第35讲：一致收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 的三个分析性质

(2023.5.29).

(一) 复习：

(1). 绝对收敛的级数，具有"有限和：$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$"的三个算术性质：(1)结合律、(2)交换律、(3)分配律；

(2). 一致收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$，具有"有限和：$S_n(x)=a_1(x)+\cdots+a_n(x)$"的三个分析（微积分）性质：(1)连续性、(2)可积性、(3)可微性.

(3). 当 $\lambda>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\lambda}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\lambda}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中逐点 con、绝对 con、一致收敛. 理由：$\left|\frac{\cos nx}{n^{\lambda}}\right|\le\frac{1}{n^{\lambda}}$，$\left|\frac{\sin nx}{n^{\lambda}}\right|\le\frac{1}{n^{\lambda}}$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$. 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}$ con，依 Weierstrass 的优级数判法.

当 $0<\lambda\le1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\lambda}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\lambda}}$ 在 $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$ 的区间中条件收敛. 理由：依 Dirichlet 判别法.

(4). 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域求法：从 $\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}<1$，即 $|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1\Rightarrow|x|<\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}\triangleq R$. 称此 R 为幂级数的收敛半径。$x=\pm R$ 的收敛性需单独检验。

例1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}x^{n}$ $(\alpha>0)$ 的收敛域 I.

例2. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中逐点收敛，绝对收敛且一致收敛。

(二) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)\xlongequal{一致}S(x)$，$x\in I$。则有下列三个分析性质定理。

性质 Th1：若 $a_n(x)$ 在 I 上都连续，则 $S(x)$ 在 I 上也连续。即

$\lim_{x\to x_0}S(x)=S(x_0)$，$\forall x_0\in I$，即 $\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}a_n(x)$.

性质 Th2：若 $a_n(x)$ 在 $[a,b]\subset I$ 上都连续，从而都在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上也 Riemann 可积，且

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}\int_a^b a_n(x)dx$$

性质 Th3：若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(x)\xlongequal{一致}T(x)$，$x\in I$ 且 $a_n'(x)$ 在 I 上都连续，另外 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)=S(x)$，$x\in I$，则 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(x)$，$x\in I$.

(三). 例题。

例1. 设有 Riemann 函数 $\zeta(x)\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$，$x\in(1,+\infty)$.

(1) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 中逐点收敛且非一致收敛；

(2) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 中内闭一致收敛，从而证明 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 中连续；

(3) 证明 $\zeta'(x), \zeta''(x), \cdots, \zeta^{(m)}(x), \cdots$ 都在 $(1,+\infty)$ 中连续，$\forall m\in N^*$，这时记作：$\zeta(x)\in C^{\infty}(1,+\infty)$.

例2. 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$，$x\in(0,+\infty)$. 则 $S(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$. 求 $\int_{\ln 4}^{\ln 6} S(x)dx$.

例3. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$，$x\in(0,+\infty)$.

(1) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$ 在 $(0,+\infty)$ 中逐点、绝对且一致收敛于 $f(x)$；

(2) 求极限 $\lim_{x\to 1} f(x)$，$\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(四) 作业：EX7.2

4(6),(7),(8); 5; 6; 7; 8; 9.

(3).

25

专题讲座(续) (2023,5,29).

(一) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx} = S(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

(1) 证明: $S(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$; (2) 计算: $\int_{\ln 4}^{\ln 6} S(x)dx$.

证(1): $S(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$ 是指对 $\forall m\in N$, 都有 $S^{(m)}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中连续. 即对 $\forall x_0\in(0,+\infty)$, $S^{(m)}(x)$ 都在 x_0 处连续。

对 $\forall x_0\in(0,+\infty)$, 都有 $[a,b]\subset(0,+\infty)$, 使 $x_0\in(a,b)$, 即对 $\forall x\in[a,b]$, $(ne^{-nx})^{(m)} = (-1)^m n^{m+1} e^{-nx}$ 且从 $e^{nx} > \frac{(nx)^{m+3}}{(m+3)!} = \frac{(nx)^{m+3}}{(m+3)!}$

$\Rightarrow e^{-nx} < \frac{(m+3)!}{(nx)^{m+3}} \Longrightarrow |(ne^{-nx})^{(m)}| = n^{m+1} e^{-nx} < \frac{(m+3)!\, n^{m+1}}{(nx)^{m+3}}$

$= \frac{(m+3)!}{n^2 x^{m+3}} \le \frac{(m+3)!}{n^2 a^{m+3}}$, $\forall x\in[a,b]$. 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m+3)!}{n^2 a^{m+3}} = \frac{(m+3)!}{a^{m+3}}\times\frac{\pi^2}{6}$

Weierstrass 判别法: $\sum_{n=1}^{\infty}(ne^{-nx})^{(m)}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S^{(m)}(x)$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ne^{-nx})^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^m n^{m+1} e^{-nx} = S^{(m)}(x),\ x\in[a,b].$$

再从 $(-1)^m n^{m+1} e^{-nx}$ 在 $[a,b]$ 中都连续及性质可知, $S^{(m)}(x)$ 在 $[a,b]$ 中也连续, 而 $x_0\in(a,b)$. 故 $S^{(m)}(x)$ 在 x_0 处连续。

由(10)在$(0,+\infty)$中纯数性可知，$S^{(m)}(x)$在$(0,+\infty)$中连续。

即有$S(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$。

解(2)：对于$[\ln4,\ln6]\subset(0,+\infty)$有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$在$[\ln4,\ln6]$

中一致收敛于$S(x)$ ($\because \left|ne^{-nx}\right|\le\frac{3!}{n^2x^3}\le\frac{3!}{n^2(\ln4)^3}$, $\forall x\in[\ln4,\ln6]$,

且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3!}{n^2(\ln4)^3}=\frac{6}{(\ln4)^3}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{(\ln4)^3}$，$\therefore$由纯级数判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$

在$[\ln4,\ln6]$中一致收敛于$S(x)$)

在$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}=S(x)$，$x\in[\ln4,\ln6]$两边同在$[\ln4,\ln6]$上积分：

$$\int_{\ln4}^{\ln6}S(x)dx=\int_{\ln4}^{\ln6}\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}dx\xlongequal{\text{因为一致conv}}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\ln4}^{\ln6}ne^{-nx}dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-e^{-nx}\right)\Big|_{\ln4}^{\ln6}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-n\ln4}-e^{-n\ln6}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}-\frac{1}{6^n}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}。$$

(三) 级数共有四种收敛性：绝对收敛，条件收敛，逐点收敛，

一致收敛。前三种都是局部的局部概念；而一致收敛是

函数项级数在某收敛区间上的整体性概念。