# 第四周作业参考

2023 年 4 月 4 日

## 目录



## 一点说明

(i) 作业讲义部分题过程可能有省略。如对作业仍有疑问可以在群里或答疑课上讨论。

(ii) **作业讲义会随时间更新。**

(iii) 请及时核对自己在 BB 系统里的分数，如有问题请向对应的助教反馈。

(iv) 附录里的内容仅供有兴趣的同学参考，有可能涉及之后才会学习或课外的知识，不要求在现阶段掌握。

(v) 讲义最好用电脑打开，文档内置了链接功能，复习或查看指定的作业很方便。

成绩说明：成绩公式为

$$\text{score} = \begin{cases} 10 - k \cdot \max\{n - n_0, 0\} & \text{未迟交} \\ 5 & \text{迟交} \end{cases}$$

其中 $n$ 为错题数，$n_0$ 为容忍度；$k$ 为系数，取决于当周作业的题量。第四周不考虑补充题共 9 题，$n=9$，考虑到一些同学出现了计算失误、笔误、抄错题目等等情况，$n_0=2$；$k=0.5$。对于一些不严格的证明，助教也会酌情给分。也意味着作业得到满分不代表作业没有问题，请认真查看自己的作业。

上述评分标准对每个助教都成立。

# 1 第四周作业

## 1.1 3 月 28 日布置的作业

### 1.1.1 教材习题 P114:10,23

**习题 1** (教材习题 10). 证明：对任意 $n$ 阶方阵都乘法可交换的方阵一定是数量矩阵。

**解**. 设与任意 $n$ 阶方阵都乘法可交换的方阵为 $\boldsymbol{X}$，题目要证对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{AX}$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}$。但是如果我们选取某个矩阵 $\boldsymbol{A}_1$，很可能计算得到与 $\boldsymbol{A}_1$ 可交换的方阵不仅为 $\boldsymbol{I}$。因此思路就很清晰了：尝试构造多个矩阵 $\{\boldsymbol{A}_i\}$，使得与这些矩阵可交换的方阵只有 $\lambda\boldsymbol{I}$。

当然，一次一次去尝试构造矩阵是很费时的方法，我们先尝试构造只有一个非零元素的方阵，观察能得到关于矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的信息。

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\,,a_{ij}=t\delta_{m_0i}\delta_{n_0j}$$

其中 $\delta_{m_0i}$ 含义为仅当 $i=m_0$ 时 $\delta_{m_0i}=1$，$\delta_{n_0j}$ 含义为仅当 $j=n_0$ 时 $\delta_{n_0j}=1$，$t\neq 0$，这样我们就构造出了一个仅有一个非零元素的矩阵，非零元素为 $a_{m_0n_0}=t$。这样形式地写出有助于简化我们的推导过程。接下来计算 $\boldsymbol{XA}$ 与 $\boldsymbol{AX}$，由于我们关于 $\boldsymbol{X}$ 还没有任何信息，设 $\boldsymbol{X}=(x_{ij})$

$$(\boldsymbol{XA})_{ij}=\sum_{k=1}^{n}x_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n}x_{ik}t\delta_{m_0k}\delta_{n_0j}=tx_{im_0}\delta_{n_0j}$$

应注意最后一个等号是对 $k$ 求和，因此 $k=m_0$ 是唯一的非零项，并且有关 $i,j$ 的变量会被保留。同样的

$$(\boldsymbol{AX})_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_{kj}=\sum_{k=1}^{n}t\delta_{m_0i}\delta_{n_0k}x_{kj}=t\delta_{im_0}x_{n_0j}$$

两个矩阵可交换则对应矩阵元也相等，在考虑选择的 $\boldsymbol{A}$ 的任意性，$m_0,n_0\in 1,2\cdots n$ 是任意选择的，则

$$t\delta_{im_0}x_{n_0j}=tx_{im_0}\delta_{n_0j}\quad \forall m_0,n_0\in 1,2\cdots n$$

由于 $t\neq 0$，我们可以将之约去，并考虑固定 $i,j$，用不同的 $m_0,n_0$ 试探，很容易得到

$$\begin{aligned}
0=\delta_{im_0}x_{n_0j}=x_{im_0}\delta_{n_0j}=x_{im_0}\quad & m_0\neq i,n_0=j\\
x_{n_0j}=\delta_{im_0}x_{n_0j}=x_{im_0}\delta_{n_0j}=0\quad & m_0=i,n_0\neq j\\
x_{jj}=\delta_{im_0}x_{n_0j}=x_{im_0}\delta_{n_0j}=x_{ii}\quad & m_0=i,n_0=j
\end{aligned}$$

上面三个式子就证明了 $\boldsymbol{X}$ 与任意 $n$ 阶方阵可交换的必要条件是 $\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{I}$，充分条件易验证（若 $\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{X}$ 与任意 $n$ 阶方阵可交换）。综上，对任意 $n$ 阶方阵都乘法可交换的方阵一定是数量矩阵。 □

**习题 2** (教材习题 23). 计算下列行列式

$$\text{(1)}\begin{vmatrix}1&0&1&-4\\-1&-3&-4&-2\\2&-1&4&4\\2&3&-3&2\end{vmatrix}\quad\text{(2)}\begin{vmatrix}1&4&-1&-1\\1&-2&-1&1\\-3&3&-4&-2\\0&1&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$\text{(3)}\begin{vmatrix}x+a&x+b&x+c\\y+a&y+b&y+c\\z+a&z+b&z+c\end{vmatrix}\quad\text{(4)}\begin{vmatrix}&&&\boldsymbol{A}_1\\&&\boldsymbol{A}_2&\\&\iddots&&\\\boldsymbol{A}_n&&&\end{vmatrix}$$

$$\text{(5)}\begin{vmatrix}&&&a_{1n}\\&&a_{2,n-1}&a_{2n}\\&\iddots&\iddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\quad\text{(6)}\begin{vmatrix}1+a_1&1&\cdots&1\\1&1+a_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&\cdots&1&1+a_n\end{vmatrix}$$

$$\text{(7)}\begin{vmatrix}a_1&&&&&b_1\\&\ddots&&&\iddots&\\&&a_n&b_n&&\\&&c_n&d_n&&\\&\iddots&&&\ddots&\\c_1&&&&&d_1\end{vmatrix}\quad\text{(8)}\begin{vmatrix}a_1-b_1&a_1-b_2&\cdots&a_1-b_n\\a_2-b_1&a_2-b_2&\cdots&a_2-b_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_n-b_1&a_n-b_2&\cdots&a_n-b_n\end{vmatrix}$$

**解**. 第一题采用化为三角形的方法：

$$(1)\begin{vmatrix}1&0&1&-4\\-1&-3&-4&-2\\2&-1&4&4\\2&3&-3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1&-4\\0&-3&-3&-6\\0&-1&2&12\\0&3&-5&10\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}1&0&1&-4\\0&1&1&2\\0&-1&2&12\\0&3&-5&10\end{vmatrix}$$

$$=-3\begin{vmatrix}1&0&1&-4\\0&1&1&2\\0&0&3&14\\0&0&-8&4\end{vmatrix}=-3\times1\times1\begin{vmatrix}3&14\\-8&4\end{vmatrix}=-372$$

第二题采用化为三角形的方法：

$$(2)\begin{vmatrix}1&4&-1&-1\\1&-2&-1&1\\-3&3&-4&-2\\0&1&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&-1&-1\\0&-6&0&2\\0&15&-7&-5\\0&1&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&-1&-1\\0&1&-1&-1\\0&-6&0&2\\0&15&-7&-5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&4&-1&-1\\0&1&-1&-1\\0&0&-6&-4\\0&0&8&10\end{vmatrix}=1\times1\begin{vmatrix}-6&-4\\8&10\end{vmatrix}=-28$$

第三题将第一行拆分：

$$(3)\begin{vmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ y & y & y \\ z & z & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

使用上面的过程，倒数第二个等号需要用到 $x \neq 0$，但若 $x = 0$ 则存在一个完全为 0 的行，则行列式也为 0，因此不影响结果；倒数第一个等号同理。

第四题主要要注意 $(-1)$ 的次数：

$$(4)\begin{vmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_n & & & \end{vmatrix}, \boldsymbol{A}_i \text{是 } n_i \text{ 阶方阵}$$

$\boldsymbol{A}_1$ 的第一列位于第 $\left[\sum_{j=2}^{n} n_j\right] + 1$ 列，将之与它之前的一列不断对换，经过 $\left[\sum_{j=2}^{n} n_j\right] + 1 - 1$ 次对换可以将 $\boldsymbol{A}_1$ 的第一列换至第一列，行列式变化 $(-1)^{\left[\sum_{j=2}^{n} n_j\right]}$，并将 $\{\boldsymbol{A}_i, i \geq 2\}$ 向右平移一列；接下来对 $\boldsymbol{A}_1$ 的第二列、第三列 $\cdots$ 第 $n_1$ 列做同样的操作，每次对换的次数都是 $\left[\sum_{j=2}^{n} n_j\right]$ 次对换，总的系数变化 $(-1)^{n_1\left[\sum_{j=2}^{n} n_j\right]}$，矩阵变为

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & & & \boldsymbol{A}_2 \\ & & \iddots & \\ & \boldsymbol{A}_n & & \end{vmatrix}$$

即

$$\begin{vmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{n_1\left[\sum_{j=2}^{n} n_j\right]} \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & & & \boldsymbol{A}_2 \\ & & \iddots & \\ & \boldsymbol{A}_n & & \end{vmatrix}$$

同样对 $\boldsymbol{A}_2$ 作如此操作，可得系数为 $(-1)^{n_2\left[\sum_{j=3}^{n} n_j\right]}$；之后对 $\boldsymbol{A}_3 \cdots$ 直到将 $\boldsymbol{A}_{k-1}$ 与 $\boldsymbol{A}_k$ 交换即停止，此

时

$$\begin{vmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{n_1\left[\sum\limits_{j=2}^{n} n_j\right]+n_2\left[\sum\limits_{j=3}^{n} n_j\right]+\cdots+n_{k-1}\sum\limits_{j=n}^{n} n_j} \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\sum\limits_{j=i+1}^{n} n_i n_j} \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{n} n_i\right)^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} n_i^2\right)\right]} \prod_{p=1}^{n} \det \boldsymbol{A}_p$$

注意：此题采用交换列/行的方法需要仔细考虑，否则很可能出现错误，如 $\begin{vmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{vmatrix}$

第五题主要要注意 $(-1)$ 的次数：

$$(5)\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

使用与上题相同的方法，将最后一列经过 $n-1$ 次对换换至第一列，可得到

$$\begin{vmatrix} a_{1n} & & & \\ a_{2n} & & & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \iddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

继续将此时的最后一列经过 $n-2$ 次对换换至第二列，不断操作至 $a_{n1}$ 被换至最后一列，可得

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1+n-2+\cdots+1} \begin{vmatrix} a_{1n} & & & \\ a_{2n} & a_{2,n-1} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{nn} & a_{n,n-1} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{p=1}^{n} a_{p,n+1-p}$$

第六题可通过拆行的方法：

$$(6)\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_n(-1)^{n+n} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

设 $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$，则 $\Delta_n = a_n\Delta_{n-1} + \prod_{i=1}^{n-1} a_i, \cdots, \Delta_2 = a_2(1+a_1)+a_1$，使用归纳法容易证明 $\Delta_n = \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1, i\neq j}^{n} a_i\right)$。（使用拆行和这种写法主要是可以规避 $a_i = 0$ 的情形。）

第七题通过行列式的行展开：

$$(7) \begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix}_{2n\times 2n}$$

$$= a_1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_2 & & & & & b_2 & \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_n & b_n & & & \\ & & c_n & d_n & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_2 & & & & & d_2 & \\ & & & & & & d_1 \end{vmatrix}_{2n-1\times 2n-1} + b_1(-1)^{1+2n} \begin{vmatrix} & a_2 & & & & & b_2 \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a_n & b_n & & \\ & & & c_n & d_n & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ & c_2 & & & & & d_2 \\ c_1 & & & & & & \end{vmatrix}_{2n-1\times 2n-1}$$

$$= a_1d_1(-1)^{2n-1+2n-1} \begin{vmatrix} a_2 & & & & & b_2 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_2 & & & & & d_2 \end{vmatrix}_{2n-2\times 2n-2} - b_1c_1(-1)^{2n-1+1} \begin{vmatrix} a_2 & & & & & b_2 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_2 & & & & & d_2 \end{vmatrix}_{2n-2\times 2n-2}$$

$$= (a_1d_1 - b_1c_1)\begin{vmatrix} a_2 & & & & & b_2 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_2 & & & & & d_2 \end{vmatrix}_{2n-2\times 2n-2} = \prod_{i=1}^{n}(a_id_i - b_ic_i)$$

第八题与第三题很像，一样拆行

(8)
$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix} = 0$$

使用上面的过程，倒数第二个等号同样需要用到 $a_1 \neq 0$，但若 $a_1 = 0$ 则存在一个完全为 0 的行，则行列式也为 0，因此不影响结果；倒数第一个等号同理。

应注意的是上面只对 $n \geq 3$ 才成立，$n = 1$ 时行列式为 $a_1 - b_1$，$n = 2$ 时行列式为 $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) - (a_1 - b_2)(a_2 - b_1) = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$. □

### 1.1.2 补充习题 1,2,3,4

**习题 3** (补充习题 1). 对于 $n$ 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$，我们可以定义函数 $\psi_A : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \boldsymbol{X} \to \mathrm{tr}(\boldsymbol{AX})$。若 $n$ 阶实方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\psi_{\boldsymbol{A}} = \psi_{\boldsymbol{B}}$，证明 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

**证明**. 此题的关键是理解"函数"。举个其他的例子：$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$f = g$ 的意思是 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$，此题同理。$\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \psi_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}) = \psi_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{X}), \mathrm{tr}(\boldsymbol{AX}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BX})$。因此证明 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ 的方法就很明显了，通过不同的 $\boldsymbol{X}$ 的选取，推出 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 中的元素对应相等即可。

作为尝试，与第 10 题的思路相似，依然是选取 $\boldsymbol{X}$ 中只有一个非零元，

$$\boldsymbol{X} = (x_{ij})_{n\times n}, x_{ij} = t\delta_{m_0 i}\delta_{n_0 j}$$

其中 $\delta_{m_0 i}$ 含义为仅当 $i = m_0$ 时 $\delta_{m_0 i} = 1$，$\delta_{n_0 j}$ 含义为仅当 $j = n_0$ 时 $\delta_{n_0 j} = 1$，$t \neq 0$，这样我们就构造出了一个仅有一个非零元素的矩阵，非零元素为 $a_{m_0 n_0} = t$。这样形式地写出有助于简化我们的推导过程。设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$

$$(\boldsymbol{AX})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}t\delta_{m_0 k}\delta_{n_0 j} = ta_{im_0}\delta_{n_0 j}$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AX}) = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{AX})_{ii} = \sum_{i=1}^{n} ta_{im_0}\delta_{n_0 i} = ta_{n_0 m_0}$$

对 $\psi_{\boldsymbol{B}}$ 同理，有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{BX}) = tb_{n_0 m_0}$$

因此可知

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AX}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BX}) = ta_{n_0m_0} = tb_{n_0m_0} \Rightarrow a_{n_0m_0} = b_{n_0m_0}$$

考虑 $m_0, n_0$ 选取的任意性，即 $\forall m_0, n_0 = 1, 2, \cdots, n, a_{n_0m_0} = b_{n_0m_0} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. □

**习题 4** (补充习题 2). *对于分块矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A_1}\ \boldsymbol{A_2}) \in \mathbb{F}^{m\times(m+n)}$，若方阵 $\boldsymbol{A_1}$ 可逆，求出所有的 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{F}^{(m+n)\times m}$ 使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$.*

**解**. 假设 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}_1$ 是 $n \times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{B}_2$ 是 $m \times n$ 的矩阵，则根据矩阵分块公式

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2$$

将 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ 代入，有

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}_1^{-1} - \boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2$$

因此 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} - \boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix}$ □

**习题 5** (补充习题 3). *令 $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$，其中为了讨论的方便，可以假定 $a, b, c$ 皆为正数。利用初等的方法，计算由 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{0}$ 为顶点构成的平行四边形的面积。再利用定义分别计算 2 阶方阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{u} \end{pmatrix}$ 的行列式。解释一下你的"发现"。*

**解**. 平行四边形的面积可以很容易计算：$S = cb$，行列式 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{u} \end{pmatrix}$ 有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & 0 \end{pmatrix} = -bc = -S, \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = bc = S$$

可以看到行列式代表了一种"有向面积"。究其原因，是由于体积是 $n$ 维向量空间 $F^n$ 上的规范反对称 $n$ 重线性函数，即 $n$ 阶行列式函数。设 $f$ 是 $F^n$ 上的一个 $n$ 元函数，其定义中分别对应

(i) 规范：对 $n$ 维向量空间上的 $n$ 个单位向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n, f(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n) = 1$，对应 $n$ 个单位向量组成的单位正方体体积为 1。

(ii) $n$ 重线性：对每个 $i, 1 \le i \le n$，均有

$$f(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{i-1}, \lambda\boldsymbol{\eta} + \mu\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n) = \lambda f(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{i-1}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n) + \mu f(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{i-1}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\xi}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n)$$

线性性可以结合单位向量来理解。

(iii) 反对称：

$$f(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_i, \cdots, \boldsymbol{\xi}_j, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n) = -f(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_j, \cdots, \boldsymbol{\xi}_i, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n)$$
$$\Leftrightarrow f(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n) = 0$$

对体积而言，若 $n$ 个向量中有几个向量完全相同，则它在 $n$ 维空间中所占体积为 0。

因此体积实际上对应了行列式（包括高维空间体积）。 □

**习题 6** (补充习题 4). 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & a & \ddots & \vdots \\ 0 & b & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}_{n\times n}$$

(提示：可能需要就 $a$ 与 $b$ 是否相等来讨论.)

**解**. 将原来的 $n$ 阶行列式 $D_n$ 按第一行展开得

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - a\begin{vmatrix} b & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a+b & a & \cdots & 0 \\ 0 & b & a+b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix}$$

再将上式中最后一个行列式按第一列展开得

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

我们有

$$D_1 = a+b, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - ab = a^2+ab+b^2$$

以下只需由递推关系式及初始条件求出 $D_n$.
递推式可改写为 $D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - D_{n-2})$. 对 $n \leq 3$ 记 $u_n = D_n - aD_{n-1}$，则 $u_n = bu_{n-1}$，$u_n$ 是以 $b$ 为公比的等比数列，$u_n = u_2 b^{n-2}$. 即

$$D_n - aD_{n-1} = (D_2 - aD_1)b^{n-2} = b^n$$

在行列式 $D_n$ 中将 $a$ 换成 $b$，$b$ 换成 $a$，则 $D_n$ 变成 $D_n^T = D_n$，值不变. 上式变成

$$D_n - bD_{n-1} = a^n$$

当 $a \neq b$ 时，两式相减，得

$$(b-a)D_{n-1} = b^n - a^n \quad \Rightarrow \quad D_{n-1} = \frac{b^n - a^n}{b-a}$$

因此

$$D_n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$$

将 $a$ 看成常数，$b$ 看成变量，则原行列式 $D_n$ 是 $b$ 的多项式，因此是 $b$ 的连续函数. 令 $b \to a$，在（5）式两边取极限，可知 $b = a$ 时 $D_n$ 就是等式（5）右边的分式的极限，也就是函数 $f(x^{n+1})$ 在 $x = a$ 的导数值 $(n+1)a^n$. 因此得

$$D_n = \begin{cases} \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}, & a \neq b \\ (n+1)a^n, & a = b \end{cases}$$

□

## 1.2 3 月 30 日布置的作业

### 1.2.1 补充习题 5,6,7

**习题 7** (补充习题 5). 设 $p_i(x)$ 是关于变元 $x$ 的 $i$ 次多项式，其 $x^i$ 前的系数为 $c_i$. 证明：

$$D_n = \begin{vmatrix} p_0(x_1) & p_1(x_1) & \cdots & p_{n-1}(x_1) \\ p_0(x_2) & p_1(x_2) & \cdots & p_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_0(x_n) & p_1(x_n) & \cdots & p_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = c_0c_1\cdots c_{n-1}\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i).$$

**证明**. 观察可见，原行列式的第 $i$ 列可以拆成 $i$ 个列向量之和，相应地将原行列式拆成 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个行列式之和，其中大部分项为 0（两列相等），最终有

$$D_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1x_1 & \cdots & c_{n-1}x_1^{n-1} \\ c_0 & c_1x_2 & \cdots & c_{n-1}x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_0 & c_1x_n & \cdots & c_{n-1}x_n^{n-1} \end{vmatrix} = c_0c_1\cdots c_{n-1}V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

其中 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 Vandermonde 行列式且 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$.
综上有

$$D_n = \begin{vmatrix} p_0(x_1) & p_1(x_1) & \cdots & p_{n-1}(x_1) \\ p_0(x_2) & p_1(x_2) & \cdots & p_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_0(x_n) & p_1(x_n) & \cdots & p_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = c_0c_1\cdots c_{n-1}\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i).$$

□

**习题 8** (补充习题 6). 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda - a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & \lambda - a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda - a_n^2 \end{vmatrix}.$$

**证明**. 考虑加边法，即为 $n$ 阶行列式添加一行和一列，得到一个与原行列式值相等的 $n+1$ 阶行列式，然后对 $n+1$ 阶行列式进行计算，以求得原行列式的值。

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda - a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ 0 & -a_2a_1 & \lambda - a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_na_1 & -a_na_3 & \cdots & \lambda - a_n^2 \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

将第一行 $\times a_i$ 加到第 $i+1$ 行，$i = 1, ..., n$.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

现在将行列式按照第 $n+1$ 列展开，得到

$$D_n = a_n \cdot (-1)^{n+2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n\times n} + \lambda \cdot (-1)^{2n+2} \cdot D_{n-1}$$

易得上式中新引入的行列式可以按最后一行展开为 $a_n \cdot (-1)^{n+1} \cdot \lambda^{n-1}$.
所以可以得到递推关系式

$$D_n = \lambda D_{n-1} - a_n^2 \lambda^{n-1}$$

下面由递推关系式求通解已经是初等内容,这里仅简单给出过程和最终答案。递推式两边同时除以 $\lambda^n(\lambda \neq 0)$，由累加法可知行列式

$$D_n = \lambda^n - \lambda^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

当 $\lambda = 0$ 时显然 $D_n = 0$，可以统一为上面的结果。 □

**习题 9** (补充习题 7). *（1）设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n$ 阶反对称的矩阵，其中 $n$ 为奇数. 证明：$\det \boldsymbol{A}$=0.*
*（2）设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n$ 阶反对称的矩阵，其中 $n$ 为偶数. 若给 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素都加上相同的一个数 $\lambda$，从而得到新矩阵 $\boldsymbol{B}$. 证明：$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B}$.（提示：若将 $\boldsymbol{B}$ 视作 $\boldsymbol{A}$ 的每个列向量都加上了一个新的列向量所得到的的矩阵. 将其行列式按列全部拆开，你会得到 $2^n$ 个行列式. 接下来考虑 $n+1$ 阶反对称阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{A} & \\ -1 & & & \end{pmatrix}$，将其行列式按第一行展开，你又观察到什么？）*
*（3）设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n$ 阶反对称的矩阵，其中 $n$ 为偶数，并且 $\boldsymbol{A}$ 的对角线右上方的所有元素都是 1. 求 $\det \boldsymbol{A}$.*

**证明**.（1）一方面，$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A^T}$，另一方面 $\det \boldsymbol{A^T} = \det \boldsymbol{(-A)} = (-1)^n \det \boldsymbol{A} = -\det \boldsymbol{A}$. 由 $\det \boldsymbol{A} = -\det \boldsymbol{A}$ 得 $\det \boldsymbol{A} = 0$.
（2）由提示，用列向量表示矩阵 $\boldsymbol{A}$，设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha_1}, ..., \boldsymbol{\alpha_n}), \boldsymbol{\beta} = (1, ..., 1)^T$ 为一个 $n$ 维列向量。于是

$$\det \boldsymbol{B} = \det(\boldsymbol{\alpha_1} + \lambda\boldsymbol{\beta}, ..., \boldsymbol{\alpha_n} + \lambda\boldsymbol{\beta})$$

由行列式的 $n$ 重线性性，可以将上式展开为 $2^n$ 个行列式的和，且其中大部分项为 0（两列相等），故有

$$\det \boldsymbol{B} = \det(\boldsymbol{\alpha_1}, ..., \boldsymbol{\alpha_n}) + \lambda[\det(\boldsymbol{\beta, \alpha_2, ..., \alpha_n}) + \det(\boldsymbol{\alpha_1, \beta, ..., \alpha_n}) + ... + \det(\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, ..., \beta})] \quad (*)$$

由第一问，再将行列式按第一行展开

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\beta^T} \\ -\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \det(\boldsymbol{\beta, \alpha_2, ..., \alpha_n}) + \det(\boldsymbol{\alpha_1, \beta, ..., \alpha_n}) + ... + \det(\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, ..., \beta}))$$

代入 (*) 式即有

$$\det \boldsymbol{B} = \det(\boldsymbol{\alpha_1}, ..., \boldsymbol{\alpha_n}) = \det \boldsymbol{A}$$

（3）此时有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

由第二问的结论，给 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素都加上 1 得到 $\boldsymbol{B}$，行列式不变，即

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

因此 $\det \boldsymbol{A}=\det \boldsymbol{B}=1$. □

# 致谢

感谢各助教对本文档的校对工作和内容补充，感谢申伊塃老师以及同学对助教工作的支持。