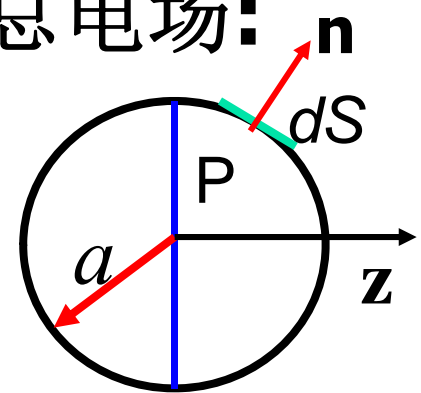
- 实际问题中， $E_t$ 常易于求得，只要求得 $E_1$ ，可得 $E$ 。对体电荷和面电荷受力带电体这两种情况，我们只要从中分别减去体电荷元和面电荷元的贡献即可。
- 这样做的后果是将受力带电体各部分的内力也计入到总力 $F$ 之中。幸运的是，由于内力相互抵消。

- 体电荷:  $E_1(r) = \rho_e r / (3\varepsilon_0)$ ,  $r \rightarrow 0 \Rightarrow E_1 \rightarrow 0$
- 面电荷:  $E_1 = \pm \sigma_e / (2\varepsilon_0)$  (见下面例**2.1**)
- 线电荷:  $E_1 = \lambda_e / 2\pi\varepsilon_0 r$ ,  $r \rightarrow 0 \Rightarrow E_1 \rightarrow \infty$
  
- 对受力带电体的情况:  $E = E_t$  ;
- 受力带电面的:  $E = E_t - E_1$  ;
- 对线电荷: 不能利用  $E = E_t - E_1$

**[例2.1]** 将一带电量为 $Q$ 、半径为 $a$ 的均匀带电球面切成两半，求两半球面间的静电力。

**[解]** ■由高斯定理求得球面两侧的总电场：

$$E_t = \begin{cases} \sigma_e / \varepsilon_0, & (r = a + 0); \\ 0, & (r = a - 0); \end{cases}$$



式中  $\sigma_e = Q / (4\pi a^2)$ 。

■由受作用面元在自身两侧产生的电场为：

$$E_1 = \begin{cases} \sigma_e / (2\varepsilon_0), & (r = a + 0); \\ -\sigma_e / (2\varepsilon_0), & (r = a - 0). \end{cases}$$

■电场径向分量：

$$E = E_t - E_1 = \sigma_e / (2\varepsilon_0) \quad (r = a)$$

- 取球坐标，使  $z$  轴与切割面垂直，则有：

$$\mathbf{E} = \sigma_e \hat{r} / (2\varepsilon_0)$$

代入式（2.1.2）求得两半球面之间的静电力为

$$\mathbf{F} = \iint_s \sigma_e \mathbf{E} dS = \iint_s \frac{\sigma_e^2}{2\varepsilon_0} \hat{r} dS$$

- 由对称性分析可知，上述作用力只有  $z$  分量：

$$F = F_z = \frac{a^2 \sigma_e^2}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi a^2 \sigma_e^2}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 a^2}$$

该力为正，表明两半球间的静电力为排斥力。

## § 2.2 静电场中的导体

### 1. 导体达到静电平衡的条件

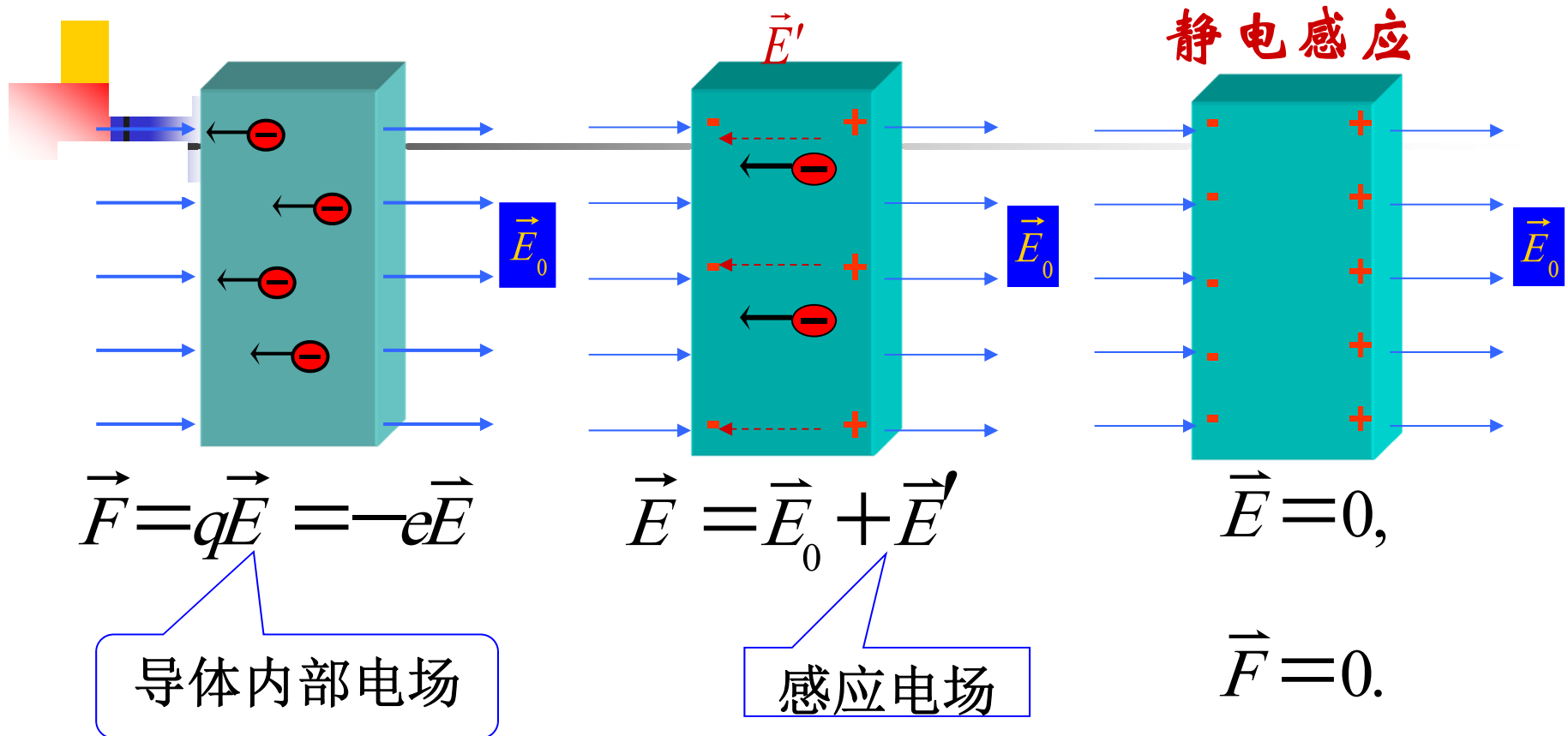
- 静电场改变导体内电荷的分布 → 电荷分布的改变将影响电场的分布 → 使得导体内电场强度处处为零，则自由电荷不再运动 →

我们说导体达到静电平衡。

这时导体内自由电荷分布以及导体内、外的电场分布不再随时间变化。这个过程进行得很快，大约在  $10^{-8} - 10^{-10}$  s 就完成了。

- 对于不存在非静电力情况下的均匀、各向同性导体，达到静电平衡的条件是导体内部电场强度处处为零。

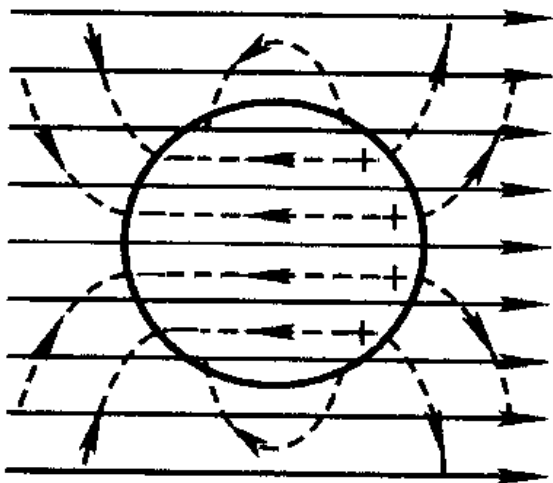
# 导体的静电平衡条件



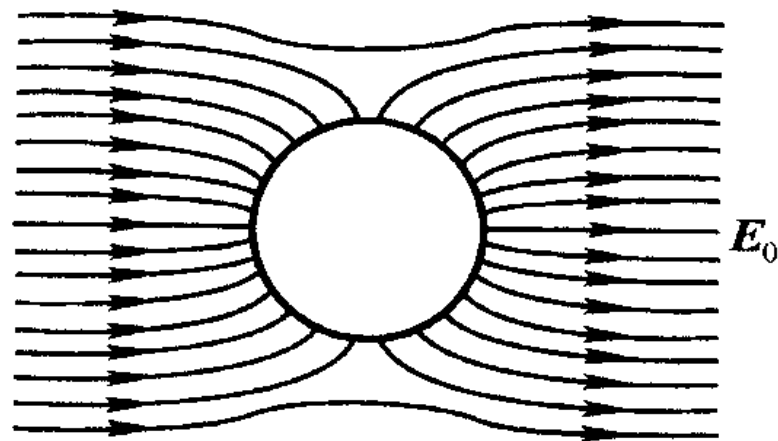
导体刚放入匀  
强电场中

只要E不为零，自  
由电子作定向运动

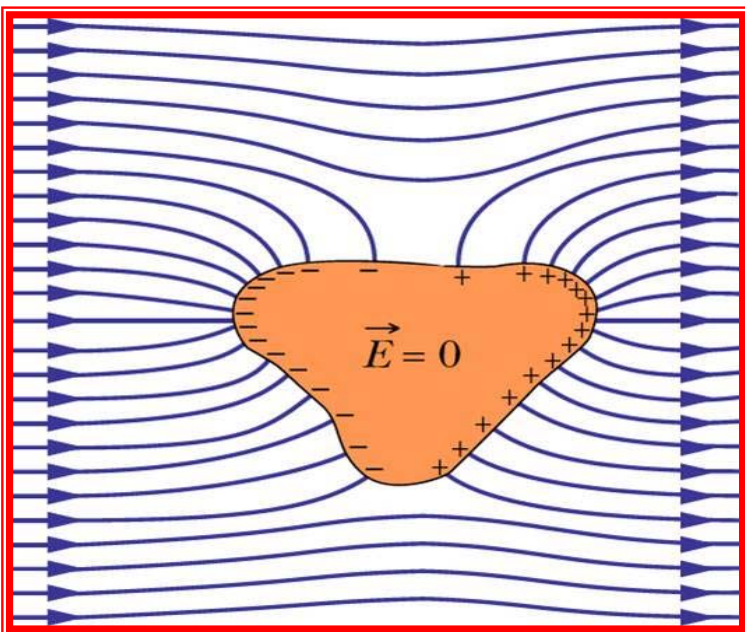
改变电荷分布，  
产生附加场



(a) 感应电荷在球内的场强与外场源  
在球内的场强大小相等方向相反



(b) 合电场的电场线



(c)

静电场中的导体球内  
部和周围的电场分布



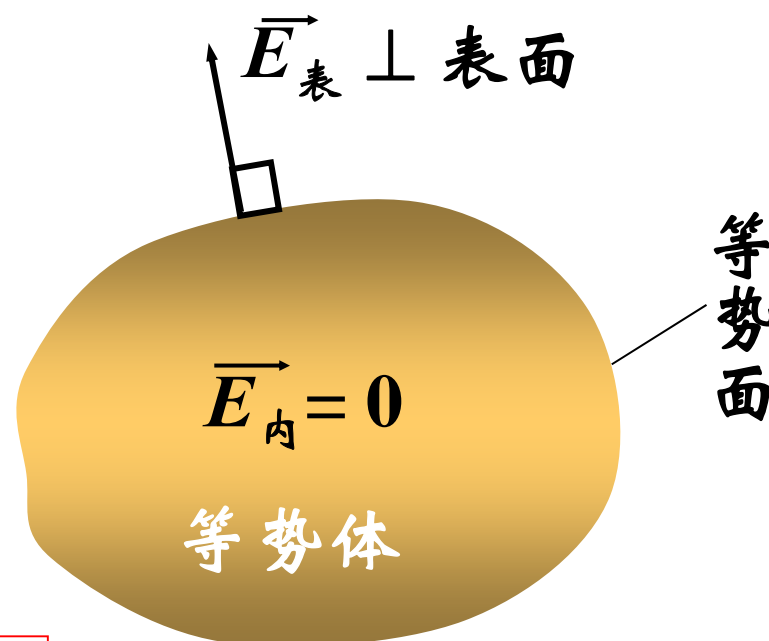
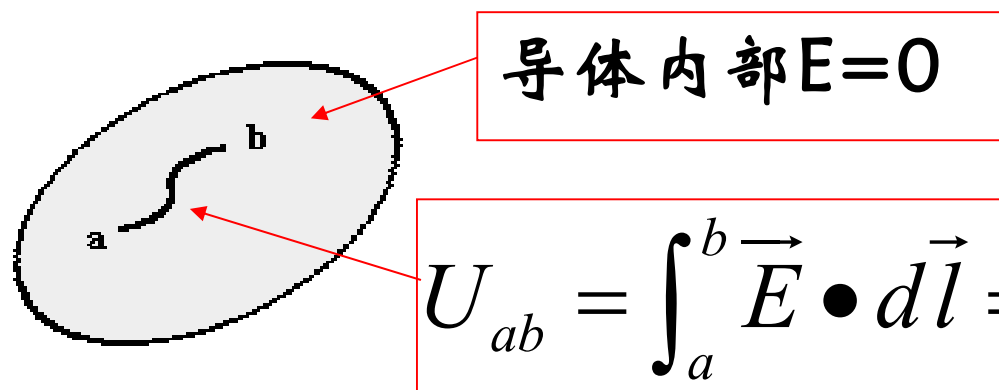
## 2. 处在静电平衡条件下导体的性质

### (1) 内部电场

导体内部电场  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' = 0$  (静电平衡条件)

### (2) 电势分布

导体内部任意两点间电势差为零  $\rightarrow$  各点等电势  $\rightarrow$  导体为等势体  $\rightarrow$  表面为等势面



$$U_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

静电平衡时的导体

### (3) 整体电荷分布 (实心导体)

当带电导体处于静电平衡状态时, 导体内部处处没有净电荷存在, 电荷密度处处为零  $\rho_e = 0$ 。

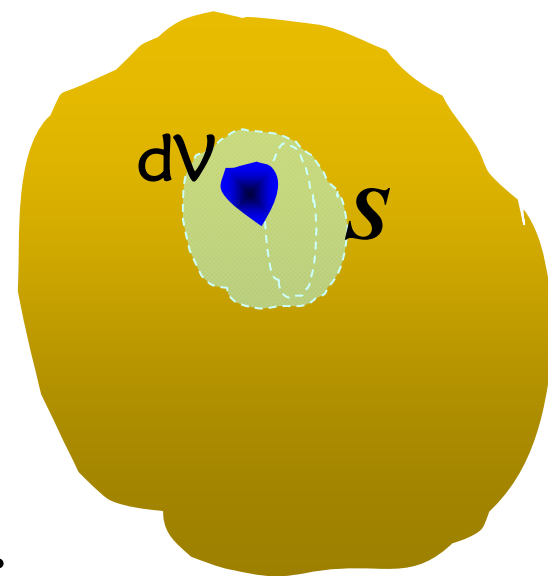
电荷只分布在导体表面。导体表面电荷的电荷层一般只有**1**至**2**个原子的厚度。

[证明]: 在导体内任取体积元  $dV$ , 再取任一闭合曲面  $S$  包围它, 由高斯定理:

$$\varepsilon_0 \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i,$$

$$\because \vec{E} = 0, \quad \therefore \sum_i q_i = \iiint_V \rho_e dV = 0.$$

$$\because \text{体积元 } dV \text{ 任取, 即 } V \text{ 任取} \quad \therefore \rho_e = 0.$$



# 导体空腔内没有带电体

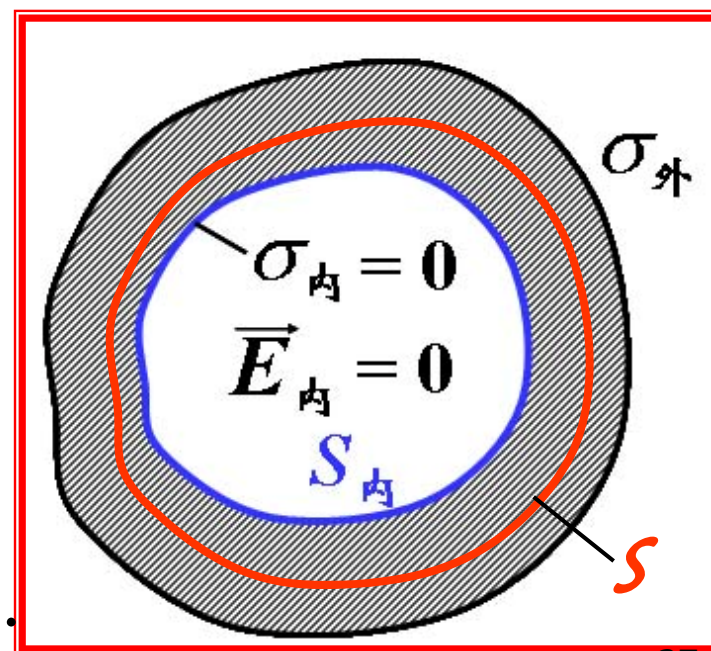
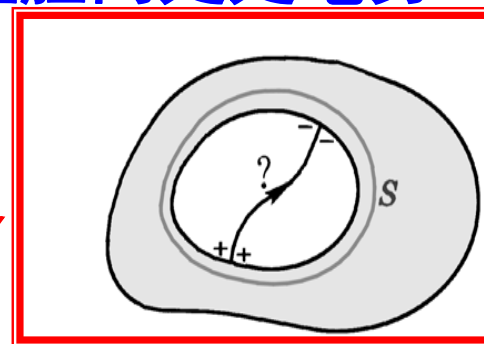
- 包围导体空腔的导体壳内表面上处处没有电荷，电荷分布在导体外表面，空腔内处处 $E=0$ ，空腔内处处电势相等。

[证明] 在导体中包围空腔选取高斯面 $S$ ,

则: 
$$\oint_S \vec{E}_{\text{导内}} \cdot d\vec{s} = 0, \quad \oint_{S_{\text{内}}} \sigma_{\text{内}} \cdot ds = 0,$$

若 $\sigma_{\text{内}} \neq 0$ ，则 $\sigma_{\text{内}}$ 必有正负，便有 $E$ 线从正电荷到负电荷，导体内表面出现了电势差。这与导体为等势体矛盾，只能 $\sigma_{\text{内}} = 0$ ，且腔内无 $E$ 线。

只能  $E_{\text{内}} = 0 \rightarrow \Delta U = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$



## 导体空腔内有带电体 $q$

- 必有  $\sigma_{\text{内}} \neq 0$ ，且  $q_{\text{内表}} = -q$ ， $\sigma_{\text{外}}$  可不为 0

[证明] 在导体中包围空腔选取高斯面  $S$ ，则：

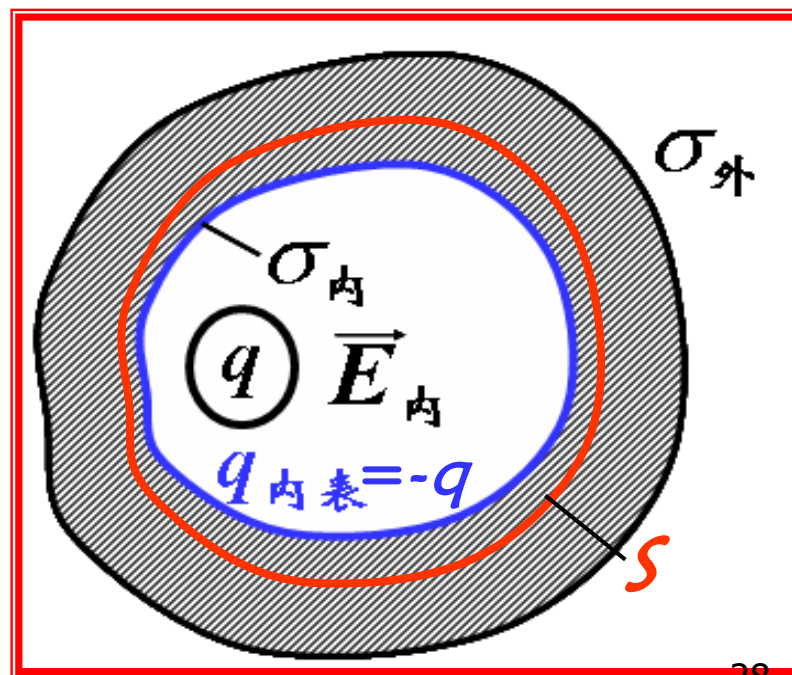
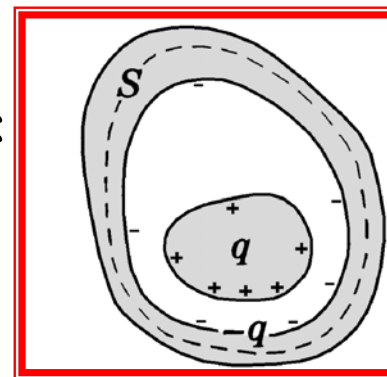
$$\oint_S \vec{E}_{\text{导内}} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} (q + q_{\text{内表}}) = 0$$

$$\therefore q_{\text{内表}} = -q$$

$$\sigma_{\text{内}} \neq 0$$

$$E_{\text{内}} \neq 0$$

导体内表面上所带电荷与腔内电荷的代数和为零。



## (4) 表面场强

导体表面附近的场强方向与表面垂直，大小

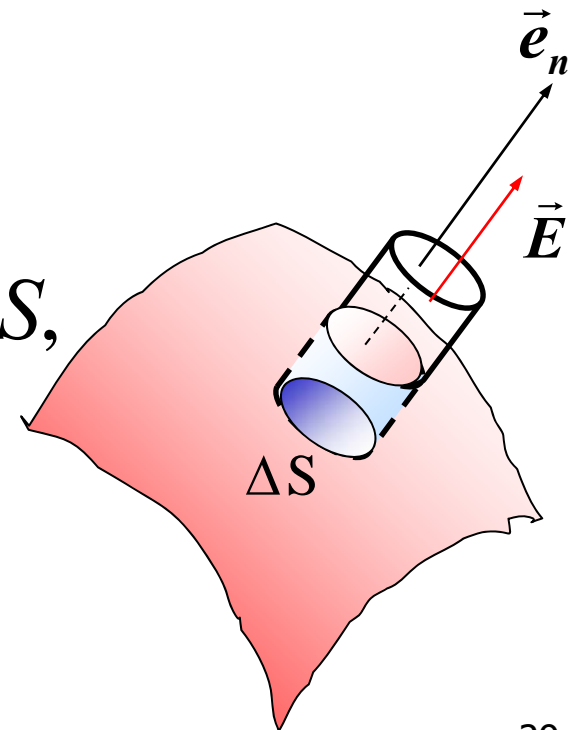
为 $\sigma_e/\epsilon_0$

[证明] 1) 方向：如不垂直， $\mathbf{E}$ 有切向分量，电荷受力将移动→没有达到静电平衡； 2) 大小：

$$\Phi_E = \iiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S \text{ 内}} q_i = \sigma_e \Delta S / \epsilon_0,$$

$$\text{又 } \iiint_{\text{上底}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\text{下底}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\text{侧面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\Delta S,$$

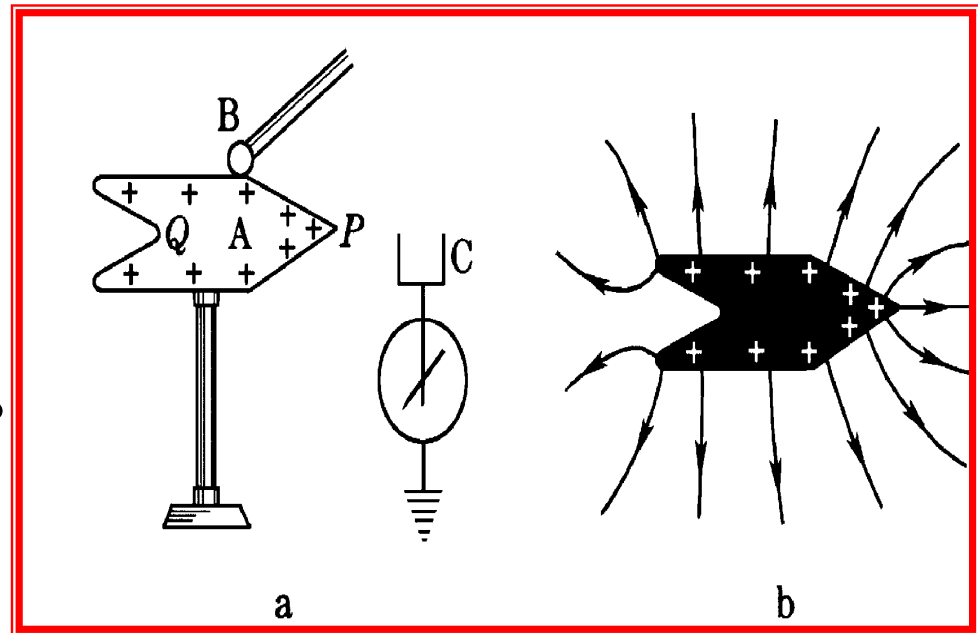
$$\therefore E = \sigma_e / \epsilon_0, \quad \vec{E} = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \vec{e}_n.$$



## (5)表面电荷分布

- 孤立导体表面的面电荷分布很复杂
- 分布与外表面曲率和导体形状有关
- 面电荷密度与曲率之间并不存在单一的函数关系

- 导体表面凸出而尖锐的地方(曲率较大), 电荷面密度较大;
- 导体表面平坦的地方(曲率较小), 电荷面密度较小
- 导体表面凹进去的地方;(曲率为负), 电荷面密度更小。



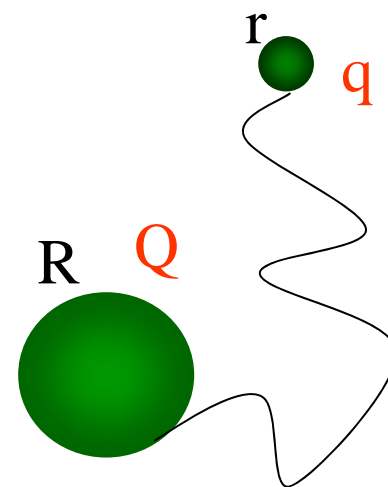
【例】半径分别为 $R$ 和 $r$  ( $R>r$ )导体球放置在相距无限远的两个地方，中间用细导线连接。导体球分别带电 $Q$ 和 $q$ ，求两球表面电荷面密度与曲率的关系。

【解】两个导体所组成的整体可看成是一个孤立导体系统， $U$ 相等，每个球可近似的看作为孤立导体，球表面电荷分布均匀，则两球的电势为：

$$U_R = U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r},$$

$$\frac{Q}{q} = \frac{R}{r}, \quad \frac{4\pi R^2 \sigma_R}{4\pi r^2 \sigma_r} = \frac{R}{r},$$

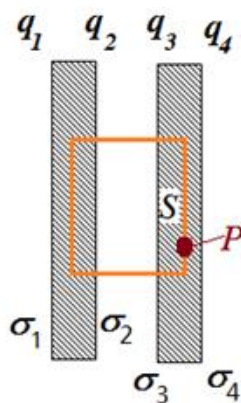
$$\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = \frac{r}{R}. \quad \text{电荷面密度与半径成反比}$$



[例]：两块相同大小的导体板平行放置，相距很近，忽略边缘效应。若带电量分别为 $Q_1$ 和 $Q_2$ ，求4个导体表面上的电荷。



(a)



(b)

作如图高斯面：

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

P点电场强度=0:

$$E = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4}{2\epsilon_0} = 0$$

电荷守恒：

$$Q_1 = (\sigma_1 + \sigma_2)S \quad Q_2 = (\sigma_3 + \sigma_4)S$$

$$\sigma_1 - \sigma_4 = 0$$

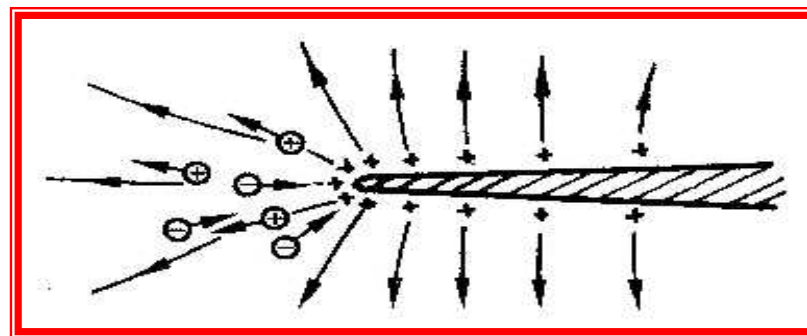
$$\rightarrow q_1 = q_4 = \frac{Q_1 + Q_2}{2} \quad q_2 = -q_3 = \frac{Q_1 - Q_2}{2}$$



### 3. 导体在静电场中性质的应用

■ **尖端放电** 曲率大,  $\sigma_e$  大,  $E = \sigma_e/\epsilon_0$  大

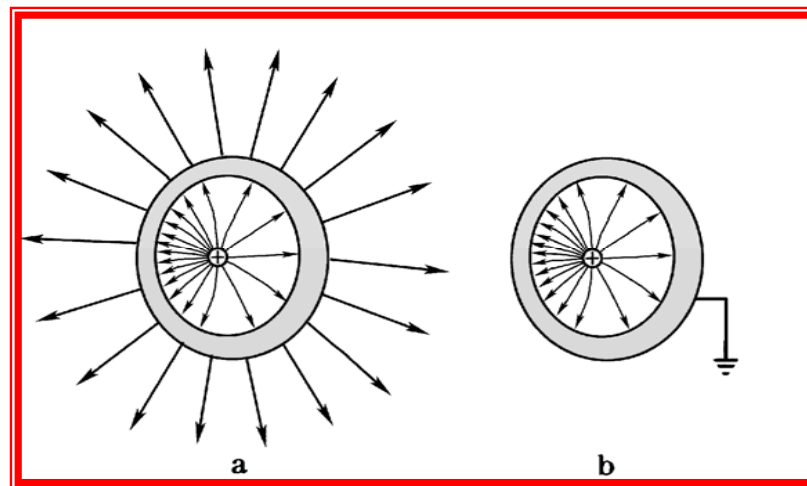
- 避雷针
- 静电复印机
- 场致发射显微镜
- 范德格拉夫起电机



■ **静电屏蔽** 空腔导体可以保护腔内空间不受腔外带电体的影响

- 屏蔽室
- 带电作业
- 范德格拉夫起电机

■ **库仑定律的精确验证**



# 尖端放电及其应用

## ■ 危害：

- 雷击对地面上突出物体（顶端）的破坏性最大；
- 高压设备尖端放电漏电等。

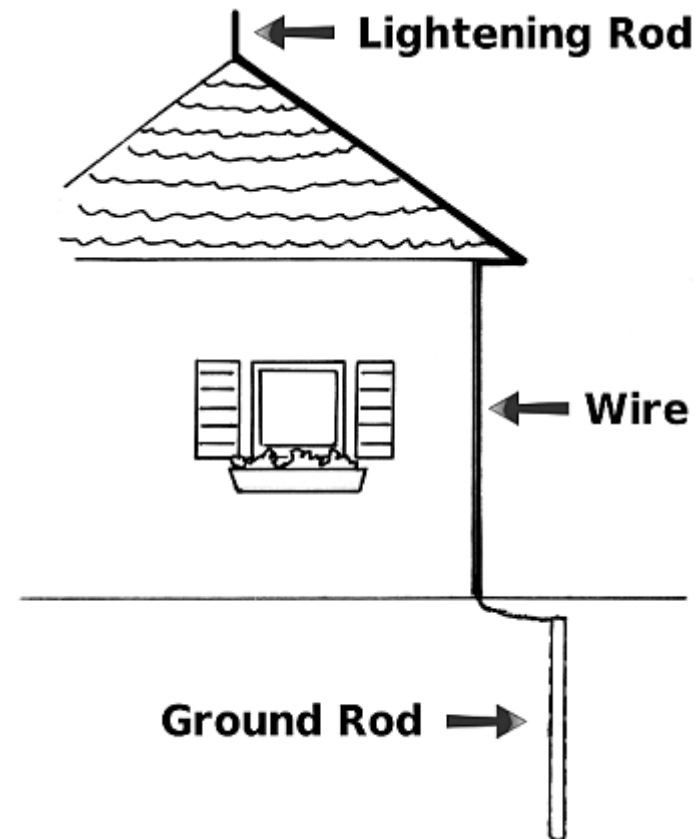
## ■ 应用实例：

- 避雷针
- 高压输电中，把电极做成光滑球状
- 范德格拉夫起电机起电原理就是利用尖端放电使起电机起电
- 场离子显微镜（FIM）、场致发射显微镜(FEM)乃至扫描隧道显微镜 (STM) 等
- 静电复印机

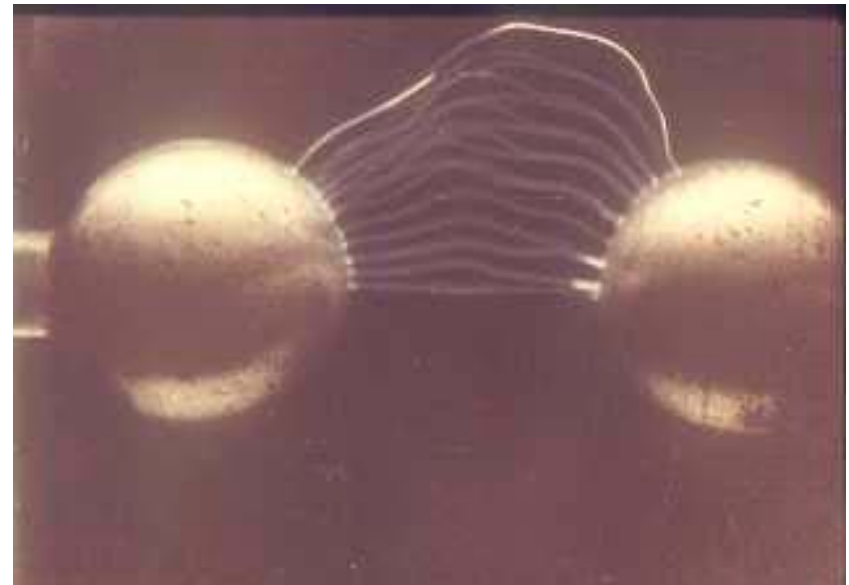
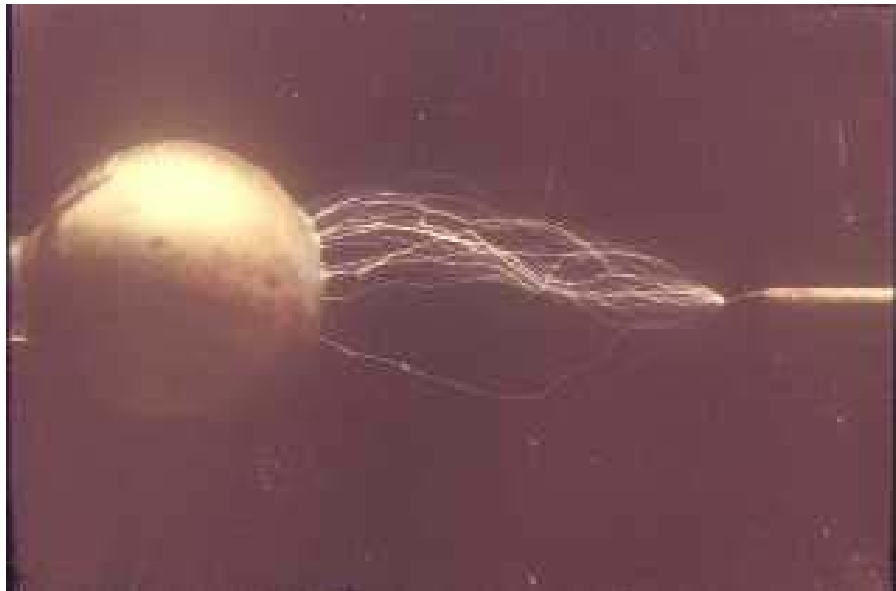
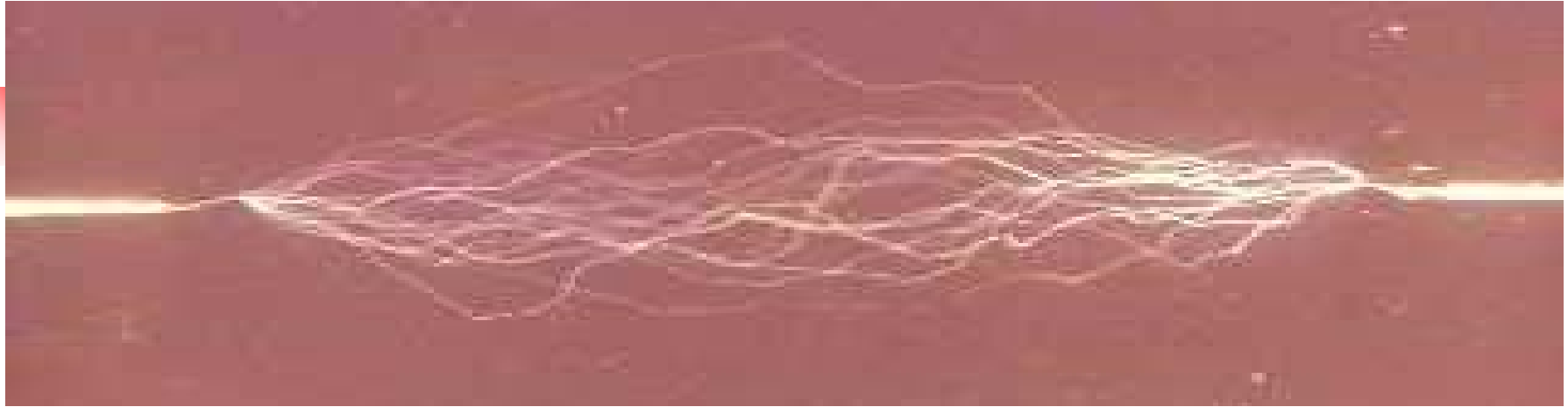
# 云层和大地间的闪电



## 避雷针



# 空气中的直流高压放电图片

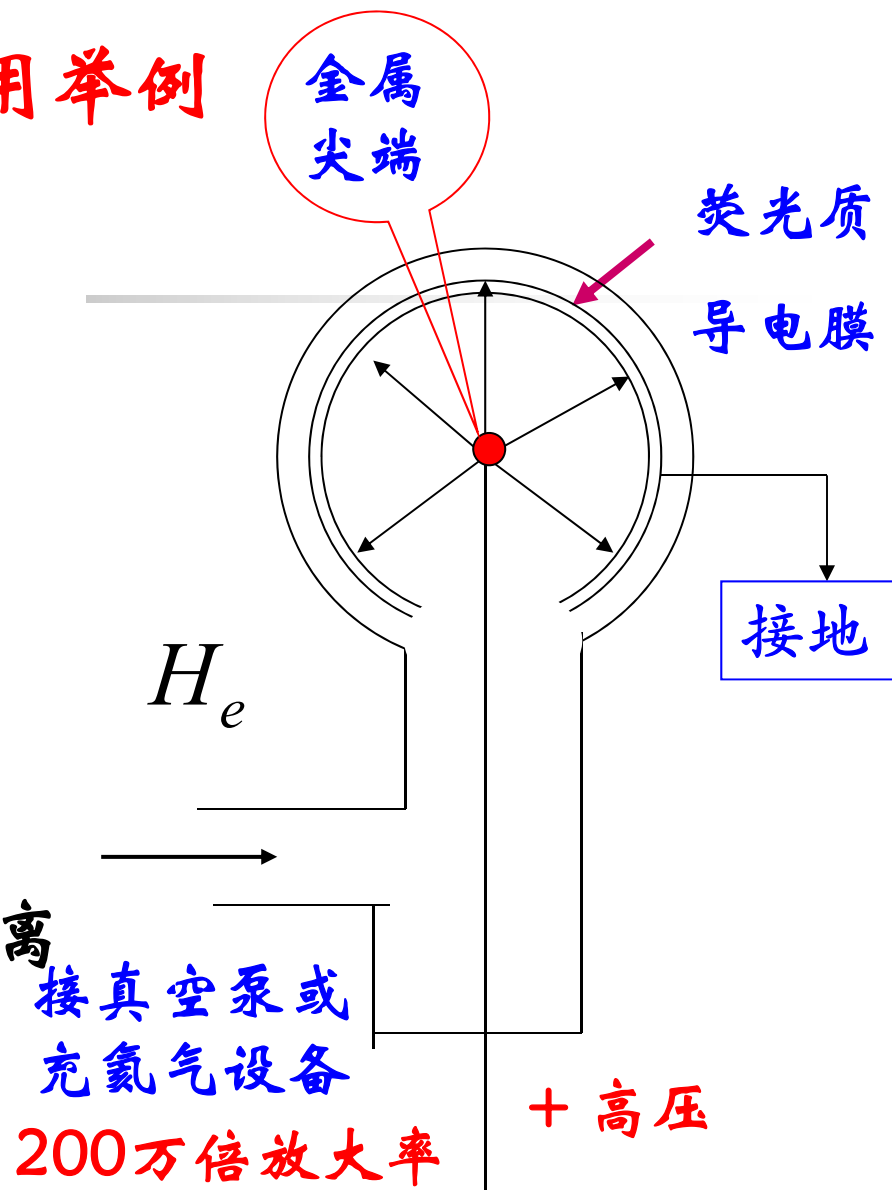


## 金属尖端的强电场的应用举例

### 场离子显微镜(FIM)

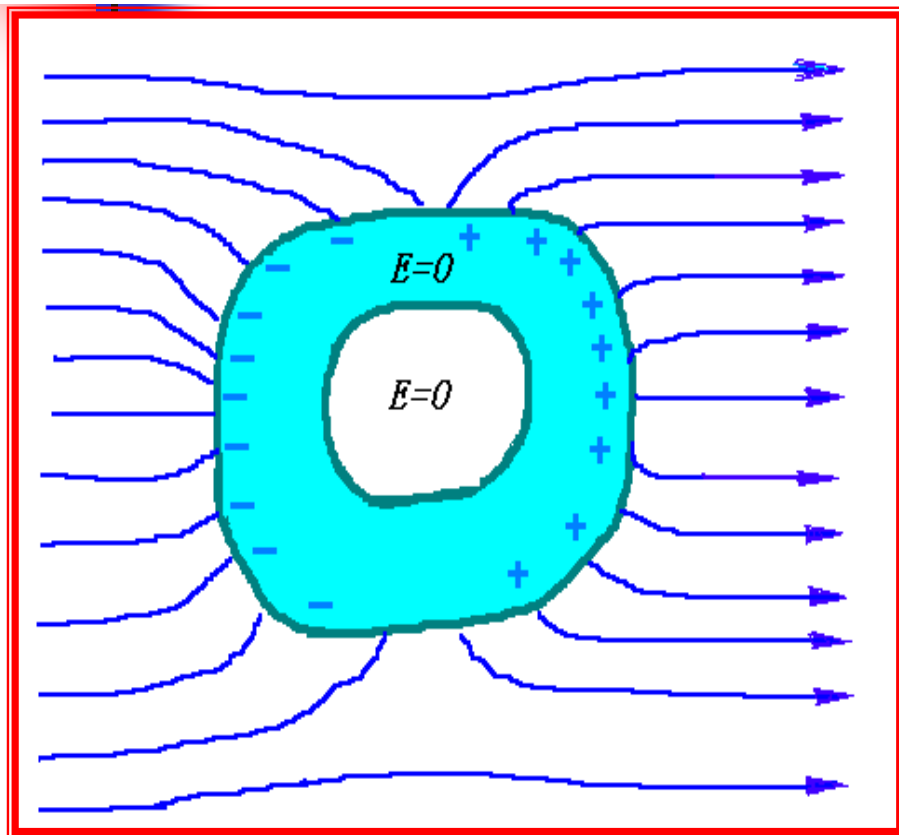
原理:

- 样品制成针尖形状
- 针尖与荧光膜之间加高压
- 样品附近有极强的电场
- E使吸附在样品的氦原子电离
- 氦离子沿电力线运动, 撞击荧光膜引起发光
- 从而获得样品表面的图象



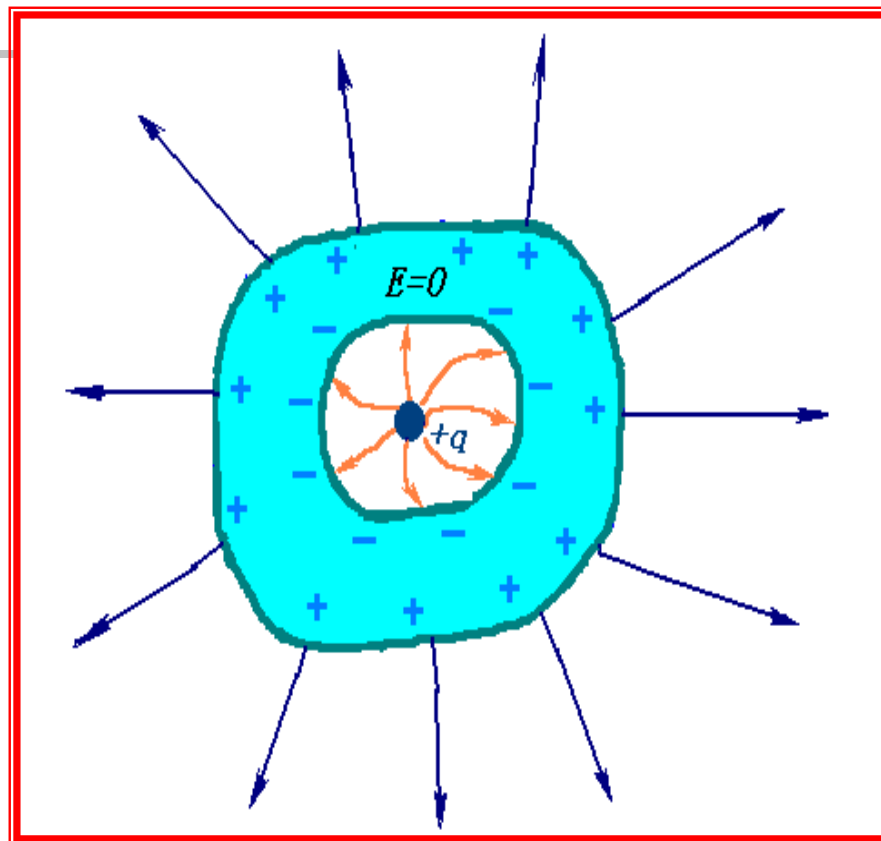
# 静电屏蔽

(1) 腔外不影响腔内



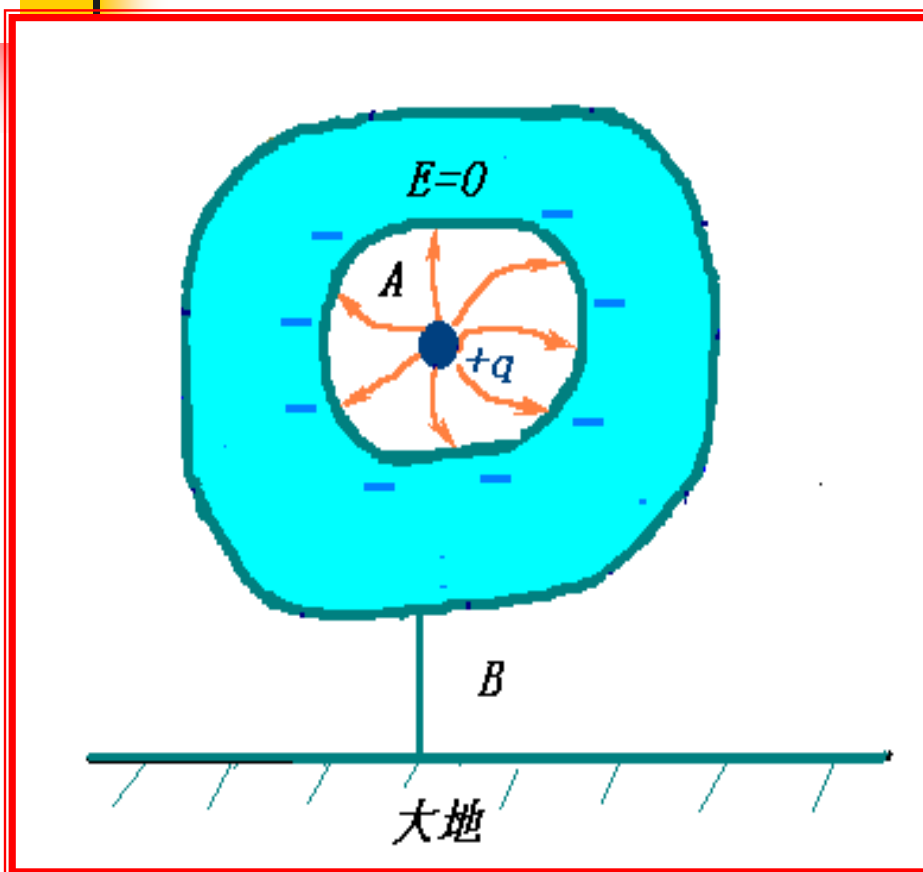
腔内无电荷

(2) 腔内却影响腔外

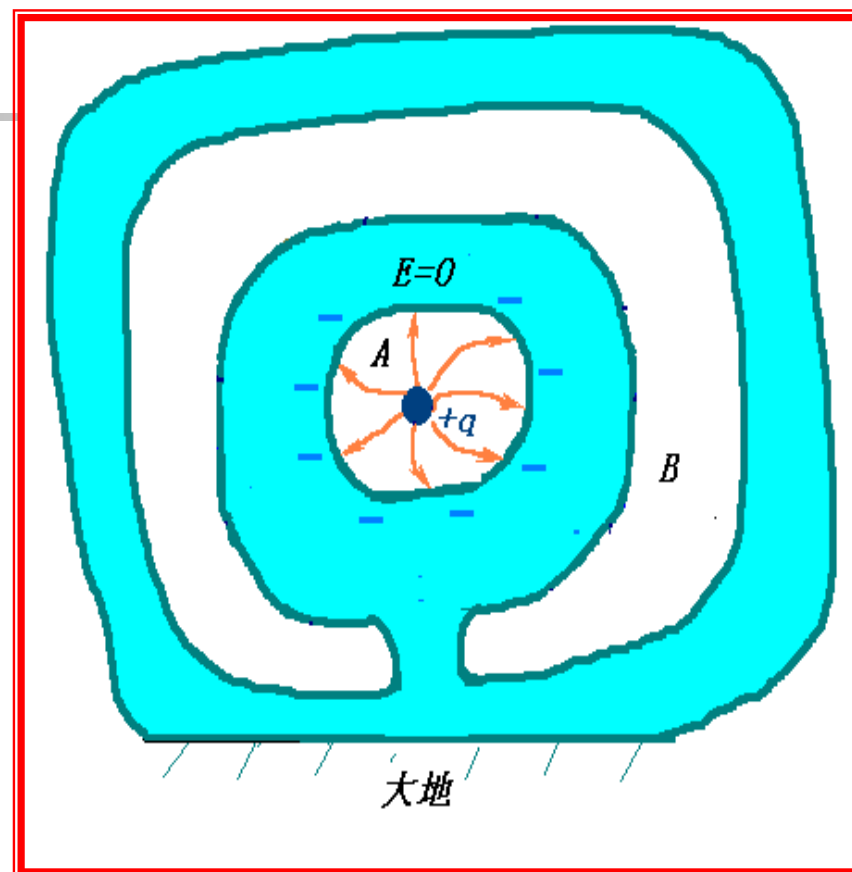


腔内有电荷

### (3) 空腔**接地**，腔内腔外互不影响



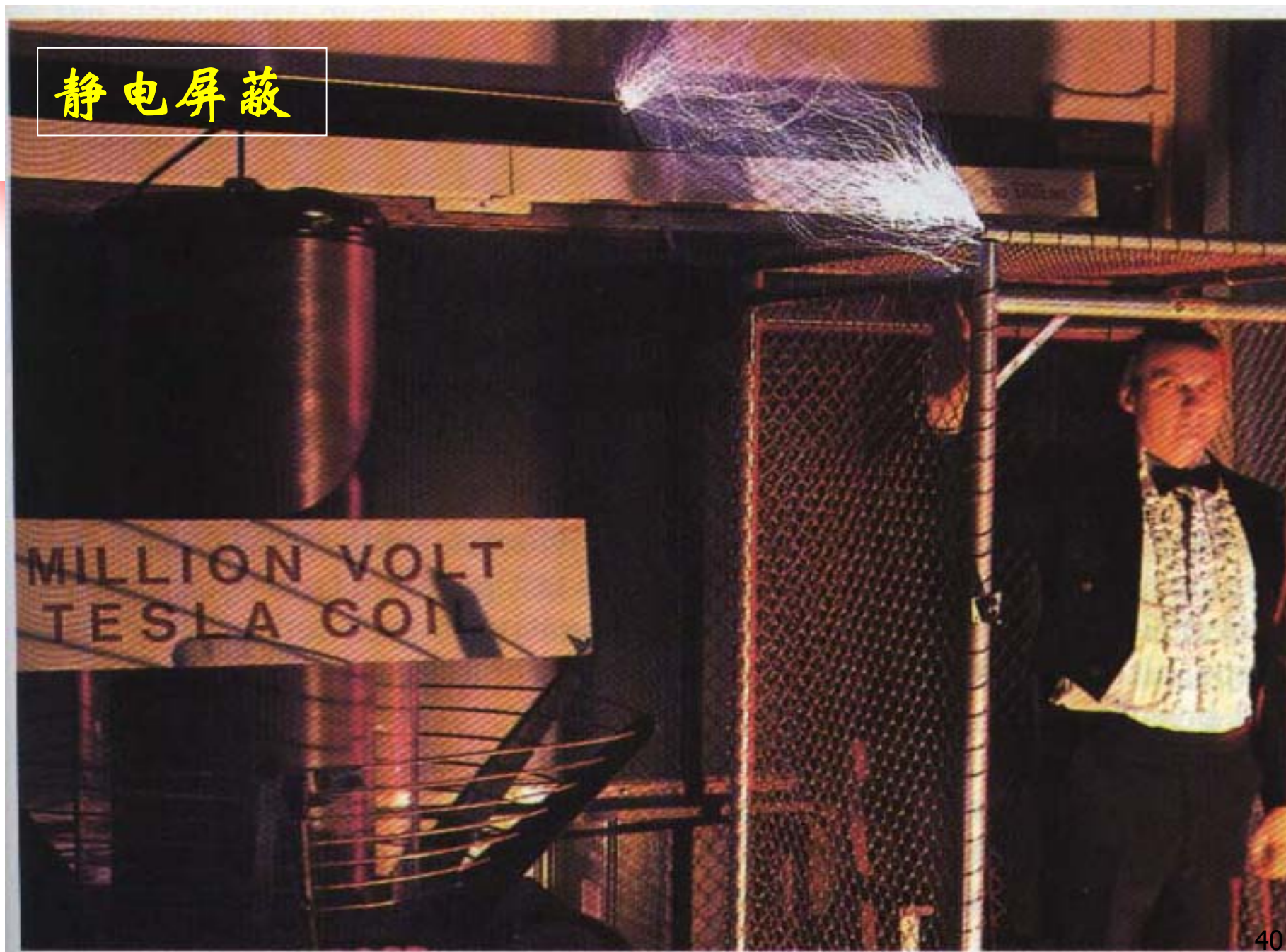
腔内有电荷，导体腔接地



等效图



# 静电屏蔽



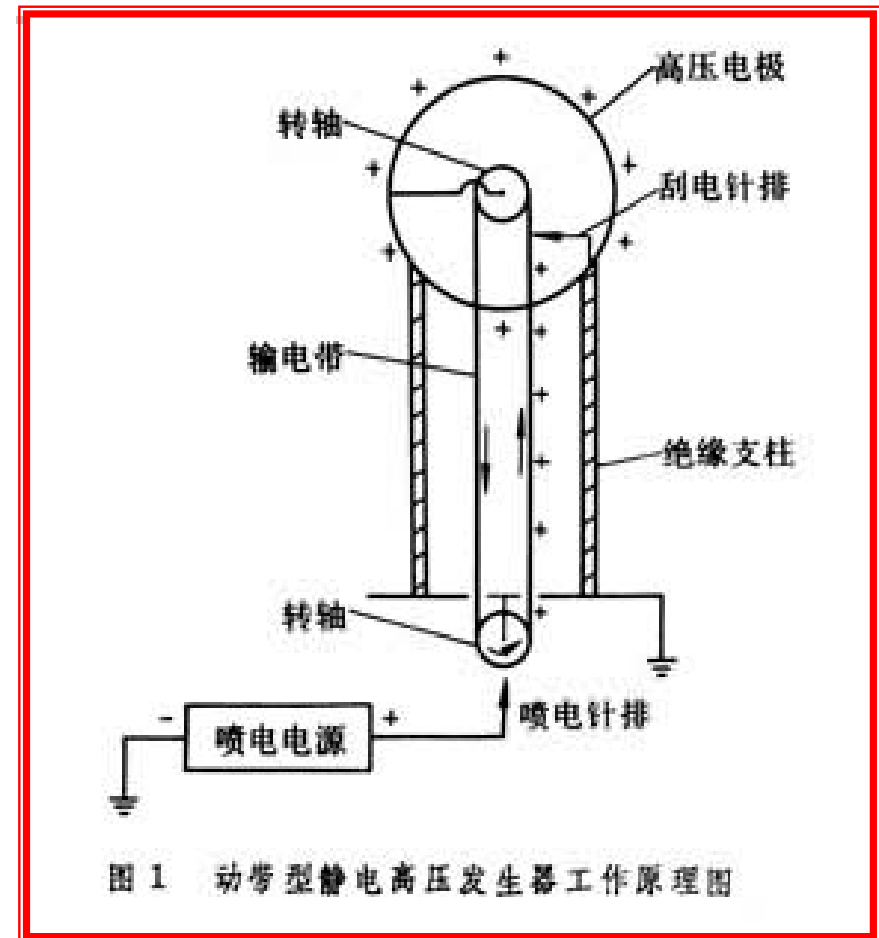




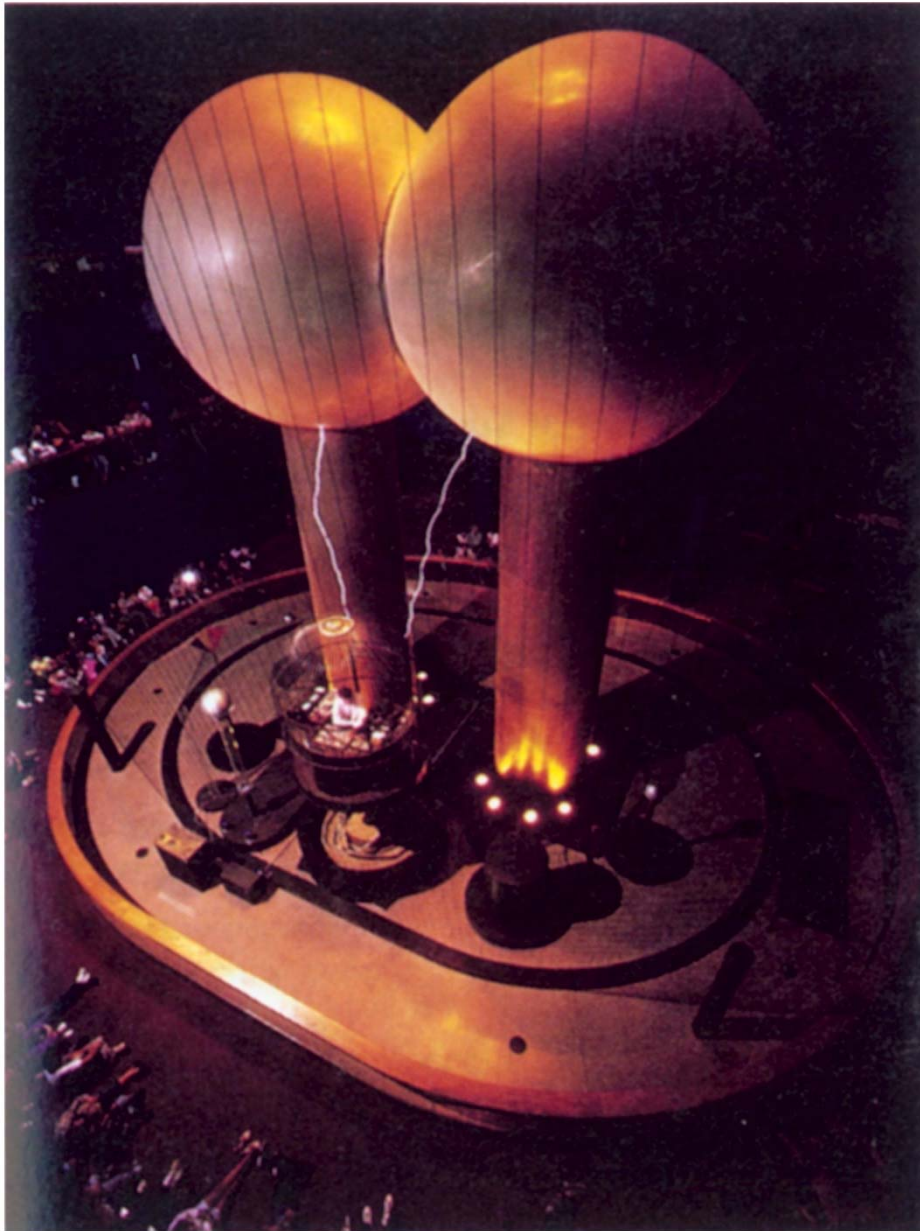
憎水性带电作业屏蔽服又叫等电位**均压服**，是采用均匀的导体材料和纤维材料制成的服装。其作用是在穿用后，使处于高压电场中的人体外表面各部位形成一个等电位屏蔽面，从而防护人体免受高压电场及电磁波的危害。

## 范德格喇夫起电机

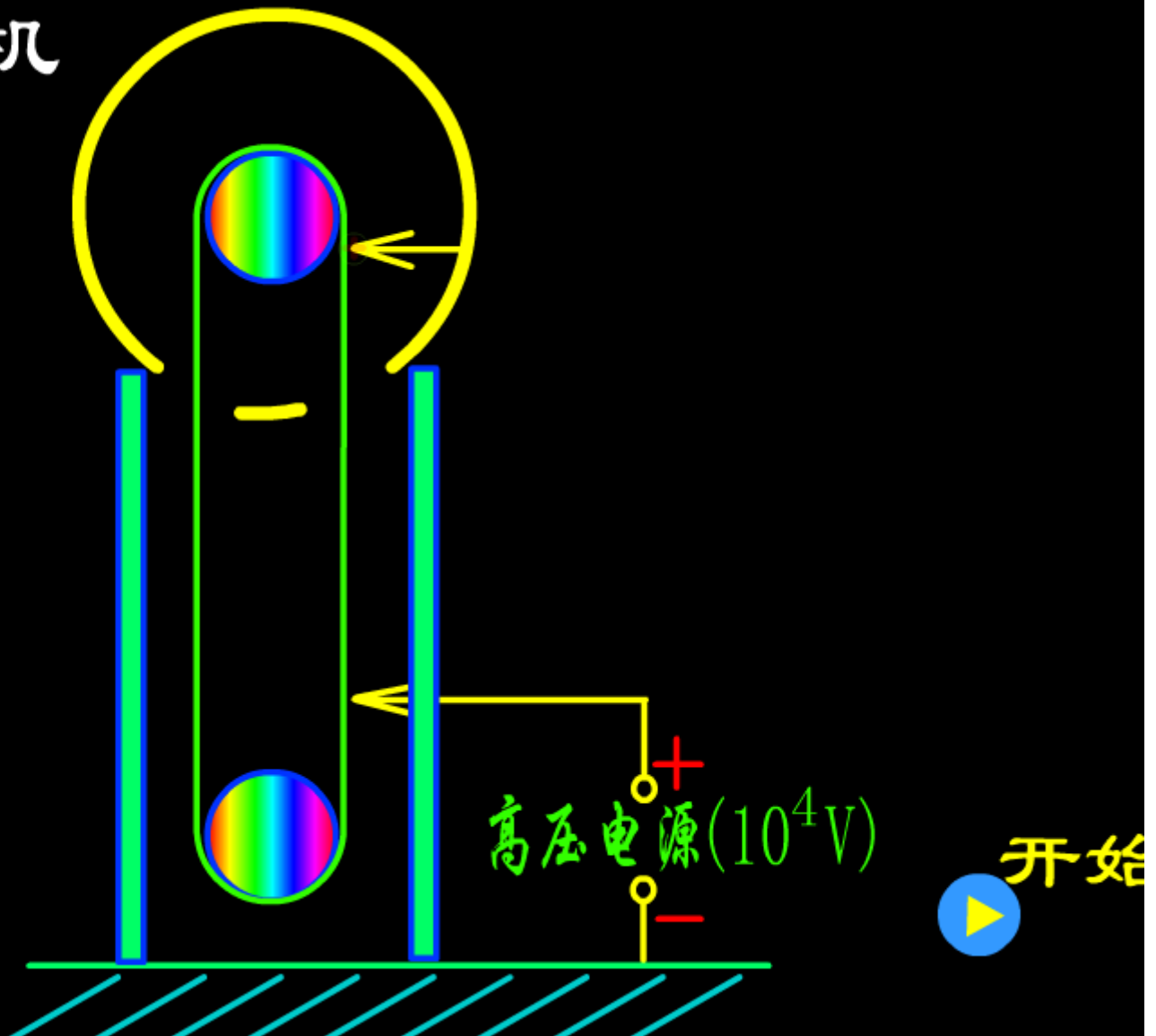
- 金属薄壁的**高压电极**由绝缘支柱支撑着，绝缘材料制成的**输电带**在两个转轴间不停地运动。
- **喷电针排**连接在喷电电源上，通过针尖在气体中的电晕放电，使周围与针尖极性相同的离子在电场作用下从针尖喷向输电带，使输电带充电。
- 随着输电带的运动，带上的电荷进入高压电极。极内**刮电针排**同高压电极相连和输电带之间所形成的电场，同样使气体电晕放电，从而使电荷转移到高压电极上去。
- 随着不停传送电荷，高压电极的电压很快地升高。



## 范德格拉夫起电机

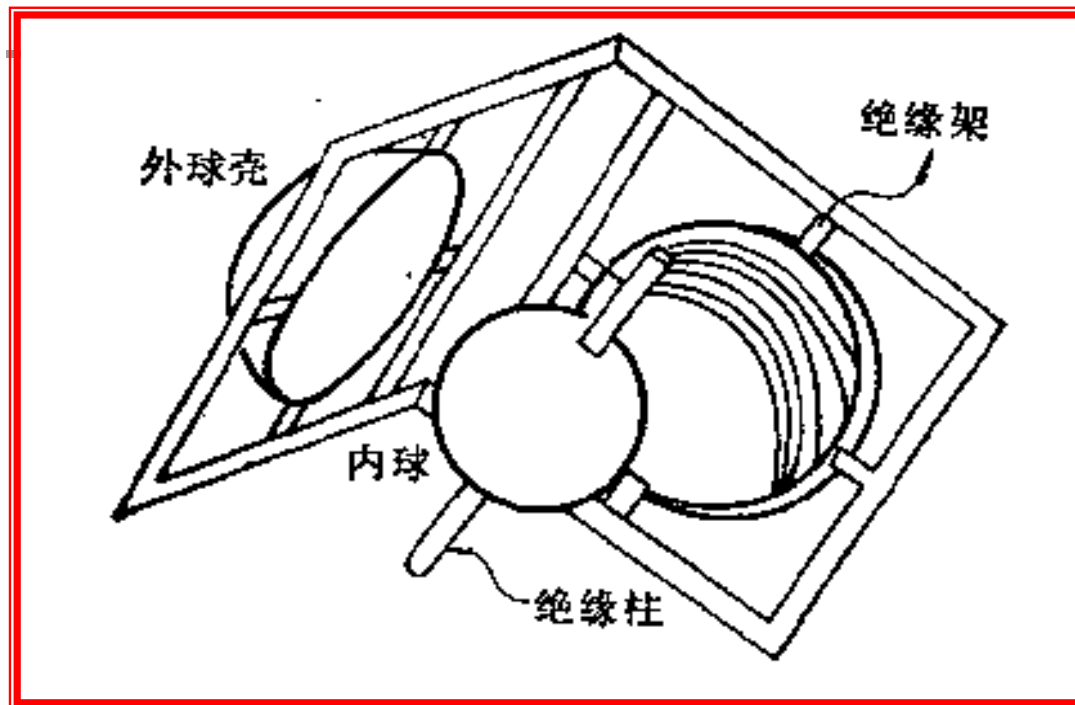


# 静电起电机



# 高斯定理和库仑定律的精确验证

导体**内球**固定在绝缘支柱上，导体**外球壳**为两个半球壳拼接而成。**实验时**，**先**使内球带电，**然后**用导线将内球与外球壳连接，使球壳带电，**再抽走**导线。在上述操作之后，将两半球壳打开，**用精确的验电器**检测内球上的电量。



卡文迪许的实验装置

## § 2.3 电容和电容器

### 一、孤立导体的电容

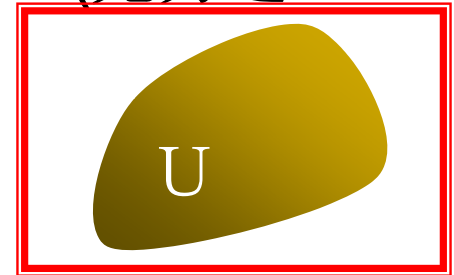
- 孤立导体：空间只有一个导体，在其附近没有其它导体和带电体

Capacitor: A device used to store an electric charge.

- 电容定义：

- 一个带有电荷为 $Q$ 的孤立导体,其电势为 $U$  (无穷远处为电势零点)则有：

$$C = \frac{Q}{U}$$



- 物理意义：

- 电容表征使导体每升高单位电势所需的电量
- 电容是描述导体或导体系容纳电荷的性能的物理量
- $C$ 由导体的形状、大小及周围的环境决定(介质)
- $C$ 的值与导体所带电量多少和电势 $U$ 的大小无关



## ■ 电容的单位:

- $C=Q/U$

- 单位: 库仑/伏特, 简称**法拉**, 记作F

- **1 $\mu$ F**(微法拉) = **10<sup>-6</sup>F**, **1pF**(微微法拉) = **10<sup>-12</sup>F**

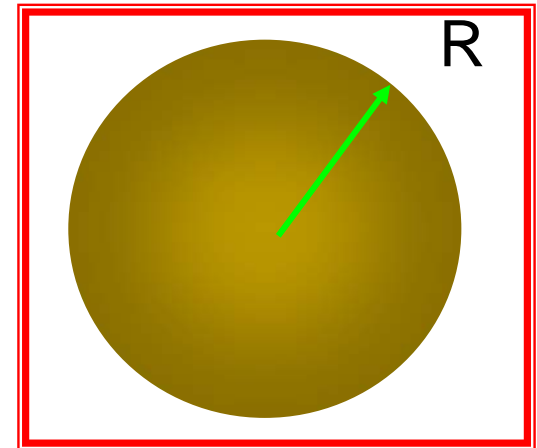
**[例]:** 求孤立导体球的电容, 设半径为**R**。

$$U = \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 R$$

注:

- 孤立导体的电容越大, U一定时储存的Q越多
- 孤立导体的**半径越大, 电容越大**



**思考：**用孤立导体球要得到**1F** 的电容，球半径为大？

$$C = 1\text{F 时}, R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 (\text{m}) \approx 1.4 \times 10^3 R_E$$

$$R = R_E \text{ 时}, C = 4\pi\epsilon_0 R_E = 7 \times 10^{-4} F, (R_E = 6.4 \times 10^6 m)$$

- 孤立导体的电容一般很小，不能满足使用的需求
- 实际的电容附近存在其他导体，孤立导体近似难满足
- 导体的电势，与周围的电荷、导体及介质有关



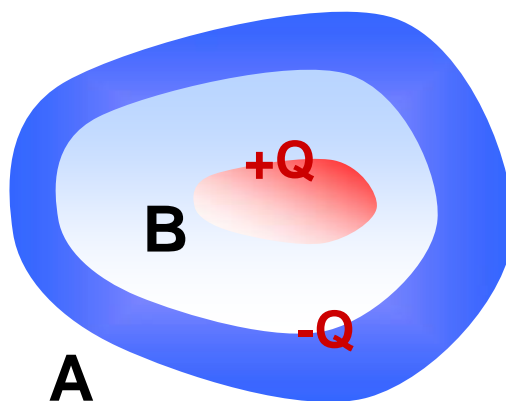
## 二、电容器 (capacitor)

### ■ 构成:

- 两个彼此绝缘而又互相靠近的导体组成的系统
- 导体可以是金属板，金属薄膜等
- 两个导体带有等量异号的电荷， $\pm Q$
- 夹层绝缘物质可以是空气、纸、云母片以及塑料等

### ■ 特点:

- 增大电容值
- 静电屏蔽



$$C = \frac{Q}{|U_A - U_B|} = \frac{Q}{U_{AB}}$$

导体壳内部的场只由腔内的电量和几何条件及介质决定

70  
厘米



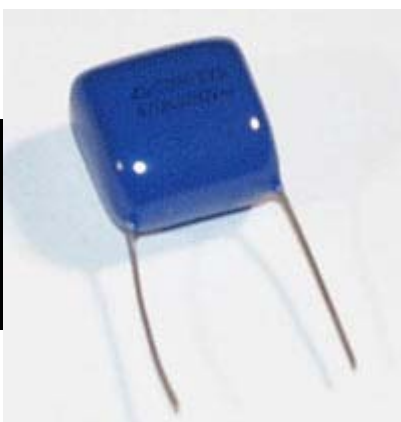
高压电容器(20kV 5~21 $\mu$ F)  
(提高功率因数)

12  
厘米



聚丙烯电容器  
(单相电机起动和连续运转)

2.5  
厘米



涤纶电容  
(250V0.47 $\mu$ F)

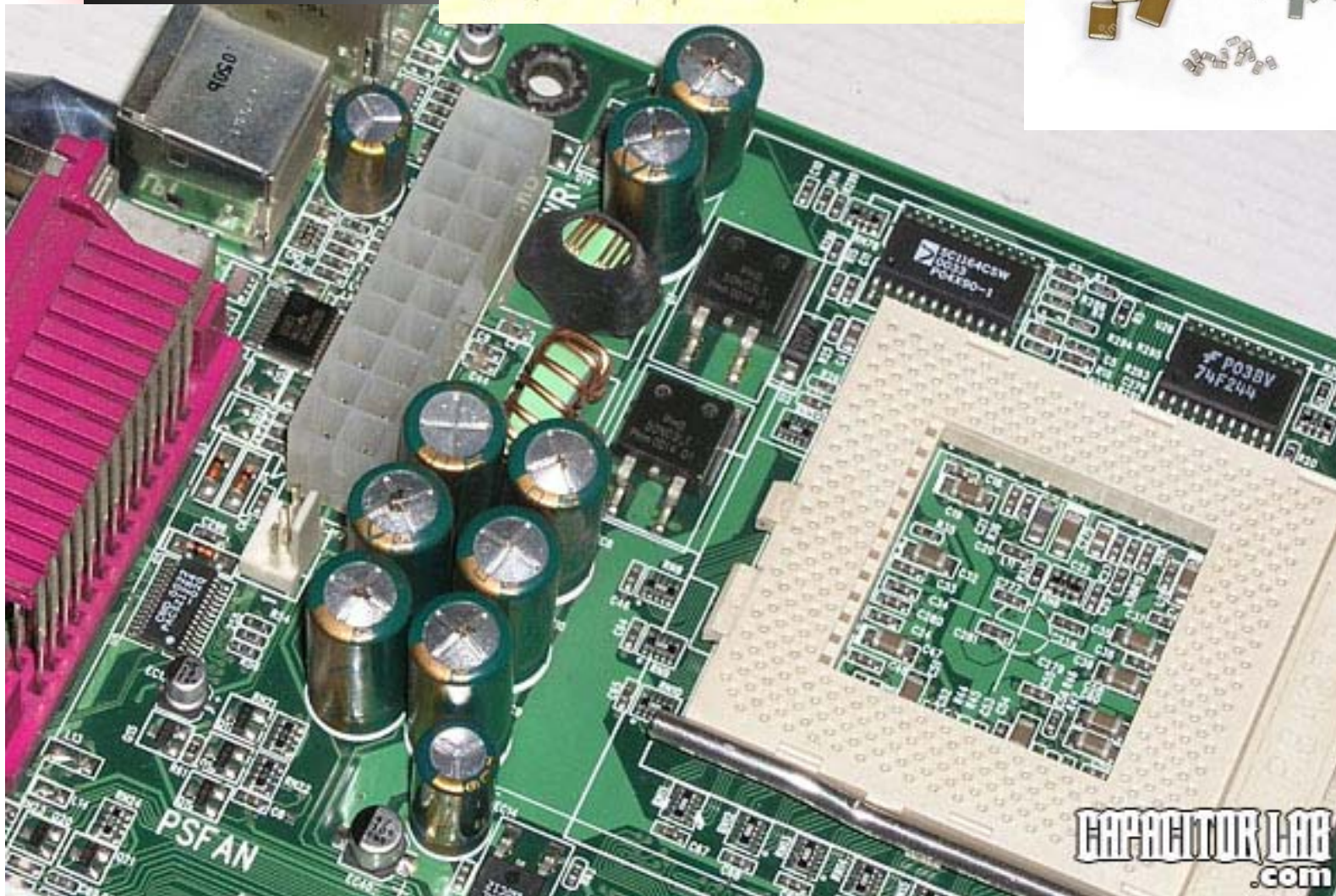
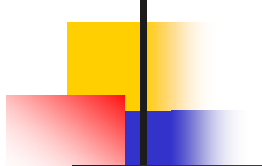
2.5  
厘米



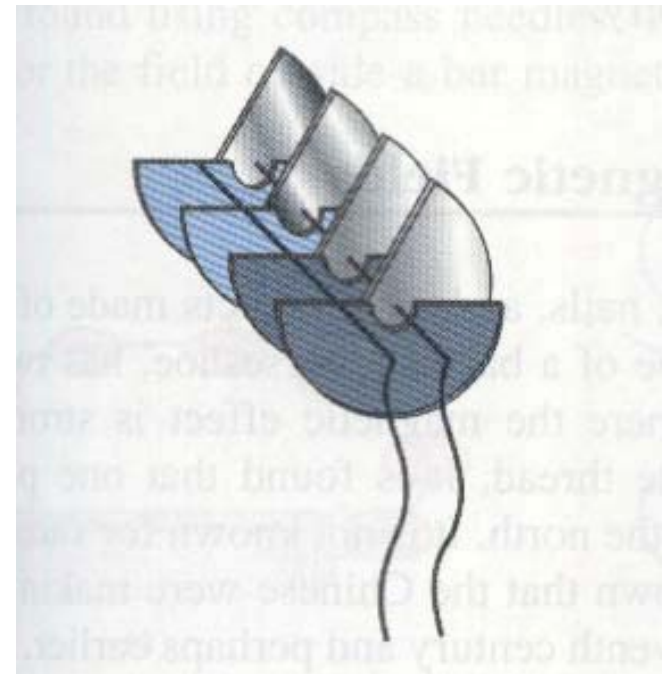
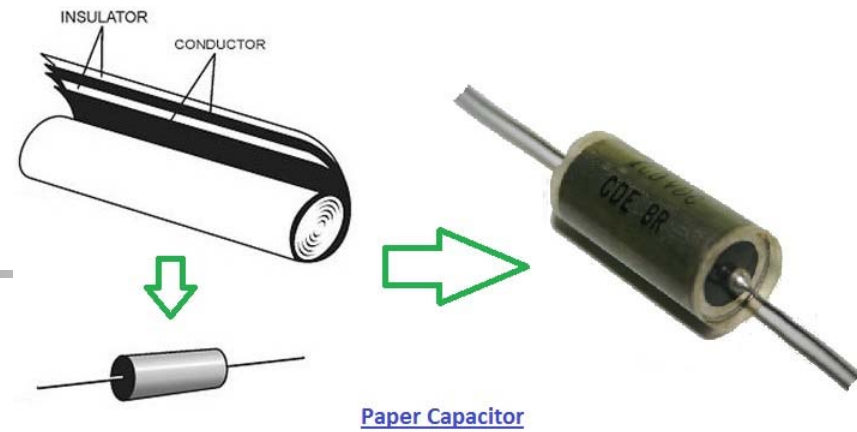
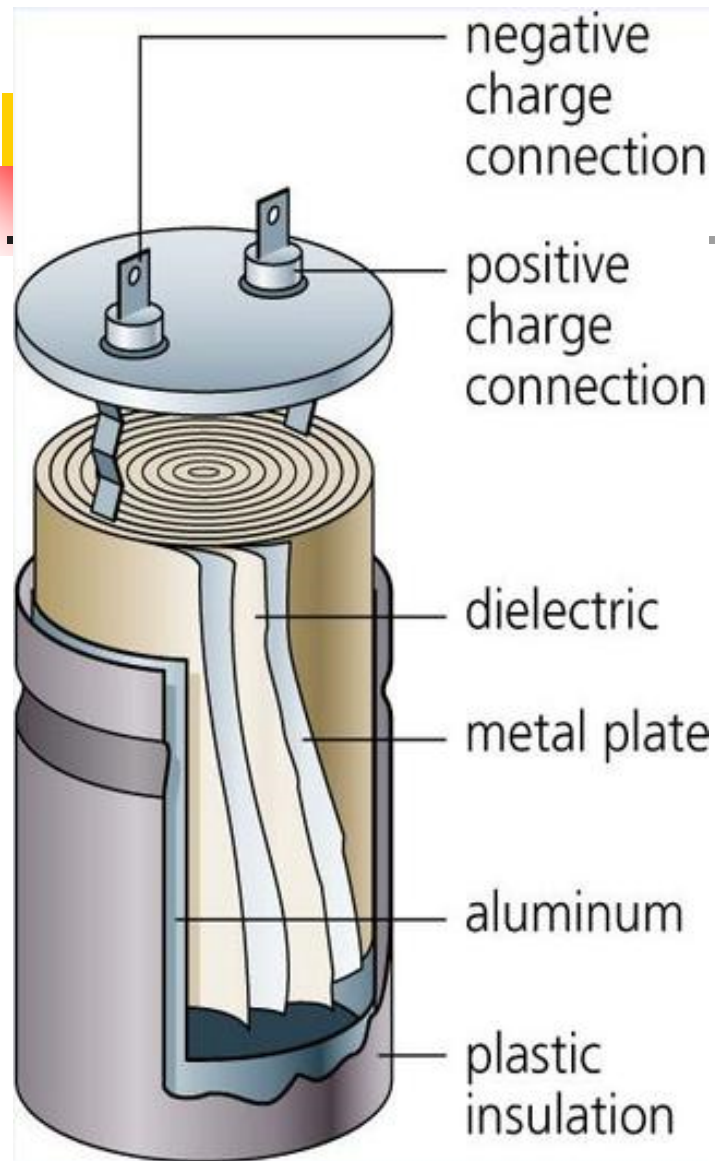
陶瓷电容器  
(20000V1000pF)



电解电容器  
(160V470  $\mu$  F)







## ■ 分类

- 结构：固定电容器、可变电容器和半可调电容器
- 介质：无机介质、有机介质、电解电容器、液体介质
- 用途：高频旁路、低频旁路、滤波、调谐、高频耦合、低频耦合、小型电容器。

## ■ 作用：通交流、阻直流

- 隔直流：作用是阻止直流通过而让交流通过。
- 旁路：为交流电路中某些并联的元件提供低阻抗通路。
- 滤波：将整流的锯齿波变为平滑的脉动波。
- 整流：在预定的时间开或者关闭半导体开关元件。
- 储能：储存电能，用于必须的时候释放。

# 几种典型的电容器的电容

- 平板电容器，两极板面积  $S$ ，  
两极间距  $d$  ( $S \gg d^2$ )

【解】 令两极板分别带电量  $\pm Q$ ，  
则：

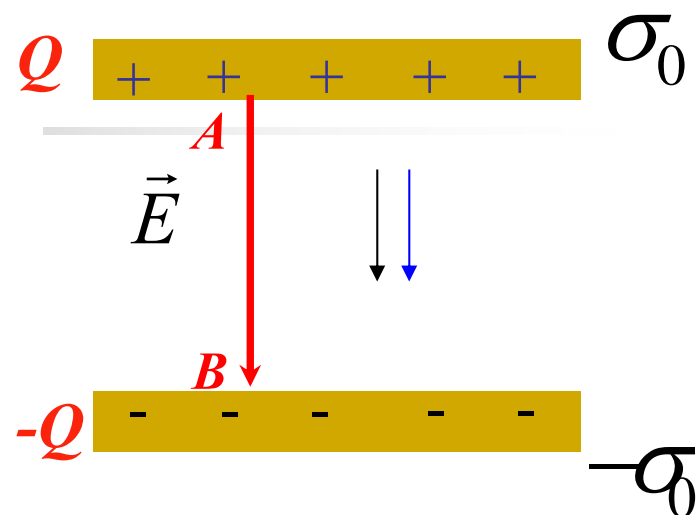
极间电场强度：  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$

两级间电势差：  $\Delta U = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$

电容器的电容：  $C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$

$C \propto S$ ， $S$  为有效面积，即两极板相对之面积；

$C \propto 1/d$ ，对其它形状电容器也适用； $C$  与极间  
介质有关



$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

## ■ 同心导体球壳

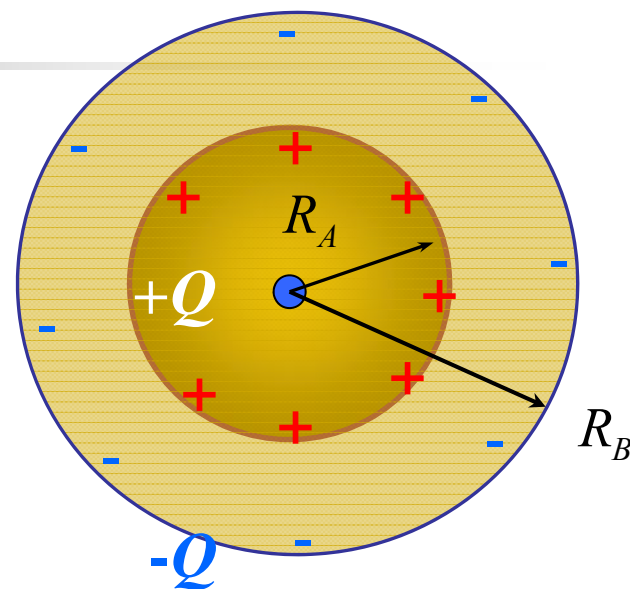
■ 设内球面半径 $R_A$ ，外球面半径 $R_B$ ，带电量为 $Q$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$U_{AB} = U_A - U_B = \int_{R_A}^{R_B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_{R_A}^{R_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)$$

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_A R_B}{R_B - R_A}$$



• 当 $R_A, R_B \gg R_B - R_A$ 时，可令 $R_B - R_A = d$ ， $R_B R_A = R^2$ ，  
则同平板电容器  $C = 4\pi\epsilon_0 R^2 / d = \epsilon_0 S / d$

• 当 $R_B \gg R_A$ 时，同孤立导体球的电容

$$C = 4\pi\epsilon_0 R_A$$

## ■ 同轴柱形导体壳

设长为 $L$ ，带电量为 $Q$ ，内半径为 $R_A$ ，外半径为 $R_B$ ，

且 $L \gg R_B - R_A$

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

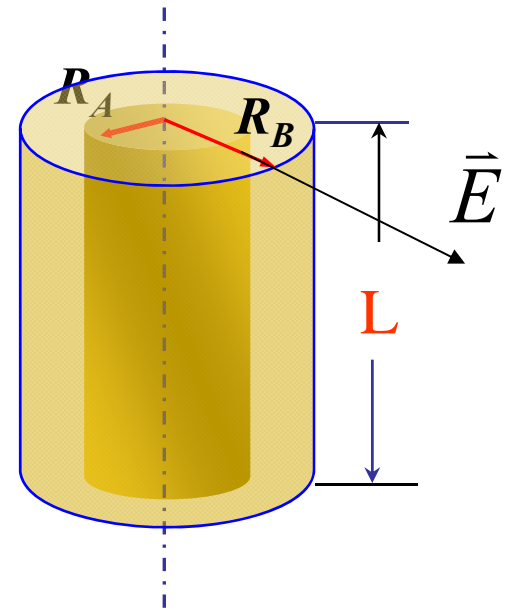
$$\because E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad \lambda = \frac{Q}{L}$$

$$U_{AB} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

$$C = Q / U_{AB}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln R_B / R_A}$$

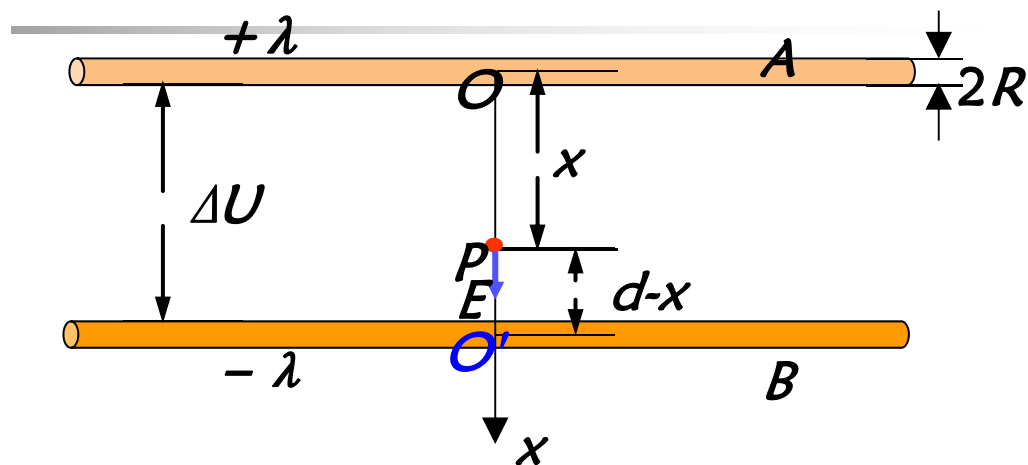




## ■ 平行直导线

设有两个半径都为 $R$ 的平行直导线,它们之间的距离为 $d$ , 且 $d \gg R$ , 求单位长度的电容 $c$

解:根据场强叠加原理:  
理:  $+\lambda$ 在 $x$ 处的电场和 $-\lambda$ 在 $(d-x)$ 处的电场相加, $E$ 的方向沿 $x$ 轴的正方向,



$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{\lambda}{x} + \frac{\lambda}{d-x} \right)$$

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_R^{d-R} E dx \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_R^{d-R} \left( \frac{\lambda}{x} + \frac{\lambda}{d-x} \right) dx \\ &= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-R}{R} \approx \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{R} \end{aligned}$$

$$c = \frac{\lambda}{\Delta U} \approx \pi\epsilon_0 / \ln(d/R)$$

## 小结

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

$$C = \epsilon_0 S / d$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_A R_B}{R_B - R_A}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln R_B / R_A}$$

### ■ 计算电容的一般方法:

- 先假设电容器的两极板带等量异号电荷
- 求出极板之间的电场强度 **E**
- 求出极板之间的电势差 **U**
- 代入定义式 **C=Q/U** 求出电容

### 三、电容器的连接

电容器的基本联接方式有两种：串联与并联。

#### 1. 电容器串联

右图给出 **$N$ 个电容器串联**的情况。由静电感应原理知，每一个电容器上带电量大小**都是 $Q$**

$$Q = C_1 U_1 = C_2 U_2 = \cdots = C_{N-1} U_{N-1} = C_N U_N,$$

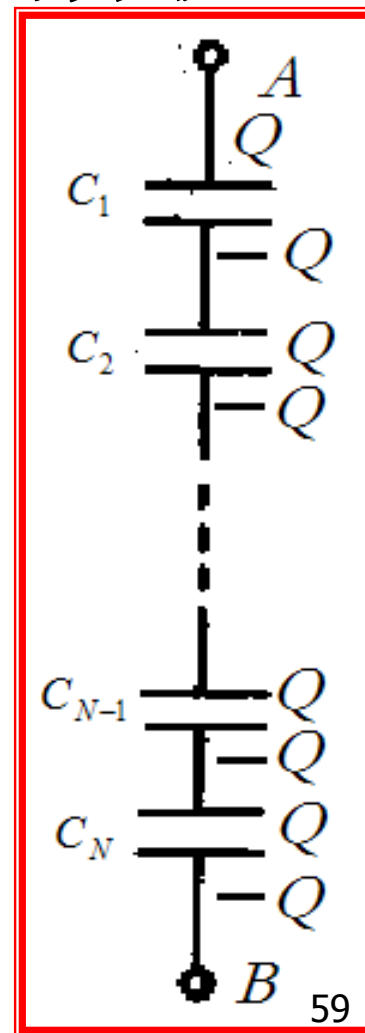
$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_N = \sum_{i=1}^N U_i = Q \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i},$$

得

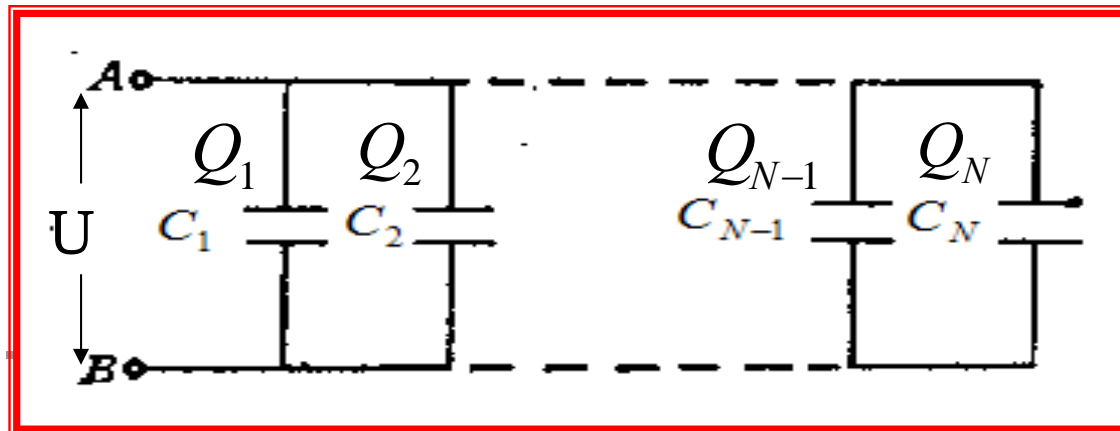
$$\frac{U}{Q} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

故有

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$



## 2. 电容器并联



右图给出 $N$ 个电容器并联的情况。 $A$ 、 $B$ 两端电势差为 $U$ ，总电量大小为 $Q$ ，则

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{N-1} + Q_N \\ &= C_1 U + C_2 U + \cdots + C_{N-1} U + C_N U. \end{aligned}$$

总电容为 $C$


$$C = \frac{Q}{U} = C_1 + C_2 + \cdots + C_{N-1} + C_N = \sum_{i=1}^N C_i.$$

并联可增加系统的电容值。相反，串联会减小电容值，但可提高整个电容器的耐压性能。

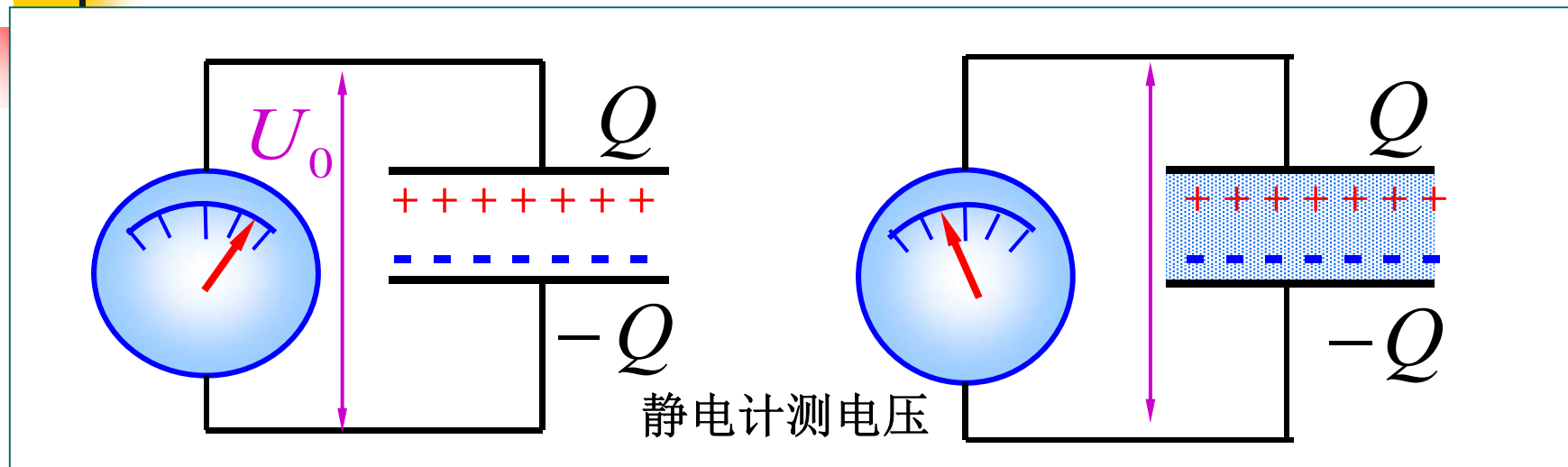
## § 2.4 电介质

### 电介质 (Dielectric)

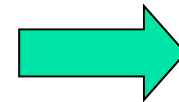
- 是由大量电中性的分子组成的电的绝缘体
- 分子中电子被原子核束缚得很紧
- 内部没有自由电荷，不能导电
- 紧束缚的正、负电荷在外场中是否发生变化？

电场  电介质  
相互作用？

# 一、法拉第实验：电介质对电场的影响



- 充电的电容器两板连接到静电器
- 静电计指针显示两板间的电势差
- 保持一切条件不变，**插入电介质**
- 静电计指示两极板间**电势差减小**



**介质与外  
电场发生  
相互作用**

# 一、法拉第实验：电介质对电场的影响

## ■ 物理原因

$$U_0 > U$$

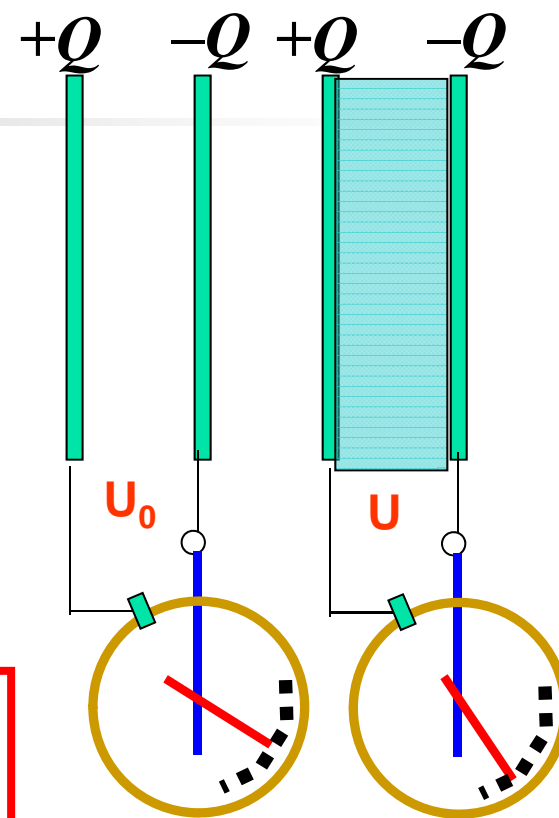
$$U = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$E'$  标志电介质的影响，  
它与外场  $E_0$  方向相反。

$$\vec{E}_0 > \vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

$$\because \vec{E} \neq 0, \\ \therefore E' \neq E_0.$$



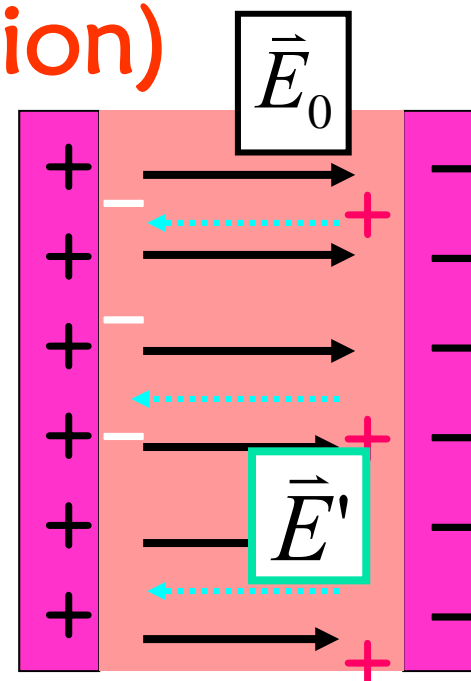
静电计测电压

## 二、介质极化 (polarization)

$\vec{E}'$  与  $\vec{E}_0$  反向

只有电荷才能  
产生电场

电介质的表面出现了与极板电荷异号的电荷



**极化电荷**：电介质表面出现的这种电荷只能在分子范围内移动，与电介质是不可分离的，称为**极化电荷**或**束缚电荷**。

电介质在外电场作用下，其表面甚至内部出现极化电荷的现象，叫做**电介质的极化**。

电介质中的总电场为两个电场之和： $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \neq 0$



### 三、介质微观结构

#### ■ 重心模型:

- 在分子中，所有正点荷和所有负点荷分别集中于两个几何点上，此点称为正、负电荷的重心。
- 电荷分布和其重心都是对“时间”的一种平均。

#### ■ 介质分类

电介质分子可分为有极和无极两类

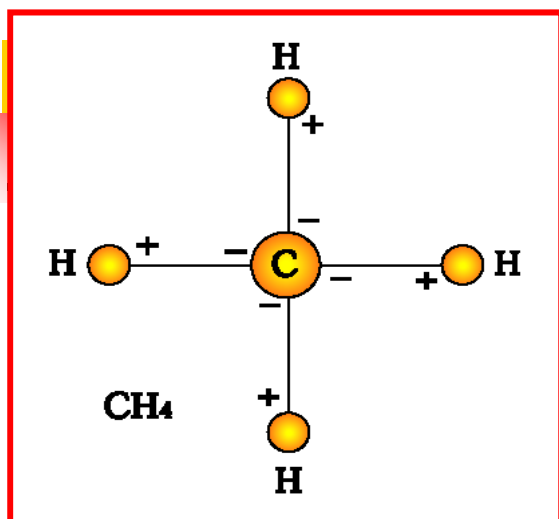
- 无极分子：分子电荷的正、负“重心”重合，在无外场作用下整个分子无固有电偶极矩。如：

He, Ne, O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, CH<sub>4</sub> ...

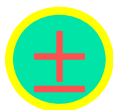
- 有极分子：分子电荷的正、负“重心”分开，在无外场作用下整个分子有固有电偶极矩，如：

水, HCl, NH<sub>3</sub>, CH<sub>3</sub>OH ...

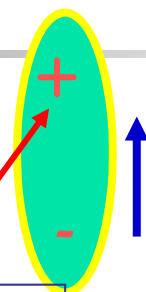
## 无极分子



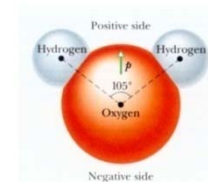
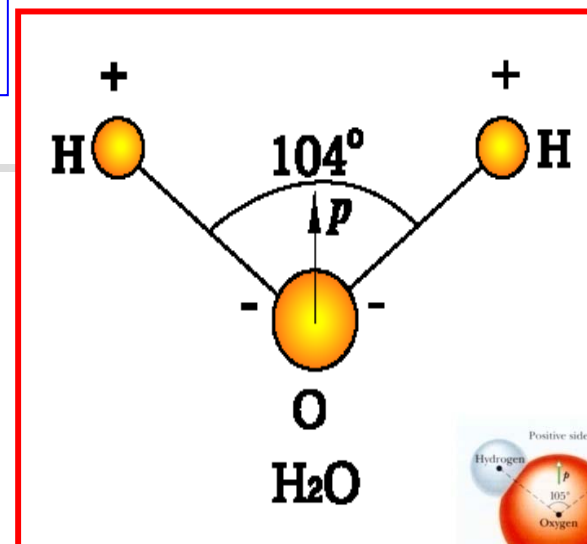
$$p = qL$$



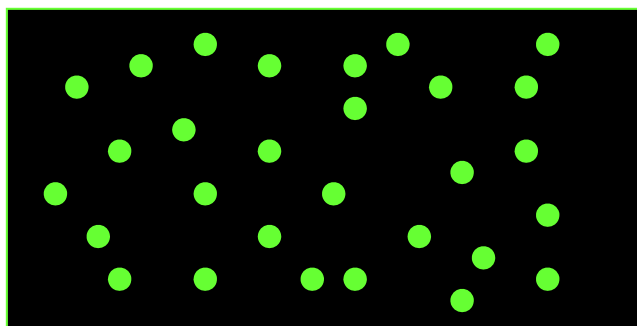
电子云的  
正电中心



## 有极分子

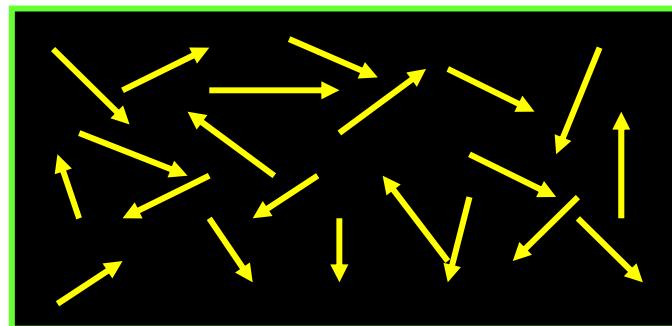


无外场时(热运动)



无序排列  
对外不呈  
现电性!

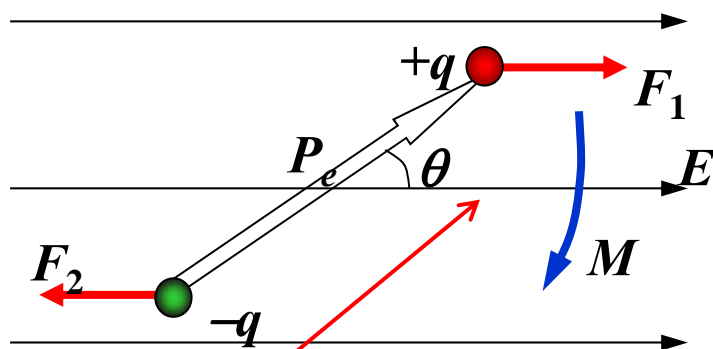
整体对外不显电性



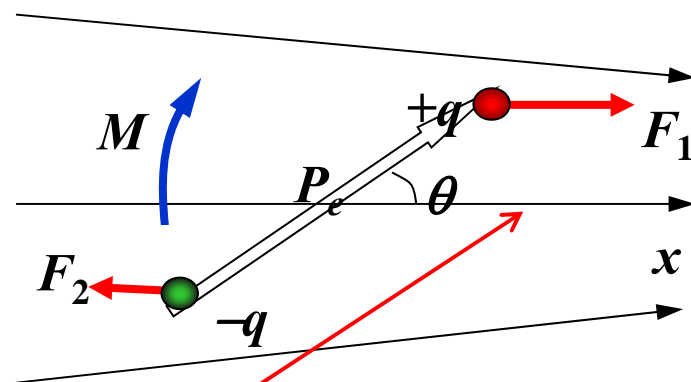
$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

电偶极子在 $\mathbf{E}$ 中的受力



电偶极子在 $\mathbf{E}$ 中的力矩



$\Sigma \mathbf{F} = 0$  (均匀电场) ;  $\Sigma \mathbf{F} \neq 0$  (非均匀电场)

均匀外场中电偶极子不受力;

在外电场力矩作用下,  $\mathbf{p}$ 总是朝向 $\mathbf{E}$ 一致的方向偏转。

## 四、极化微观模型

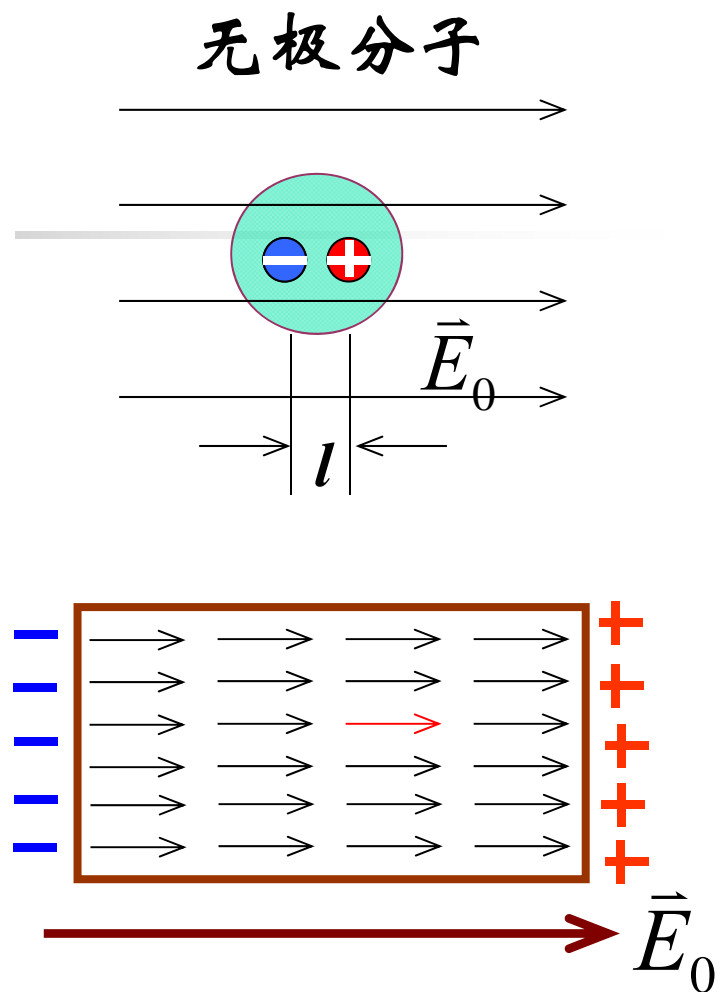
### (1) 无极分子的极化

- 在进入外电场前，无极分子的正、负电荷重心重合，没有电偶极矩。

$$\mathbf{p}_{\text{分子}} = 0$$

$$\sum \mathbf{p}_{\text{分子}} = 0$$

- 进入外场后，在电场的作用下，正、负电荷的中心发生位移，不再重合，形成电偶极子，表面出现束缚电荷。
- 这时极化是电荷重心相对位移的结果，称为位移极化。



位移极化

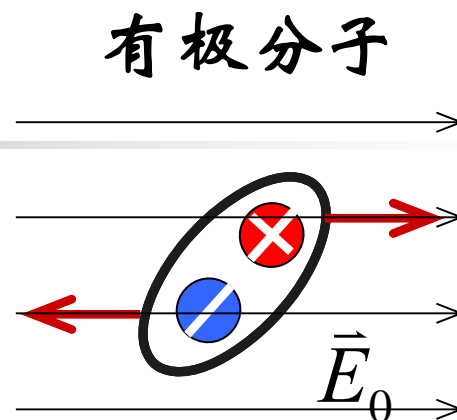
$$\sum \vec{p}_{\text{分子}} \neq 0$$

## (2) 有极分子的极化

- 进入外场前有极分子就相当于一个电偶极子，只是由于热运动而排列无序。

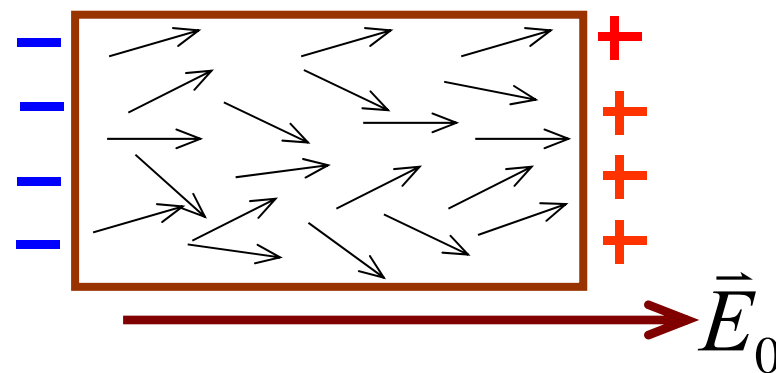
$$\mathbf{p}_{\text{分子}} \neq 0$$

$$\sum \mathbf{p}_{\text{分子}} = 0$$



- 进入外场后，分子受到力矩的作用而发生偏转，电偶极矩转向外场方向。所以，这种极化称为取向极化。

$$\sum \mathbf{p}_{\text{分子}} \neq 0$$



取向极化

## 几点说明：

- 在外电场中，均匀介质内部各处仍呈电中性，只在介质表面出现极化电荷。
- 极化电荷不能离开电介质到其它带电体，也不能在电介质内部自由移动，它不象导体中的自由电荷能用传导方法将其引走。
- 介质极化：无电荷宏观移动，只有微观迁移，对应束缚电荷的变化；静电感应：有自由电荷的宏观移动，出现感应电荷。
- 无外场下，所具有的电偶极矩称为固有电偶极矩；有外电场时，产生的电偶极矩称感应电偶极矩（约是前者的 $10^{-5}$ ）。
- 无极分子只有位移极化，感生电矩的方向沿外场方向；有极分子有上述两种极化机制，取向极化远强于位移极化（约大一个量级）。
- 极化电荷的电场使介质中实际电场减弱。

## 电介质与导体的区别

	电介质	导体
导电性	不导电	导电
在静电场中	电子和原子核在电场力作用下在原子范围内作 <b>微观的相对位移</b>	自由电子在电场力作用下脱离所属原子作 <b>宏观移动</b>
静电平衡时	内部场强 <b><math>E \neq 0</math></b>	内部场强 <b><math>E = 0</math></b>



## § 2.5 极化强度矢量 $\mathbf{P}$

---

一、极化强度矢量 $\mathbf{P}$

二、 $\mathbf{P}$ 与极化电荷的关系

三、 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{E}$ 的关系

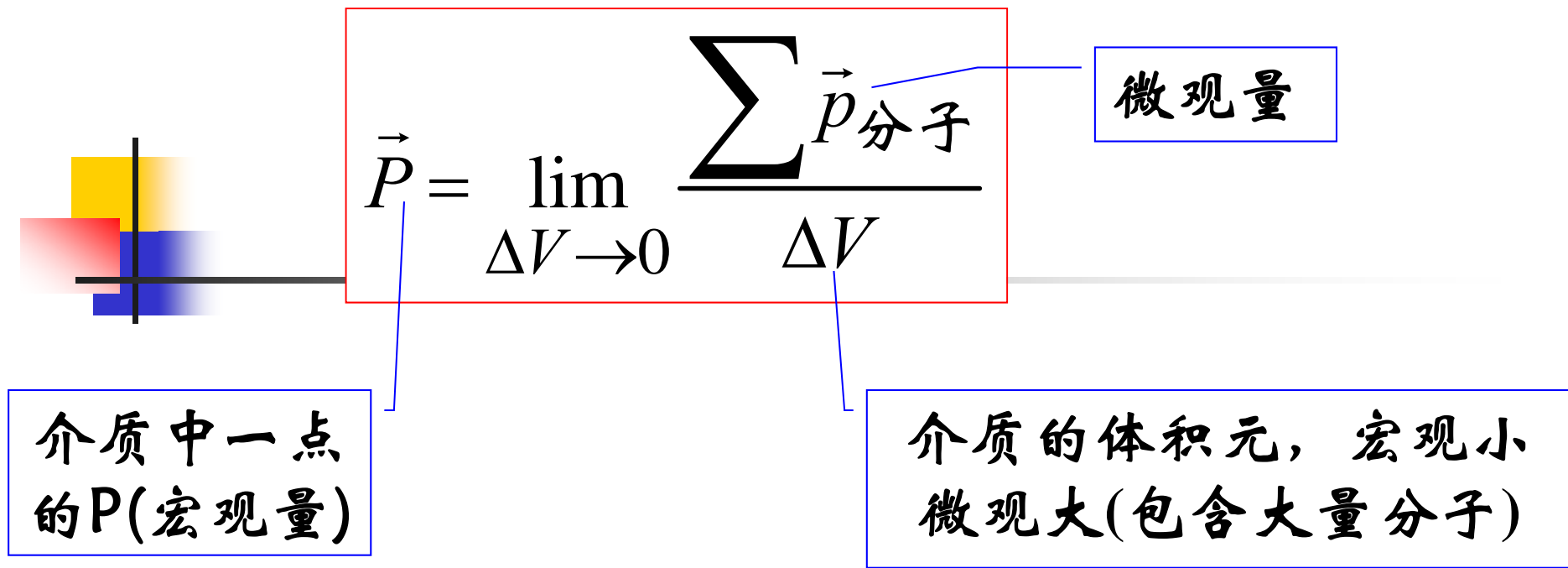


# 一、极化强度矢量 $\vec{P}$ (electric polarization)

- 引入：电介质极化后，在其内部任意一宏观体积元  $\Delta V$  内  $\sum \vec{p}_{\text{分子}} \neq 0 \rightarrow$  如何定量描述介质的极化？
- **定义**：单位体积内分子电偶极矩的矢量和。

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_{\text{分子}}}{\Delta V} \quad \text{or} \quad \vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_{\text{分子}}}{\Delta V}$$

- 描述介质在外电场作用下被极化程度和方向的量
- 单位：库仑/米<sup>2</sup>， **C · m<sup>-2</sup>**。



$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_{\text{分子}}}{\Delta V}$$

介质中一点的P(宏观量)

微观量

介质的体积元, 宏观小  
微观大(包含大量分子)

- 极化强度是一个**宏观矢量**的点函数, 其微观值无意义。
- 电介质中**每一个点有唯一的极化强度**, 各处的**P**值相同, 则称电介质在电场中均匀极化。
- **P**反映**分子电矩p<sub>分子</sub>**的**大小和空间有序化程度**

## ■ 极化电荷

- 从原来处处电中性变成出现了**宏观的极化电荷**
- 可能出现在介质表面 (均匀介质), 面分布
- 可能出现在整个介质中 (非均匀介质), 体分布


$$q'(\sigma', \rho')$$

## ■ 退极化场

- **极化电荷会产生电场**——附加场(**退极化场**)
- 极化过程中: 极化电荷与外场相互影响、相互制约, 过程复杂——达到平衡(不讨论过程)
- **平衡时总场**决定了介质的极化程度

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

# 极化的后果


$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P} \\ q'(\sigma', \rho') \\ \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \end{array} \right\} \text{描绘极化}$$

- 三者从不同角度定量地描绘同一物理现象——介质极化
- 它们间必有联系，这些关系——电介质极化遵循的规律

## 二、P与极化电荷的关系

1) P与 $\rho'_e$ 关系: 以位移极化为模型讨论

$$\mathbf{p}_{\text{分子}} = q\mathbf{L}, \quad \mathbf{P} = n\mathbf{p}_{\text{分子}} = nq\mathbf{L}$$

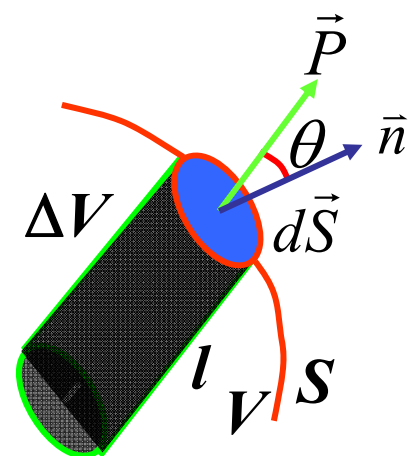
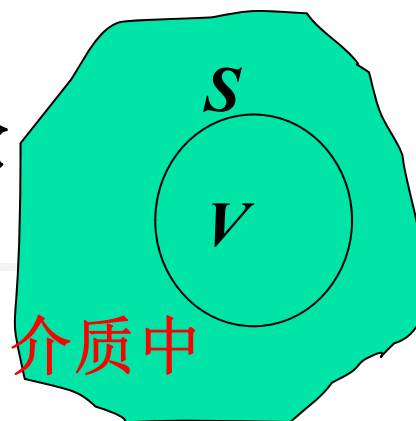
- 在介质中取一长 $l$ 、底面积 $dS$ 斜柱体
- 其中 $l$ 是平均分子正、负电荷中心距
- 设 $\mathbf{L}$ 矢量穿过 $dS$ , 每个分子对 $dV$ 内电量贡献为 $-q$
- $dV$ 内电量可记为 $dq'$ , 分子数密度 $n$ :

$$\begin{aligned} dq' &= -nq dV = -nq(l dS \cos \theta) \\ &= -nq \mathbf{L} \cdot d\mathbf{S} = -\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned}$$

又  $dq' = \rho'_e dV$ , 两右边相等,  
故:

$$\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -\iiint_V \rho'_e dV$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho'_e$$



$$\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -\iiint_V \rho'_e dV = -Q';$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho'_e$$

- 均匀介质，均匀极化： $\mathbf{P}$ 是常矢量， $\rho' = 0$
- 非均匀介质：非均匀极化， $\mathbf{P}$ 是空间位置矢量， $\rho' \neq 0$

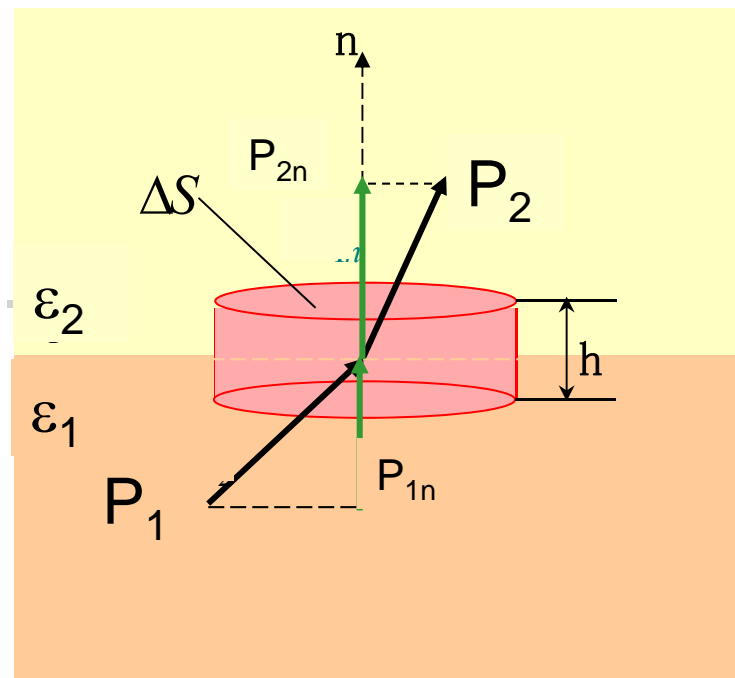
## 2) $\mathbf{P}$ 与 $\sigma'_e$ 关系

- 在介质分界面取一面元  $\Delta S$
- 过 $\Delta S$ 作扁盒型高斯面,  $h$ 小

$$\therefore Q' = -\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\therefore \sigma'_e dS = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\sigma'_e = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n}$$

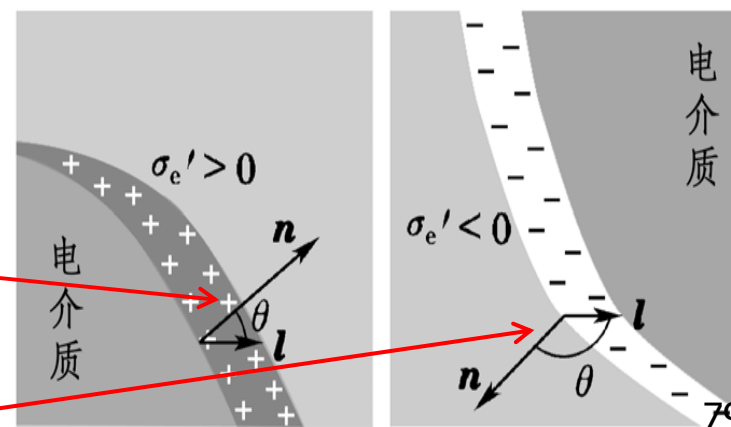


电介质2为真空时

$$\sigma'_e = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}, \mathbf{P}_2 = 0)$$

$$\theta < 90^\circ, \sigma'_e = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_n > 0$$

$$\theta > 90^\circ, \sigma'_e = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_n < 0$$





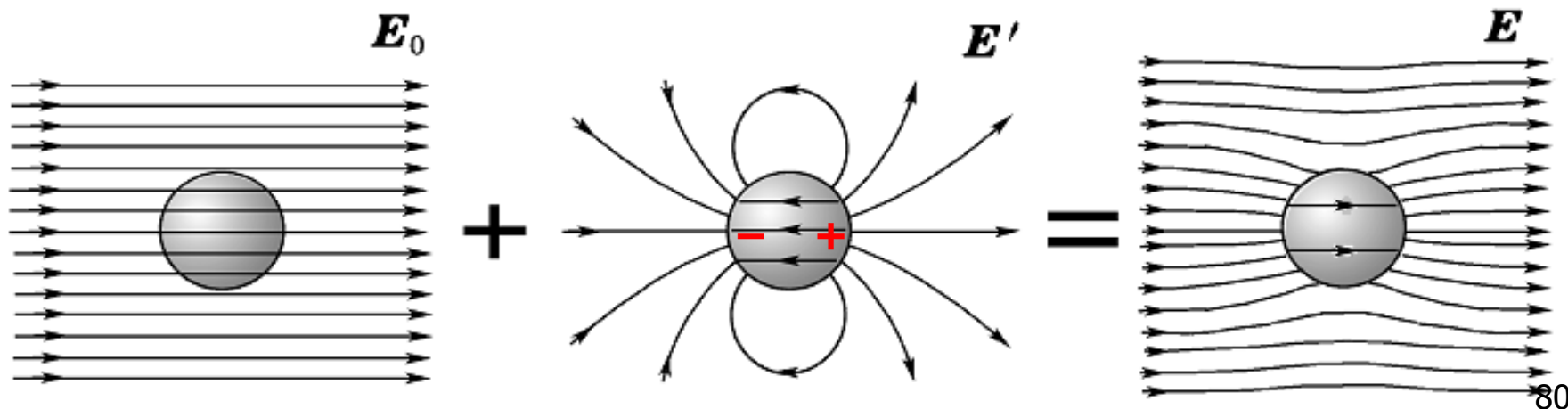
# 退极化场

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

$\vec{E}_0 \longrightarrow$  介质极化  $\longrightarrow q'(\sigma'_e) \longrightarrow \vec{E}'$

影响

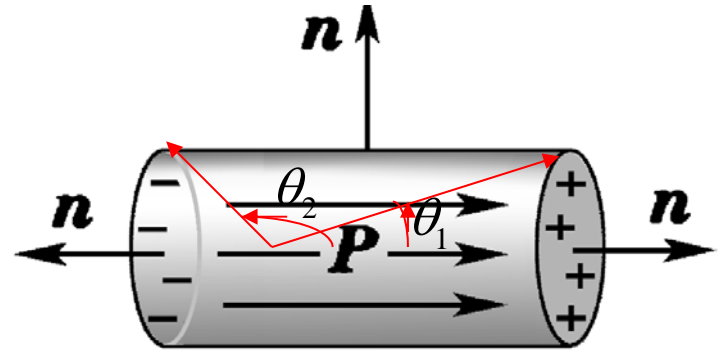
- 在电介质内部:  $\mathbf{E}'$  是由极化电荷产生的附加场, 与外场  $\mathbf{E}_0$  方向相反, 起着减弱极化的作用, 称作退极化场
- 在电介质外部: 附加场大部分与外电场方向相同, 加强



**[例2.3]** 沿轴**均匀极化**的电介质圆棒；棒长**2l**，半径**R**，极化强度矢量**P**。求极化电荷的分布和体内轴线上的**E'**。

**[解]**

1) **P**是常数  $\rho'_e = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$



2)  $\sigma'_e = \vec{P} \cdot \vec{n}$ ; 左面  $\theta = \pi, \sigma'_e = -P$

侧面  $\theta = \frac{\pi}{2}, \sigma'_e = 0$ ; 右面  $\theta = 0, \sigma'_e = P$

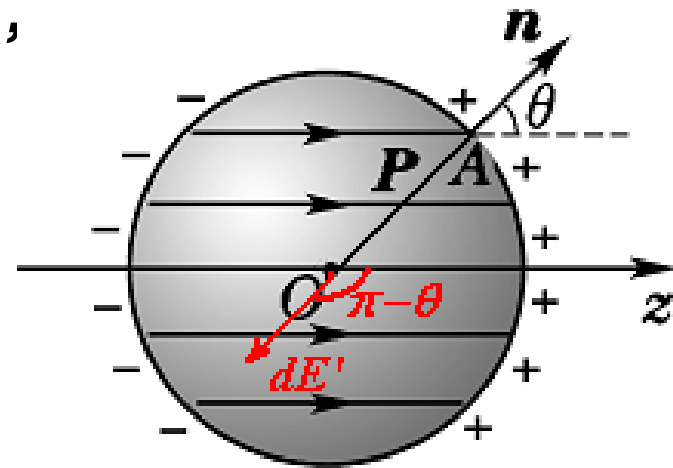
3) 退极化场等效与两圆盘产生的电场，由[例1.10]

可推出：
$$\vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{2\varepsilon_0} (2 - \cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

**[例2.4]** 均匀极化的电介质球，半径为 $R$ ，极化强度矢量 $\mathbf{P}$ ，求表面上极化电荷分布和球心处的退极化场

**[解]** (1) 球关于 $z$ 轴旋转对称，其表面任意一点的极化电荷面密度 $\sigma'_e$ 只与 $\theta$ 有关，则有：

$$\sigma'_e = P \cos \theta \begin{cases} \text{右半球, } \theta < 90^\circ, \sigma'_e > 0 \\ \text{左半球, } \theta > 90^\circ, \sigma'_e < 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2}, \sigma'_e = 0; \quad \theta = 0, \pi, |\sigma'_e| \text{最大} \end{cases}$$



(2) **球心退极化场**  $dq' = \sigma' dS = P \cos \theta dS = P \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$   
 化场：(取小面元  $d\vec{E}' = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{R^3} \vec{R}$   $\vec{E}' = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$   
 $dS$ , 极化电荷为 $dq'$ )

### 三、P与E的关系

#### ■ 极化规律： $\mathbf{P} \propto \mathbf{E}$

- 电介质内任一点的 $\mathbf{P}$ 是由在该点的总电场 $\mathbf{E}$ 决定的。
- 不同的电介质极化规律不同，可由实验来测定

#### ■ 介质分类：

根据介质极化规律的不同，可将介质分为：

- 各向同性电介质
- 各向异性电介质
- 铁电体
- 永电体

## ■ 各向同性电介质


- **P**和**E**方向相同，且有简单的正比关系

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

- 电极化率  $\chi_e \geq 0$
- 当场强不是很大是， $\chi_e$ 与**E**无关，为线性介质
- 当场强很大时， $\chi_e$ 与**E**有关，为非线性介质

## ■ 各向异性电介质

- **P**与**E**不平行，关系较为复杂
- $\chi_e$ 常表示为张量形式，称做极化率张量
- 对线性介质，极化率张量与**E**无关，且为对称张量



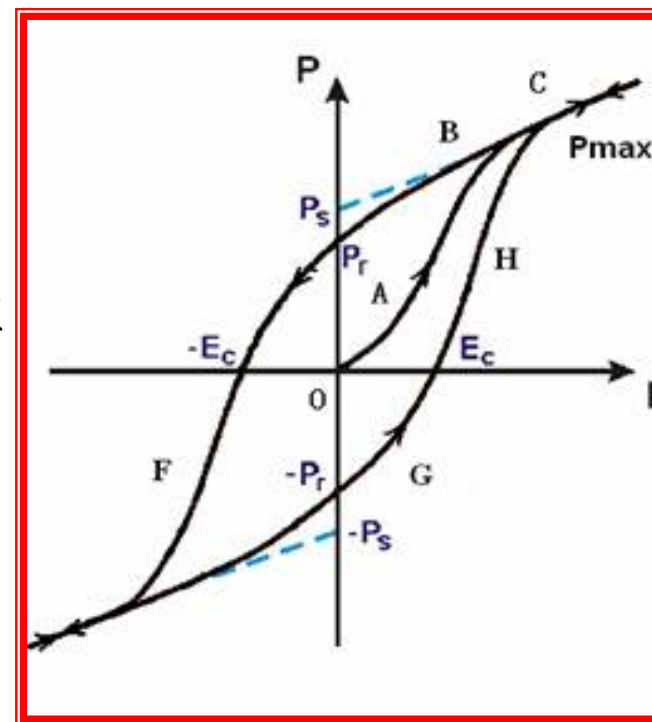
$$\begin{cases} P_x = (\chi_e)_{xx}\varepsilon_0 E_x + (\chi_e)_{xy}\varepsilon_0 E_y + (\chi_e)_{xz}\varepsilon_0 E_z, \\ P_y = (\chi_e)_{yx}\varepsilon_0 E_x + (\chi_e)_{yy}\varepsilon_0 E_y + (\chi_e)_{yz}\varepsilon_0 E_z, \\ P_z = (\chi_e)_{zx}\varepsilon_0 E_x + (\chi_e)_{zy}\varepsilon_0 E_y + (\chi_e)_{zz}\varepsilon_0 E_z. \end{cases}$$

对称张量，即  $(\chi_e)_{xy} = (\chi_e)_{yx}$ ， $(\chi_e)_{xz} = (\chi_e)_{zx}$ ，  
 $(\chi_e)_{yz} = (\chi_e)_{zy}$ 。

## ■ 铁电体

- 极化状态不仅决定于电场，还与极化历史有关
- 铁电体极化过程中极化强度矢量 $\mathbf{P}$ 随外场的变化曲线是非线性的，出现电滞回线，有剩余极化强度；
- 极化强度 $\mathbf{P}$ 和电场强度 $\mathbf{E}$ 有复杂的非线性关系， $\chi_e$ 不是常量，它随 $\mathbf{E}$ 变，最大可达几千；
- 当温度超过某一温度时，铁电性消失，这一温度叫做居里温度；
- 铁电体同时也是压电体，但压电体不一定是铁电体
- 典型的铁电体有酒石酸钾钠单晶、钛酸钡陶瓷等

## 电滞回线



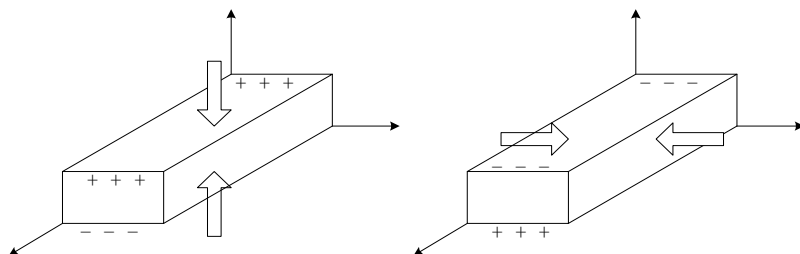
### C: 饱和点

**$P_r$ ：** 剩余极化强度



## ■ 正压电效应

- 当**晶体**受到某固定方向**外力**的作用时，**内部就产生电极化现象**，同时在某两个表面上产生符号相反的电荷；
- 当**外力撤去**后，晶体又恢复到不带电的状态
- 当**外力作用方向改变**时，电荷的极性也随之改变；晶体受力所产生的电荷量与外力的大小成正比。



## ■ 逆压电效应

- 对晶体**施加交变电场**引起晶体机械变形的现象，又称**电致伸缩效应**。

## ■ 驻极体（永电体）

- 一种具有持久性极化的固体电介质。
- 如当蜡和松香的混合物在外加的强电场中从熔融态固化后，再除去外电场时，混合物固体会长期保持极化状态
- 驻极体可以在周围空间产生电场，因此可以类比于永磁体的一种带电体。
- 室温下驻极体的极化状态可以长期保存，但在高温下则衰减得很快。
- 驻极体可作为静电场的源，如在电容式声电换能器中，可用驻极体代替电容的一个极板，从而省去了直流偏压。



■ P与E 是否成正比(线性与非线性)

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

- 凡 $\chi_e$ 不含E的介质——线性介质
- 凡 $\chi_e$ 含E的介质——非线性介质

■ 介质性质是否随空间坐标变 (空间均匀性)

- $\chi_e$ —与空间坐标无关: 均匀介质;
- $\chi_e$ —坐标的函数: 非均匀介质

■ 介质性质是否随空间方位变 (方向均匀性)

- $\chi_e$ —标量: 各向同性介质;
- $\chi_e$ —张量: 各向异性介质

■ 以上概念是从三种不同的角度来描述介质的性质

- 空气: 各向同性、线性、一般是非均匀介质
- 水晶: 各向异性、线性介质
- 酒石酸钾钠、钛酸钡: 各向同性非线性介质——铁电体

# 感应、自由 极化、束缚

- **感应电荷**：导体中自由电荷在外电场作用下作宏观移动使导体的电荷重新分布——感应电荷
  - 特点：导体中的感应电荷是自由电荷，可以从导体的一处转移到另一处，也可以通过导线从一个物体传递到另一个物体
- **极化电荷**：电介质极化产生的电荷
  - 特点：极化电荷起源于原子或分子的极化，因而总是牢固地束缚在介质上，既不能从介质的一处转移到另一处，也不能从一个物体传递到另一个物体。若使电介质与导体接触，极化电荷也不会与导体上的自由电荷相中和。因此往往称极化电荷为束缚电荷。

# 束缚电荷 $\longleftrightarrow ? \longleftrightarrow$ 极化电荷 否!

- 用摩擦等方法使绝缘体带电
  - 绝缘体上的电荷——束缚电荷
  - 实际上它是一种束缚在绝缘体上的自由电荷
  - 并非起源于极化，因而可能与自由电荷中和
- 介质在随时间变化的电场作用下
  - 由极化产生的极化电荷——束缚电荷(约束在原子范围内)
  - 不可能与自由电荷中和
  - 但它能变化并产生电流——极化电流，由  $\partial P / \partial t$  决定
- 自由、束缚是指电荷所处的状态；
- 感应、极化或摩擦起电是指产生电荷的原因

**[例2.5]**平行板电容器间充满极化率为 $\chi_e$ 的均匀线性各向同性介质，极板自由电荷面密度为 $\sigma_{e0}$ ，求介质的 $\sigma'_e$ 、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{E}$  和电容 $\mathbf{C}$

**[解]** 关键是求 $\mathbf{E}$ ，注意： $\mathbf{E}_0$ 、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{E}'$ 和 $\mathbf{E}$ 均与极板垂直

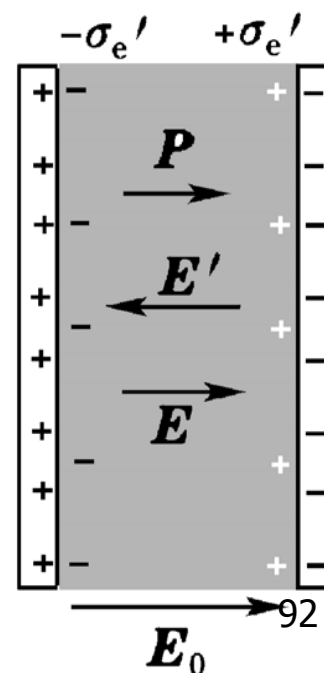
$$E = E_0 + E', \quad E_0 = \sigma_{e0} / \varepsilon_0, \quad E' = -\sigma'_e / \varepsilon_0 = -P / \varepsilon_0 = -\chi_e E$$

$$\therefore E = E_0 / (1 + \chi_e) = \sigma_{e0} / [(1 + \chi_e) \varepsilon_0]$$

$$\sigma'_e = P = \chi_e \varepsilon_0 E = \frac{\chi_e \sigma_{e0}}{1 + \chi_e}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma_{e0} S}{Ed} = \frac{(1 + \chi_e) \varepsilon_0 S}{d} = (1 + \chi_e) C_0 = \varepsilon_r C_0$$

令 $\varepsilon_r \equiv (1 + \chi_e)$ ，称相对介电常数



## § 2.6 电介质中静电场的基本定理

- 高斯定理

真空中静电场的基本定理


- 环路定理

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S \text{ 内}} q,$$

- 电位移线

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

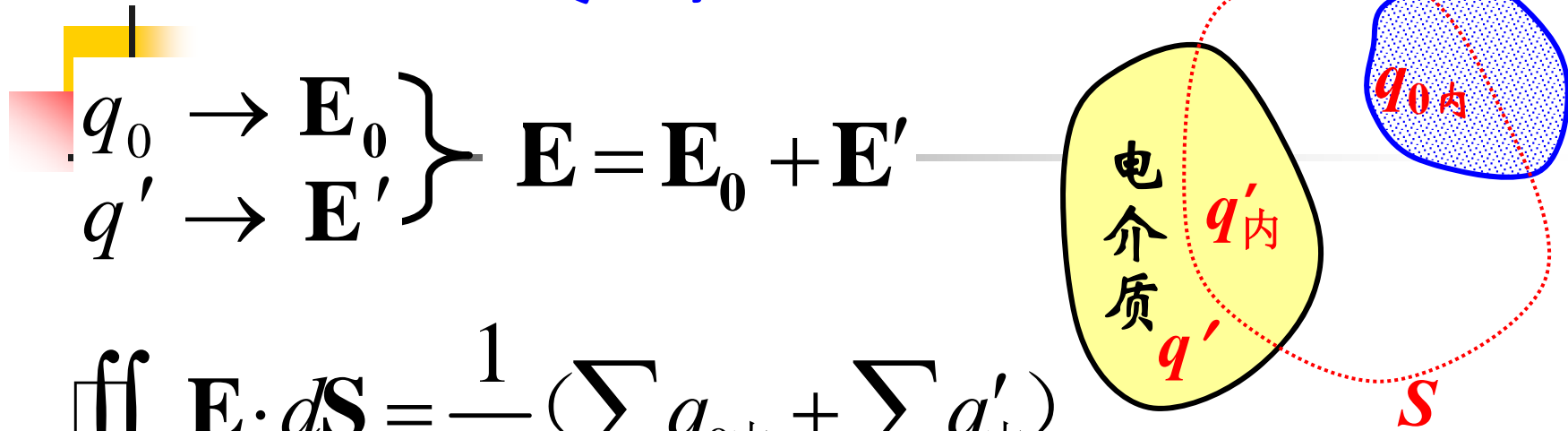
- 举例应用

- 
- 电介质在外场中会被极化，出现极化电荷
  - 不但自由电荷要激发电场  $\mathbf{E}_0$ ，电介质中的束缚电荷同样也要在它周围空间激发电场  $\mathbf{E}'$ （无论电介质内部或外部）
  - 由电场强度叠加原理，在有电介质时，某点的总电场强度

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$$



# 一、高斯定理



$$\left. \begin{array}{l} q_0 \rightarrow \mathbf{E}_0 \\ q' \rightarrow \mathbf{E}' \end{array} \right\} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$$

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sum q_{0\text{内}} + \sum q'_{\text{内}})$$

$$\text{又 } Q' = \sum q'_{\text{内}} = -\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\Rightarrow \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{0\text{内}} - \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\therefore \oiint_S (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = \sum q_{0\text{内}}$$

令  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  称  $\mathbf{D}$  为电位移矢量

于是有： 单位是  $\text{C/m}^2$  (库每平方米)

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_{0\text{内}} = Q_0$$

电介质中的  
高斯定理

对各向同性介质：  $\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}$

$$\therefore \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_r \varepsilon_0 = (1 + \chi_e) \varepsilon_0$$

$\varepsilon$  为绝对介电常数，  
 $\varepsilon_r$  为相对介电常数

如果是**带电体**，令 $\rho_{e0}$ 为自由电荷密度， $\rho'_e$ 为极化电荷密度， $\rho_e$ 为总电荷密度：

$$\rho_e = \rho_{e0} + \rho'_e$$

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho_e dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V (\rho_{e0} + \rho'_e) dV$$

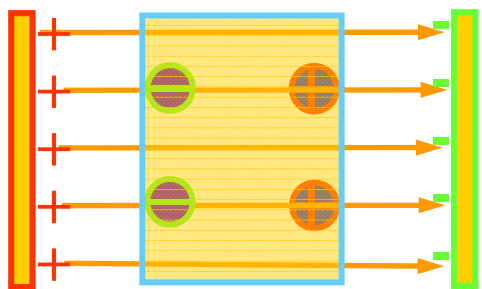
由前结果  $\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho_{e0} dV = Q_0$

可得电介质中**高斯定理微分表达式**：

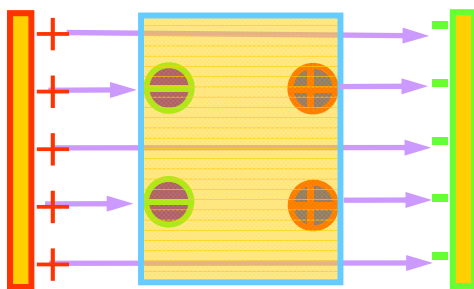
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{e0} + \rho'_e), \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{e0}$$

### 三、电位移线

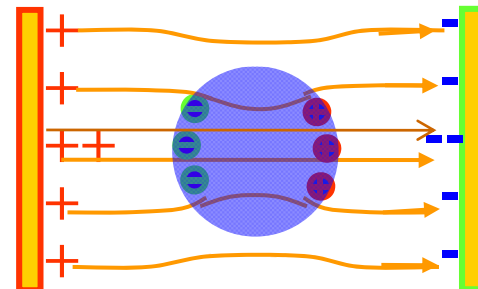
- **D**向量，是表述有电介质时电场性质的一个辅助量，在有电介质时的电场中，各点的场强都对应着一个电位移矢量。
- 仿照电场线的画法，可以作一系列电位移线，线上每点的切线方向就是该点电位移矢量的方向，并令垂直于线单位面积上通过的线条数，在数值上等于该点电位移**D**的大小。
- **D**线和**E**线：



电位移线

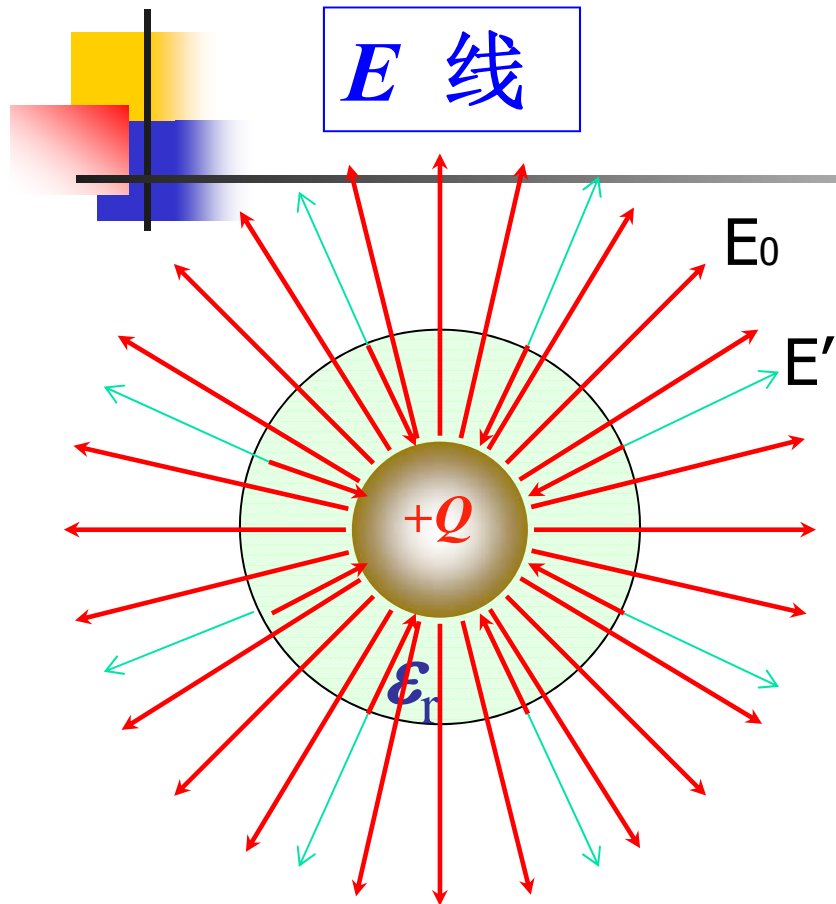


电场强度线

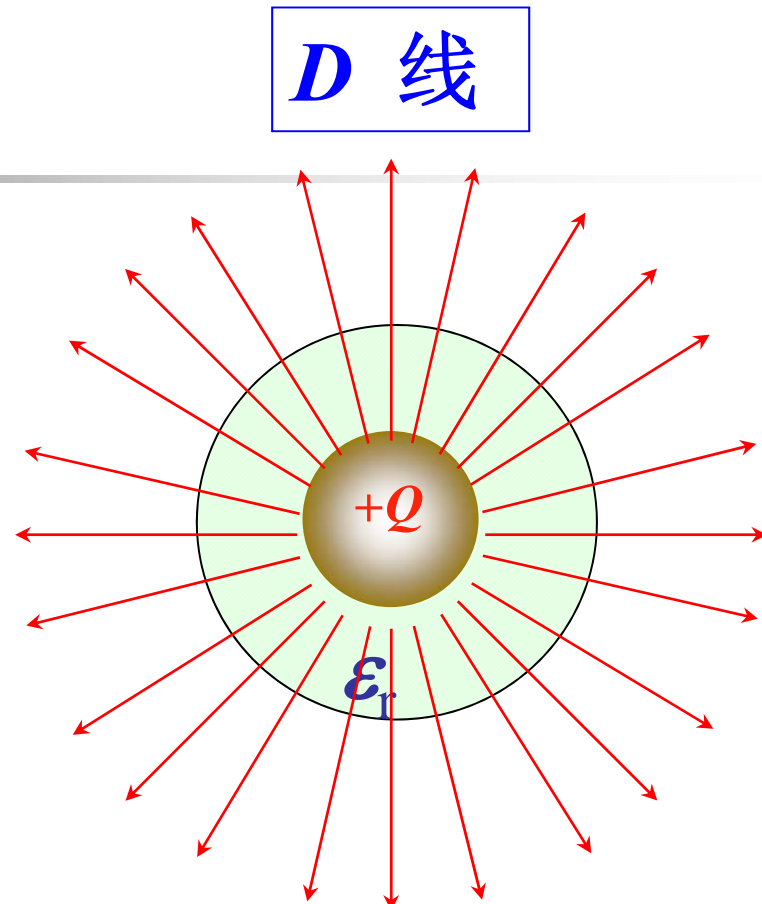


线性非均匀介质的**D**线

## 线性均匀各向同性介质情况



电力线(**E线**)不但与自由电荷有关，而且与束缚电荷有关



电位移线(**D线**)却只与自由电荷有关

## 二、环路定理

- 电介质的存在，只是增加了一些新的场源(电荷)
- 电介质的存在，并没有改变电场的基本性质
- 静电平衡时，自由电荷和极化电荷满足库仑定律，产生的电场都是静电场
- 总电场的保守场性质不变，所以仍满足环路定理：

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\text{其中 } \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$$

介质中静电场  
仍然是一个无  
旋的保守场。

## 四、举例

**[例2-6-1]**证明均匀线性各向同性介质内 $\rho_0=0$ 处必有 $\rho'=0$ 。

**[解]**  $\because \Delta q'_{\text{内}} = -\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$

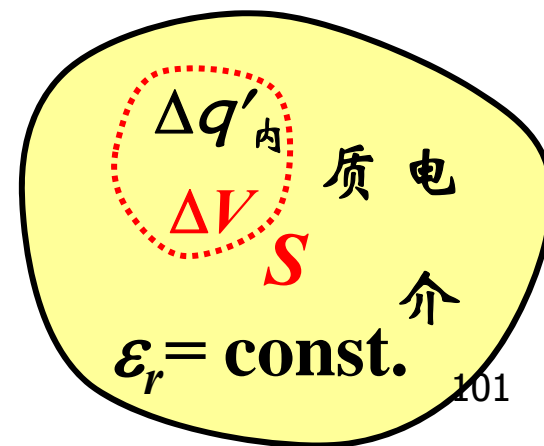
又  $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\vec{D}}{\varepsilon} = (1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\vec{D}$

$$\Delta q'_{\text{内}} = -\oiint_S (1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\vec{D} \cdot d\vec{S} = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1)\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1) \cdot \Delta q_{0\text{内}}$$

$$\rho' = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q'_{\text{内}}}{\Delta V} = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1) \cdot \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q_{0\text{内}}}{\Delta V}$$

$$= (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1)\rho_0$$

$$\therefore \rho_0 = 0 \rightarrow \rho' = 0。$$



**[例2-6-2]**求相对介电常数为  $\epsilon_r$  的无限大均匀线性各向同性电介质中点电荷  $q$  的场分布。

**[解]**： $q$  的场是球对称场，可以以电荷为球心，作球形高斯面

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q \\ D \cdot 4\pi r^2 &= q \end{aligned} \rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2} \rightarrow E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{q}{4\epsilon\pi r^2} = \frac{\epsilon_0 E_0}{\epsilon} = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$
$$U = U_0 / \epsilon_r \rightarrow C = \epsilon_r C_0 \quad D = \epsilon_0 E_0$$

介质内场强削弱了  $1/\epsilon_r$  倍；电容增加了  $\epsilon_r$  倍， $\epsilon_r$  又称为电容率。



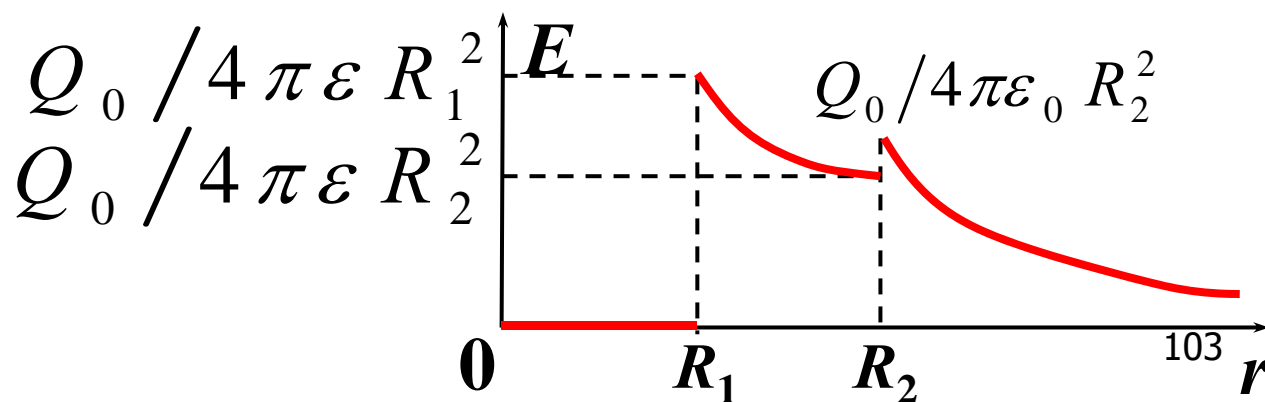
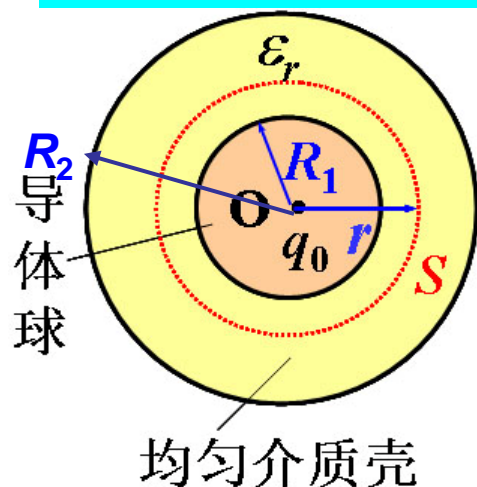
**[例2-6-3]** 导体球 $R_1$ 、 $Q_0$ 和均匀线性各向同性介质球壳 $R_2$ 、 $\epsilon_r$ . 求 $E$ 、 $\sigma'_e$ 、 $U$

**[解]** 一维对称问题。分三个区分别讨论。

1) 利用高斯定理:  $\iiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 4\pi r^2 = Q_0$

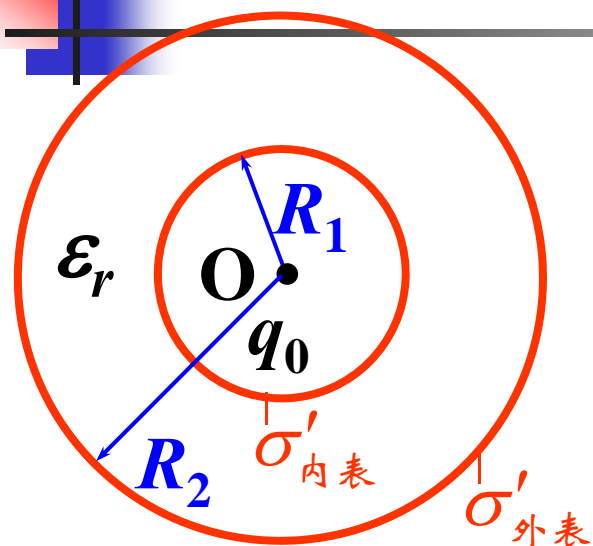
$$\begin{aligned} \bar{D} &= 0 & \bar{E}_I &= 0 & (r < R_1) \\ \bar{D} &= \frac{Q_0 \bar{r}}{4\pi r^3} & \bar{E}_{II} &= \frac{Q_0 \bar{r}}{4\pi \epsilon r^3} & (R_1 \leq r \leq R_2) \\ \bar{D} &= \frac{Q_0 \bar{r}}{4\pi r^3} & \bar{E}_{III} &= \frac{Q_0 \bar{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3} & (r > R_2) \end{aligned}$$

**思考**  
为什么曲线不连续?



## 2) 下面求极化电荷 $q'$ 的分布：

在介质内部： $\varepsilon_r = \text{常数}$ ， $\rho_0 = 0 \Rightarrow \rho'_e = 0$



$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) Q_0 \vec{r} / 4\pi \varepsilon r^3$$

$$\sigma'_{\text{内表}} = P_n \big|_{r=R_1} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) Q_0 / 4\pi \varepsilon R_1^2$$

$$\sigma'_{\text{外表}} = P_n \big|_{r=R_2} = (\varepsilon - \varepsilon_0) Q_0 / 4\pi \varepsilon R_2^2$$

$$\text{即 } \sigma'_{\text{内表}} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) \sigma_{e0} / \varepsilon$$

## 3) 导体球的电势：

$$U = \int_{R_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_{II} \cdot d\vec{r} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_{III} \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{Q_0}{4\pi \varepsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q_0}{4\pi \varepsilon_0 R_2}$$

# 小结:

真空

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S\text{内}} q$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

静电荷(自由、极化)

有介质

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S\text{内}} q_0$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

自由电荷

- 各向同性线性介质中  $\mathbf{D}$  正比于  $\mathbf{E}$
- 普遍情况下,两者关系不简单,不一定成正比关系

【例】平行板电容器内充满两层均匀电介质，电容器所加电压为  $U$ 。求：（1）电容器的电容；（2）介质表面上的极化电荷和总电荷密度。

【解】设极板上自由电荷密度为  $\pm\sigma_0$

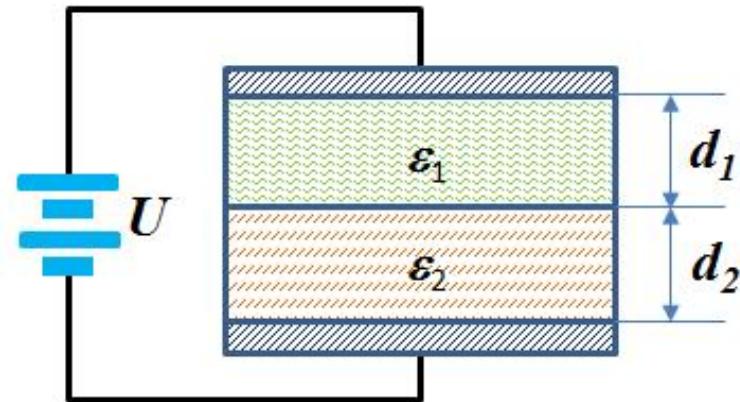
则两种电介质中的电位移矢量为：

$$D_1 = D_2 = \sigma_0$$

可得电场强度为：

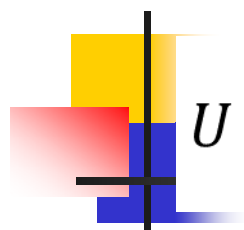
$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_1} \quad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_2}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

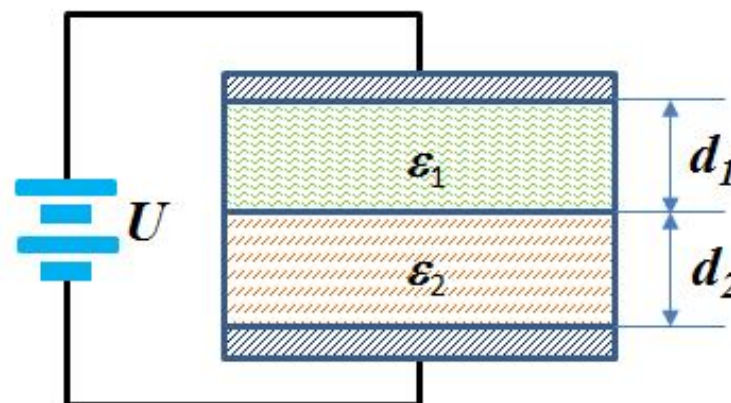


**电位移矢量连续，电场强度成比例！**

电势差为：



$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \sigma_0 \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)$$



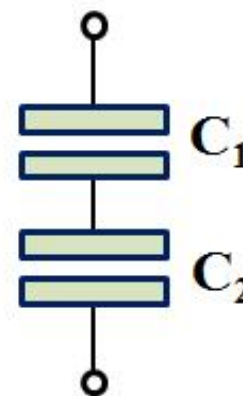
电容为：

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma_0 S}{\sigma_0 \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)} = \frac{\epsilon_0 S}{\left( \frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}} \right)}$$

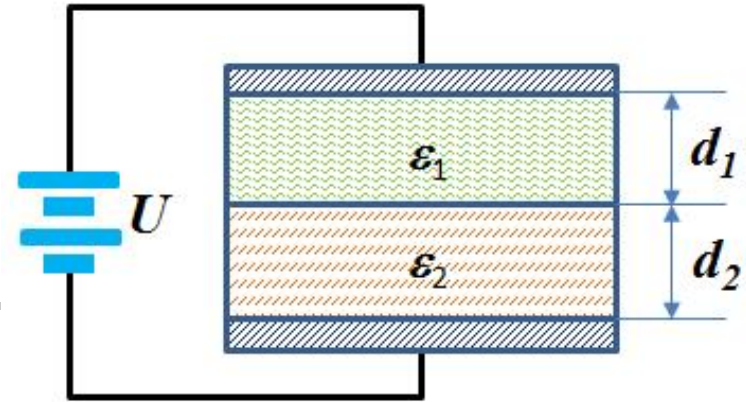
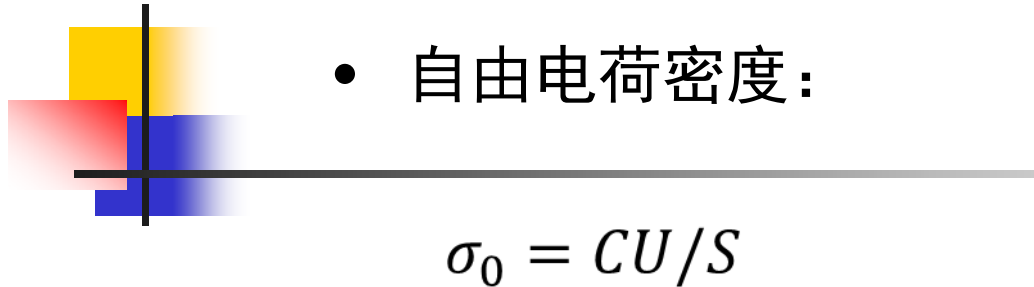
两个电容串联：

$$C_1 = \frac{\epsilon_{r1} \epsilon_0 S}{d_1} \quad C_2 = \frac{\epsilon_{r2} \epsilon_0 S}{d_2}$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{\epsilon_0 S}{\left( \frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}} \right)}$$



上极板与电介质1交界面处的电荷：



- 极化电荷密度：

$$\sigma' = -P_1 = -(\epsilon_1 - \epsilon_0)E_1 = -(\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{\sigma_0}{\epsilon_1} = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}}\right) \sigma_0$$

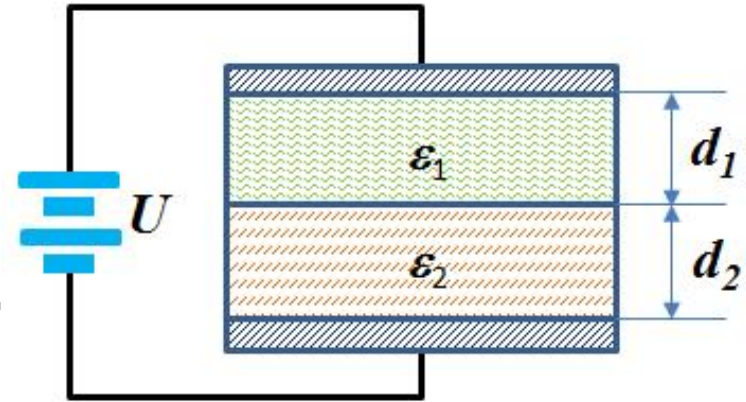
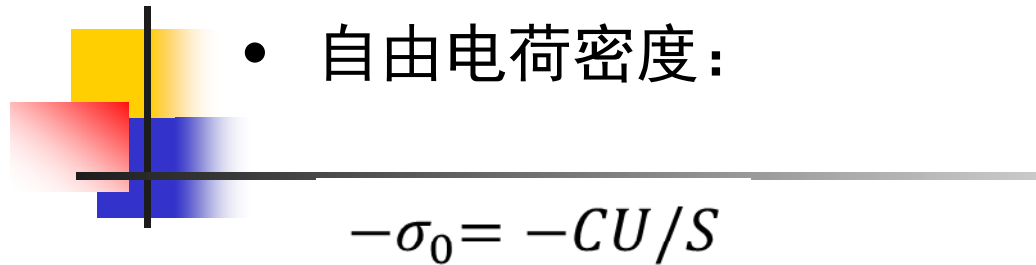
- 总电荷密度：

$$\sigma = \epsilon_0 E_1 = \frac{\epsilon_0 \sigma_0}{\epsilon_1} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_{r1}}$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma' = \frac{\sigma_0}{\epsilon_{r1}}$$

总电荷密度小于自由电荷密度

下极板与电介质2交界面处的电荷：



- 极化电荷密度：

$$\sigma' = P_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0)E_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{\sigma_0}{\epsilon_2} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r2}}\right) \sigma_0$$

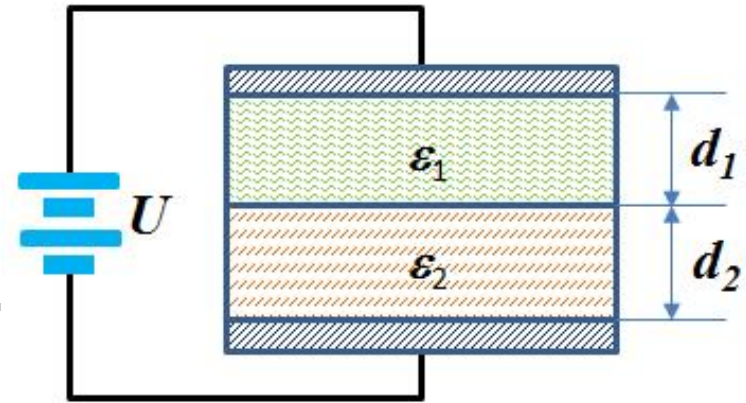
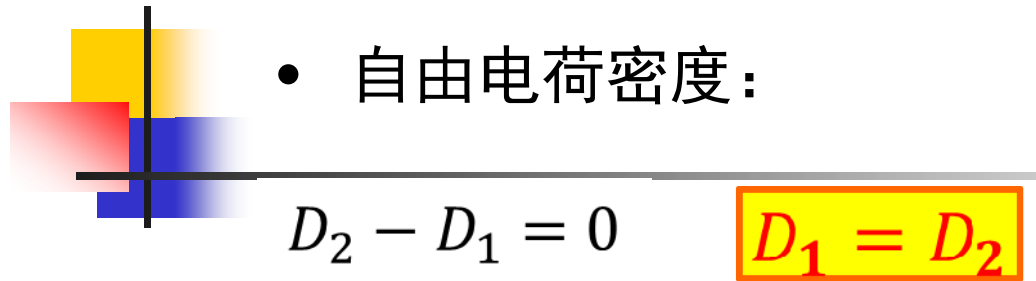
- 总电荷密度：

$$\sigma = -\epsilon_0 E_2 = -\frac{\epsilon_0 \sigma_0}{\epsilon_2} = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_{r2}}$$

$$\sigma = -\sigma_0 + \sigma' = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_{r2}}$$

上极板总电荷密度不等于下极板

电介质1与电介质2交界面处的电荷：



- 极化电荷密度：

$$\begin{aligned}\sigma' &= -(P_2 - P_1) = -\left[\left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r2}}\right)\sigma_0 - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}}\right)\sigma_0\right] \\ &= \left(\frac{1}{\epsilon_{r2}} - \frac{1}{\epsilon_{r1}}\right)\sigma_0\end{aligned}$$

- 总电荷密度：

$$\sigma = \epsilon_0(E_2 - E_1) = \epsilon_0\left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1}\right)\sigma_0 = \left(\frac{1}{\epsilon_{r2}} - \frac{1}{\epsilon_{r1}}\right)\sigma_0 \neq 0$$

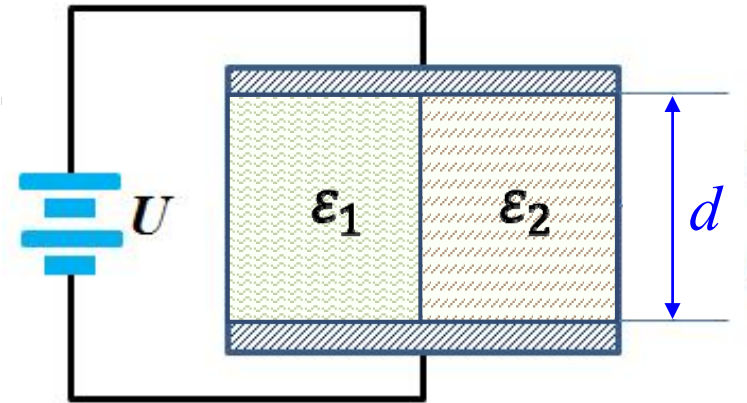


【例】平行板电容器内充满两列均匀电介质，电容器所加电压为  $U$ 。求：（1）电容器的电容；（2）介质表面上的极化电荷和总电荷密度。

【解】两种电介质中的电场强度为：

$$E_1 = E_2 = \frac{U}{d}$$

$$E_1 = E_2$$



则两种电介质中的电位移矢量为：

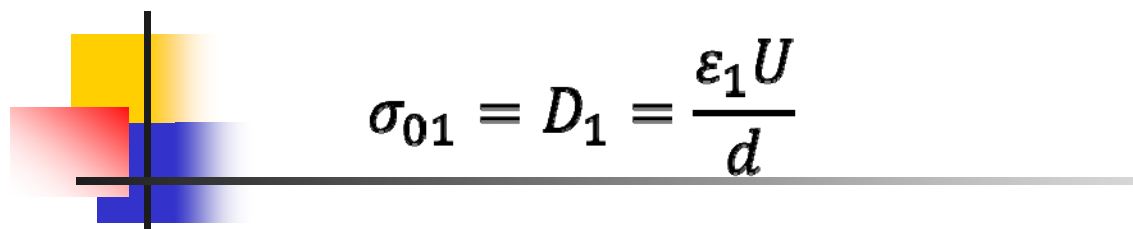
$$D_1 = \epsilon_1 E_1 = \frac{\epsilon_1 U}{d}$$

$$D_2 = \frac{\epsilon_2 U}{d}$$

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

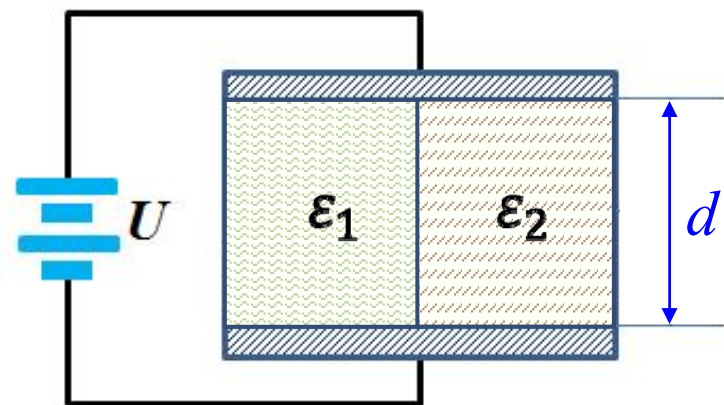
**电场强度连续，电位移矢量成比例！**

极板与两种电介质交界面上的自由电荷密度：



$$\sigma_{01} = D_1 = \frac{\epsilon_1 U}{d}$$

$$\sigma_{02} = D_2 = \frac{\epsilon_2 U}{d}$$

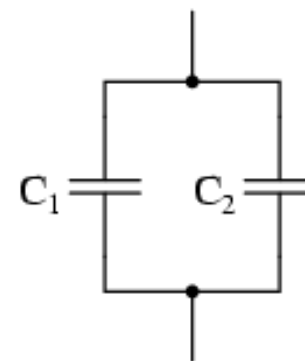


电容为：


$$C = \frac{Q}{U} = \frac{(\sigma_{01} + \sigma_{02})S/2}{U} = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)S}{2d}$$

两个电容并联：

$$C = C_1 + C_2 = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)S}{2d}$$



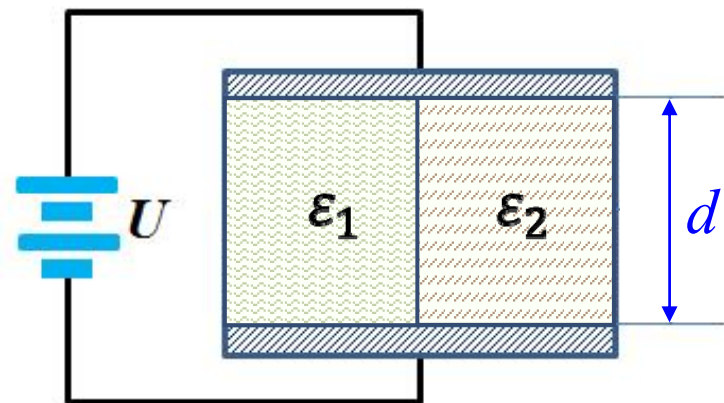
极板与两种电介质交界面上的自由电荷密度：


$$\sigma_{01} = D_1 = \frac{\varepsilon_1 U}{d} \qquad \sigma_{02} = D_2 = \frac{\varepsilon_2 U}{d}$$

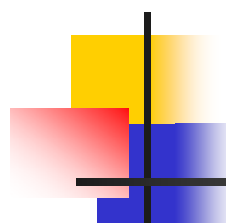
极化电荷密度：

$$\sigma'_1 = -P_1 = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)E_1 = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{U}{d}$$

$$\sigma'_2 = -P_2 = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)E_2 = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{U}{d}$$

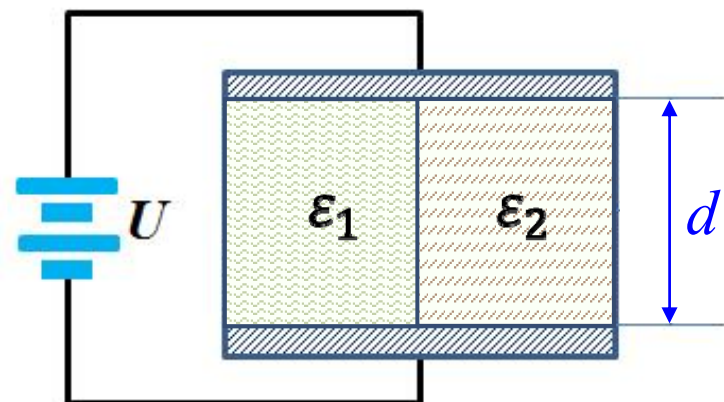


总电荷密度：


$$\sigma_1 = \sigma_{01} + \sigma'_1 = \frac{\epsilon_0 U}{d} \qquad \sigma_2 = \sigma_{02} + \sigma'_2 = \frac{\epsilon_0 U}{d}$$

$$\sigma_1 = \epsilon_0 E_1 = \frac{\epsilon_0 U}{d} = \epsilon_0 E_1 = \sigma_2$$

- 自由电荷密度不同，极化电荷不同
- 总电荷密度相同





## § 2.7 边值关系和唯一性定理

---

### 一、边值关系

电场强度      电位移矢量      电势

### 二、唯一性定理

### 三、应用举例

# 一、边值关系

- 电场内存在多种介质→介质间的**交界面**→极化电荷
- 介质未充满电场空间→导体和介质的**交界面**→极化和自由电荷
- **交界面**的存在会**影响整个空间的电场分布**  
→研究电场在交界处的行为十分重要
- 将**电场的基本方程**用到交界面上，研究界面两边电场改变的一般规律，即“**边值关系**”。

## (1) 电场强度

在介质交界面取一较小的矩形环路用环路定理:

$$\oint_{\text{矩形}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_1 \cdot (-\Delta l \cdot \vec{e}_t) + \vec{E}_2 \cdot (\Delta l \cdot \vec{e}_t)$$

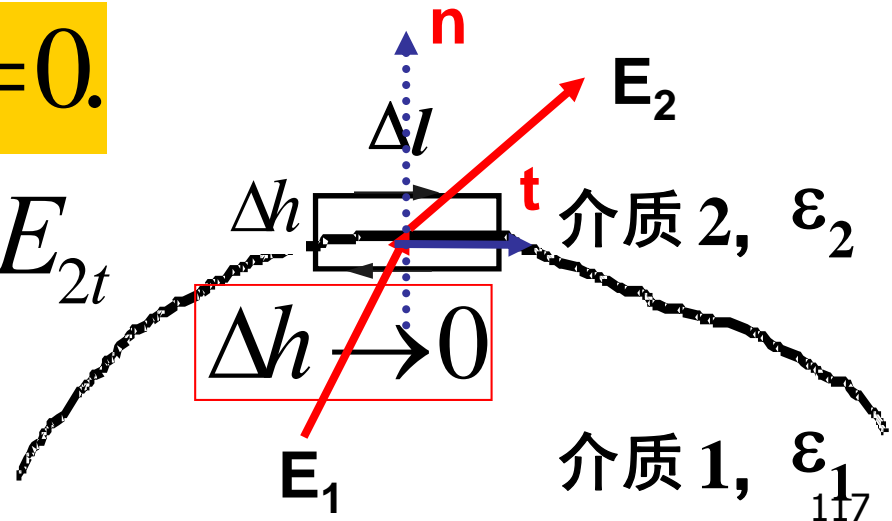
$$= (E_{2t} - E_{1t}) \Delta l \equiv 0 \longrightarrow E_{1t} = E_{2t}$$

界面两边电场强度的切向分量总是相等。

$$\text{或写成 } \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0.$$

$$D_{1t} = \varepsilon_1 E_{1t}; \quad D_{2t} = \varepsilon_2 E_{2t}$$

$$D_{1t} / D_{2t} = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$$



## (2) 电位移矢量

利用高斯定理，跨界面作柱形高斯面：

$$\oiint_{\text{柱面}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{D}_2 \cdot (\Delta S \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{D}_1 \cdot [\Delta S \cdot (-\mathbf{n})] \quad \mathbf{n}: 1 \rightarrow 2$$

$$= (D_{2n} - D_{1n}) \Delta S = \sigma_0 \Delta S \quad \longrightarrow \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0$$

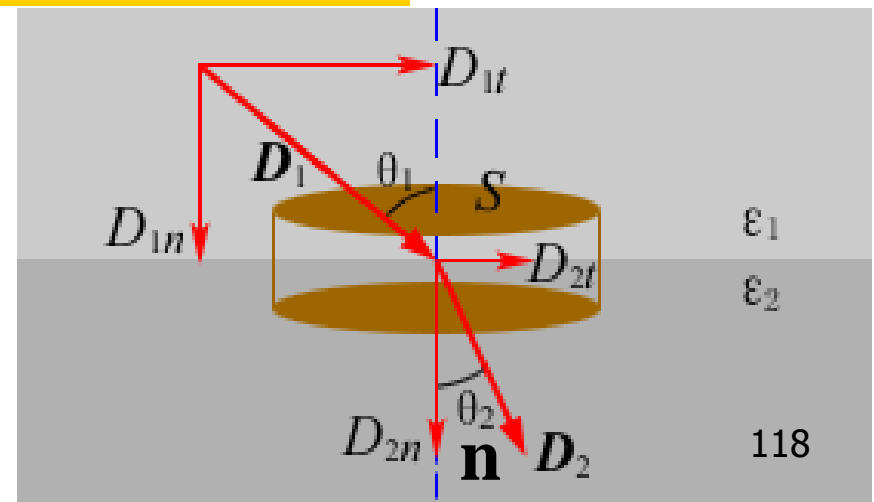
■ 在电介质界面上，一般  $\sigma_0 = 0$ ，即无自由电荷，所以：

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \text{或} \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0$$

$$\therefore (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{n} = \sigma'_e \quad (+)$$

$$\therefore (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n} = \sigma_e / \epsilon_0$$

$\sigma_e$  为总面电荷密度





## 电场线在界面上的折射

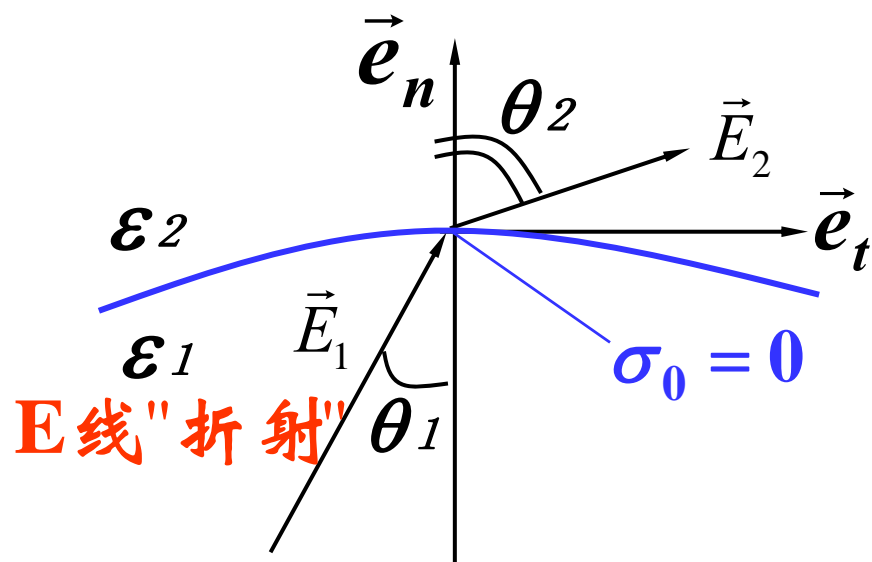
若  $\sigma_0 = 0$ ，则  $D_{1n} = D_{2n} \rightarrow \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$ ，

$$\text{又 } E_{1t} = E_{2t}$$

$$\therefore \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

若  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ，则  $\theta_1 < \theta_2$



电场线在穿过介质界面时会产生类似光线折射的现象

### (3) 电势

- 在介质分界面两侧取距界面为  $h$  的 1, 2 两点

- 其连线平行法线，两点的电势分别为  $U_1$  和  $U_2$

- 当  $h \rightarrow 0$  时，两点的电势差为 0，即：

$$U_1 = U_2$$

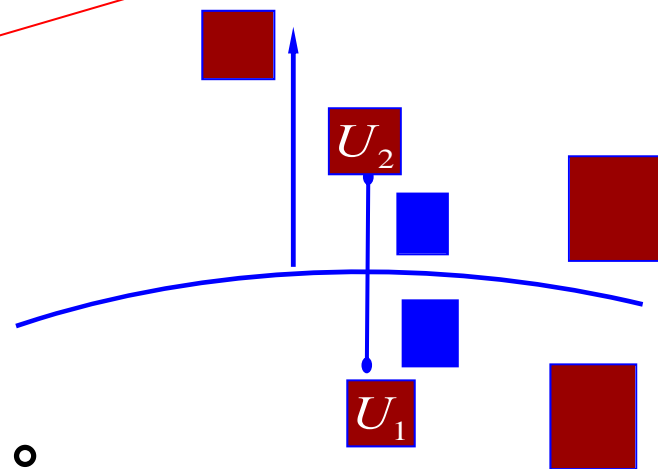
介质界面两侧电势总是连续的。

$$U_1 - U_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= E_{1n}h + E_{2n}h$$

$$= E_{1n}h(1 + \varepsilon_1/\varepsilon_2)$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} U_1 - U_2 = 0$$



## 小结

### 1、E 的切向分量连续

■ 界面一点上的法线方向只有一个，而该点的切线方向却有无数多个，结论对任一切线方向成立

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \end{cases}$$

### 2、对无自由电荷的界面， D 的法向分量连续

$$\begin{cases} D_{1n} = D_{2n} \\ \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \end{cases}$$

### 3、介质界面两侧的电势总是连续的

$$U_1 = U_2$$

### 4、极化强度矢量和极化面电荷

$$\sigma'_e = -(\bar{P}_2 - \bar{P}_1) \cdot \bar{n}$$

## 二、唯一性定理

### ■ 求解静电场问题

- 给定空间电荷的分布,如何知道空间各处的电场?
- 原则:库仑定律+叠加原理→空间各点电场强度 $E$

### ■ 实际情况:

- 要知道每个导体表面的面电荷分布很困难
- 即使知道 $\sigma_e$ ,但 $E$ 是矢量,使得计算极为繁杂
- 容易确定的是每个导体的电势或者总电量

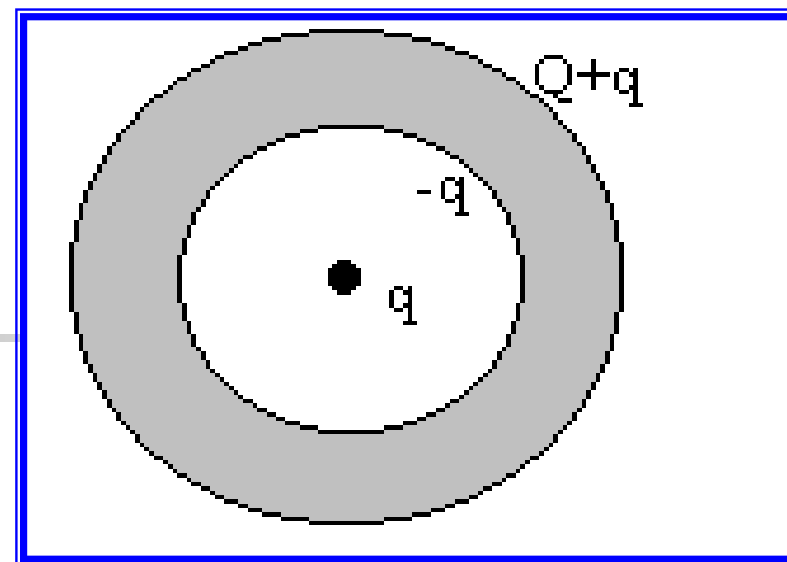
### ■ 求解思路: 先求得 $U$ , 再利用 $E = -\nabla U$ 得 $E$

基本方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e / \varepsilon_0, \quad \mathbf{E} = -\nabla U.$$

$$\nabla^2 U = -\rho_e / \varepsilon_0 \rightarrow \text{泊松方程}$$

$$\nabla^2 U = 0 \rightarrow \text{拉普拉斯方程}$$



- 将问题**转换**为求解一个标量函数的二阶偏微分方程
- 但仅有此方程不能确定空间U分布,还需边界条件.

典型的静电场问题：即在满足一定边界条件下求解空间电场分布的问题。

对于静电场，给定什么样的条件，空间存在确定的电场解？——**唯一性定理**

# 带电导体系——唯一性定理

- 当给定电场的边界条件，即给定包围电场空间的边界面 $S$ 上的电势 $U_S$ ，给定 $S$ 内各导体的形状、大小及各导体之间的相对位置，同时再给定下列两条件之一：

(1)  $S$ 面内每个导体的电势 $U_i$

(2)  $S$ 面内每个导体上的总电量 $q_i$

(其中 $i=1,2,\dots$ 为导体的编号)

- 则在以 $S$ 为边界面的空间内由高斯定理和环路定理确定的静电场解是唯一的。

# 含电介质体系——唯一性定理

- 当给定空间边界面 $S$ 上的电势 $U_S$ ，给定 $S$ 面内各均匀介质按区域分布的情况和各电介质的介电常数 $\epsilon_i$ ，给定 $S$ 内各导体的形状、大小及各导体之间的相对位置，同时再给定下列两条件之一：

(1)  $S$ 面内每个导体的电势 $U_i$

(2)  $S$ 面内每个导体上的总电量 $q_i$

(其中 $i=1,2,\dots$ 为导体的编号)

- 则边界面 $S$ 所包围的空间内静电场解是唯一的。

# 唯一性定理的含意

满足一定的条件和边界条件的、存在于空间的电场分布应该是唯一的,即给定这些条件后,不可能存在不同的静电场分布。

## ■ 证明:

- 利用反证法论证见书中**P345**
- 理论证明在电动力学中给出



## 几点说明

- 唯一性定理提出了**定解的充分必要条件**。
  - 求解时，我们总要**判断**问题的边界条件是否足够
  - 当满足必要的边界条件时，则可**断定解是唯一的**
  - 不同的方法得到的**解**在形式上可能不同，但**等价**
- 唯一性定理对于**解决实际问题**有着重要的意义。
  - 因为它告诉我们，**哪些因素**可以完全确定静电场
  - 对于许多实际问题，往往需要**根据给定的条件作一定的分析，提出尝试解**。
  - 如果所提出的**尝试解**满足唯一性定理所要求的条件，它就是该问题的唯一正确的解。



### 三、应用举例

---

研究分区均匀线性各向同性介质的  
电场求解问题：

- 介质界面与电场线重合的情况
- 介质界面与等势面重合的情况
- 其他情况：电动力学方法处理

# 介质界面与电场线重合

- 见右下图，带电量为 $Q_0$ 的球形电容器。 $\mathbf{E}$ 与介质界面重合，则 $\mathbf{P}$ 在界面上没有法向分量，则两种介质分界面上极化面电荷为0。

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\sigma'_e = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n}$$

- $\sigma'_e$ 只可能存在于介质和导体的边界面上。
- 而导体静电平衡要求导体内的 $\mathbf{E}$ 恒为 $\mathbf{0}$ ，所以导体表面的自由电荷会自动调整，从而维持总电荷面密度分布形式不变：

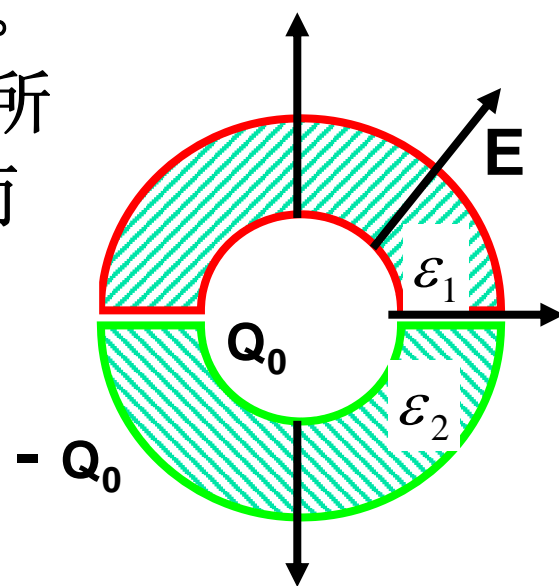
$\therefore$  介质中  $\mathbf{E} = \alpha \mathbf{E}_0$ ，其中 $\alpha$ 是个常数。

- 为确定 $\alpha$ 因子，我们要用到高斯定理：

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \iint_{S_i} \epsilon_i \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \alpha \iint_{S_i} \epsilon_i \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{S} = Q_0$$

$$\alpha \sum_i \iint_{S_i} \epsilon_i \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{S} = Q_0$$

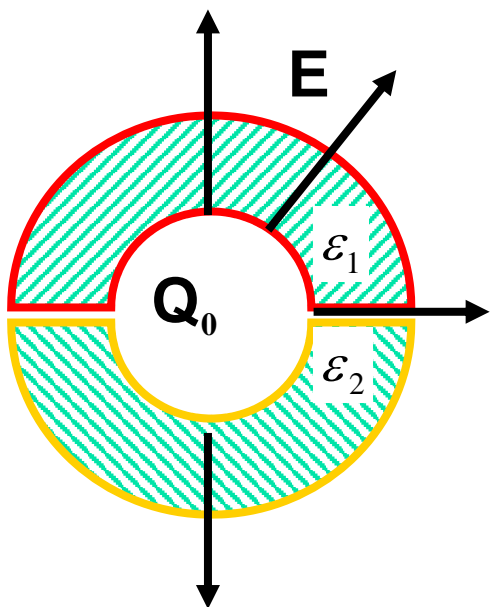
式中 $\mathbf{S}$ 为包含某导体面的高斯面， $\mathbf{S}_i$ 是 $\mathbf{S}$ 的一部分，它位于第 $i$ 种介质之中； $Q_0$ 为该导体所带的自由电荷量，在真空中所产生的电场为 $\mathbf{E}_0$ 。



- 对 $\mathbf{E}_0$ 一维对称性问题，则 $\mathbf{E}$ 也有一维对称性，不必引入 $\alpha$ ，使得问题简化。这时可利用高斯定理直接计算电场强度 $E$ 。

**【例2-7-1】**球形电容器带电量 $Q_0$ ，极板间充满介电常数分别为 $\epsilon_1$ 和 $\epsilon_2$ 的两种介质，求介质中的 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$

**【解】**介质界面与电场线重合，且是一维对称性问题，所以可以直接利用高斯定理：



$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2\pi r^2 (D_1 + D_2)$$

$$= E(2\pi r^2 \epsilon_1 + 2\pi r^2 \epsilon_2) = Q_0,$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q_0 \vec{r}}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^3},$$

$$\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E} = \frac{\epsilon_1 Q_0 \vec{r}}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^3},$$

$$\vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E} = \frac{\epsilon_2 Q_0 \vec{r}}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^3}.$$

**[例2-7-2]**平行板电容器，带电 $Q_0$ ，板间距 $d$ ，长度 $a$ ，宽度 $b=b_1+b_2$ 。介电常数为 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$ 。求 $C$ 和极板上自由电荷 $\sigma_e$

**[解]**介质界面与电场线重合，且是一维对称性问题，所以可以直接利用高斯定理：

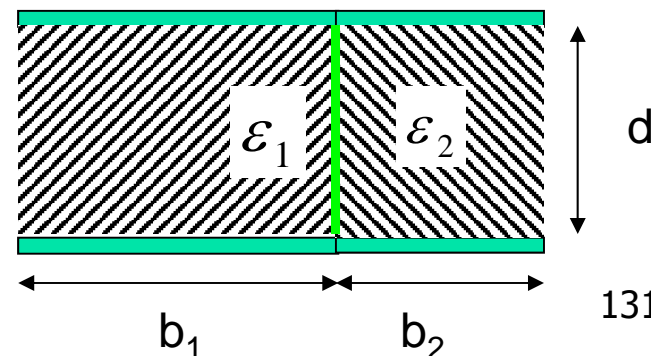
$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = E(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a = Q_0 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q_0}{(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a},$$

$$C = \frac{Q_0}{Ed} = \frac{(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a}{d}, \quad \sigma_{e1} = D_{n1} = \varepsilon_1 E = \frac{\varepsilon_1 Q_0}{(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a},$$

$$\sigma_{e2} = D_{n2} = \varepsilon_2 E = \frac{\varepsilon_2 Q_0}{(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a}.$$

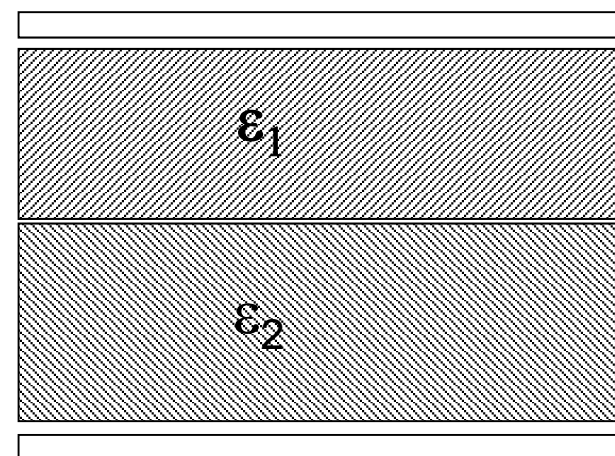
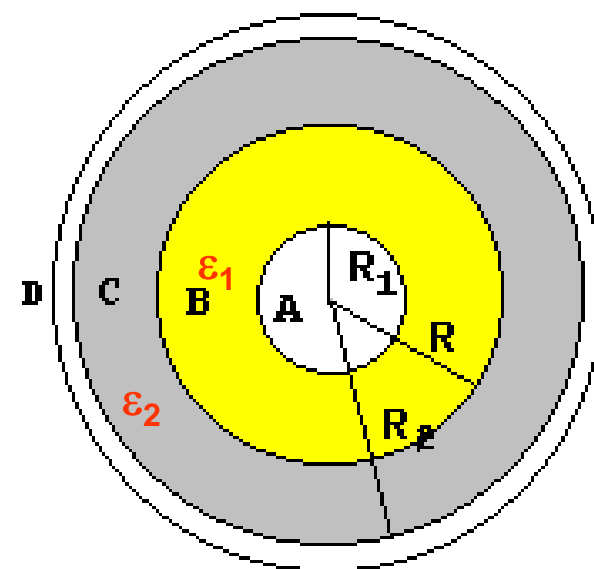
自由电荷  $\sigma_{e1} \neq \sigma_{e2}$

自由电荷在极板上分布是不均匀的，但这种不均匀性正好由极化电荷所补偿，总面电荷密度是均匀分布的。电容器内电场仍是均匀分布的。



# 介质界面与等势面重合

- 介质界面与等势面重合  $\longleftrightarrow$  介质界面与电场线垂直，见右两图问题
- 由 $\mathbf{D}$ 的法向分量连续，猜介质中  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$ ，可证明 $\mathbf{D}$ 和 $\epsilon_0 \mathbf{E}_0$ 同时满足高斯定理和环路定理，见P59。
- $\mathbf{E}_0$ 为自由电荷的电场，其计算完全等同于真空中的静电场。
- 处理步骤：
  - 首先去掉介质，计算自由电荷产生的电场 $\mathbf{E}_0$
  - 利用  $\mathbf{E}_i = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 / \epsilon_i$  求出 $\mathbf{E}_i$   
( $\mathbf{D} = \epsilon_i \mathbf{E}_i$ , 且  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$ )



**[例2-7-3]**平行板电容器，两板间充满厚度分别为 $d_1$ 、 $d_2$ ，介电常数为 $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$ 的两层介质；板间电压为 $U$ 。求  
**1)** 两板间的电场； **2)** 介质分界面处的总面电荷密度；  
**3)** 介质分界面处的自由面电荷密度？

**[解]** 介质界面与电场线垂直，  $\mathbf{E}_i = \mathbf{D}/\varepsilon_i = \varepsilon_0 E_0 / \varepsilon_i$

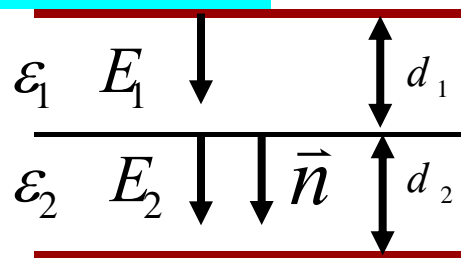
$$1) \quad U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \varepsilon_0 E_0 d_1 / \varepsilon_1 + \varepsilon_0 E_0 d_2 / \varepsilon_2,$$

$$\therefore E_0 = \frac{U}{\varepsilon_0 (d_1 / \varepsilon_1 + d_2 / \varepsilon_2)} \Rightarrow E_1 = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon_1}, \quad E_2 = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon_2}.$$

$$2) \quad \vec{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \sigma_t / \varepsilon_0, \quad \sigma_t = \varepsilon_0 (E_2 - E_1)$$

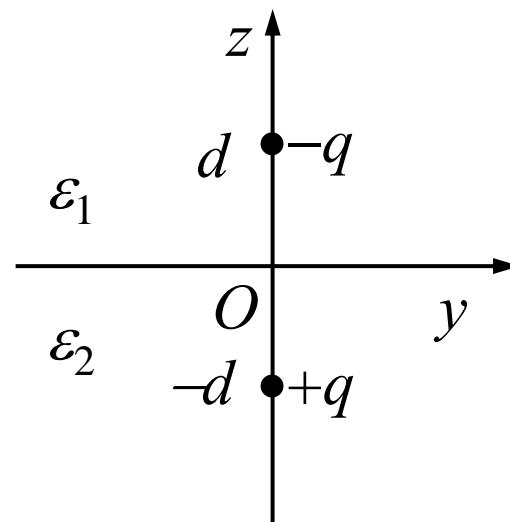
$$3) \quad \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_0,$$

$$\therefore \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 = \vec{D}_1 = \vec{D}_2, \quad \therefore \sigma_0 = 0.$$



**[例2.7.4]**如右图所示，一无限大平面（ $z = 0$ ）将介电常量分别为 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$ 的介质隔开，在 $z$ 轴上 $z = \pm d$ 的位置分别放置点电荷 $\mp q$ ，求空间电场分布。

**[解]**当去掉介质， $xoy$ 平面恰好为两点电荷的电场的等势面；又 $\mathbf{E}_0$ 、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{E}$ 方向相同，因此，本题属于介质界面与等势面重合的情况。先求：



$$E_{0x} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} \right\}$$

$$E_{0y} = \frac{qy}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} \right\}$$

$$E_{0z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{z+d}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} - \frac{z-d}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} \right\}$$

$$\because \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0$$

$$\therefore \mathbf{E} = \mathbf{D} / \varepsilon_1 = (\varepsilon_0 / \varepsilon_1) \mathbf{E}_0 \quad (z > 0), \quad \mathbf{E} = \mathbf{D} / \varepsilon_2 = (\varepsilon_0 / \varepsilon_2) \mathbf{E}_0 \quad (z < 0)$$





## 其他情况

---

- 介质界面与电场线和等势面都不重合，一般用：**电动力学**方法处理
- 对于某些具有**特定几何形状**的介质面的问题，可以利用**电像法**求解