ex 2.4

8.(1). $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad \sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x$

(3). $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}\left((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right) = 1$

(5). $LHS = \frac{e^{x \pm y} - e^{-(x \pm y)}}{2}$

$RHS = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} \pm \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$

$= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-(x-y)} - e^{-(x+y)}}{4} \pm \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)} - e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4}$

$= LHS$

9.(1). 令 $f(x) = x2^x - 1$ $\quad f(0) = -1 \quad f(1) = 1$ 故在 $[0,1]$ 有零点

(3). 令 $f(x) = a\sin x - x + b$ $\quad f(0) = b > 0$

$f(a+b) = a\sin(a+b) - a = a(\sin(a+b) - 1) \leq 0$

故在 $[0, a+b]$ 上有零点

11. 令 $K = \min\{f(x_1), \cdots, f(x_n)\}$ $\quad , L = \max\{f(x_1), \cdots, f(x_n)\}$

则 $K = t_1K + t_2K + \cdots + t_nK \leq RHS \leq t_1L + t_2L + \cdots + t_nL = L$

则 $\exists c \in [a,b]$, s.t. $f(c) = RHS$

14. (1)、假设有超过一个不动点，取其中两个 x_1, x_2

$f(x_1)=x_1 \quad f(x_2)=x_2 \qquad |f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2|$

又 $|f(x_1)-f(x_2)| \le |x_1-x_2|$ 矛盾 故至多1个不动点

(2)、令 $g(x)=f(x)-x$

15. $\forall \varepsilon>0$， $\exists \delta(\varepsilon)=\varepsilon$． $|x-x_0|<\delta=\varepsilon$ 时 $|\cos x-\cos x_0| \le |x-x_0|=\varepsilon$

16. $\forall \varepsilon>0$， $\exists \delta(\varepsilon)=\varepsilon^2$， $|x-x_0|<\delta=\varepsilon^2$ 时 $|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| \le \dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \le \dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{|x-x_0|}}$

$=\sqrt{|x-x_0|}<\varepsilon$

17. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，且 $f(x)\in(-1,1)$ 故连续、有界

$\exists \varepsilon=\frac{1}{2}$，对 $\forall \delta>0$，令 $x_1=\frac{1}{n}$ $\quad x_2=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$

n 充分大时，$|x_1-x_2|<\delta$，$|f(x_1)-f(x_2)|=1>\varepsilon$

18. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，且 $f(x)\in(-1,1)$ 故连续、有界

在区间 I 上，$\exists \varepsilon=\frac{1}{2}$，对 $\forall \delta>0$，令 $x_1=\sqrt{n\pi}$，$x_2=\sqrt{(n+\frac{1}{2})\pi}$．

n 充分大时 $|x_1-x_2|<\delta$．$|f(x_1)-f(x_2)|=1>\varepsilon$