第九周作业答案

5.5

11.1/1(5);	2/(2)	(6)	(8)	;5;	11.2/1(5);	2/(1)	(5)	(6);	5
$\sqrt{2}z_M$	$\frac{8}{3}\sqrt{2}a\pi^3$	$\frac{\pi}{4}ae^a+2(e^a-1)$	$\frac{1}{3}(t_0^2+2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\sqrt{2}$	$\frac{2GM\rho}{a}$	$\frac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$	9	$\sqrt{2}\pi$	$2\pi\arctan\frac{H}{R}$	$(\frac{4\sqrt{3}}{5}+\frac{2}{15})\pi$

5.6

11.3/1(1)	(3)	(4);	2;	3;	4/(1);	5/(1)	(2)
$\frac{4}{3}$	0	1	0	$\frac{(a^2-b^2)}{2}k$	-12	$\frac{3}{8}a^2\pi$	$3\pi a^2$

11.1.1.(5) 计算下列曲线的弧长

$4ax=(y+z)^2$ 与 $4x^2+3y^2=3z^2$ 的交线，由原点到点 $M(x,y,z)$ $(a>0,\ z\geq 0)$

令 $t=y+z$ $\quad x=\frac{t^2}{4a}$ $\quad z-y=\frac{t^3}{12a^2}$ $\quad$ 即 $x=\frac{t^2}{4a}$ $\quad y=\frac{1}{2}(t-\frac{t^3}{12a^2})$ $\quad z=\frac{1}{2}(t+\frac{t^3}{12a^2})$

$$I=\iint_L ds=\int_0^{t_0}\sqrt{(\frac{t}{2a})^2+(\frac{1}{2}-\frac{t^2}{8a^2})^2+(\frac{1}{2}+\frac{t^2}{8a^2})^2}\,dt=\int_0^{t_0}\frac{\sqrt{2}}{8a^2}(t^2+4a^2)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2}}(t_0+\frac{t_0^3}{12a^3})=\boxed{\sqrt{2}z_M}$$

11.1.2. 计算下列曲线积分

(2) $\int_L \frac{x^2}{x^2+y^2}ds$ $\quad L: x=a\cos t\quad y=a\sin t\quad z=at\quad (0\leq t\leq 2\pi)$

(6) $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$ $\quad L$: 由曲线 $r=a$, $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 所围成的区域边界

(8) $\int_L z\,ds$ $\quad L$ 是圆锥螺线 $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$ $(0\leq t\leq t_0)$

(2) $$\int_L\frac{x^2}{x^2+y^2}ds=\int_0^{2\pi}\frac{(at)^2}{a^2\cos^2t+a^2\sin^2t}\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+a^2}\,dt=\int_0^{2\pi}t^2\sqrt{2}a\,dt=\boxed{\frac{8}{3}\sqrt{2}a\pi^3}$$

(6) 在 $r=a$ 这一段上 $\int_{L_1}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^a a\,d\varphi=\frac{\pi}{4}e^a a$

在 $\varphi=0$ 这一段上 $\int_{L_2}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^a e^x dx=e^a-1$

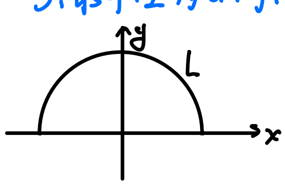
在 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 这一段上 $x=y=t$ $(0\leq t\leq\frac{\sqrt{2}}{2}a)$ $\int_{L_3}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}e^{\sqrt{2}t}\sqrt{2}\,dt=\int_0^a e^s ds=e^a-1$

故 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\boxed{\frac{\pi}{4}e^a a+2(e^a-1)}$

(8) $$\int_L z\,ds=\int_0^{t_0}t\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1^2}\,dt=\int_0^{t_0}t\sqrt{t^2+2}\,dt$$

$$=\boxed{\frac{1}{3}(t_0^2+2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\sqrt{2}}$$

5. 求半径为 a 的均匀半圆弧（密度为 ρ）对于处在圆心 O，质量为 M 的质点的引力.



$$F=\int_L\frac{GM}{x^2+y^2}\sin\theta\,dm=\boxed{\frac{2GM\rho}{a}}$$

11.2.1. 求下列曲面在指定部分的面积 (5) 曲面 $x=\frac{1}{2}(2y^2+z^2)$ 被柱面 $4y^2+z^2=1$ 所截下的部分

$$\iint_{\Sigma} 1\cdot dS=\iint_{4y^2+z^2\le 1}\sqrt{1+(2y)^2+(z)^2}\,dy\,dz \xlongequal[z=r\sin\theta]{y=\frac{1}{2}r\cos\theta} \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\sqrt{1+r^2}\,\frac{1}{2}r\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

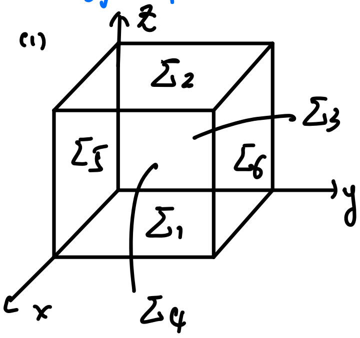
11.2.2 计算下列曲面积分

(1) $\iint_S (x+y+z)\,dS$ S: 立方体 $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$ 的全表面

(5) $\iint_S (x^4-y^4+y^2z^2-x^2z^2+1)\,dS$ S: 圆锥 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截下的部分

(6) $\iint_S \frac{dS}{r^2}$ S: 圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 界于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间的部分, r 是 S 上的点到原点的距离

(1)



$$\iint_{\Sigma_1}(x+y+z)\,dS=\iint_{\Sigma_3}(x+y+z)\,dS=\iint_{\Sigma_5}(x+y+z)\,dS$$

$$\iint_{\Sigma_2}(x+y+z)\,dS=\iint_{\Sigma_4}(x+y+z)\,dS=\iint_{\Sigma_6}(x+y+z)\,dS$$

$$\iint_{\Sigma_1}(x+y+z)\,dS=\iint_{\Sigma_1}(x+y)\,dS=\int_0^1\int_0^1 x+y\,dx\,dy=1$$

$$\iint_{\Sigma_2}(x+y+z)\,dS=\iint_{\Sigma_2}(x+y+1)\,dS=\int_0^1\int_0^1 x+y+1\,dx\,dy=2$$

故 $\iint_S (x+y+z)\,dS=9$

(5) $$\iint_S (x^4-y^4+y^2z^2-x^2z^2+1)\,dS=\iint_{(x-1)^2+y^2\le 1}\left((x^2+y^2)(x^2-y^2)-z^2(x^2-y^2)+1\right)\sqrt{1^2+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$=\sqrt{2}\iint_{(x-1)^2+y^2\le 1}=\sqrt{2}\pi$$

(6) 选取 θ, z 为参数 $\begin{cases}x=R\cos\theta\\ y=R\sin\theta\\ z=z\end{cases}$ $\vec{r_\theta}'=(-R\sin\theta, R\cos\theta, 0)$ $\vec{r_z}'=(0,0,1)$ $|\vec{r_\theta}'\times\vec{r_z}'|=R$

$$\iint_S\frac{dS}{r^2}=\iint_S\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^H\frac{R}{R^2+z^2}\,d\theta\,dz=2\pi R\cdot\frac{1}{R}\arctan\frac{z}{R}\Big|_0^H=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$

5. 求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(0\le z\le 1)$ 的质量, 其各点密度为 $\rho=z$

$$m=\iint_{\Sigma} z\,dS=\iint_{x^2+y^2\le 2}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}r^2\sqrt{1+r^2}\,r\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}\int_0^2 t\sqrt{1+t}\,dt$$

$$=\left(\frac{4\sqrt{3}}{5}+\frac{2}{15}\right)\pi$$

11.3.1 计算下列第二型曲线积分

(1) $\int_L (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$，$L$是曲线 $y=1-|1-x|$ 从点$(0,0)$到点$(2,0)$

$L_1: y=x \quad 0\le x\le 1 \qquad L_2: y=2-x \quad 1\le x\le 2$

$$\int_{L_1}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy=\int_0^1 2x^2\,dx=\frac{2}{3}$$

$$\int_{L_2}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy=\int_1^2 2y^2\,dx=\int_1^2 2(2-x)^2dx=\frac{2}{3}$$

$$\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy=\frac{4}{3}$$

(3) $\int_L \frac{-x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$ L是圆周$x^2+y^2=a^2$，依逆时针一周的路径

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases} \qquad I=\int_0^{2\pi}\frac{-a\cos\theta\,d(a\cos\theta)+a\sin\theta\,d(a\sin\theta)}{a^2}=\int_0^{2\pi}2\sin\theta\cos\theta\,d\theta=0$$

(4) $\int_L y^2dx+xy\,dy+xz\,dz$ L是从$O(0,0,0)$到$A(1,0,0)$再到$B(1,1,0)$最后到$C(1,1,1)$的折线段

$$\int_{OA} y^2dx+xy\,dy+xz\,dz=0$$

$$\int_{AB} y^2dx+xy\,dy+xz\,dz=\int_0^1 y\,dy=\frac{1}{2} \qquad \int_L y^2dx+xy\,dy+xz\,dz=1$$

$$\int_{BC} y^2dx+xy\,dy+xz\,dz=\int_0^1 z\,dz=\frac{1}{2}$$

11.3.2. 求向量场 $\vec{v}=(y+z)\vec{i}+(z+x)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$ 沿曲线 $\begin{cases} x=a\sin^2 t \\ y=2a\sin t\cos t \\ z=a\cos^2 t \end{cases}$ $(0\le t\le\pi)$ 参数增加方向的曲线积分

$$I=\int_L (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$$

$$=\int_0^{\pi}(2a\sin t\cos t+a\cos^2 t)(2a\sin t\cos t)\,dt+a\cdot a\,2\cos 2t\,dt+(2a\sin t\cos t+a\sin^2 t)(2a\cos t(-\sin t))\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\left[2a^2\sin t\cos t(\cos^2 t-\sin^2 t)+2a^2\cos 2t\right]dt$$

$$=\int_0^{\pi}\left[a^2\sin 2t\cos 2t+2a^2\cos 2t\right]dt=0$$

11.3.3. 质点在弹性力场中，方向指向原点，大小与质点离原点的距离成正比，比例系数为k，若质点沿椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$从点$(a,0)$移到点$(0,b)$求弹性力做的功

$$\vec{F}=k\sqrt{x^2+y^2}\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=-k(x,y)$$

$$W=\int \vec{F}\cdot d\vec{s} = -k\int x\,dx+y\,dy \xlongequal[y=b\sin\theta]{x=a\cos\theta} -k\int_0^{\frac{\pi}{2}} -a^2\sin\theta\cos\theta+b^2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= (a^2-b^2)k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{(a^2-b^2)k}{2}$$

11.3.4. 利用Green公式,计算下列积分

(1) $\oint_L (x+y)^2dx+(x^2-y^2)dy$ L是顶点为A(1,1) B(3,3) C(3,5)的三角形的周界,沿逆时针方向

$$\oint_L (x+y)^2dx+(x^2-y^2)dy \xlongequal{Green} \iint_D \frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x}-\frac{\partial(x+y)^2}{\partial y}\,dxdy=\iint_D -2y\,dxdy = -12$$

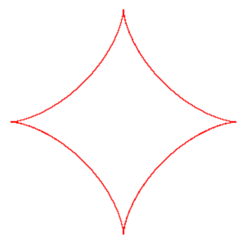
11.3.5. 利用曲线积分计算下列区域的面积

(1) 星形线 $x=a\cos^3t$ $y=a\sin^3t$ $(0\le t\le 2\pi)$ 围成的区域

(2) 旋轮线 $x=a(t-\sin t)$ $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ 与 Ox 轴围成的区域

(1) $$S=\iint_D dxdy=\frac{1}{2}\oint_L -y\,dx+x\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}-a\sin^3t\,3a\cos^2t(-\sin t)+a\cos^3t\,3a\sin^2t\cos t\,dt$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2t\cos^2t\,dt=\frac{3}{8}a^2\pi$$



(2) $$S=\iint_D dxdy=\frac{1}{2}\oint_L -y\,dx+x\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0} -a(1-\cos t)a(1-\cos t)+a(t-\sin t)\,a\sin t\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi a}0\,dx$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{2\pi}^{0} -(1-\cos t)^2-\sin^2t+t\sin t\,dt=3\pi a^2$$