中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

电磁学C
第二次习题课

吴星宇(wuxingyu@mail.ustc.edu.cn)
中国科学技术大学物理学院近代物理系

1.35

- 一无限长均匀带电的圆柱面，半径为R，面电荷密度为σ，假设沿轴线将其切开，求其中一半圆柱面单位长度所受的力。

1.35 $F=Eq$.

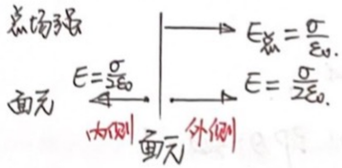
①E：由Gauss定理 $\oint E\cdot ds=\frac{q}{\varepsilon_0}$.

对柱面内侧 $E=0$.

外侧 $E\cdot 2\pi rl=\frac{\sigma\cdot 2\pi Rl}{\varepsilon_0} \Rightarrow E=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$.

因此有某一点处总场强 $E=\begin{cases}\frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} & r>R\\ 0 & r<R.\end{cases}$

场强在$r=R$处存在突变. 在$r=R$处取一面元，适用无限大均匀带电平面的场强. $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.



因此其他电荷在面元处产生的场强在内侧与面元抵消. 在外侧叠加.

其他电荷在面元处产生的场强连续. 因此有：

$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. 此处E为其他电荷在面元处产生的场强.

② q. $dq=\sigma\cdot R d\theta$.

③ 由于是半个圆柱面. 仅需考虑 $\sin\theta$ 贡献

对称性.

综上. $F=\int E dq=\int_0^{\pi}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\sigma R\, d\theta\cdot\sin\theta$

$=\frac{\sigma^2 R}{2\varepsilon_0}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}$

$=\frac{\sigma^2 R}{\varepsilon_0}$.

2.19

- 赫兹型喷墨打印机是利用喷流束上施加强电场时产生的静电雾化现象而制成的。喷射的角度随电压的变化而变化。如图所示，假设墨滴半径为$r = 25\mu m$,电量为$q = 10^{-13}C$. 从喷嘴飞出的初速度为$u_0 = 10m \cdot s^{-1}$,加速电压$U = 2kV$. 极板的间距为$d = 5mm$,长$L = 1cm$,求墨滴飞行距离L后的偏离y和偏向角θ.

2.19. 平抛运动. 比较时间.

$$\begin{cases} Eq - mg = ma. \\ m = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \\ E = \frac{U}{d}. \end{cases} \Rightarrow a = 601.35\ m/s^2.$$

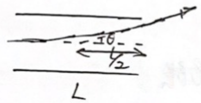
① $\frac{d}{2} = \frac{1}{2}at_1^2 \Rightarrow t_1 = 2.88\times10^{-3}s.$ 即若板足够长. 经t_1打在板上.

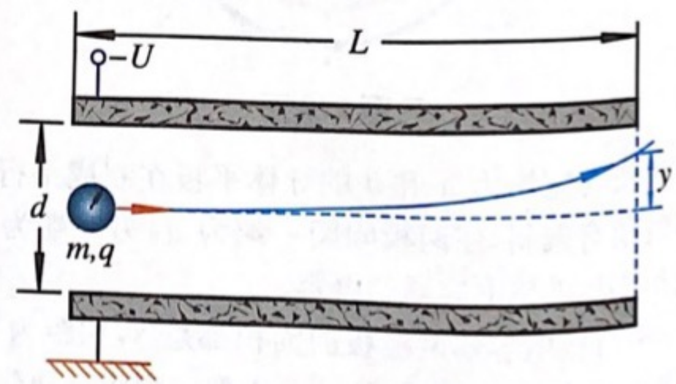
② $L = u_0 t_2 \Rightarrow t_2 = 1\times10^{-3}s.$ 即若粒子未打在板上, 经t_2飞出电容器.

经分析. 粒子不会打在板上. t取t_2.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}at_2^2. \\ \tan\theta = \frac{y}{L/2} = \frac{2y}{L} \end{cases} \Rightarrow y = 3.007\times10^{-4}\ m.$$

$\tan\theta = 0.0601$ 即 $\theta = 3.44°$.





习题 2.19 图

2.3

- 有4个导体板，如图所示，每个板带电量分别为+5C, +1C, +1C和+2C, 近似认为板为无限大，则8个面的电荷分别为多少？用一根导线把中间两个板接通，则6个面 (A, B, C, F, G, H) 的电量分别为多少？

2.3. (1) 对BC两面用Gauss定理. 有 $\sigma_B+\sigma_C=0$. 即 $Q_B+Q_C=0$.

同理有 $Q_B+Q_C=0$. ①

$Q_D+Q_E=0$ ②

$Q_F+Q_G=0$. ③

由每板上带电量. 有:

$Q_A+Q_B=5C$. ④

$Q_C+Q_D=1C$ ⑤

$Q_E+Q_F=1C$ ⑥

$Q_G+Q_H=2C$ ⑦

对A左侧与H右侧. 有 $E_A=-E_H$ 因此有 $Q_A=Q_H$ ⑧.

综上可得

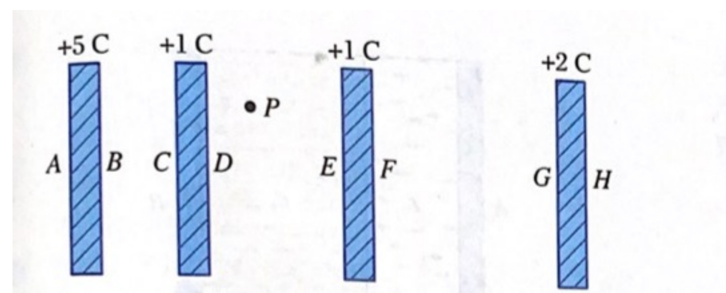
Q_A	Q_B	Q_C	Q_D	Q_E	Q_F	Q_G	Q_H
4.5	0.5	-0.5	1.5	-1.5	2.5	-2.5	4.5

(2) 连接D,E. 已知有 $Q_D+Q_E=0$. 电势相等 则 $Q_D=Q_E=0$ ⑨

两板总电荷不变. 有 $Q_C+Q_F=1+1=2C$. ⑩

由①③④⑦⑧⑨⑩得

Q_A	Q_B	Q_C	Q_D	Q_E	Q_F	Q_G	Q_H
4.5	0.5	-0.5	0	0	2.5	-2.5	4.5



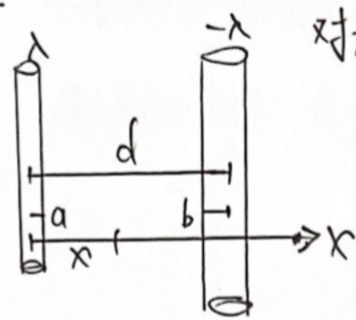
习题 2.3 图

2.5

University of Science and Technology of China

- 两根平行的输电线半径为a和b,它们之间的距离为d,假设 $d \gg a, d \gg b$, 求单位长度的电容值。

2.5



对无限长直导线场强. 有 $E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

以左侧导线轴线处为起点取x轴.

则x点处场强为:

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-x)}$$

两导线间电势差:

$$U=\int_a^{d-b} E\,dx$$

$$=\int_a^{d-b}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)dx$$

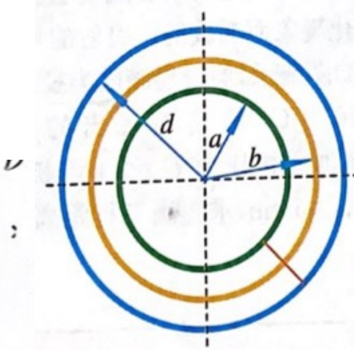
$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{(d-b)(d-a)}{ab}\right)$$

2.7

- 假设电容器电容为C,充电前两个极板均带有正电量Q,然后将其与电源电压为U的电池组连接充电，则最后两个极板上的电量是否等量异号？请用Q,C和U表示充电后极板的电量。
- 解：充电后两极板内表面电荷量为$\pm CU$

2.8

- 一个球形电容器由三个很薄的同心导体壳组成，它们的半径分别为a,b,d.一根绝缘细导线通过中间壳层的一个小孔把内外球壳连接起来。忽略小孔的边缘效应。（1）求此系统的电容；（2）若在中间球壳上放置任意电量Q,确定中间球壳内外表面上的电荷分布。



习题 2.8 图

2.8 (1) 三层导体壳，共用中间层，内外两层用导线相连，电势相同。

因此可看作内外2个电容器并联。

对带电球壳，有 $E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

$$\begin{cases}\Delta U_{ab}=\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\\ \Delta U_{bd}=\dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{d}\right)\end{cases}$$

两电容电量不同.

中间层内侧外侧带电量不同，记为 Q_1，Q_2.

由 $C=\frac{Q}{U}$ 可得 $C_{ab}=\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$；$C_{bd}=\frac{4\pi\varepsilon_0 bd}{d-b}$.

两电容并联. $C=C_{ab}+C_{bd}=4\pi\varepsilon_0 b\left(\frac{a}{b-a}+\frac{d}{d-b}\right)$

(2) 两电容. C_{ab}, C_{bd} 一定. U 相同. 有：

$$\begin{cases}Q_1+Q_2=Q\\ \dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{Q_1}{Q_2}\end{cases}$$

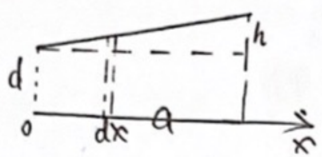
可解得 $Q_1=\dfrac{a(d-b)}{b(d-a)}Q$

$Q_2=\dfrac{d(b-a)}{b(d-a)}Q$.

2.9

- 两块长与宽为a和b的导体平板在制成平行板电容器时稍有偏斜，使两板间距一端为d，另一端为d+h，且h ≪ d，求该电容器的电容。

2.9.



看作无数个宽为dx的电容并联.

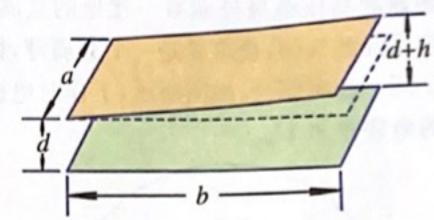
由平行板电容器 $C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$.

对一宽为dx的微元，$dS=b\,dx$.

$$C=\int\frac{\varepsilon_0 b\,dx}{d+\frac{hx}{a}}=\int\frac{\varepsilon_0 ab\,dx}{ad+hx}$$

$$=\frac{\varepsilon_0 ab}{h}\ln\left(x+\frac{ad}{h}\right)\Big|_0^a$$

$$=\frac{\varepsilon_0 ab}{h}\ln\frac{h+d}{d}.$$



习题 2.9 图

2.15

- 水分子是有极分子，一个水分子的电偶极矩为$0.61\times 10^{-30}\mathrm{C}\cdot m$,若所有的水分子电矩都朝同一方向。（1）试估算水的极化强度；（2）直径为1mm的水滴的电偶极矩有多大？距水10cm处的电场强度有多大？

2.15. (1) $\vec{P} = n\vec{p} = \frac{\rho N_A}{M}\vec{p} = 2.04\times 10^{-2}\ \mathrm{C/m^2}$.

(2) $\vec{P}_{水滴} = \vec{p}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = 1.07\times 10^{-11}\ \mathrm{C\cdot m}$.

$$\begin{cases} E_r = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \dfrac{-p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \end{cases} \quad 即 \begin{cases} E_r = 192\cos\theta\ \ \mathrm{C{\cdot}m} \\ E_\theta = -96.3\sin\theta\ \ \mathrm{C{\cdot}m}. \\ E_\varphi = 0. \end{cases}$$

2.16

- 平行板电容器两极板相距3.0cm，其间放有两层相对介电常量分别为 $\varepsilon_{r1}=2, \varepsilon_{r2}=3$ 的介质，位置与厚度如图所示。已知极板上面电荷密度为σ，略去边缘效应，求 (1) 极板间各处P,E和D的值; (2) 极板间各处的电势(设$\mathrm{V_A}=0$); (3) 3个介质分界面的极化电荷面密度。

2.16. (1) $D=\varepsilon_1E_1=\varepsilon_2E_2$ 其中 $\varepsilon_1=\varepsilon_{r1}\varepsilon_0,\ \varepsilon_2=\varepsilon_{r2}\varepsilon_0.$

由Gauss定理 $D=\sigma$. 因此有 $E_1=\frac{\sigma}{\varepsilon_1},\ E_2=\frac{\sigma}{\varepsilon_2}$

$P_1=D-\varepsilon_0E_1=\frac{1}{2}\sigma$

$P_2=D-\varepsilon_0E_2=\frac{2}{3}\sigma$

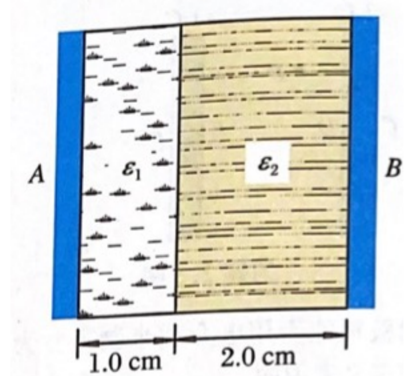
(2) 以A板为起点作x轴.

$$U(x)=\int E\,dx=\begin{cases}\dfrac{\sigma x}{2\varepsilon_0}. & 0<x\le 0.01\ m.\\ \dfrac{\sigma}{200\varepsilon_0}+\dfrac{\sigma}{300\varepsilon_0}(100x-1) & 0.01<x\le 0.03\ m\end{cases}$$

(3) $\sigma'_{1A}=-\vec{P_1}\cdot\vec{n}=\frac{\sigma}{2}.$

$\sigma'_{AB}=-\vec{P_1}\cdot\vec{n}-\vec{P_2}\cdot\vec{n_2}=\frac{\sigma}{6}.$

$\sigma'_{B2}=-\vec{P_2}\cdot\vec{n}=-\frac{2}{3}\sigma$



习题 2.16 图

2.17

- 一个半径为a的导体球面套有一层厚度为b-a的均匀电介质，电介质的介电常数为ε，设内球的电量为q，求空间的电势分布。

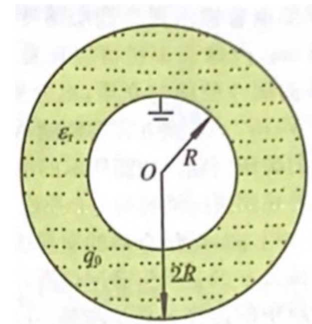
2.17 电荷分布在半径为a的导体球表面.

由Gauss定理. $E=\begin{cases} 0 & 0<r<a. \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^2} & a<r<b. \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>b. \end{cases}$

因此 $U=\int_r^{+\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\begin{cases} \dfrac{q}{4\pi b}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_0}-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon a}, & 0<r<a. \\ \dfrac{q}{4\pi b}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_0}-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r} & a<r<b. \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r>b. \end{cases}$

2.23

- 半径为R的金属球，外面包有一层相对介电常数为$\varepsilon_r = 2$的均匀电介质材料，内外半径分别为$R_1 = R, R_2 = 2R$,介质球内均匀分布着电量为q_0的自由电荷，金属球接地，求介质外表面的电势。



习题 2.23 图

2.23. 介质球壳电荷体密度.

$$\rho_0 = \frac{q_0}{\frac{4}{3}\pi(2R)^3-\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3q_0}{28\pi R^3}$$

设导体球带电量为Q, 分布在导体面上.

① $r<R$. $E=0$, $D=0$.

② $R<r<2R$. 由Gauss定理. $D=\frac{\rho_0(\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{4}{3}\pi R^3)+Q}{4\pi r^2}$ ①

$D=\varepsilon_r\varepsilon_0 E$. ②

$U_{2R}=\int_{2R}^{R} E\,dr$. ③

由①②③式可解得 $U_{2R} = -\frac{q_0}{28\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 R} - \frac{Q}{8\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 R}$.

③ $r>R$. $U=\frac{q_0+Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$

因此有 $U_{2R}=\frac{q_0+Q}{8\pi\varepsilon_0 r}$.

$r=R$处电势连续.

$$-\frac{q_0}{28\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 R} - \frac{Q}{8\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 R} = \frac{q_0+Q}{8\pi\varepsilon_0\cdot 2R}.$$ 其中$\varepsilon_r=2$

解得 $Q=-\frac{16}{21}q_0$.

$$U_{2R}=\frac{5q_0}{168\pi\varepsilon_0 R}.$$

2.26

- 一同心球形电容器由两个同心薄球壳构成，外球壳半径为5cm，内球壳半径可以任意选择，两球壳之间充满各向同性的均匀介质，电介质的击穿强度为$2.0\times10^{7}\mathrm{V\cdot m^{-1}}$，求该电容器所能承受的最大电压。

2.26. 设两球壳内半径为R_1，外半径为R_2.

当 $R_1<r<R_2$. $E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$

$$U=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

击穿时有 $E=E_{max}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\Big|_{max}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon R_1^2}$

即 $\frac{Q}{4\pi\varepsilon}=E_{max}\cdot R_1^2$. 代入 U.

得 $U=E_{max}\cdot R_1^2\cdot\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$

$=-\frac{E_{max}}{R_2}R_1^2+E_{max}R_1$

可见 U 为开口向下.关于R_1的二次函数. 在 $-\frac{b}{2a}$处取极值.

即 $U=U_{max}=\frac{1}{4}E_{max}R_2=2.5\times10^{5}\mathrm{V}$. 此时 $R_1=\frac{R_2}{2}$.

2.20

- 球形电容器由半径为R_1的导体和与它同心的导体球壳构成，壳的内半径为R_2，其间有两层均匀介质，分界面的半径为a，相对介电常量分别为ε_1和ε_2. (1)求电容C; (2)当内球带电荷-Q时，求介质表面上极化电荷的的面密度σ'.

2.20. (1) 由 Gauss定理. 设球壳带电量为Q.

$$D=\frac{Q}{4\pi r^2}$$

因此有
$$E=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 r^2} & (R_1<r<a)\\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 r^2} & (a<r<R_2)\end{cases}$$

$$U=\int_{R_1}^{a}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 r^2}dr+\int_{a}^{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 r^2}dr.$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1R_1}-\frac{1}{\varepsilon_1a}+\frac{1}{\varepsilon_2a}-\frac{1}{\varepsilon_2R_2}\right)$$

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{\varepsilon_1R_1}-\frac{1}{\varepsilon_1a}+\frac{1}{\varepsilon_2a}-\frac{1}{\varepsilon_2R_2}}$$

(2)

$$P_1=(\varepsilon_1-1)\varepsilon_0E_1=\frac{-(\varepsilon_1-1)Q}{4\pi\varepsilon_1\cdot r^2}$$

$$P_2=(\varepsilon_2-1)\varepsilon_0E_2=\frac{-(\varepsilon_2-1)Q}{4\pi\varepsilon_2\cdot r^2}$$

$$\sigma_{R_1}=-P_1(R_1)=\frac{(\varepsilon_1-1)Q}{4\pi\varepsilon_1R_1^2}$$

$$\sigma_a=P_1(a)-P_2(a)=\frac{Q}{4\pi a^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)$$

$$\sigma_{R_2}=P_2(R_2)=-\frac{(\varepsilon_2-1)Q}{4\pi\varepsilon_2\cdot R_2^2}$$

2.21

- 如图所示，在内外半径为a,b的球形电容器的两个极板之间的区域中，一半充满绝对介电常量为ε_1，另一半充满绝对介电常量为ε_2的线性均匀介质。内外极板自由电荷带电量分别为+Q和-Q,求（1）两种介质中的电场强度；（2）系统的电容。

2.21 (1) 由静电场边值关系 $E_{1t}=E_{2t}$. 因此有 $E_1=E_2=E$.

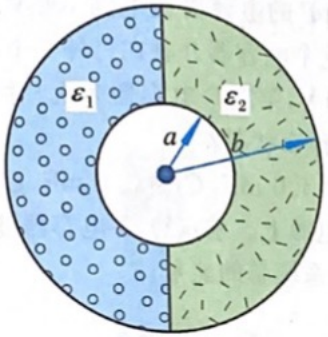
由 Gauss 定理. $\oint D\cdot ds = Q$

即 $\varepsilon_1 E\cdot 2\pi r^2+\varepsilon_2 E\cdot 2\pi r^2=Q$

$$E=\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}$$

(2) $$U=\int_a^b E\,dr=\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)ab}{b-a}$$



习题 2.21 图

2.22

- 如图所示，一导体球外充满两半无限电介质，介电常数分别为ε_1和ε_2，介质界面为通过球心的无限平面。设导体球半径为R，总电荷为q，求空间电场分布和导体球表面的自由面电荷分布。

2.22. 导体球带电，产生电场在介质中满足边值关系 $E_{1t}=E_{2t}$.

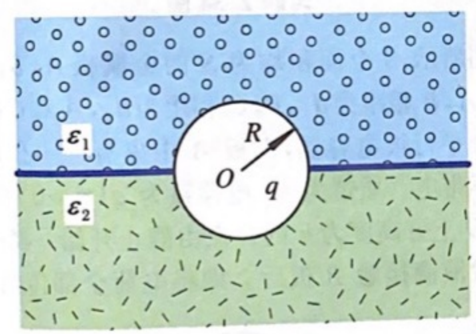
因此有 $E_1=E_2=E$.

由Gauss定理. $E=\dfrac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}$ $(r>R)$

$D_1=\varepsilon_1 E$

$D_2=\varepsilon_2 E$.

在 $r=R$ 处 有 $\begin{cases} D_1|_{r=R}=\sigma_1 \\ D_2|_{r=R}=\sigma_2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \sigma_1=\dfrac{\varepsilon_1 q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2} \\ \sigma_2=\dfrac{\varepsilon_2 q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2} \end{cases}$



习题 2.22 图

2.27

- 高压电缆的耐压问题。如图所示的电缆，半径为a的金属圆柱外包两层同轴的均匀介质层。其介电常数为ε_1和ε_2，$\varepsilon_2=\varepsilon_1/2$，两层介质的交界面半径为b，整个结构被内径为c的金属屏蔽网包围。设a为已知，要使两层介质中的击穿场强都相等，且在两层介质的交界面上出现场强的极值，应该怎样选择b和c？

2.27 (1) 设电荷线密度为 λ.

$D=\frac{\lambda}{2\pi r}$; $D=\varepsilon E$.

因此有 $\begin{cases} E_1=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1 r} & (a<r<b) \\ E_2=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2 r} & (b<r<c) \end{cases}$

击穿场强相等. 则有 $E_{1max}=E_{2max}$.

即 $E_1|_{r=a}=E_2|_{r=b}$ 得 $b=2a$.

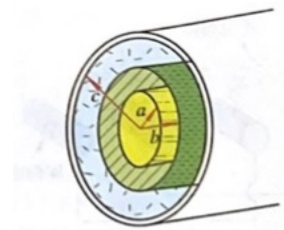
(2) $U=\int_a^b E_1 dr+\int_b^c E_2 dr$

$=\frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{b}{a}+\frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{c}{b}\right)$

与 $E_2|_{r=b}$，即 $E_2(b)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2 b}$ 联立.

有 $E_2(b)=\frac{U}{b\ln\frac{c}{b}+\frac{1}{2}b\ln 2}$

由 $\frac{dE_2}{db}=0$，可得 $c=\sqrt{2}ea$.



习题 2.27 图

- 真空中电荷q均匀分布在半径为a的球内，假设球的相对介电常数为ε_r，求电场的储能。

2.28.

$$D=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi r^2} & (r>a)\\ \dfrac{qr}{4\pi a^3} & (r<a)\end{cases}$$

$$E=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r>a)\\ \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r a^3} & (r<a)\end{cases}$$

$$W=\frac{1}{2}\int\vec{D}\cdot\vec{E}=\frac{1}{2}\int_0^a\vec{D}\cdot\vec{E}\,dv+\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}\vec{D}\cdot\vec{E}\,dv.$$

$$=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(1+\frac{1}{5\varepsilon_r}\right)$$

2.30

- 3个带正电的粒子分别被固定在如图中相应位置。每个粒子的质量、带电量和相邻粒子间距r都已经给出。同时释放3个粒子。求3个粒子彼此离得非常远时它们的动能。假设粒子沿同一直线运动。粒子在途中分别标号为1，2，3.

2.30. 对N+1个点电荷系统 $W_{n+1}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$

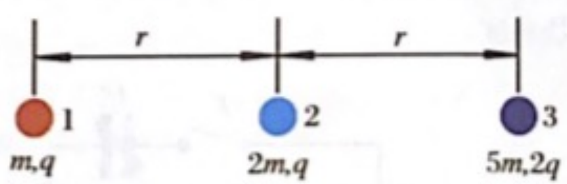
$$W=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{r}+\frac{2q}{2r}+\frac{q^2}{r}+\frac{2q^2}{r}+\frac{2q^2}{2r}+\frac{2q^2}{r}\right)$$

$$=\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 r} \quad ①$$

能量守恒. $W=E_{k1}+E_{k2}+E_{k3}$ ②

动量守恒. $mv_1+2mv_2+5mv_3=0$. ③

其中 $E_{k1}=\frac{1}{2}mv_1^2$, $E_{k2}=\frac{1}{2}(2m)v_2^2$, $E_{k3}=\frac{1}{2}(5m)v_3^2$ ④



习题 2.30 图

粒子初始状态静止. 受彼此库仑力开始运动. 有.

$$F_1=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{(2r)^2}=\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$$

$$F_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{r^2}=(-1)\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$$

$$F_3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{(2r)^2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{r^2}=\frac{5}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$$

$|F_1|:|F_2|:|F_3|=3:2:5$

$F=ma$. 有 $F_1=ma_1$; $F_2=2ma_2$; $F_3=5ma_3$

所以有 $|a_1|:|a_2|:|a_3|=3:1:1$

$v=at$. 所以有 $|v_1|:|v_2|:|v_3|=3:1:1$. ⑤

由①~⑤联立, 可得. $E_{k1}=\frac{9q^2}{16\pi\varepsilon_0 r}$; $E_{k2}=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$; $E_{k3}=\frac{5q^2}{16\pi\varepsilon_0 r}$

2.31

- 半径为R的一个雨滴（假设雨滴为导体），带有电量Q，今将它打破成两个完全相同的水滴，并分开到很远，静电能改变多少？如果分成n个完全相同的小雨滴，最终分散到无限远处，则静电能又改变了多少？

2.31 (1) 对半径为R的雨滴，可看作半径为R的导体球

则有 $E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $(r>R)$

$$U=\int_R^{\infty}E\,dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

$$W=\frac{1}{2}QU=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

(2) 分为2份，记2个雨滴半径为 R_2，电荷量 Q_2

则有 $R_2=\frac{R}{2^{\frac{1}{3}}}$，$Q_2=\frac{Q}{2}$

$$W_2=2\times\frac{1}{2}Q_2U_2=Q_2\cdot\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=\frac{2^{\frac{1}{3}}Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}.$$

(3) 对n个雨滴.

$R_n=\frac{R}{n^{\frac{1}{3}}}$，$Q_n=\frac{Q}{n}$

$$W_n=n\cdot\frac{1}{2}Q_nU_n=\frac{n}{2}\cdot\frac{Q}{n}\cdot\frac{Q/n}{4\pi\varepsilon_0 R/n^{\frac{1}{3}}}=\frac{n^{\frac{1}{3}}Q^2}{8\pi\varepsilon_0 nR}.$$

因此，分为2个雨滴时，静电能改变：

$$\Delta W_2=W_2-W=-\frac{(2-2^{\frac{1}{3}})Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}.$$

分为n个雨滴时，静电能改变：

$$\Delta W_n=W_n-W=-\frac{(n-n^{\frac{1}{3}})Q^2}{8\pi\varepsilon_0 nR}.$$

2.36

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

- 已知在内半径为R_1,外半径为R_2的接地金属球壳内部充满着均匀空间电荷密度ρ.求: (1)系统的静电能; (2)球心处的电势。

2.36. 接地金属球壳. $U=0$, 作导体球壳处理.

电荷均匀分布在 $r<R_1$的球体内.

由Gauss定理. $E\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3\cdot\rho}{\varepsilon_0}$.

即 $E=\dfrac{r\rho}{3\varepsilon_0}$ $(r<R_1)$

$$U=\int_r^{R_1} E\,dr = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R_1^2-r^2)$$

当 $r=0$ $U=\dfrac{\rho R_1^2}{6\varepsilon_0}$.

$$W=\frac{1}{2}\int \varepsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2}\int_0^{R_1}\varepsilon_0\left(\frac{r\rho}{3\varepsilon_0}\right)^2\cdot 4\pi r^2\,dr$$

$$=\frac{2\pi\rho^2R_1^5}{45\varepsilon_0}.$$

2.38

- 一个半径为a的带电球，其体电荷密度在球内随离球心距离r的变化关系为$\rho = Ar^{1/2}$,式中A为常数。求: (1) 球内和球外各处的电场;(2) 球内和球外各处的电势; (3) 该球的自能; (4) 球体的等效电容。

2.38. (1). Gauss定理.

① $r<a$ $\quad E\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{\int_0^r A r^{\frac{1}{2}} 4\pi r^2 dr}{\varepsilon_0}$ 得 $E = \dfrac{2Ar^{\frac{3}{2}}}{7\varepsilon_0}$.

② $r>a$. $\quad E\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{\int_0^a A r^{\frac{1}{2}} 4\pi r^2 dr}{\varepsilon_0}$. 得 $E = \dfrac{2Aa^{\frac{7}{2}}}{7\varepsilon_0 r^2}$

(2) $U = \int_r^\infty E dr$.

$$= \begin{cases} \dfrac{2Aa^{\frac{5}{2}}}{5\varepsilon_0} - \dfrac{4Ar^{\frac{5}{2}}}{35\varepsilon_0} & r<a \\ \dfrac{2Aa^{\frac{7}{2}}}{7\varepsilon_0 r} & r>a. \end{cases}$$

(3) $W = \frac{1}{2}\int \rho U dV$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a Ar^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2Aa^{\frac{5}{2}}}{5\varepsilon_0} - \frac{4Ar^{\frac{5}{2}}}{35\varepsilon_0}\right)\cdot 4\pi r^2 dr.$$

$$= \frac{4\pi A^2}{21\varepsilon_0} a^6$$

(4) $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ 可得 $C = \frac{Q^2}{2W} = \frac{24\pi\varepsilon_0 a}{7}$

3.1

- 一条铝线的横截面积为$0.10\mathrm{mm}^2$,在室温300K时载有$5.0\times10^{-4}\mathrm{A}$的电流。设每个铝原子有3个电子参加导电。已知铝的原子量为27，室温下的密度为$2.7\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$,电阻率为$2.8\times10^{-8}\mathrm{m}$,电子质量为$\mathrm{m}=9.1\times10^{-31}\mathrm{kg}$,阿伏伽德罗常数为$6.0\times10^{23}\mathrm{mol^{-1}}$,玻尔兹曼常数$\mathrm{K}=1.38\times10^{-23}\mathrm{J\cdot K^{-1}}$. 求这条铝线内: (1)电子定向运动的平均速度; (2)电子热运动的方均根速率; (3) 一个电子两次相继碰撞之间的时间; (4) 电子的平均自由程; (5) 电场强度的大小。

3.1. (1) $\bar{v}=\frac{I}{neS}=\frac{IM}{3\rho N_A eS}=1.7\times10^{-7}\ m/s.$

(2) $\sqrt{\bar{v^2}}=\sqrt{\frac{2E_k}{m_e}}=\sqrt{\frac{3kT}{m_e}}=1.2\times10^{5}\ m/s.$

(3) $\tau=\frac{2m_e}{\rho n e^2}=1.4\times10^{-14}\ s.$

(4) $\bar{\lambda}=\tau\cdot\sqrt{\bar{v^2}}=1.55\times10^{-9}\ m.$

(5) $E=\frac{j}{\sigma}=1.4\times10^{-4}\ V/m.$

3.4

- 假设一金属中的载流子（电子）密度为7.5×10^{28}个/m^3,其平均自由时间为1.7×10^{-14}s,请利用德鲁特模型计算出该金属的电阻率。

3.4. $\rho = \frac{m_e}{ne^2\tau} = 2.8\times10^{-8}\ \Omega\cdot m.$

3.21

- 设同轴电缆内外半径分别为a和b，它们之间填充电阻率为ρ的介质。求单位长度的漏电组。

3.21. 设单位长度漏电流为 I. 则有 $j=\frac{I}{2\pi r}$.

$$U=\int_a^b E\,dr=\int_a^b \rho j\,dr=\frac{\rho I}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

$$R=\frac{U}{I}=\frac{\rho}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

3.2

- 在半径为a, b的同心球壳导体之间填满电导率为σ的导电介质，求两球壳之间的电阻。

3.2. 设内外球壳带电量分别为 $+Q$，$-Q$.

则有 $E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$U=\int_a^b E\,dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$I=\int j\,ds=\int\sigma E\,ds=\frac{\sigma Q}{\varepsilon_0}$$

$$R=\frac{U}{I}=\frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

3.3

- 丹聂尔电池由两个同轴圆筒构成，长为l,外筒是内半径为b的铜，内筒是外半径为a的锌，两筒间充满介电常数为ε，电阻率为ρ的硫酸铜溶液。如图所示，略去边缘效应。求: (1) 该电池的内阻; (2) 该电池的电容; (3) 电阻与电容之间的关系。

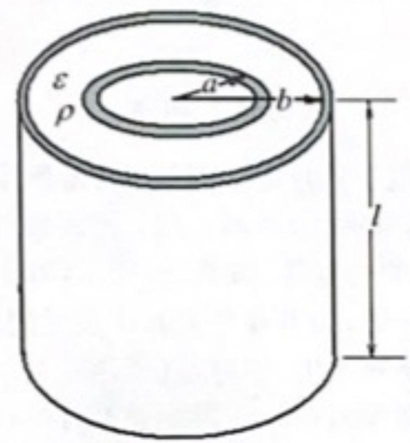
3.3. (1) $R=\frac{\rho}{2\pi l}\ln\frac{b}{a}$.

(2) $E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon l r}$

$U=\int_a^b E\,dr=\frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{b}{a}$.

$C=\frac{Q}{U}=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{b}{a}}$.

(3) $RC=\varepsilon\rho$.



习题 3.3 图

3.5

- 如图所示电线被风吹断，一端触及地面，从而使200A的电流由接触点流入地内。设地面水平，土地的电阻率$\rho = 10^2\Omega\cdot\mathrm{m}$,当一个人走近输电线接地端时，左、右两脚间(约0.6m)的电压称跨步电压，试求距高压线触地点1m和10m处的跨步电压。

3.5. 由稳恒条件 $\oint \vec{j}\cdot d\vec{S} = -I + j\cdot 2\pi r^2 = 0$.

得 $j = \dfrac{I}{2\pi r^2}$

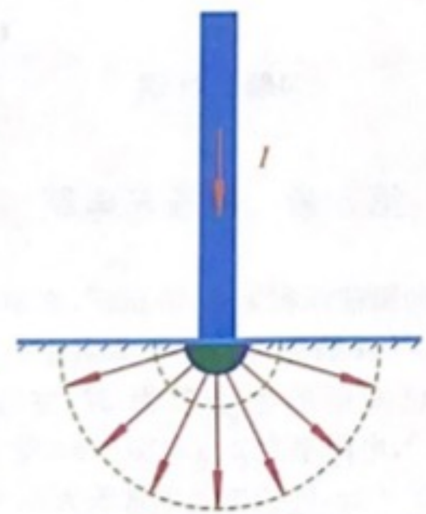
$E = \rho j$

$U = \int_a^b E\cdot dl$

$= \int_a^b \dfrac{\rho I}{2\pi r^2}dr = \dfrac{\rho I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$

(1) $a = 1\,m$, $b = 1.6\,m$ 得 $U = 1194\,V$.

(2) $a = 10\,m$, $b = 10.6\,m$ 得 $U = 18\,V$.



习题 3.5 图

3.6

- 若把大地看成是一个电导率为σ的导电介质。(1) 将半径为R的球形电极的一半埋到地下，求其接地电阻; (2) 在距离为$d(d \gg R)$的地方同样埋一相同的电极，求它们之间的电阻。

3.6. 设电流为I.

(1) $j=\frac{I}{2\pi r^2}$, $j=\sigma E$.

$$U=\int_R^{\infty} E\,dr=\int_R^{\infty}\frac{1}{\sigma}\frac{I}{2\pi r^2}\,dr=\frac{I}{2\pi\sigma R}.$$

$$R=\frac{U}{I}=\frac{1}{2\pi\sigma R}.$$

(2) 对一个电极，有 $E=\frac{I}{2\pi\sigma r^2}$

假设电流从电极1流出，向电极2流入

则有 $E_1=\frac{I}{2\pi\sigma r^2}$, $E_2=\frac{I}{2\pi\sigma r^2}$ 方向均由1指向2

因此在1与2球心连线上，有：

$$E=E_1+E_2=\frac{I}{\pi\sigma r^2}$$

$$U=\int_R^{d-R}\frac{I}{\pi\sigma r^2}\,dr=\frac{I}{\pi\sigma}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{d-R}\right)$$

因此电阻 $r=\frac{U}{I}=\frac{1}{\pi\sigma}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{d-R}\right)$