第四次习题课

胡铁宁

2023 年 5 月 8 日

目录

1 作业题选讲 1

2 线性空间——理解与证明 8

3 再谈矩阵 11

4 从“线性映射基本定理”到线性同构和商空间 12

5 零化多项式与极小多项式 15

1 作业题选讲

习题 1 (教材 P155 习题 17)**.** 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示, 则 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 也线性无关.

证明. 用反证法. 假设 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关, 则可不妨设 $\boldsymbol{\beta}_r$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{r-1}$ 线性表示. 又由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示, 并注意到向量组的线性表示具有传递性, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{r-1}$ 线性表示. 故可设

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{r-1} \lambda_{ij} \boldsymbol{\beta}_j, \quad i = 1, \cdots, r. \tag{1}$$

我们想要推出矛盾 (即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关), 故只需证明下面的方程(2)有非零解.

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}. \tag{2}$$

把(1)代入(2)可得

$$(\lambda_{11}x_1 + \cdots + \lambda_{r1}x_r)\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + (\lambda_{1,r-1}x_1 + \cdots + \lambda_{r,r-1}x_r)\boldsymbol{\beta}_{r-1} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

又注意到齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda_{11}x_1 + \cdots + \lambda_{r1}x_r = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{1,r-1}x_1 + \cdots + \lambda_{r,r-1}x_r = 0. \end{cases}$$

有非零解 (因为系数矩阵的行数小于列数, 从约化标准形中可以看出有自由元). 故方程(3)即(2)有非零解. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 矛盾. 习题得证. □

注 1.1. *当然, 这道题可以使用极大无关组以及秩的语言来证明. 但是, 我们在布置这道作业时学到秩的结论不多, 故这里采用了尽量少的前置知识来证明.*

习题 2 (教材 P155 习题 12(5))**.** *下列说法是否正确? 为什么?*
(5) *设* $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ *线性无关, 则* $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s + \boldsymbol{\alpha}_1$ *必线性无关;*

解. 本题的正误可以利用一个更广的命题来得到: 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 并且向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{T}$, 则 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关当且仅当 $\boldsymbol{T}$ 为可逆方阵. 这个命题的证明如下:

由命题的条件可知 $(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{T}$. 设 $\boldsymbol{T} = (t_{ij})$, 则

$$\boldsymbol{\beta}_j = \sum_{k=1}^{n} t_{kj}\boldsymbol{\alpha}_k, \quad j = 1, \cdots, n.$$

则

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n \text{ 线性相关} \\
\Leftrightarrow &\text{存在不全为零的数 } \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \text{ 使得 } \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{\beta}_j = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow &\text{存在不全为零的数 } \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \text{ 使得 } \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{k=1}^{n} t_{kj}\boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow &\text{存在不全为零的数 } \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \text{ 使得 } \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j t_{kj}\boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow &\text{存在不全为零的数 } \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \text{ 使得 } \sum_{j=1}^{n} \lambda_j t_{kj} = 0, k = 1, \cdots, n \\
\Leftrightarrow &\text{线性方程组 } \boldsymbol{T}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ 有非零解} \\
\Leftrightarrow &\boldsymbol{T} \text{ 不可逆.}
\end{aligned}$$

于是命题得证. 对于本题, 我们可以轻松地写出过渡矩阵并计算其行列式, 从而判断过渡矩阵是否可逆, 得到答案. □

注 2.1. *本讲义中的习题 5 推广到一般线性空间后可以与这个题目解答中使用的命题互为推论.*

鉴于上面使用的命题很重要, 我们将其单独列举出来:

命题 1. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 并且向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{T}$, 则 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关当且仅当 $\boldsymbol{T}$ 为可逆方阵.

习题 3 (教材 P156 习题 24)**.** 证明:

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\le\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)+\operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s).$$

证明. 我们设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的极大无关组是 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_p}$, 而 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的极大无关组是 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_q}$. 于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可以被 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_p}$ 线性表示, 而 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可以被 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_q}$ 线性表示. 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可以被 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_p},\boldsymbol{\beta}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_q}$ 线性表示. 故

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\le p+q=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)+\operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s).$$

□

习题 4 (补充习题 2)**.** (1) 设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，任取 $\boldsymbol{A}$ 的 r 个线性无关的行和 r 个线性无关的列. 证明: 这 r 行和这 r 列交叉处的 r 阶子阵可逆.
(2) 若上题中的 $r<\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$, 则其结论不成立. 试给出反例.
(3) 证明: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式所在的行向量组和列向量组都是线性无关的.
(4) 上题的逆命题不成立，即位于线性无关的行向量组和线性无关的列向量组交叉处的子式不一定非零. 试给出反例。

证明. (1) 不妨假设选择的 r 个线性无关的行位于前 r 行 (若不在可通过行交换变为前 r 行，行交换不改变线性无关/线性相关的性质)，r 个线性无关的列位于前 r 列，则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}$ 是 $r\times r$ 阶矩阵，由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，将 $\boldsymbol{A}$ 视为行向量，可知前 r 行的行向量是 $\boldsymbol{A}$ 行向量的极大无关组，因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可通过初等行变换化为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$。初等行变换不改变列向量的线性相关性（教材 P125 定理 5.3.1），因此此时 $\boldsymbol{A}_{11}$ 中的所有列向量仍线性无关，$\boldsymbol{A}_{11}$ 矩阵的列秩为 r 等于矩阵的秩等于矩阵的阶数，说明 $\boldsymbol{A}_{11}$ 可逆。

(2)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，选择第 2,3 行和第 1,2 列，矩阵 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=0$

(3) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式说明行列式不为 0，根据教材 P131 推论 5.3.3，易知行向量组和列向量组在非零子式中的分量是线性无关的，因此它们的加长向量组也是线性无关的，可知非零子式所在的行向量组和列向量组都是线性无关的。

(4)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，选择第 2,3 行和第 1,2 列，交叉子式 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$ 行列式为 0。 □

习题 5 (教材 P156 习题 31)**.** 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 F^n 的基, 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 有关系式

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{T}.$$

证明: $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 为 F^n 的基当且仅当 $\boldsymbol{T}$ 为可逆方阵.

证明. 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 均为列向量. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 F^n 的基, 故 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 是可逆方阵. 因此,

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n \text{为} F^n \text{的基} \\
\Leftrightarrow &(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)\text{是可逆方阵} \\
\Leftrightarrow &(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{T}\text{是可逆方阵} \\
\Leftrightarrow &\boldsymbol{T}\text{是可逆方阵}.
\end{aligned}$$

□

注 5.1. *另一种证法见本讲义命题 1 , 可以将本题中的 F^n 推广到一般 (有限维) 线性空间.*

习题 6 (教材 P156 习题 35)**.** 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (3, 2, -1, 4), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 3, 0, -1)$.

(i) 将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的一组基;

(ii) 给出标准基在该组基下的表示;

(iii) 求 $\boldsymbol{\beta} = (1, 3, 4, -2)$ 在该组基下的坐标.

解. (i) 可以观察, 令 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (0, 0, 1, 0), \boldsymbol{\alpha}_4 = (0, 0, 0, 1)$. 可以计算

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_4\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}3 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 的一组扩充基. 当然, 这并不是唯一的.

(ii) 不难计算

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{4}$$

所以

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4) &= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{14}{5} & \frac{11}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

就是标准基在该组基下的表示.

(iii) 直接计算:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta} &= (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{14}{5} & \frac{11}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{17}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

所求坐标就是 $\left(-\frac{3}{5},\frac{7}{5},\frac{17}{5},\frac{9}{5}\right)^{\mathrm{T}}$.

□

注 6.1. 我们可以对本题进行改编:

第一种改编: 将本题中的 $\mathbb{R}^4$ 改为 $\mathbb{R}^{2\times 2}$, 设向量

$$
\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.
$$

其余叙述不变.

第二种改编: 将本题中的 $\mathbb{R}^4$ 改为 $\mathbb{R}_3[x]$($\mathbb{R}$ 上次数不超过 3 的多项式全体), 设向量

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_1 &= f_1(x) = 3x^3+2x^2-x+4, \\
\boldsymbol{\alpha}_2 &= f_2(x) = 2x^3+3x^2-1, \\
\boldsymbol{\beta} &= g(x) = x^3+3x^2+4x-2.
\end{aligned}
$$

其余叙述不变.

可以发现它们的本质都是一样的.

这里, 我们把第一种改编的解答过程写出来:

解. (i) 怎么把 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{A}_2$ 扩充为 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的一组基呢? 我们的做法是直接凭感觉添加两个简单的向量, 再证明它们构成一组基, 而证明方法就是写出自然基到我们构造的扩充基的过渡矩阵, 再利用命题 1 . 我们记 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 为 (i,j) 元为 1, 其余元素全为 0 的 2 阶方阵, $i,j = 1,2$. 当然, 我们可以说 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 构成 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的一组标准基. 现在取 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{E}_{22}$, 则我们可以直接写出

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

容易验证上面的过渡矩阵确实可逆, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 即为所求.

(ii) 由式(5)可知,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4) &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{14}{5} & \frac{11}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

这就是标准基在该组基下的表示.

(iii) 直接计算:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta} &= (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)\begin{pmatrix}1\\3\\4\\-2\end{pmatrix}\\
&= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 0\\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0\\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 1 & 0\\ -\frac{14}{5} & \frac{11}{5} & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\4\\-2\end{pmatrix}\\
&= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\ \frac{7}{5}\\ \frac{17}{5}\\ \frac{9}{5}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

故所求坐标就是 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{7}{5}, \frac{17}{5}, \frac{9}{5}\right)^{\mathrm{T}}$.

□

注 6.2. *上一个注代表了一类很容易考到的题, 如果大家认为这样的题还有必要练习, 可以参考中国科学技术大学 2020—2021 学年第二学期线性代数 (B1) 期中考试第五题、中国科学技术大学 2019—2020 学年第一学期线性代数 (B1) 期中考试第五题、中国科学技术大学 2017—2018 学年第二学期线性代数 (B1) 期中考试第五题、中国科学技术大学 2016—2017 学年第一学期线性代数 (B1) 期中考试第五题、中国科学技术大学 2015—2016 学年第二学期线性代数 (B1) 期中考试第五题 (这里的第一种改编类型). 还可以参考中国科学技术大学 2016—2017 学年第二学期线性代数 (B1) 期中考试第五题、中国科学技术大学 2018—2019 学年第二学期线性代数 (B1) 期中考试第五题 (这里的第二种改编类型).*

习题 7 (补充习题 4)**.** *设 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times m}, \boldsymbol{B} \in F^{m\times p}$. 若 $m = \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})$, 证明: $m = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.*

证明. 利用秩不等式:

$$m = \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}), \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})\} \leqslant \max\{\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}), \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})\} \leqslant m.$$

则上面的不等号均取等号, 故 $m = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$. □

注 7.1. *这道题的本质还是秩不等式, 同学们至少应熟练掌握其一种证法. 证法包括但不限于: (i) 利用相抵标准形; (ii) 利用行 (列) 向量组的极大无关组; (iii) 利用齐次线性方程组的解空间维数与系数矩阵秩之间的关系; (iv) 利用 Binet–Cauchy 公式.*

我们下面用注 7.1 中的方法 (iii) 证明一下 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$. 考虑齐次线性方程组 $\boldsymbol{ABx} = \mathbf{0}$ 以及 $\boldsymbol{Bx} = \mathbf{0}$, 记它们的解空间分别为 V_1, V_2. 我们容易看出 $V_2 \subseteq V_1$, 因此 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = p - \dim V_1 \leqslant p - \dim V_2 = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.

习题 8 (补充习题 5)**.** *设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 并存在正整数 N 使得* $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^N) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1})$*. 证明:* $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^N) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+2}) = \cdots$*.(提示: Frobenius 不等式)*

证明. 由 Sylvester 不等式可知

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^N\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^N) \geqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^N) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^N\boldsymbol{A}),$$

即

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+2}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^N) \geqslant 2\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1}).$$

故由题目条件可得 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+2}) \geqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1})$. 另一方面, 又有秩不等式 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+2}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1}\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1})$. 因此,

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+2}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1}).$$

然后不难依次这样做下去得到欲证明的等式. □

注 8.1. *题目条件有"存在正整数 N 使得* $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^N) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1})$*". 事实上, 这个条件一定满足, 因为 $\{\boldsymbol{A}^k\}_{k=1}^{\infty}$ 的秩不可能无穷地严格递减下去.*

2 线性空间——理解与证明

在这一部分, 我们希望重建线性空间的理论, 所利用的事实仅限于我们本学期所讲的行列式及其之前的内容. 这样可以帮助同学们巩固所学知识. 接下来参考的主要书籍为丘维声编著的《高等代数》上、下册, 此讲义本部分主要参见第 8 章.

我们首先不吝笔墨地回顾线性空间的定义:

定义 2. *设 V 为非空集合, F 是数域. 有一个加法运算 $V \times V \to V, (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \mapsto \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ 以及一个数乘运算 $F \times V \to V, (\lambda, \boldsymbol{\alpha}) \mapsto \lambda\boldsymbol{\alpha}$. 并且这两条运算满足八条法则:*

1. *加法交换律: $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}, \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$;*
2. *加法结合律: $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}), \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in V$;*
3. *V 中存在加法零元 $\mathbf{0}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}, \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$;*
4. *对于 V 中每个元素 α 都存在加法负元 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$;*
5. *$1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}, \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$.*
6. *$(kl)\boldsymbol{\alpha} = k(l\boldsymbol{\alpha}), \forall k, l \in F, \boldsymbol{\alpha} \in V$.*
7. *$(k + l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha}, \forall k, l \in F, \boldsymbol{\alpha} \in V$.*
8. *$k(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta}, \forall k \in F, \boldsymbol{\alpha} \in V$.*

则我们称 *(具有上述加法和数乘运算的)* V 为 F 上的一个线性空间或向量空间.

注 2.1. *在线性空间的定义里, 条件是很少的, 但是它满足下面的性质 (事实上需要证明, 但这里略去, 证明可见参考书):*

1. V 中的零元是唯一的, 我们记之为 $\mathbf{0}$.
2. 对 V 中每个向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 其负元唯一, 记之为 $-\boldsymbol{\alpha}$.
3. $0\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$.
4. $k\mathbf{0} = \mathbf{0}, \forall k \in F$.
5. 若 $k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 则 $k = 0$ 或 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.
6. $(-1)\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}, \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$.

注 2.2. *那么问题来了, 我们为什么要费那么大的一番功夫去定义线性空间呢? 事实上, 我们研究线性空间的理论, 然后就可以将理论运用到任何一个具体的线性空间中. 也就是说, 研究清了线性空间的结构, 我们就研究清了 $F^{n\times n}, F_n[x]$ 等等空间中的线性结构. 后面我们会学习内积空间, 也是一个抽象的数学结构, 但它也有巨大的威力, 比如统一了我们在高中和数学分析里面看上去截然不同的柯西不等式.*

为方便计, 我们在这一部分总是用 V 记一个数域 F 上的线性空间. 线性表示、线性组合、线性相关、线性无关的概念不在本讲义中赘述. 但是我们为什么要引入线性相关的概念? 看下面的命题便知.

命题 3. *设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\{S\}$ 线性表示, 则表示方式唯一当且仅当向量组 $\{S\}$ 线性无关.*

由这个命题, 我们能够很自然地引入基的概念: 只要 V 中的向量组 $\{S\}$ 线性无关, 且 V 中每个向量都可以由 $\{S\}$ 线性表示, 就称 $\{S\}$ 是 V 的一个基. 而 "表示唯一" 就是基的厉害之处了, 因为我们绝不会希望地图上的一个点能用两个不同的坐标来表示.

现在, 又有了一个新的问题: 一个线性空间的基到底含有多少个元素? 也就是说, 我们可以用几个元素来唯一表示线性空间? 首先, 我们最好是希望基中含有有限多个元素, 因为我们在线性空间上还没有极限的概念. 其次, 我们希望基中元素个数是唯一确定的, 因为我们不会想要一个地图需要用一个不是 2 维的坐标来表示. 这样, 我们就要引入极大无关组、秩和维数的概念了. 在此之前, 我们先来看一个简单的命题.

命题 4. *设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关.*

这个命题给出了了一个向量可以由一个线性无关的向量组线性表示的条件. 下面定义极大无关组.

定义 5. 向量组 $\{S\}$ 的一个子集 $\{S_1\}$ 称为一个极大无关组, 如果 $\{S_1\}$ 本身线性无关, 但是把向量组 $\{S\}$ 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 添进去后, $\{S_1\}\cup\{\boldsymbol{\alpha}\}$ 线性相关.

由命题 4 , 我们立马得到下面的命题:

命题 6. 向量组 $\{S\}$ 与它的任意一个极大无关组 $\{S_1\}$ 等价. 这里, 两个向量组等价, 是指它们之间可以相互线性表示. 进一步, 向量组 $\{S\}$ 的任意两个极大无关组 $\{S_1\}$ 与 $\{S_2\}$ 等价.

下面是线性代数中非常深刻的一个定理, 它保证了我们即将定义的秩是唯一确定的.

定理 7. 一个向量组的任意两个极大无关组所含向量的个数相等.

为证明这个定理, 我们需要一个引理:

引理 8. 设 $r>s$, 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示. 则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关.

证明. 证明与本讲义的命题 1 类似. 设

$$\boldsymbol{\beta}_i=\sum_{j=1}^{s}\lambda_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j,\quad i=1,\cdots,r.$$

考虑一个关于 $x_1,\cdots,x_r$ 的方程:

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+x_r\boldsymbol{\beta}_r=\mathbf{0},\tag{6}$$

即

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}x_i\lambda_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j=\mathbf{0}.$$

又注意到齐次线性方程组 $\sum_{i=1}^{r}x_i\lambda_{ij}=0,j=1,\cdots,s$ 的未知数个数 r 大于方程个数 s, 故有非零解. 因此方程(6)有非零解, 即向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关. □

推论 8.1. 引理 *8* 的逆否命题成立, 即, 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示, 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关, 则 $r\leqslant s$.

定理 7 可以由推论 8.1 得到.

定义 9. 向量组的极大无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩.

关于秩, 我们有一个实用的结论:

命题 10. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示, 那么

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r).$$

证明概要. 只要分别取这两个向量组的一个极大无关组, 然后运用线性表示的传递性及推论 8.1 便可得出结论. □

根据这个命题, 我们就可以知道, 等价的向量组有相等的秩.

定义 11. *设向量组 $\{S\}$ 是线性空间 V 的子集. 如果 V 中每个向量都可以由 $\{S\}$ 线性表示且 $\{S\}$ 线性无关, 则称 $\{S\}$ 是 V 的一个基. $\{S\}$ 中元素个数定义为 V 的维数.*

注 11.1. *应当注意, 我们为了确保 V 的维数是唯一确定的, 需要验证 "任意两组基包含相同多个元素", 这也可以可以由推论 8.1 得到.*

关于基与维数, 有一些结论, 这里就简要提及.

命题 12. *(i) n 维线性空间中的任意 $n+1$ 个向量线性相关.*

(ii) n 维线性空间中的任意 n 个线性无关的向量都构成 V 的一组基.

(iii) n 维线性空间 V 中, 若每个向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 就是 V 的一组基.

(iv) n 维线性空间 V 的任何一个线性无关的向量组都可以扩充为 V 的一组基.

最后提一下子空间的定义. 如果 W 是 V 的一个子集并且在 V 的加法、数乘运算下仍然是线性空间, 则称 W 是 V 的一个子空间. 应当注意, W 需要在 V 的运算下保持封闭.

现在, 我们基本完成了线性空间理论的建立. 在这个过程中, 我们并没有使用什么矩阵论的结论. 同学们可以与我们当时学习数组空间相应结论的过程作比较.

3 再谈矩阵

我们接着上一部分的逻辑, 先来简要推导 "矩阵的秩 = 矩阵的行秩 = 矩阵的列秩" 这一深刻的结论. 我们通过以下几个重要的定理来证明之.

定理 13. *矩阵的初等行变换不改变行秩.*

证明概要. 对三种初等行变换各自分析, 只需证明进行初等行变换前后的行向量组等价. □

定理 14. *矩阵的初等行变换不改变列向量组的线性相关性, 从而不改变列秩. 具体地,*

(i) 设矩阵 $\boldsymbol{C}$ 经过初等行变换变成矩阵 $\boldsymbol{D}$, 则 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组线性相关当且仅当 $\boldsymbol{D}$ 的列向量组线性相关.

(ii) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j_1, \cdots, j_r$ 列构成列向量组的一个极大无关组当且仅当 $\boldsymbol{B}$ 的第 $j_1, \cdots, j_r$ 列构成列向量组的一个极大无关组. 从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的列秩.

证明概要. 证明 (i) 时, 只需注意到齐次线性方程组 $\boldsymbol{Cx}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Dx}=\mathbf{0}$ 同解. 证明 (ii) 只需利用 (i) 和极大无关组的定义. □

注 14.1. 我们不少计算题, 比如求一个给定矩阵的秩及列空间的一组基, 就是以本定理为原理.

定理 15. 矩阵的秩 = 矩阵的行秩 = 矩阵的列秩.

证明概要. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$, 进行初等行变换化为约化标准形 $\boldsymbol{J}$. 容易通过定义得到: 矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的行秩与列秩相等, 为主元个数, 还等于非零子式的最高阶数. □

最后, 我们谈谈对矩阵乘法的一些看法. 其一, 用 $\boldsymbol{A}$ 左乘一个矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的, 就是将 $\boldsymbol{B}$ 的行向量进行了一系列线性组合:

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^n a_{1k}\boldsymbol{\beta}_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}\boldsymbol{\beta}_k\end{pmatrix}.$$

其二, 一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以自然地看作一个从 F^n 到 F^m 的线性映射: $F^n\to F^m, \boldsymbol{\alpha}\mapsto \boldsymbol{A\alpha}$. 而矩阵乘法的本质就是这样的线性映射的复合. 这个观点可以参考申老师的讲义 20230321 例 4.2.13.

4 从"线性映射基本定理"到线性同构和商空间

这一部分比较超纲, 建议真正学有余力的同学看, 但是看过之后一定会对线性映射有更为深刻的认识. 我们为证明下面的补充习题, 新定义了不少概念, 绕了个比作业提示的做法大了无数圈的弯子, 但这一定是值得的.

定理 16 (线性映射基本定理, Homeweok08 补充习题 2,3)**.** 设 $\mathscr{A}: V_1\to V_2$ 是 F 上两个有限维线性空间之间的线性映射. 定义 $\ker\mathscr{A}=\{\boldsymbol{\alpha}\in V_1:\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\}, \operatorname{im}\mathscr{A}=\{\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}:\boldsymbol{\alpha}\in V_1\}$. 则 $\ker\mathscr{A}$ 是 V_1 的子空间, $\operatorname{im}\mathscr{A}$ 是 V_2 的子空间, 并且

$$\dim V_1=\dim\ker\mathscr{A}+\dim\operatorname{im}\mathscr{A}. \tag{$*$}$$

现在, 至少我们可以先利用定义快速验证 $\ker\mathscr{A}$ 是 V_1 的子空间, $\operatorname{im}\mathscr{A}$ 是 V_2 的子空间. 任取 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in\ker\mathscr{A},\lambda_1,\lambda_2\in F$. 则 $\mathscr{A}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_1\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$. 因此 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2\in\ker\mathscr{A}$. 故 $\ker\mathscr{A}$ 是 V_1 的子空间. 再任取 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\in\operatorname{im}\mathscr{A},\mu_1,\mu_2\in F$. 于是可设 $\boldsymbol{\beta}_1=\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma}_2$. 从而 $\mu_1\boldsymbol{\beta}_1+\mu_2\boldsymbol{\beta}_2=\mu_1\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma}_1+\mu_2\mathscr{A}\boldsymbol{\gamma}_2=\mathscr{A}(\mu_1\boldsymbol{\gamma}_1+\mu_2\boldsymbol{\gamma}_2)$. 故 $\mu_1\boldsymbol{\beta}_1+\mu_2\boldsymbol{\beta}_2\in\operatorname{im}\mathscr{A}$. 因此, $\operatorname{im}\mathscr{A}$ 是 V_2 的子空间.

接下来, 线性映射基本定理的证明就只剩下了式($*$).

首先, 我们来证明 $\mathscr{A}$ 为双射[1]的情形, 此时 $\ker\mathscr{A}=\{\mathbf{0}\},\dim\operatorname{im}\mathscr{A}=\dim V_2$, 式($*$)等价于 $\dim V_1=\dim V_2$. 现在, 我们通过引入线性同构的概念来说明 $\dim V_1=\dim V_2$.

[1]双射的定义见第二次习题课定义 10.

定义 17 (线性同构)**.** 如果 $\mathscr{A}: V_1 \to V_2$ 是两个有限维线性空间之间的线性映射, 并且是双射, 则称 $\mathscr{A}$ 是 V_1 到 V_2 的一个线性同构 (简称同构或同构映射). 此时, 称 V_1 与 V_2 是线性同构 (简称同构) 的, 记为 $V_1 \cong V_2$.

注 17.1. 容易验证,"$\cong$"是一个等价关系.

注 17.2. 同学们可以试图证明注 6.1 中提到的两个线性空间是同构的.

定理 18 (线性映射基本定理的双射情形)**.** 两个有限维线性空间同构当且仅当它们的维数相等.

证明. 先证明必要性. 设两个有限维线性空间 V_1, V_2 是同构的, 同构映射为 $\mathscr{A}: V_1 \to V_2$. 取 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为 V_1 的一组基. 一方面, 设 F 中的 r 个数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 满足 $\sum_{i=1}^r \lambda_i \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}$. 则 $\mathscr{A}(\sum_{i=1}^r \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i) = \mathbf{0}$. 又由于 $\boldsymbol{A}$ 是双射, 故 $\sum_{i=1}^r \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}$. 从而 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$, 也就是说 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. 另一方面, 对任意 $\boldsymbol{\beta} \in V_2$, 可设 $\boldsymbol{\beta} = \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \in V_1$. 而 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以写成基的线性组合: $\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^r \mu_i \boldsymbol{\alpha}_i$. 因此, $\boldsymbol{\beta} = \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathscr{A}(\sum_{i=1}^r \mu_i \boldsymbol{\alpha}_i) = \sum_{i=1}^r \mu_i \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i$, 也就是说 V_2 可以被 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示. 综上, $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 V_2 的一组基. 故 $\dim V_1 = \dim V_2$.

再证明充分性. 设 $\dim V_1 = \dim V_2$. 取 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为 V_1 的一组基, $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 为 V_2 的一组基. 直接构造 $\mathscr{A}: V_1 \to V_2, \sum_{i=1}^r \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i \mapsto \sum_{i=1}^r \lambda_i \boldsymbol{\beta}_i$. 容易验证 $\mathscr{A}$ 是线性映射. 利用基的定义也容易证明 $\mathscr{A}$ 是双射, 从而是一个同构映射. 充分性得证. □

下面, 我们一鼓作气地定义商空间并证明商空间的一些性质, 然后直接证明式(∗). 最后我们再对线性同构和商空间举更多的例子. 别忘了, 我们的目标是(∗), 我们证明了 $\mathscr{A}$ 为双射的情形, 现在就是要想办法把一般的情形化归到双射的情形. 我们先做一个小小的处理: 把 $\mathscr{A}: V_1 \to V_2$ 视为从 V_1 到 $\operatorname{im}\mathscr{A}$ 的映射, 这样就可以把 $\mathscr{A}$ 视为满射, 并且不影响定理的证明. 我们的下一步就是要把 $\mathscr{A}$ 视为"单射". 为此, 我们需要将多余的维数 (即 $\ker\mathscr{A}$) 进行"降维打击", 引进如下定义:

定义 19 (商空间)**.** 设 V 是数域 F 上的有限维线性空间, W 是其子空间, 定义商空间为 $V/W := \{\boldsymbol{\alpha} + W : \boldsymbol{\alpha} \in V\}$,[2]并赋予加法运算: $(\boldsymbol{\alpha} + W) + (\boldsymbol{\beta} + W) := (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + W$ 以及数乘运算 $\lambda(\boldsymbol{\alpha} + W) := (\lambda\boldsymbol{\alpha}) + W$.

注 19.1. 商空间 V/W 作为集合, 应当理解为"通过 W 来对 V 进行分类". 只要两个向量相差 W 中的一个元素, 我们就将它们分在同一类, 而 $\boldsymbol{\alpha} + W$ 描述的就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在此分类标准下所在的那一类.

注 19.2. 值得注意, 正如我们在给出定理 7 之前还不能给出秩的定义, 目前我们在 V/W 上定义的加法和数乘运算并非一个"良好"的定义. 比如对于数乘的定义, 我们有必要补充证明"对任意满足 $\boldsymbol{\alpha}_1 + W = \boldsymbol{\alpha}_2 + W$ 的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$, 都有 $(\lambda\boldsymbol{\alpha}_1) + W = (\lambda\boldsymbol{\alpha}_2) + W, \forall\lambda \in F$"(直接用定义证明即可). 加法的良好定义性留给读者.

[2]这里的记号 $\boldsymbol{\alpha} + W$ 定义为 $\{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta} \in W\}$.

定理 20. *商空间 V/W 是 F 上的线性空间且 $\dim V/W = \dim V - \dim W$.*

证明. 直接由定义可以验证 V/W 是 F 上的线性空间, 这是繁琐但不可缺少的工作, 应由读者自行验证. 而维数公式的证明本质上就是 Homeweok08 补充习题 3 的提示: 先找到 W 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 接下来将其扩充为 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$. 接下来只需验证 $\boldsymbol{\beta}_1 + W, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t + W$ 构成商空间 V/W 的一组基. 一方面, V/W 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 + W, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t + W$ 线性表示, 因为任取 $\boldsymbol{\alpha} + W \in V/W$, 我们可设 $\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{t} \mu_j \boldsymbol{\beta}_j$, 从而 $\boldsymbol{\alpha} + W = \sum_{j=1}^{t} \mu_j (\boldsymbol{\beta}_j + W)$. 另一方面, $\boldsymbol{\beta}_1 + W, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t + W$ 线性无关, 这是因为, 如果 $\sum_{j=1}^{t} x_j (\boldsymbol{\beta}_j + W) = \mathbf{0} + W$,[3]则 $\sum_{j=1}^{t} x_j \boldsymbol{\beta}_j \in \mathbf{0} + W = W$, 从而不得不导致 $x_1 = \cdots = x_t = 0$. □

现在就可以直接证明线性映射基本定理了. 构造并验证线性映射

$$\mathscr{A}' : V_1 / \ker \mathscr{A} \to \operatorname{im} \mathscr{A}, \quad \boldsymbol{\alpha} + \ker \mathscr{A} \mapsto \mathscr{A} \boldsymbol{\alpha}.$$

是同构即可. 当然, 我们还是要证明映射 $\mathscr{A}'$ 的良好定义性.

线性映射基本定理证毕.

接下来, 我们利用这一部分的定义和定理重新叙述我们上半学期学习的一些内容.

例 21 (给定基下线性变换的矩阵表示)**.** *设 V 是 F 上的 n 维线性空间, $\mathcal{U} := \{\mathscr{A} : \mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换$\}$. 在自然的数乘和加法运算下, 容易验证 $\mathcal{U}$ 是线性空间. 我们试图寻找 $\mathcal{U}$ 与 $F^{n \times n}$ 之间的线性同构:*

给定 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 定义

$$\sigma = \sigma_{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n} : \mathcal{U} \to F^{n \times n}, \quad \mathscr{A} \mapsto \boldsymbol{A},$$

其中, $\boldsymbol{A}$ 为线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵. 可以证明, σ 正是 $\mathcal{U}$ 到 $F^{n \times n}$ 的一个线性同构.

例 22 (线性代数基本定理的矩阵版本)**.** *在本讲义第 3 部分的最后, 我们说 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以自然地看作一个从 F^n 到 F^m 的线性映射: $F^n \to F^m, \boldsymbol{\alpha} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$. 在这样的看法下, 线性代数基本定理就是说 $n = \dim V + \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$, 其中 V 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解空间.*

例 23 (Sylvester 秩不等式的线性映射版本)**.** *设 U, V, W 为有限维线性空间, 有线性映射 $\mathscr{A} : U \to V, \mathscr{B} : W \to U, \mathscr{C} : V \to W$. 则 $\operatorname{rank} \mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C} + \operatorname{rank} \mathscr{B} \geqslant \operatorname{rank} \mathscr{A}\mathscr{B} + \operatorname{rank} \mathscr{B}\mathscr{C}$.*[4]

证明. 考虑映射

$$\sigma : \operatorname{im} \mathscr{B} / \operatorname{im} \mathscr{B}\mathscr{C} \to \operatorname{im} \mathscr{A}\mathscr{B} / \operatorname{im} \mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}, \quad \mathscr{B}\boldsymbol{x} + \operatorname{im} \mathscr{B}\mathscr{C} \mapsto \mathscr{A}\mathscr{B}\boldsymbol{x} + \operatorname{im} \mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}, \forall \boldsymbol{x} \in W.$$

验证 σ 是有良好定义的线性映射, 而且是一个满射, 从而由线性映射基本定理可得 $\dim \operatorname{im} \mathscr{B} / \operatorname{im} \mathscr{B}\mathscr{C} \geqslant \dim \operatorname{im} \mathscr{A}\mathscr{B} / \operatorname{im} \mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}$. 再由定理 20 可证结论. □

[3]应注意, $\mathbf{0} + W$ 是 V/W 的零元.

[4]对于一个线性变换, 秩的定义就是像的维数.

5 零化多项式与极小多项式

在此引入极小多项式的概念, 主要是为教材 P190 习题五提供一个解法, 也是提供一个推广. 因为利用极小多项式的语言, 我们可以将本题进行如下解答: 已知 $g(x) = x^n$ 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的关于向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的零化多项式, 则对应的极小多项式必为 $g(x)$ 的因式, 即形式 x^m, 其中 $0 \leqslant m \leqslant n$. 但是 $h(x) = x^{n-1}$ 不是 $\mathscr{A}$ 的关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的零化多项式, 故极小多项式只能为 $g(x)$. 然后容易得到 $\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}$ 线性无关. 下面, 我们来定义一些概念.

定义 24 (线性变换关于某个向量的零化多项式)**.** *设 $\mathscr{A}$ 为线性空间 V 上的有限维线性变换, $\boldsymbol{\alpha} \in V$. 若一个多项式 $h(x) \in F[x]$,*[5]*满足 $f(\mathscr{A})(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$,*[6]*则称 $f(x)$ 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的关于向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的零化多项式.*

定义 25 (线性变换关于某个向量的极小多项式)**.** *记号同上一个定义. 如果 $f(x)$ 还是次数最低的非零的零化多项式, 则称之为线性变换 $\mathscr{A}$ 的关于向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的极小多项式.*

下一个定理就是我们证明教材 P190 习题五的一个本质定理.

定理 26. *极小多项式必为零化多项式的因式.*

证明. 设 $\mathscr{A}$ 为线性空间 V 上的有限维线性变换, $\boldsymbol{\alpha} \in V$. 设 $f(x)$ 为 $\mathscr{A}$ 的关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 的极小多项式. 对任意 $g(x) \in \mathcal{P}$ 作带余除法:

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x), \tag{7}$$

其中, $q(x), r(x) \in F[x]$ 且 $r(x)$ 的次数严格小于 $g(x)$ 的次数. 在多项式(7)中代入 $\mathscr{A}$ 并在 $\boldsymbol{\alpha}$ 处取值即可得到 $r(x)$ 是零化多项式. 又由于 $f(x)$ 是极小多项式, 故 $r(x)$ 只能为零多项式. 故等式(7)表明 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的因式. □

当然, 极小多项式和零化多项式以及定理 26 均可推广. 我们举一个推广的例子:

定义 27 (线性变换的零化多项式)**.** *设 $\mathscr{A}$ 为线性空间 V 上的有限维线性变换. 若一个多项式 $h(x) \in F[x]$, 满足 $f(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$ 为零变换, 则称 $f(x)$ 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的零化多项式.*

---

[5] $F[x]$ 指的以数域 F 中的元素为系数的多项式全体.

[6] 这里的 $f(\mathscr{A})$ 是将 $\mathscr{A}$ 代入多项式 $f(x)$, 具体地, 若 $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$, 则 $f(\mathscr{A}) = \sum_{i=1}^n a_i \mathscr{A}^i$. 值得注意, 假如我们有 $f(\mathscr{A})g(\mathscr{A})$ 则应定义为 $f(\mathscr{A})$ 与 $g(\mathscr{A})$ 的复合.