

## 离散数学 (2023 秋) 作业五

截止时间 12 月 8 日 4 点

1. (10pt) 用  $m$  个不同的红宝石和  $n$  个不同的蓝宝石编成一串项链 ( $m > n$ ), 要求任意两颗蓝宝石不能相邻, 有多少种不同的编织方法?  
(10pt) 用  $m$  个相同的红宝石和  $n$  个相同的蓝宝石编成一串项链 ( $m > n$ ), 要求任意两颗蓝宝石不能相邻, 有多少种不同的编织方法? (此问较困难, 可只考虑  $m + n$  为质数的情况。)
2. (5pt) 从整数 1 到  $n$  中不重复地取出  $r$  个数 (这  $r$  个数两两不同) 组成一个递增数列, 有多少种不同的取法?  
(10pt) 从整数 1 到  $n$  中可重复地取出  $r$  个数 (这  $r$  个数可能有相同的) 组成一个递增数列, 有多少种不同的取法? (递增序列要求前一项不大于后一项。)
3. (10pt) 考虑一个凸  $n$  边形, 其任意三条对角线不共点, 求全部的对角线之间互相分割为多少线段。
4. (15pt) 考虑方程  $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ , 该方程满足  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 1, x_3 \geq 2$  的非负整数解有多少个? 该方程满足  $x_1 < x_2 < x_3$  的非负整数解又有多少个?
5. (10pt) 考虑方程  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ , 其中  $m, n$  均为偶数且  $m > n$ :
  - (a) (5pt) 求该方程非负偶数解 ( $x_i$  全为偶数) 的个数。
  - (b) (5pt) 求该方程非负奇数解 ( $x_i$  全为奇数) 的个数。
6. (20pt) 平面上一支蚂蚁从原点出发, 它每次向上、向右或向左走距离 1, 经过  $m$  步后到达点  $(0, k)$ .
  - (a) (3pt) 证明  $m - k$  是偶数。
  - (b) (7pt) 求一共有多少种不同的走法?

(c) (10pt) 上述走法中不包含  $x = -1$  这条线上的点的走法有多少种?

7. (5pt) 使用二项式系数证明  $\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ ,

(提示: 考虑  $\sum_{i=0}^n (1+x)^i$ ).

(5pt) 使用二项式系数证明  $\sum_{i=0}^{k+1} \binom{n-k-1+i}{i} = \binom{n+1}{k+1}$ ,

(提示: 考虑  $\sum_{i=0}^n x^i (1+x)^{(n-i)}$ ).

8. (20pt) 求解下列式子的结果并证明:

(a) (5pt)  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} e^i$ .

(b) (7pt)  $\sum_{i=0}^n \binom{2n}{2i} 2^{2i}$ .

(c) (8pt)  $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} i^2$ .