

42

第3讲: Parseval 等式及其拓展 2023.6.14  
(2022.5.23)

(一) 复习: 设  $f(x), g(x) \in L^2[E, l]$ ,  $\omega = \frac{\pi}{l}$ , 则有:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \stackrel{\text{均分}}{=} f(x), \quad x \in [E, l]$$

$$g(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\omega x + \beta_n \sin n\omega x) \stackrel{\text{均分}}{=} g(x), \quad x \in [E, l].$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_E^l f(x) \cos n\omega x dx \quad (n \geq 0); \quad b_n = \frac{1}{l} \int_E^l f(x) \sin n\omega x dx \quad (n \geq 1);$$

$$\alpha_n = \frac{1}{l} \int_E^l g(x) \cos n\omega x dx \quad (n \geq 0); \quad \beta_n = \frac{1}{l} \int_E^l g(x) \sin n\omega x dx \quad (n \geq 1).$$

且有

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_E^l f^2(x) dx; \quad \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) = \frac{1}{l} \int_E^l g^2(x) dx,$$

$$\begin{cases} f(x) + g(x) \sim \frac{a_0 + \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n + \alpha_n) \cos n\omega x + (b_n + \beta_n) \sin n\omega x) \stackrel{\text{均分}}{=} f(x) + g(x) \\ f(x) - g(x) \sim \frac{a_0 - \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n - \alpha_n) \cos n\omega x + (b_n - \beta_n) \sin n\omega x) \stackrel{\text{均分}}{=} f(x) - g(x) \end{cases}$$

$$\text{且 } \begin{cases} \frac{(a_0 + \alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n + \alpha_n)^2 + (b_n + \beta_n)^2) = \frac{1}{l} \int_E^l (f(x) + g(x))^2 dx & (*) \\ \frac{(a_0 - \alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n - \alpha_n)^2 + (b_n - \beta_n)^2) = \frac{1}{l} \int_E^l (f(x) - g(x))^2 dx & (**) \end{cases}$$

$$(*) - (**): \quad \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n) = \frac{1}{l} \int_E^l f(x) g(x) dx, \quad (***)$$

(二) 例题:

例1. 设  $f(x) \in L^2[E, l]$  且  $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$

(1)



证明: 对  $\forall [a, b] \subset [-l, l]$ , 都有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx \quad (*4).$$

即  $f(x)$  在  $[-l, l]$  上的级数按项逐项等于  $f(x)$ , 且两地在  $[a, b] \subset [-l, l]$

上积分相等。

证: 取  $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0, & x \in [-l, l] - [a, b] \end{cases}$

$$\text{则} \begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{2} \int_{-l}^l g(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b 1 dx \\ \alpha_n = \frac{1}{2} \int_a^b \cos nx dx \\ \beta_n = \frac{1}{2} \int_a^b \sin nx dx \end{cases}$$

利用(\*3)式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-l}^l f(x) g(x) dx &= \frac{1}{2} \int_a^b f(x) \cdot 1 dx = \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n) \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{1}{2} \int_a^b \cos nx dx + b_n \frac{1}{2} \int_a^b \sin nx dx \right) \end{aligned}$$

$$\text{即} \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx.$$

特别地, 若取  $[a, x] \subset [-l, l]$ , 则

$$\begin{aligned} \int_a^x \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega} (b_n \cos n\omega x - a_n \sin n\omega x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega} (a_n \sin n\omega x - b_n \cos n\omega x) \end{aligned}$$

例2. 将  $f(x) = x^2, x \in [0, 1]$  展成傅里叶级数, 并求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  之和.

解(1):  $\because 2l = 1 - 0 = 1, \therefore l = \frac{1}{2}$ . (2) 将  $f(x)$  作  $T = 2l = 1$  的周期

(2)



开拓, 开拓到  $\mathbb{R}$  上的周期函数记作  $F(x)$ . 则

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = 2 \int_0^{\pi} F(x) dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = 2 \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{3}, \text{ 此时}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos \frac{n\pi}{\pi} x dx = 2 \int_0^{\pi} x^2 \cos 2n\pi x dx = \frac{1}{n^2 \pi^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin \frac{n\pi}{\pi} x dx = 2 \int_0^{\pi} x^2 \sin 2n\pi x dx = \frac{1}{n^2 \pi^2}.$$

(3)  $\because f(x) = F(x)|_{[0,1]} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{\pi} x + b_n \sin \frac{n\pi}{\pi} x)$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos 2n\pi x + \frac{1}{n^2 \pi^2} \sin 2n\pi x \right) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x=0, 1 \end{cases}$$

即  $f(x)$  的傅里叶级数在  $[0,1]$  上并不是处处收敛于  $f(x) = x^2$  的, 但除  $x=0, 1$

两点外, 在其他各点处都收敛于  $f(x) = x^2$  的, 即  $f(x)$  的傅里叶级数收敛于  $f(x)$ . 因此 Parseval 公式成立:

(4) 利用 Parseval 公式:  $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = 2 \int_0^{\pi} (x^2)^2 dx$

$$\text{即 } \frac{(\frac{2}{3})^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{n^2 \pi^2} \right)^2 + \left( \frac{1}{n^2 \pi^2} \right)^2 \right) = 2 \int_0^{\pi} (x^2)^2 dx = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{1}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45} \Rightarrow \frac{1}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{8}{45} - \frac{1}{\pi^4} \cdot \frac{2}{6}$$

$$= \frac{1}{90} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(3).



例2表明: 对于  $\forall f(x) \in L^2[a, b]$ , 有  $f(x)$  的傅里叶级数:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}) \quad \text{其中 } 2l = (b-a) \Rightarrow l = \frac{b-a}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{b-a} dx \quad (n \geq 0)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{b-a} dx \quad (n \geq 1).$$

$$\text{故 } f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{b-a}), \quad \text{将 } f(x) \text{ 代替 } f(x), x \in [a, b].$$

同样有 Parseval 公式:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_a^b f^2(x) dx = \frac{2}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx. \quad (*)5$$

例3, 设  $f(x) \in L^2(-\infty, +\infty)$ .  $F(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \omega \in \mathbb{R}$ .

称  $F(\omega)$  为  $f(x)$  的 Fourier 变换, 则有 Parseval 公式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (*)6$$

(\*)6 的证明见书稿 P6.

由(\*)6可推导出物理学中的海森堡测不准原理.

(即粒子的位置与动量精确与测不准, 也即, 同时测得粒子的位置

与动量精确测量是不可能的.)

设  $\{e_n(x)\}$  是  $L^2[a, b]$  中的标准正交系, 即  $(e_m(x), e_n(x)) =$

$$\int_a^b e_m(x) e_n(x) dx = \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad \text{且对 } \forall f \in L^2[a, b] \text{ 有}$$

(\*)



- $f(x)$  的正交级数:  $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n e_n(x)$ ,  $C_n = \int_a^b f(x) e_n(x) dx$

(\*)

若正交的Parseval公式:  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 = \int_a^b f^2(x) dx = \|f(x)\|^2$  成立.

则对  $\{e_n(x)\}$  是  $L^2[a, b]$  的一组完备的正交基(子),

此时必有  $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n e_n(x) \xrightarrow{\text{均方}} f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ .

- 即  $\|\sum_{m=1}^n C_m e_m(x) - f(x)\|^2 = \int_a^b (\sum_{m=1}^n C_m e_m(x) - f(x))^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

例如, 在  $L^2[-1, 1]$  中有一组完备的正交基:  $P_0(x), P_1(x), P_2(x),$

$\dots, P_n(x), \dots$   $P_n(x) \triangleq \frac{(x^2-1)^{(n)} }{2^n \cdot n!}$  ( $n \geq 0$ ),  $x \in [-1, 1]$ .

对于  $\forall f(x) \in L^2[-1, 1]$ , 有  $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x) \xrightarrow{\text{均方}} f(x)$

其中  $C_n \|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \Rightarrow C_n = \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx / \|P_n(x)\|^2$

且  $\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$ ,  $n=0, 1, 2, 3, \dots$

此处,  $P_n(x)$  称为  $n$  阶的 Legendre (勒让德) 函数, 在数理方程中,

$n$  阶的 Bessel 函数族也构成一组完备的正交基.

- (四) 作业:  $e^{x/2}/\sqrt{2}$ ; 5;  $e^{x/2}/\sqrt{4}$ ; 6.

(5)



例3的证明, 即 Fourier 变换的 Parseval 等式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \text{ 的证明:}$$

其中,  $f(t) \in L^2_{(-\infty, +\infty)}$ , 且  $f(t)$  连续,  $F(\omega) = F(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$

证: 设  $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)f(t) dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , 则  $g(x) \in \mathbb{R} \cap \mathbb{C}$ , 且

$$F(g(\omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)f(t) dt \right) e^{-i\omega x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)f(t) e^{-i\omega x} dt dx \quad \text{交换积分次序}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)f(t) e^{-i\omega x} dx dt \quad \begin{array}{l} \text{设 } x+t=u \\ \text{则 } x=u-t, dx=du \end{array}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega(u-t)} du dt$$

$$= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right) = F(\omega) \cdot \overline{F(\omega)} = |F(\omega)|^2$$

$$\text{故 } g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 e^{i\omega x} d\omega \text{ 即}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 e^{i\omega x} d\omega, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{令 } x=0$$

$$\text{则有: } \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \text{ 证毕.}$$

$$\text{证: } \begin{cases} F(\omega) = F(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\ f(t) = F^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{称之为付氏变换} \\ \text{对} \end{array}$$

并称  $f(t)$  为原函数,  $F(\omega)$  为像函数。

(6).



例4. 利用  $f(x) = \cos ax$  ( $0 < a < 1$ ) 在  $[-\pi, \pi]$  上的 Fourier 级数.

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{\pi} \left( \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2a}{a^2 - n^2} \cos nx \right), \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad (*)$$

证明: (1).  $\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2x}{x^2 - n^2\pi^2}, \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}) \quad (**)$

(2).  $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2x}{x^2 - n^2\pi^2}, \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}), \quad (***)$

(ex 2.3/4)

例5. 证明: 三角级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  在  $\forall [a, b] \subset (0, \pi)$  中一致收敛,

但此三角级数不是任何一  $f$  在  $L^2[a, b]$  中函数  $f(x)$  的 Fourier 级数.

即  $L^2[a, b]$  中的任何一  $f$  函数  $f(x)$  的 Fourier 级数, 都是三角级数.

而有些三角级数却不是某  $f$  函数  $f(x)$  的 Fourier 级数. (ch 2 终/1)

证例4(1): 在 (\*) 中, 取  $x = \pi$ , 则有:

$$\frac{\cos a\pi}{\sin a\pi} = \cot a\pi = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2a}{a^2 - n^2\pi^2}, \quad \text{令 } a\pi = x, \text{ 则}$$

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2x}{x^2 - n^2\pi^2}, \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}).$$

(注: 本题中, 可将  $f(x) = \cos ax$  中的  $0 < a < 1$ , 替换为  $a \notin \mathbb{Z}$ )

证例4(2): 在 (\*) 中, 取  $x = 0$ , 则得:

(1)



$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)x^2} \quad \text{令 } x=k\pi, \text{ 则有:}$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)x^2}, \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}).$$

证例 5/10. 令  $a_n(x) = \sin nx, b_n(x) = \frac{1}{n}$ ,  $x \in [a, b]$ , 则

$$|A_n(x)| = |a_1(x) + \dots + a_n(x)| = |\sin x + \dots + \sin nx| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{m_0}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\forall x \in [a, b], m_0 = |\sin \frac{x}{2}|$  在  $[a, b]$  上的最小值. 即  $|A_n(x)|$  在  $[a, b]$  上一致有界, 且  $b_n(x) = \frac{1}{n} \downarrow 0$ , 即  $b_n(x)$  在  $[a, b]$  中关于  $n$  单调且一致趋零.

依 Dirichlet 判别法,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  在  $[a, b]$  中一致收敛;

证例 5/20 用反证法: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  是  $L^2[a, b]$  中的一致收敛的正项级数, 依 Parseval 公式,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

即  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  应绝对收敛! 然而若设  $g(x) = \frac{1}{x} \quad x \in (2, +\infty)$

则  $g(x) \in (2, +\infty)$  中  $C$ , 单调递减且  $\int_2^{+\infty} g(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} u = +\infty$ . 即  $\int_2^{+\infty} g(x) dx$  发散, 从而依 Cauchy 判别法

判别法, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛. 矛盾! 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  不是

$L^2[a, b]$  中任何一致收敛的正项级数。