数分（B2）第12章综合及补充题解

1、证明: 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\ln n}$ 在不包含 2π 整数倍的闭区间上一致收敛, 但它不是 $[-\pi,\pi]$ 上平方可积函数的 Fourier 级数.

证明 任取 $[a,b]\subset(0,2\pi)$, 则当 $x\in(a,b)$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}.$$

在$[a,b]\subset(0,2\pi)$ 上一致有界. 而 $\dfrac{1}{\ln n}$ 单调减趋于零. 根据函数项级数的Dirichlet判别法可知, 级数在$[a,b]\subset(0,2\pi)$ 上一致收敛.

若存在可积平方可积函数 $f(x)$ 使得$f(x)$ 的Fourier 级数为

$$f(x)\sim\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n},$$

那么由Parseval等式就有

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$$

收敛. 然而, 根据数项级数的比较定理,

$$\frac{1}{\ln^2 n}\Big/\frac{1}{n^\alpha}\to 0\quad(\alpha>0),$$

因此级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2 n}$ 是发散的, 因此矛盾.

2、证明下列等式:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}=\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\quad(-\pi<x<\pi);$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\quad(0<x<2\pi).$$

证明 令 $f(x)=\ln\left(2\cos\dfrac{x}{2}\right)$ $(-\pi<x<\pi)$, 它是所定义区间上连续可导的偶函数. 计算其Fourier系数得 $b_n=0$, 而

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x=2\ln 2+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$$

其中

$$\int_0^{\pi} \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$$

对上式右边第二个积分进行换元 $x=\pi-t$ 得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_0^{\pi} \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{\sin x}{2}\,\mathrm{d}x = -\pi\ln 2.$$

这里用到了

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

的结果（这是一个瑕积分, 具体积分见第一册例 5.4.2 ）, 最后得 $a_0=0$. 对其它的 $a_n\ (n\geqslant 1)$, 有

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{n\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\sin nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

做变换 $x=\pi-t$, 则上列积分化为

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nt\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

利用下列公式

$$\sin nt\cos\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t + \frac{1}{2}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t$$

以及

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt,\quad \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos kt,$$

得$a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, 由Dirichlet收敛定理得（1）式成立. 类似可证明（2）式.

3、设 f 是周期为 2π 的可积且绝对可积函数. 证明:

$$\text{如果 } f \text{ 在 } (0,2\pi) \text{ 上递减, 那么 } b_n\geqslant 0;$$
$$\text{如果 } f \text{ 在 } (0,2\pi) \text{ 上递增, 那么 } b_n\leqslant 0.$$

证明 设 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上递减.

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_0^{\pi} f\left(\frac{x+2k\pi}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} f\left(\frac{x+(2k+1)\pi}{n}\right)\sin x\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left[f\left(\frac{x+2k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{x+(2k+1)\pi}{n}\right)\right]\sin x\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant 0
\end{aligned}
$$

4、设 f 是周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积的函数. 如果它在 $(-\pi,\pi)$ 上单调, 证明:

$$
a_n = O\left(\frac{1}{n}\right),\ b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\ (n\to\infty).
$$

证明 由于

$$
a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x,
$$

所以只要证明

$$
na_n = \frac{1}{\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x
$$

有界即可. 不妨设 $f(x)$ 单调减, 令

$$
x_k = -n\pi + 2k\pi,\quad k=0,\cdots,n,\quad \Delta x_k = 2\pi.
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f\left(\frac{x}{n}\right) - f\left(\frac{x_k}{n}\right)\right)\cos x\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k}{n}\right)\int_{x_k}^{x_{k+1}}\cos x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

其中
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos x \,\mathrm{d}x = 0$$
即上式第二项求和为零. 再利用函数单调减性质, 当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 时, 有
$$0 \leqslant f\left(\frac{x_k}{n}\right) - f\left(\frac{x}{n}\right) \leqslant f\left(\frac{x_k}{n}\right) - f\left(\frac{x_{k+1}}{n}\right)$$
所以
$$\begin{aligned}
\left|\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x \,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f\left(\frac{x_k}{n}\right) - f\left(\frac{x}{n}\right)\right)|\cos x|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f\left(\frac{x_k}{n}\right) - f\left(\frac{x_{k+1}}{n}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{x_k}{n}\right) - f\left(\frac{x_{k+1}}{n}\right)\right)2\pi \\
&= (f(-\pi) - f(\pi))2\pi
\end{aligned}$$
这样我们就证明了积分
$$\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x \,\mathrm{d}x$$
有界, 也就是 na_n 有界, 同理可证 nb_n 有界.

本题也可以借助第二积分平均值定理, 具体证明如下：

对于可积函数, 改变有限点的值不影响可积性和积分的值, 因此不妨设 $f(x)$ 在闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上单调. 根据第二积分中值公式, 存在 $\xi \in [-\pi, \pi]$ 使得
$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}f(-\pi)\int_{-\pi}^{\xi}\cos nx \,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}f(\pi)\int_{\xi}^{\pi}\cos nx \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n\pi}[f(-\pi) - f(\pi)]\sin n\xi.
\end{aligned}$$
所以 $|na_n|$ 有界, 即 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\ (n \to \infty)$.

5、设 f 在 $[-a, a]$ 上连续, 且在 $x = 0$ 处可导. 求证:
$$\lim_{\lambda \to +\infty}\int_{-a}^{a}\frac{1 - \cos \lambda x}{x}\,f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{f(x) - f(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

说明: 本题要用到Riemann-Lebesgue引理（第三册将讨论）:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=0,$$
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x=0,$$

但是在第二册中, 对可积且平方可积函数 $f(x)$,我们实际上已经得到了离散的Riemann-Lebesgue引理（Bessel不等式的推论）:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0,$$

因此，将本题中的λ 换成离散变量 n, 即在条件不变情况下，要证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos nx}{x}f(x)\ \mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{f(x)-f(-x)}{x}\ \mathrm{d}x.$$

证明 作变换 $x=-t$, 因此

$$\int_{-\pi}^{0}\frac{1-\cos nx}{x}f(x)\ \mathrm{d}x=\int_{\pi}^{0}\frac{1-\cos nt}{t}f(-t)\ \mathrm{d}t,$$

原积分化为

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos nx}{x}f(x)\ \mathrm{d}x&=\int_0^{\pi}\frac{f(x)-f(-x)}{x}(1-\cos nx)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}\frac{f(x)-f(-x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

其中

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x} & x\neq 0,\\ 2f'(0) & x=0.\end{cases}$$

由于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 连续, 在 $x=0$ 可导, 所以 $F(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 连续, 因此可积且平方可积, 由Bessel 的推论（即离散的 Riemann-Lebesgue引理）得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0,$$

所以原式成立.

与第5题类似, 书中第6题改为如下题目

6、设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)|\cos nx|\ \mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)|\sin nx|\ \mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x,$$

证明: 根据书中§ 12.3 习题中第5题的结果, 对任意实数 x, 有

$$|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1}\cos 2mx,$$
$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1}\cos 2mx,$$

因此

$$f(x)|\cos nx|=\frac{2}{\pi}f(x)+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1}f(x)\cos 2mnx,$$

由于 $f(x)$ 可积, 所以有界. 推出上式右端无穷级数关于 x 一致收敛, 因此可逐项积分:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)|\cos nx|\ \mathrm{d}x&=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2mnx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1}a_{2mn}.\end{aligned}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\to 0\ (n\to 0).$$

因此, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时, 有

$$|a_n|<\frac{\pi\varepsilon}{4A}.$$

这里记

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1}=A.$$

显然, 对 $m \geqslant 1$, 仍然有 $2mn > N$, 所以

$$|a_{2mn}| < \frac{\pi\varepsilon}{4A}.$$

推出当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)|\cos nx|\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1}|a_{2mn}| < \varepsilon.$$

这样就证明了第一个式子. 类似可证明第二个式子.

7、设 f 是周期为 2π 的连续函数. 令

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t,$$

用 a_n, b_n 和 A_n, B_n 分别表示 f 和 F 的 Fourier 系数. 证明:

$$A_0 = a_0^2,\ A_n = a_n^2 + b_n^2,\ B_n = 0.$$

由此推出 f 的 Parseval 等式.

证明 这里只对逐段可微（又称逐段光滑）的连续函数讨论,一般情况要用到Fourier级数均值收敛的Fejer定理.

不难证明 $F(x)$ 也是连续的分段可微、周期函数（可借用第13章结果，也可直接证明）, 而且还满足

$$F(-x) = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)f(-x+t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)f(u)\,\mathrm{d}u = F(x),$$

第一步用到了被积函数的周期性, 第二步用到了积分换元 $-x+t=u$.

因此 $F(x)$ 是周期 2π 的偶函数, 且是连续且分段可微函数. 由此推出它

的Fourier系数 $B_n = 0$,

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t\right)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nx\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(u)\cos n(u-t)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(u)(\cos nu\cos nt + \sin nu\sin nt)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\cos nu\cos nt + \sin nu\sin nt)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(a_n\cos nt + b_n\sin nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \begin{cases} a_n^2 + b_n^2 & n \geqslant 1 \\ a_0^2 & n = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

对 $F(x)$ 应用 Dirichlet 定理得

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos nx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\cos nx.$$

令 $x = 0$ 得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = F(0) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

8、设 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 且在此区间上有可积且平方可积的导数 f'. 如果 f 满足

$$f(-\pi) = f(\pi), \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

证明:

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

等号当且仅当 $f(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$ 时成立.

证明 把 $f(x)$, $f'(x)$ 以 2π 为周期延拓到 $(-\infty, +\infty)$ 上. 分别记 $f(x)$ 的Fourier系数为 a_n, b_n, $f'(x)$ 的Fourier系数为 a_n', b_n'. 由条件得

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}(f(\pi)-f(-\pi)) = 0,$$

$$\begin{aligned}
a_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = nb_n, \\
b_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = -na_n,
\end{aligned}$$

注意到 $f(x)$，$f'(x)$ 都是可积且平方可积函数, 因此Parseval等式对两者都成立：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2), \\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}((a_n')^2+(b_n')^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2),
\end{aligned}$$

所以

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

且等号成立当且仅当 $a_n = b_n = 0$ $(n = 2, 3, \cdots$，也就是 $f(x)$ 和三角函数系中 $\cos nx, \sin nx$，$n \geqslant 2$ 都正交. 这样的连续函数（且满足$f(-\pi) = f(\pi)$，$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$）只能是

$$f(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x.$$

补充习题：等周问题（Hurwitz） 在给定长度为 L 的一切平面曲线中, 什么样的曲线围成的面积最大？或：设 ℓ 是平面上长度为 L 的简单光滑闭曲线, S 是 ℓ 围成平面区域的面积, 证明：

$$S \leqslant \frac{L^2}{4\pi}$$

并问等号成立时, 曲线的具体形状.

说明： 等周问题是一个古老的几何问题. 早在古代, 人们就已经意识到这样的曲线应该是圆周. 但是严格的数学证明却是近代才出现的. 在19世纪, Steiner(施泰纳 1796-1863) 曾经用几何方法证明了：除圆周外，任何封闭曲线都不可能是当周问题的解. 这里, 借助Fourier展开和封闭曲线围成面积的计算公式（Green定理的推论）, 给出了另一种证明.

证明 从曲线 ℓ 上某点开始逆时针计算弧长 s 并作为参数, 因此

$$x = x(s),\ y = y(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant L),$$
$$x(0) = x(L),\ y(0) = y(L).$$

根据弧长参数曲线的性质, 有

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2, \quad \text{或} \quad \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2 = (x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1.$$

作变换

$$t = \frac{2\pi s}{L} - \pi, \quad \text{或} \quad s = \frac{L}{2\pi}(t + \pi)$$

使 ℓ 的参数方程表示为如下形式

$$\begin{cases} x = x(s) = x\left(\frac{L}{2\pi}(t+\pi)\right) = \varphi(t), \\ y = y(s) = y\left(\frac{L}{2\pi}(t+\pi)\right) = \psi(t), \end{cases} \quad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi),$$
$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi),\ \psi(-\pi) = \psi(\pi),$$

并且参数 t 增加的方向是曲线的逆时针方向. 因为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s},\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{2\pi}{L}$$
$$\Longrightarrow (\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}.$$

分别对 $\varphi(t),\ \psi(t)$ 作Fourier 展开

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$
$$\psi(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nt + d_n \sin nt.$$

不难算出, $\varphi'(t),\ \psi'(t)$ 的Fourier 展开为

$$\varphi'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nt - na_n \sin nt,$$
$$\psi'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} nd_n \cos nt - nc_n \sin nt.$$

这是因为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\varphi(t)\cos nt\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = nb_n$$

其他系数的计算类似. 根据Parseval 等式, 有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi'(t))^2\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2),$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\psi'(t))^2\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(c_n^2+d_n^2).$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}((\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2),$$

另一方面

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}((\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{L^2}{4\pi^2}\,\mathrm{d}t=\frac{L^2}{2\pi^2},$$

$$\Longrightarrow L^2=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2).$$

下面计算曲线 ℓ 围成的面积, 根据 Green 定理的推论, 该面积为

$$S=\oint_{\ell}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\psi'(t)\,\mathrm{d}t=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(a_nd_n-b_nc_n),$$

其中我们利用了Parseval 等式的推论（两个函数乘积的积分等于对应Fourier系数乘积求和）. 最终, 我们有

$$\begin{aligned}L^2-4\pi S&=2\pi^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2)-2\sum_{n=1}^{\infty}n(a_nd_n-b_nc_n)\right)\\&=2\pi^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}((na_n-d_n)^2+(nc_n+b_n)^2)+\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-1)(b_n^2+d_n^2)\right)\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

所以

$$L^2-4\pi S\geqslant 0,\quad 或\quad S\leqslant\frac{L^2}{4\pi}.$$

等号成立当且仅当求和项中所有项均为零, 即

$$na_n=d_n,\ nc_n=-b_n,\ n\geqslant 1;\ b_n=d_n=0,\ n\geqslant 2.$$

$$\Updownarrow$$

$$a_1=d_1,c_1=-b_1,\ a_n=b_n=c_n=d_n=0\ n\geqslant 2.$$

这样的曲线为

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t, \\
y(t) &= \frac{c_0}{2} - b_1 \cos t + a_1 \sin t,
\end{aligned}
$$

这个曲线不是别的正是圆

$$\left(x - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c_0}{2}\right)^2 = a_1^2 + b_1^2.$$