离散数学（2023 秋）作业六
截止日期：12 月 22 日下午 4 点

1. (5pt) 求 1 到 420 中能被 3 和 5 整除，但不能被 7 整除的整数的个数。

   (5pt) 求 1 到 420 中能被 3 和 5 整除，但不能被 6 整除的整数的个数。

2. (10pt) 从三个红球，五个黄球，六个蓝球中取出 9 个球，共有多少种不同的取法。

3. (5pt) 有 n 名学生分别从 A, B 两门课程中选修至少一门课程，其中至少有一名学生同时选修两门课程。求一共有多少种不同的选课方法?

   (5pt) 有 n 名学生分别从 A，B，C 三门课程中选修至少一门，至多两门课程，且对于 A, B，C 中的任意两门课程，都至少有一名学生同时选修了这两门课程。求一共有多少种不同的选课方法?

4. (15pt) 有 31 名学生分别从总共 10 门课程中选修至少 6 门课程，证明存在两个学生，他们至少选了 5 门一样的课程。

5. (5pt) 将 1 到 n 的整数排成一列，其中恰好有两个位置上的数字等于其排位序号的排列方式有多少种?

   (10pt) 将 1 到 n 的整数排成一列，其中至少有两个位置上的数字等于其排位序号的排列方式有多少种?

6. (10pt) 使用组合含义证明恒等式 $\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k} = \binom{2n-k+1}{k} - \binom{2n-k-1}{k-2}$.

   (考虑如下问题：$2n$ 个人围坐一桌，从中选取 k 个人，要求其中任意两人位置不相邻，有多少种不同的选取方法。)

7. (15pt) 设 $S = \{0,1\}^n$ 为所有长度为 n 的 0-1 字符串组成的集合。S 的一个子集 A 被称为“坏的”, 如果 1 到 n 中存在某个位置 i 使得对于 A 中的每个字符串，该字符串在第 i 个位置上恒为 0 或恒为 1；反之子集 A 被称为“好的”，求 S 的好子集的个数。

8. (10pt) f 和 g 为定义在正整数上的函数，已知对任意 $n > 0$ 有

$$f(n) = \sum_{n|d} g(d),$$

证明对任意 $n > 0$，有

$$g(n) = \sum_{n|d} g(d)\mu(d/n).$$

9. (10pt) f 和 g 为定义在非负整数上的函数，已知对任意 $n \geq 0$ 有

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} g(i),$$

证明对任意 $n \geq 0$，有

$$g(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(i).$$

10. (10pt) 令 $F = \{f : [m] \to [k]\}$ 为所有 $[m]$ 到 $[k]$ 的函数的集合，σ 为 $[m]$ 到 $[m]$ 的一个置换。且 σ 可表示为如下轮换形式

$(a_1, a_2, \ldots, a_{i_1})(b_1, b_2, \ldots, b_{i_2}) \ldots (c_1, c_2, \ldots, c_{i_t}), i_1 + i_2 + \ldots + i_t = m.$

即 $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = a_3, \ldots$, $\sigma(a_{i_1}) = a_1$, $\sigma(b_1) = b_2$, $\sigma(b_2) = b_3, \ldots$, $\sigma(b_{i_2}) = b_1$, $\ldots, \sigma(c_1) = c_2$, $\sigma(c_2) = c_3, \ldots$, $\sigma(c_{i_t}) = c_1$.

求有多少个 $f \in F$ 使得 $f \circ \sigma = f$.

11. (15pt) 用 n 颗宝石编成一串项链，其中每颗宝石可以用红宝石或蓝宝石，一共有多少种不同的编织方法?