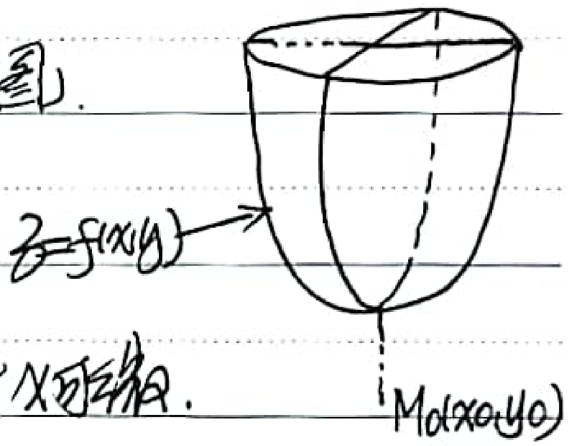
第18讲：多元函数的极值与最值 (2023.3.27)

(一) 多元函数极值的必要条件与充分条件：

Th1（可微函数有极值的必要条件）设 $z=f(x,y)\in U(M_0,\delta)$ 中可微 且 $f(M_0)$ 为 f 的极值，则必有 $f'_x(M_0)=0, f'_y(M_0)=0$.

证：不妨设 $f(M_0)$ 为 f 的极小值（如图）.



则 $f(x,y_0)$ 作为 x 的一元函数

在 x_0 处也取得极小值 且 $f(x,y_0)$ 关于 x 可微.

由 Fermat Th, $\left.\dfrac{df(x,y_0)}{dx}\right|_{x_0}=0 \Leftrightarrow f'_x(x_0,y_0)=0$. 同理, $f'_y(x_0,y_0)=0$.

即可微函数的极值点必是驻点（可推广到n元函数）.

Th2（二阶连续可微函数有极值的充分条件）

设 $z=f(x,y)\in C^2(U(M_0,\delta))$ 且 $M_0(x_0,y_0)$ 是 f 的一个驻点：$\begin{cases} f'_x(M_0)=0 \\ f'_y(M_0)=0 \end{cases}$

$A=f''_{xx}(M_0), B=f''_{xy}(M_0), C=f''_{yy}(M_0), Hf(M_0)=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$，则

① $Hf(M_0)>0$（正定）时，即 $\begin{cases} A>0 \\ \Delta=AC-B^2>0 \end{cases}$ 时, $f(M_0)$ 为极小值;

② $Hf(M_0)<0$（负定），即 $\begin{cases} A<0 \\ \Delta=AC-B^2<0 \end{cases}$ 时，$f(M_0)$ 为 f 的极大值；

③ $\Delta=AC-B^2<0$ 时，$f(M_0)$ 不是 f 的极值.

证：对 $\forall (x,y)\in U(M_0,\delta)$，由 f 的二阶 Taylor 公式，$\left(\begin{matrix} h=x-x_0=\Delta x \\ k=y-y_0=\Delta y \end{matrix}\right)$

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}[h^2A+2hkB+k^2C]+o(\rho^2),\ \rho=\sqrt{h^2+k^2}.$$

$$=\frac{1}{2}\rho^2[A(\frac{h}{\rho})^2+2B\frac{h}{\rho}\frac{k}{\rho}+C(\frac{k}{\rho})^2+\frac{o(\rho^2)}{\rho^2}\times 2],\ 令\begin{cases} \frac{h}{\rho}=\cos\theta \\ \frac{k}{\rho}=\sin\theta \end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}\rho^2[(A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta)+\frac{o(\rho^2)}{\rho^2}\cdot 2]$$

令 $g(\theta)=A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta$ 则

$$g(\theta)=A(\cos\theta+\frac{B}{A}\sin\theta)^2+\frac{AC-B^2}{A}\sin^2\theta\ ,\ \theta\in[0,2\pi].$$

1°）当 $A>0$，$AC-B^2>0$ 即 $Hf(M_0)>0$ 时，$g(\theta)>0$ 恒成立 $\Rightarrow f(x,y)-f(x_0,y_0)$ >0 恒成立 $\Leftrightarrow f(M_0)=f(x_0,y_0)$ 是 f 的一个极小值；

2°）当 $A<0$，$AC-B^2>0$ 时，即 $Hf(M_0)<0$ 时，$g(\theta)<0$ 恒成立 $\Rightarrow f(x,y)-f(M_0)$ ≤ 0 恒成立 $\Leftrightarrow f(M_0)$ 是 $f(x,y)$ 的一个极大值；

3°）当 $\Delta=AC-B^2<0$ 时，则用 $g(0)=A$，设 $\cos\theta_0+\frac{B}{A}\sin\theta_0=0$，$\theta_0\in(0,2\pi)$

则 $\sin\theta_0\neq 0$，否则有 $\begin{cases} \cos\theta_0=0 \\ \sin\theta_0=0 \end{cases}$ 矛盾！此时 $g(\theta_0)=\frac{AC-B^2}{A}\sin^2\theta_0$

若 $A>0 \Rightarrow g(\theta_0)<0$ 即 $g(0)\cdot g(\theta_0)<0$. $A<0$ 时. 同样 $g(0)g(\theta_0)<0$.

从而在 $\mathring{U}(M_0,\delta)$ 中, $f(x,y)-f(x_0,y_0)\geq 0\ (\leq 0)$ 恒成立 不再保持!

即 $f(M_0)=f(x_0,y_0)$ 不再是 f 的极值. 由对称性, 当 $C>0$ 或 $C<0$

时, 只要 $\Delta<0$, 同样有 $f(M_0)$ 不是极值; 当 $A=C=0$ 时, 而 $B\neq 0$ 时,

$g(\theta)=B\sin 2\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$. $g(\frac{\pi}{4})=B$, $g(\frac{3}{4}\pi)=-B$. $g(\frac{\pi}{4})g(\frac{3}{4}\pi)<0$.

从而 $g(\theta)>0\ (<0)$ 恒成立 不再保持! 即 $f(M_0)$ 不是 f 的极值。

例1. 考察下列函数在 $O(0,0)$ 处取极值的情况:

(1) $z=f(x,y)=x^2+y^2$, (2) $z=x^3+y^3$; (3) $z=x^4+y^4$; (4) $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

(5) $z=xy$.

解(1). $O(0,0)$ 是 f 的驻点 且 $A=f''_{xx}(0,0)=2=C=f''_{yy}(0,0)$, $B=f''_{xy}(0,0)=0$

$Hf(M_0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}>0$ (正定) $\Rightarrow f(0,0)=0$ 是 f 的极小值, 也是最小值.

解(2). 令 $\begin{cases} f'_x=3x^2=0 \\ f'_y=3y^2=0 \end{cases} \Rightarrow$ 驻点 $M_0(0,0)$ 且 $\begin{cases} A=f''_{xx}(0,0)=0 \\ B=f''_{xy}(0,0)=0 \\ C=f''_{yy}(0,0)=0 \end{cases} \Rightarrow \Delta=0$

充分条件中不能用! 无论 $\delta>0$ 多么小, 在 $\mathring{U}(0,\delta)$ 中, 总有 $M_1, M_2\in\mathring{U}(0,\delta)$

(3).

扫描全能王 创建

使 $f(M_1)>0=f(0,0)>f(M_2)$，M_1在第一象限；M_2在第三象限。

从而 $f(0,0)=0$ 不是 f 的极值；

解(3). 驻点为 $O(0,0)$. $A=B=C=0$，同样有 $\Delta=AC-B^2=0$.

但对 $\forall (x,y)\in U(0,\delta)$，$f(x,y)\geq f(0,0)=0$ 恒成立. $f(0,0)=0$ 为 f 的极小值.

f 只有一个极小且无极大，此极小即是 f 的最小.

解(4). $f(0,0)=0$ 是 f 的极小值，也是 f 的最小值，但 $O(0,0)$

不是 $f(x,y)$ 的驻点，$\because f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ 都不存在。

解(5) 从 $\begin{cases} f'_x=y=0 \\ f'_y=x=0 \end{cases}$ 得驻点 $O(0,0)$. 但无论 $\delta>0$ 多么小.

在 $U(0,\delta)$ 中，总有 $M_1, M_2\in U(0,\delta)$，使 $f(M_1)>0=f(0,0)>f(M_2)$.

$\therefore f(0,0)$ 不是 f 的极值.

由上述例子可知，驻点可以是极值点，也可以不是极值点；

极值点可以是驻点，也可不是驻点。$\Delta=AC-B^2=0$ 时可以有

极值，也可以无极值。

(三) 设 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C^2(D)$，D是凸区域，$M_0(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$ 是f的一个驻点：即 $f'_{x_i}(M_0)=0$，$i=1,2,\cdots,n$.

$$a_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\bigg|_{M_0}=a_{ji},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$ 则

① $Hf(M_0)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}>0$（正定）时 $f(M_0)$ 为f的一个极小值；

② $Hf(M_0)<0$（负定）时，$f(M_0)$ 为f的一个极大值.

③ 若f在凸的开区域D中仅有一个极小(大)值，且无极大(小)值. 则此极小(大)值即为f在D中的最小(大)值.

④ 若D是有界的闭区域，则f在D中可同时取到最大值与最小值. 可先求出f在D内的所有驻点 $M_1,M_2,\cdots M_k$，再求出f在D的边界 ∂D 上的所有驻点 $Q_1,Q_2,\cdots Q_m$，最后比较 $f(M_1),\cdots f(M_k),f(Q_1),\cdots f(Q_m)$ 的大小. 最大者即是f在D中的最大值，最小者为f在D中的最小值。

(三)例题: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

例1. 在椭球面Σ上求一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，使过M_0的切平面Π与三个坐标面围成的四面体Ω之体积V(Ω)最小。(详细见手稿第7页)

例2. 证明: $z=f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$ 在D: $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0\end{cases}$ 中的最大值$4e^{-2}$. 即: $\frac{x^2+y^2}{4}\leq e^{x+y-2}$, $x\geq0, y\geq0$ (ch9综合第6题)

解例1: 设M_0在第一卦限，则Π为: $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$,

$V(\Omega)=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}=\frac{abc}{6}\frac{1}{\sqrt{(\frac{x_0}{a})^2(\frac{y_0}{b})^2(\frac{z_0}{c})^2}}$，再利用平均值不等式!

解例2: 1°) 在D内部仅有驻点$M_1(1,1)$.(驻点); 2°) 在边界$y=0$上 $f(x,0)=x^2e^{-x}$, $x\in[0,+\infty)$ 有驻点$x_1=0$, $x_2=2$, 3°) 在边界$x=0$上, $f(0,y)=y^2e^{-y}$, $y\in[0,+\infty)$ 有驻点$y_1=0$, $y_2=2$. 且$f(0,0)=0$, $f(2,0)=4e^{-2}=f(0,2)$. $f(1,1)=2e^{-2}$, 且$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0 \overset{(*1)}{\Rightarrow} f(x,y)$在D中的最大值为$4e^{-2}$, 即 $\frac{x^2+y^2}{4}\leq e^{x+y-2}$; $x\geq0, y\geq0$.

(*1)见手稿第8页.

(四)作业: ex9.5/ 7(2),(5); 8; 11(2),(4); 17, ch9综/6,14.

例1详解：设$M_0(x_0,y_0,z_0)$是椭球面Σ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

位于第一卦限上的点，则$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$且过点$M_0$的切平面

方程为：$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$，又在三个坐标轴上的截距分别为

$x_A=\frac{a^2}{x_0}$，$y_B=\frac{b^2}{y_0}$，$z_C=\frac{c^2}{z_0}$，从而$V(\Omega)=\frac{1}{6}x_Ay_Bz_C=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}$

$=\frac{abc}{6}\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2}\cdot\frac{y_0^2}{b^2}\cdot\frac{z_0^2}{c^2}}}$，利用平均值不等式：$\frac{x_0^2}{a^2}\cdot\frac{y_0^2}{b^2}\cdot\frac{z_0^2}{c^2}\leq$

$\left(\frac{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}}{3}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}\Rightarrow V(\Omega)\geq\frac{abc}{6}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{27}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

等号成立，当且仅当$\frac{x_0^2}{a^2}=\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2}=\frac{1}{3}$即$\begin{cases}x_0=\frac{a}{\sqrt{3}}\\ y_0=b/\sqrt{3}\\ z_0=c/\sqrt{3}\end{cases}$时.

四面体Ω的体积$V(\Omega)$取最小值$\frac{\sqrt{3}}{2}abc=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{(\frac{a}{\sqrt{3}})(\frac{b}{\sqrt{3}})(\frac{c}{\sqrt{3}})}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

即$M_0(a/\sqrt{3},b/\sqrt{3},c/\sqrt{3})$是所求的椭球面$\Sigma$上的一点，利用椭球面$\Sigma$关于三个坐标面的对称性知，$M_1(-a/\sqrt{3},b/\sqrt{3},c/\sqrt{3})$；

$M_2(-a/\sqrt{3},-b/\sqrt{3},c/\sqrt{3})$，$M_3(-a/\sqrt{3},b/\sqrt{3},-c/\sqrt{3})$，$M_4(-a/\sqrt{3},-b/\sqrt{3},-c/\sqrt{3})$

$M_5(a/\sqrt{3},-b/\sqrt{3},-c/\sqrt{3})$，$M_6(a/\sqrt{3},b/\sqrt{3},-c/\sqrt{3})$，$M_7(a/\sqrt{3},-b/\sqrt{3},c/\sqrt{3})$

也是符合题意的点，即所求的点有8个，即上述8个。

(7).

(1). ~~关于二元函数的极限：$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0$~~ (eg.1/14(1))

~~的证明~~：令 $x+y=u$，则 $x\to+\infty, y\to+\infty$ 时，$u\to+\infty$，且 $x^2+y^2=u^2-2xy$

$\Rightarrow (x^2+y^2)e^{-(x+y)}=(u^2-2xy)e^{-u}=u^2e^{-u}-2xye^{-(x+y)}$

而 $\lim\limits_{u\to+\infty}u^2e^{-u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u^2}{e^u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{2u}{e^u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{2}{e^u}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$，$\lim\limits_{y\to+\infty}ye^{-y}=0$. 因此，

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\lim\limits_{u\to+\infty}u^2e^{-u}-\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}2xye^{-x}e^{-y}=0-0=0$.

(2). 关于一元函数 $y=f(x)$，$f\in C^2$ 在驻点 x_0 处取极值与多元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(n\geq2)$ 在驻点 $M_0(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$ 处取极值的统一问题.

(1°) 当 $f\in C^2$ 且 $f'(x_0)=0$ 时，由 $f(x)$ 在 x_0 处的二阶 Taylor 公式：

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)\Rightarrow$

~~$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{2}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$~~，当 $f^{(2)}(x_0)>0$ (<0) 时，

$f(x)-f(x_0)\geq0$ (≤0) 恒成立，从而

当 $f^{(2)}(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值；$f^{(2)}(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值。

注意到 此时 $f(x)$ 在 x_0 处的 海森矩阵 $Hf(x_0)=(f''_{xx}(x_0))$

$=f''_{xx}(x_0)$，且 $f''_{xx}(x_0)>0$ 时，$Hf(x_0)=(f^{(2)}_{xx}(x_0))>0$（正定），

当 $f^{(2)}_{xx}(x_0)<0$ 时，$Hf(x_0)=(f^{(2)}_{xx}(x_0))<0$（负定）。

结合本讲讲稿第5页的内容可知，无论是一元函数 $f\in C^2$，

还是多元函数 $f\in C^2(D)$，D 是凸区域，设 M_0 是 f 的 驻点，则 $Hf(M_0)>0$（正定）时，$f(M_0)$ 为极小值；$Hf(M_0)<0$（负定）时，$f(M_0)$ 为极大值。这是二阶连续可微函数 f 在驻点 M_0 处取到极值的充分条件。

另外，本讲的例1，实际上是在条件 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$ 已知的条件下，求目标函数 $V(\Omega)=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}$ 的极（最）大（小）值问题，这是下一讲的条件极值问题，即在一组条件已知的情况下，求某函数的极（最）值问题。