
请
坐

一、课程简介

1. 微积分？　主要计算　拉长时间
2. 刷题
3. 关于答疑课
4. 如何提问

二、正题

1. $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \ \exists x_0 \in A, \ st. \quad x_0 > \alpha - \varepsilon \\ \forall x \in A \text{ 都有 } x \le \alpha \quad\quad \alpha \text{ 上界} \end{cases}$

上确界是上界中最小值：　假设上界中 $\beta < \alpha$，$\alpha - \beta > 0$

$\underline{\forall x \in A}$，　$\underline{x \le \beta}$

$\forall \varepsilon = \alpha - \beta$，由定义 $\exists x_1 \in A$　st.　$x_1 > \alpha - \varepsilon = \beta$

$\forall x \in A$ 都有 $x \le \beta$　矛盾

$\forall$	$\exists$	st.
↓	↓	↓
任取	存在	使得
唱跳	rap	篮球

2. 取整　P6

$\forall x \in R$，　$\exists m \in Z$，　st.　$m \le x < m+1$

① $A = \{ n \mid n \le x, \ n \in Z \}$　x 是 A 一个上界

$\Rightarrow \sup A$ 存在 $= \alpha$

② m 和 α　　$3.\cancel{14159} \Rightarrow 3$　　人话

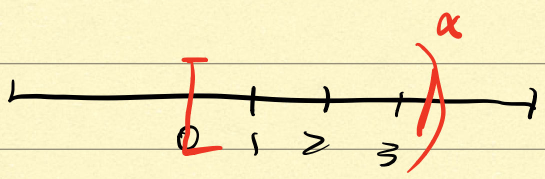
数学语言

类比：　$\sqrt{2} \Rightarrow$ 人话　　计算机

反证：　α 假设不是整数

$B = [a, \alpha) \cap A$

$a \to$ A中



目的：构造有限元素集合 $\Rightarrow$ 上下确界即最大,小值
$\downarrow b$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{最大值 } b < \alpha \\ b\ \alpha \text{是 } A \text{ 的上界} \end{cases}$ $\Rightarrow$ 矛盾 $\Rightarrow$ α 是整数

3. 数学归纳法

Bernoulli 不等式 $(1+x_1)\cdots(1+x_k) \geq 1+x_1+\cdots+x_k$

$x_1=\cdots=x_k=x \Rightarrow (1+x)^k \geq 1+kx$

$\uparrow a^k \qquad \uparrow a^k$

$(a+xa)^k \geq a^k + kxa\,a^{k-1}$

$(a+b)^k \geq a^k + ka^{k-1}b$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

① $n=2$ ……

② $n=k$ 假设我们已知 $\left(\frac{a_1+\cdots a_k}{k}\right)^k \geq a_1\cdots a_k$

③ $n=k+1$ 左边 $=\left(\frac{a_1+\cdots a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}$

$$=\left(\frac{a_1+\cdots a_k}{k} - \frac{a_1+\cdots+a_k}{k(k+1)} + \frac{a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}$$

$$=\left(\bar{a}_k + \frac{a_{k+1}-\bar{a}_k}{k+1}\right)^{k+1}$$

$$=(\bar{a}_k)^{k+1} + (k+1)\left(\frac{a_{k+1}-\bar{a}_k}{k+1}\right)(\bar{a}_k)^k$$

$\bar{a}_k = \frac{a_1+\cdots+a_k}{k}$

$$= \bar{a}_k^{k+1} + a_{k+1}\cdot\bar{a}_k^k - \bar{a}_k^{k+1}$$

$$= a_{k+1}\cdot\bar{a}_k^k \geq a_{k+1}\cdot a_1\cdots a_k$$

对比：$a_1+\cdots+a_k \geqslant k\sqrt[k]{a_1\cdots a_k}$

$$\Rightarrow \quad k^k\cdot a_1\cdots a_k \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k^k\cdot a_1\cdots a_k}{\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^k} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{ka_1}{\sum a_i}}_{x_1}\cdot\underbrace{\frac{ka_2}{\sum a_i}}_{x_2}\cdot\cdots\cdot\underbrace{\frac{ka_k}{\sum a_i}}_{x_k} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_k \leqslant 0 \\ x_1+x_2+\cdots+x_k = k \end{cases}$$

构造 $f(x)=\ln x - x+1$

$f'(x)=\frac{1}{x}-1 \Rightarrow f(x)$ 先增后减，$x=1$ 时 $f(x)=0$

$x\neq 1$ 时 $f(x)<0$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \ln x_1 &\leqslant x_1-1 \\ \ln x_2 &\leqslant x_2-1 \\ &\vdots \\ \ln x_k &\leqslant x_k-1 \end{aligned}\right\} \text{求和} \quad \ln(x_1\cdots x_k) \leqslant \sum x_i - k$$

$$\Rightarrow \quad \ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_k \leqslant 0$$

以上说明数学归纳法虽繁琐，但好想

4. C型戴德金分割

$A=\{x\in\mathbb{Q} \mid x^2<2 或 x<0\}$，$A'=\{x\in\mathbb{Q} \mid x>0 且 x^2>2\}$

证：A中元最大，A'中元最小

① $\forall q>0$ 且 $q^2<2$，$\exists n\in N_+$ st $(q+\frac{1}{n})^2<2$

$$q^2+\frac{2q}{n}+\frac{1}{n^2}<2$$

$$\Uparrow$$

$$q^2+\frac{2q}{n}+\frac{1}{n}<2$$

$$n>\frac{1+2q}{2-q^2}$$

② $\forall q>0$ 且 $q^2>2$，$\exists n\in N_+$ st $(q-\frac{1}{n})^2>2$

$$q^2-\frac{2q}{n}+\frac{1}{n^2}>2$$

$$\Uparrow$$

$$n>\sqrt{\frac{2q}{q^2-2}}$$