

线性代数 (B1) 第三次作业

请于 2023 年 3 月 28 日周二上课前在教室里交.

补充习题可视作思考题, 不作要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

2023 年 3 月 21 日布置的作业

教材习题. P113-114: #6 (若无法举出例子, 请解释原因), #7, #8, #9.

补充习题 1. 计算

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

的幂 J^t ($t \geq 1$), 并找出与 J 乘法可交换的所有矩阵.

补充习题 2. 若有矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, 以及矩阵 B , 使得 $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$.

求出这个矩阵 B . (提示: 直接求解, 或者参考讲义中的注 4.2.25 (5) 中的处理方法, 或者利用教材中例 4.2.7 给出的公式)

2023 年 3 月 23 日布置的作业

教材习题. P113-114, #2, #14, #15(1) (提示: 一种思路是先转置, 再考虑讲义中的注 4.2.25(5) 中的处理方法), #18, #19 (提示: 用 tr), #20.

补充习题 3. 设 A 为方阵, k 为某个正整数, 满足 $A^k = O$. 若 $\lambda \in F = \mathbb{R}$, $A + \lambda I$ 是否可逆? 若可逆, 求出其逆矩阵; 若不可逆, 解释原因.

补充习题 4. (1) 给定列向量 $u \in \mathbb{R}^n$, 假定 $u^T u = 1$. 对于 $P = uu^T$ 以及 $Q = I_n - 2P$, 证明:

$$(i) \quad P^2 = P, \quad (ii) \quad P^T = P, \quad (iii) \quad Q^2 = I_n.$$

- (2) 在上面一小问中, 变换 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 被称作一个**投影**, 而 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ 被称作一个**豪斯霍尔德反射** (Householder reflection). 为了理解这一点, 对于 $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, 分别计算 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 以及 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$. 用几何的语言来解释 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ 与 \boldsymbol{x} 的关系.