内容回顾

从单位矩阵出发，我们引入相应的三种初等矩阵:

$$\boldsymbol{I}_n \xrightarrow{\quad r_i \leftrightarrow r_j \quad} \boldsymbol{S}_{ij} \xleftarrow{\quad c_i \leftrightarrow c_j \quad} \boldsymbol{I}_n$$

$$\boldsymbol{I}_n \xrightarrow{\quad \lambda r_i \quad} \boldsymbol{D}_i(\lambda) \xleftarrow{\quad \lambda c_i \quad} \boldsymbol{I}_n$$

$$\boldsymbol{I}_i \xrightarrow{\quad \lambda r_j \to r_i \quad} \boldsymbol{T}_{ij}(\lambda) \xleftarrow{\quad \lambda c_i \to c_j \quad} \boldsymbol{I}_n$$

定理 1

1. 矩阵的初等行变换对应于初等矩阵的左乘, 即, 对于矩阵 $\boldsymbol{A}$, $r_i \leftrightarrow r_j$ 等同于 $\boldsymbol{S}_{ij}\boldsymbol{A}$, λr_i 等同于 $\boldsymbol{D}_i(\lambda)\boldsymbol{A}$, $\lambda r_j \rightarrow r_i$ 等同于 $\boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)\boldsymbol{A}$.
2. 矩阵的初等列变换对应于初等矩阵的右乘, 即, 对于矩阵 $\boldsymbol{A}$, $c_i \leftrightarrow c_j$ 等同于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}_{ij}$, λc_i 等同于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_i(\lambda)$, $\lambda c_i \rightarrow c_j$ 等同于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)$.

定理 2

初等矩阵都是可逆矩阵, 且其逆矩阵仍然是同类型的初等矩阵, 并满足

$$\boldsymbol{S}_{ij}^2 = \boldsymbol{D}_i(\lambda)\boldsymbol{D}_i(1/\lambda) = \boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)\boldsymbol{T}_{ij}(-\lambda) = \boldsymbol{I}.$$

注

给定一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 我们可以通过一系列初等行变换将其化为约化标准形; 我们将后者记作 $\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})$.

1. 若 $\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})$ 恰有 n 个主元, 那么 $\mathrm{rref}(A) = \boldsymbol{I}_n$.
2. 若 $\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})$ 的主元的个数小于 n, 那么 $\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})$ 不是可逆方阵.

定理 3

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 则以下三条等价:

1. $\boldsymbol{A}$ 可以通过一系列初等行变换化为单位阵 $\boldsymbol{I}_n$;
2. $\boldsymbol{A}$ 是一些初等矩阵的乘积;
3. $\boldsymbol{A}$ 是可逆的;
4. $\boldsymbol{A}$ 可以通过一系列初等列变换化为单位阵 $\boldsymbol{I}_n$.

定理 4

行列式函数满足以下的性质.

1. $\det(\boldsymbol{I}_n)=1$, 即 $\det(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)=1$, 其中, $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ 为数组空间 F^n 中的基本向量, 写成行向量的形式.
2. $\det(\boldsymbol{A})$ 关于 $\boldsymbol{A}$ 的每个行向量都是线性的 (在固定其它行向量的条件下): 若第 i_0 个行向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_0}=k_1\boldsymbol{\beta}+k_2\boldsymbol{\gamma}$, 其中 $k_1,k_2\in F$, 那么
$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{A})&=\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_0-1},\boldsymbol{\alpha}_{i_0},\boldsymbol{\alpha}_{i_0+1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\\&=k_1\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_0-1},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_{i_0+1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\\&\qquad+k_2\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_0-1},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_{i_0+1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_n).\end{aligned}$$
特别地, 若 $\boldsymbol{A}$ 有一行全为 0, 则 $\det(\boldsymbol{A})=0$.
3. 若 $\boldsymbol{A}$ 有相邻的两行相等, 则 $\det(\boldsymbol{A})=0$.

2023 年 4 月 4 日

定理 5

行列式函数满足以下的性质.

- (a) 设 $\boldsymbol{B}$ 由方阵 $\boldsymbol{A}$ 通过倍乘行的初等行变换得到: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\lambda r_i} \boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}_i(\lambda)\boldsymbol{A}$, 则 $\det(\boldsymbol{B}) = \lambda \det(\boldsymbol{A})$.
- (b) 若 $\boldsymbol{A}$ 的不同两行 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 对应成比例, 则 $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.
- (c) 设 $\boldsymbol{B}$ 由方阵 $\boldsymbol{A}$ 通过倍加的初等行变换得到: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\lambda r_j \to r_i} \boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)\boldsymbol{A}$, 则 $\det(\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A})$.
- (d) 设 $\boldsymbol{B}$ 由方阵 $\boldsymbol{A}$ 通过交换行的初等行变换得到: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_j \leftrightarrow r_i} \boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}_{ij}\boldsymbol{A}$, 则 $\det(\boldsymbol{B}) = -\det(\boldsymbol{A})$.

推论 6

1. $\det(\boldsymbol{S}_{ij}) = -1$, $\det(\boldsymbol{D}_i(\lambda)) = \lambda$, $\det(\boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)) = 1$.
2. 若 $\boldsymbol{E}$ 是一个初等矩阵, 则 $\det(\boldsymbol{EA}) = \det(\boldsymbol{E})\det(\boldsymbol{A})$.

定理 7

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为同阶的方阵, 则 $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$. 特别地, $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{BA})$.

推论 8

- (a) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \det(\boldsymbol{A})^{-1}$.
- (b) 对于同阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$, 我们有 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I} \Leftrightarrow \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$.
- (c) $\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})$.
- (d) 定理 4 和定理 5 中的性质对于列向量也成立. 另外, 行列式可以按照任意行展开, 也可以按照任意列展开.

对于方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 从中取出第 $i_1<i_2<\cdots<i_p$ 行与 $j_1<j_2<\cdots<j_p$ 列的交叉位置的元素. 这些有序排列的元素构成了 $\boldsymbol{A}$ 的一个 p 阶子阵:

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots\cdots & a_{i_1j_p} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots\cdots & a_{i_2j_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_pj_1} & a_{i_pj_2} & \cdots\cdots & a_{i_pj_p} \end{pmatrix}.$$

注 (Laplace 展开定理)

若取定行指标 $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$, 则

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_p} \det\left(\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix}\right) \cdot \left((-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_p+j_1+j_2+\cdots+j_p} \det\left(\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_{p+1} & i_{p+2} & \cdots & i_n \\ j_{p+1} & j_{p+2} & \cdots & j_n \end{pmatrix}\right)\right),$$

其中

$$\begin{aligned}\{1,2,\ldots,n\} &= \{i_1 < i_2 < \cdots < i_p\} \cup \{i_{p+1} < i_{p+1} < \cdots < i_n\} \\ &= \{j_1 < j_2 < \cdots < j_p\} \cup \{j_{p+1} < j_{p+1} < \cdots < j_n\}.\end{aligned}$$

注 (关于矩阵乘积的 Binet–Cauchy 公式)

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$, 我们用 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$ 来表示由 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ 行第 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ 列元素构成的 r 阶子方阵. 假定 $\boldsymbol{A} \in F^{p\times q}$, $\boldsymbol{B} \in F^{q\times s}$, 则对于 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$, 其 r 阶子阵的行列式可计算如下:

1. 若 $r > q$, 那么 $\left|\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}\right| = 0$;
2. 当 $r \leq q$, 我们有

$$\left|\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}\right| = \sum_{1\leq k_1<k_2<\cdots<k_r\leq q}\left|\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}\right|.$$

行列式的全展开

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量. 行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ 也可以视为关于行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的函数: $\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$. 该多元函数满足:

1. 反对称性: 交换两个行向量的位置, 则行列式变号.
2. 多重线性: 行列式关于每个行向量都是线性的 (在固定其它行向量的条件下).
3. 规范性: 若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 是 n 维数组空间 F^n 中的基本向量, 则 $\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1$. 注意, 这组基本向量对应的方阵为 $\boldsymbol{I}_n$.

1. 考察由两两不同的实数构成的一个有序数组 $s=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, 并称之为一个排列.
2. 对于该 s, 若 $i<j$ 而 $a_i>a_j$, 则数对 (a_i, a_j) 称为 (相对于 s 的) 一个逆序.
3. s 的逆序的个数称为 s 的逆序数, 记作 $\tau(s)$.
4. 若 $\tau(s)=0$, 即 $a_1<a_2<\cdots<a_n$, 则 s 称为一个顺序排列.
5. 若 $\tau(s)$ 为奇数 (对应地, 偶数), 则称 s 为一个奇排列(对应地, 偶排列).
6. 对于一个排列, 若交换其中的两个元素的位置, 则称对其做了一次对换.

引理

每个排列 s 都可以经过 $\tau(s)$ 次相邻位置的对换变成一个顺序排列.

例

我们可以考虑排列 $s = (2, 5, 4, 3, 1)$.

推论 9

$\mathcal{S}_n$ 中的排列 $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ 可以通过 $\tau(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ 个对换得到顺序排列 $(1, 2, \ldots, n)$, 从而 $\det(\boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_n}) = (-1)^{\tau(j_1, j_2, \ldots, j_n)} \det(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = (-1)^{\tau(j_1, j_2, \ldots, j_n)}$.

定理 10

设方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$，则

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in\mathcal{S}_n} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\ldots,j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

定理 11

方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式还可以对称地按列的自然顺序展开成

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathcal{S}_n} (-1)^{\tau(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

Cramer 法则

之前我们已经引入了方阵的代数余子式 A_{ij} 的概念. 对于方阵 $\boldsymbol{A}$, 我们定义 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 (adjoint matrix) 为

$$\operatorname{adj}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^* := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots\cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots\cdots A_{n2} \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots\cdots A_{nn} \end{pmatrix}.$$

请特别注意其下标的排列顺序. 特别地, $\boldsymbol{A}^*$ 的第 (i,j) 元素为 $\boldsymbol{A}$ 的第 (j,i) 元素对应的代数余子式 A_{ji}. 不难看出

$$(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{\mathsf{T}}.$$

定理 12

对于方阵 $\boldsymbol{A}$, 我们有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{I}_n$.

定理 13

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \cdot \boldsymbol{A}^*$.

推论 14

对于 $n \geq 2$, 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 则 $\det(\boldsymbol{A}^*) = \det(\boldsymbol{A})^{n-1}$.