第十一次作业参考

贺维易，王睿

2023 年 6 月 2 日

目录

一点说明

(i) 作业讲义部分题过程可能有省略。如对作业仍有疑问可以在群里或答疑课上讨论。

(ii) **作业讲义会随时间更新。**

(iii) 请及时核对自己在 BB 系统里的分数，如有问题请向对应的助教反馈。

(iv) 附录里的内容仅供有兴趣的同学参考，有可能涉及之后才会学习或课外的知识，不要求在现阶段掌握。

(v) 讲义最好用电脑打开，文档内置了链接功能，复习或查看指定的作业很方便。

成绩说明：成绩公式为

$$\text{score} = \begin{cases} 10 - k \cdot \max\{n - n_0, 0\} & \text{未迟交} \\ 5 & \text{迟交} \end{cases}$$

其中 n 为错题数，n_0 为容忍度；k 为系数，取决于当周作业的题量。第十一次作业不考虑补充题共 10 题，$n = 10$，考虑到一些同学出现了计算失误、笔误、抄错题目等等情况，$n_0 = 1$；$k = 0.5$。对于一些不严格的证明，助教也会酌情给分。也意味着作业得到满分不代表作业没有问题，请认真查看自己的作业。

上述评分标准对每个助教都成立。

1　5 月 23 日布置的作业

1.1　教材习题 P220-221:2,5,6,17

习题 1 (教材习题 2). 设在 $\mathbb{R}^3$ 中，基 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$ 给出的度量矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

试求 $\mathbb{R}^3$ 中由 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$ 给出的一组标准正交基。

解. $\operatorname{rank}(\boldsymbol{G}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}) = 3$，因此 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一组基。可用 Gram-Schmidt 正交化得到标准正交基。根据度量矩阵 $\boldsymbol{G}$，已知 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) = 1, (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = 0, (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3) = -1, (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) = 2, (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = 0, (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = 2$，使用 Gram-Schmidt 正交化计算有

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 \xrightarrow{||\boldsymbol{\beta}_1||=1} \boldsymbol{\epsilon}_1 = \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\epsilon}_1)\boldsymbol{\epsilon}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 \xrightarrow{||\boldsymbol{\beta}_2||=\sqrt{2}} \boldsymbol{\epsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\beta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\alpha}_2$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - (\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\epsilon}_1)\boldsymbol{\epsilon}_1 - (\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\epsilon}_2)\boldsymbol{\epsilon}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1 \xrightarrow{||\boldsymbol{\beta}_3||=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)}=1} \boldsymbol{\epsilon}_3 = \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$$

$\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3$ 即为一组标准正交基。（此题答案不唯一） □

习题 2 (教材习题 5). 证明：n 维向量空间中任意一个正交向量组都能扩充成一组正交基。

证明. 正交向量组中元素 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 显然线性无关，因此可将这一正交向量组扩充为 n 个线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$，这 n 个线性无关的向量构成 n 维向量空间的一组基，对它们正交化即可得到一组正交基，在正交化的过程中先选择 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r = \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_{r+1} = \cdots$，即可保持原本的正交向量组不变，此时原本的正交向量组扩充成 n 维向量空间中的一组正交基。 □

习题 3 (教材习题 6). 验证下列个向量组是正交的，并添加向量改造为标准正交基：
$(1) : (2, 1, 2), (1, 2, -2)$;
$(2) : (1, 1, 1, 2), (1, 2, 3, -3)$

解. $(1) : \boldsymbol{\alpha}_1 = (2, 1, 2), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 2, -2). (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = 2 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times (-2) = 0$，因此是正交的。容易看到加入 $(1, 0, 0)$ 即得到 3 个线性无关的向量可构成 $\mathbb{R}^3$ 的基，使用 Gram-Schmidt 正交化得到标准正交基。

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 \xrightarrow{||\boldsymbol{\beta}_1||=3} \boldsymbol{\epsilon}_1 = \frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_1 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\epsilon}_1)\boldsymbol{\epsilon}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 \xrightarrow{||\boldsymbol{\beta}_2||=3} \boldsymbol{\epsilon}_2 = \frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_2 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - (\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\epsilon}_1)\boldsymbol{\epsilon}_1 - (\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\epsilon}_2)\boldsymbol{\epsilon}_2 = (1, 0, 0) - \frac{2}{9}(2, 1, 2) - \frac{1}{9}(1, 2, -2) = \frac{2}{9}(2, -2, -1)$$

$$\xrightarrow{||\boldsymbol{\beta}_3||=\frac{2}{3}} \boldsymbol{\epsilon}_3 = \boldsymbol{\beta}_3 = \frac{1}{3}(2, -2, -1)$$

(2) : $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3,-3).(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=0$，因此是正交的。容易看到加入 $(1,0,0,0),(0,1,0,0)$ 即得到 3 个线性无关的向量可构成 $\mathbb{R}^3$ 的基，使用 Gram-Schmidt 正交化得到标准正交基。

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1\xrightarrow{||\boldsymbol{\beta}_1||=\sqrt{7}}\boldsymbol{\epsilon}_1=\frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,1,2)=(\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{2}{\sqrt{7}})$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\epsilon}_1)\boldsymbol{\epsilon}_1=\boldsymbol{\alpha}_2\xrightarrow{||\boldsymbol{\beta}_2||=\sqrt{23}}\boldsymbol{\epsilon}_2=(\frac{1}{\sqrt{23}},\frac{2}{\sqrt{23}},\frac{3}{\sqrt{23}},-\frac{3}{\sqrt{23}})$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\epsilon}_1)\boldsymbol{\epsilon}_1-(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\epsilon}_2)\boldsymbol{\epsilon}_2\rightarrow\boldsymbol{\epsilon}_3=(\sqrt{\frac{131}{161}},-\frac{37}{\sqrt{21091}},-\frac{44}{\sqrt{21091}},-\frac{25}{\sqrt{21091}})$$

$$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4-(\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\epsilon}_1)\boldsymbol{\epsilon}_1-(\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\epsilon}_2)\boldsymbol{\epsilon}_2-(\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\epsilon}_3)\boldsymbol{\epsilon}_3\rightarrow\boldsymbol{\epsilon}_4=(0,\frac{9}{\sqrt{131}},-\frac{7}{\sqrt{131}},-\frac{1}{\sqrt{131}})$$

第二问答案不唯一。若使用 $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1,0),\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,0,1)$，应得到 $\boldsymbol{\epsilon}_3=\frac{1}{\sqrt{483}}\left(-\frac{44}{5},-13,15,\frac{17}{5}\right)$，$\boldsymbol{\epsilon}_4=\left(-\frac{7}{5\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},0,\frac{1}{5\sqrt{3}}\right)$ □

习题 4 (教材习题 17). 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意 k 个向量，试证：$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ 两两正交的充分必要条件是

$$\sum_{s=1}^n(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{e}_s)(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{e}_s)=0$$

证明. 由于 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基，$\boldsymbol{x}_i$ 可表示为 $\boldsymbol{x}_i=\sum\limits_{s=1}^n(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{e}_s)\boldsymbol{e}_s$，因此

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)&=\left(\sum_{s=1}^n(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{e}_s)\boldsymbol{e}_s,\sum_{t=1}^n(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{e}_t)\boldsymbol{e}_t\right)\\&=\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^n(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{e}_s)(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{e}_t)(\boldsymbol{e}_s,\boldsymbol{e}_t)\\&=\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^n(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{e}_s)(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{e}_t)\delta_{st}=\sum_{s=1}^n(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{e}_s)(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{e}_s)\end{aligned}$$

对任意向量 $\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j$，上式成立。因此 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ 两两正交的充分必要条件是

$$(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)=0=\sum_{s=1}^n(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{e}_s)(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{e}_s)$$

□

1.2 补充习题 1,2,3,4

习题 5 (补充习题 1). 用 *Gram-Schmidt* 正交化方法把 $\mathbb{R}^4$ 的一组向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

化成一组标准正交向量。

解.

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1\xrightarrow{||\boldsymbol{\beta}_1||=2}\boldsymbol{\epsilon}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\epsilon}_1)\boldsymbol{\epsilon}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{3}{2}\boldsymbol{\epsilon}_1=\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\to\boldsymbol{\epsilon}_2=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}})$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\epsilon}_1)\boldsymbol{\epsilon}_1-(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\epsilon}_2)\boldsymbol{\epsilon}_2=\left(0,-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\to\boldsymbol{\epsilon}_3=(0,-\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$$

□

习题 6 (补充习题 2)**.** *我们考虑线性空间 $V=\mathbb{R}_4[x]$, 这是次数不超过 4 的实系数多项式构成的实线性空间，设 a_0,a_1,a_2,a_3,a_4 依次为 $-2,-1,0,1,2$. 对于 $f,g\in\mathbb{R}_4[x]$，定义*

$$(f,g):=\sum_{i=0}^{4}f(a_i)g(a_i)$$

这给出了 V 的一个内积. 用 Gram-Schmidt 正交化方法把 V 的一组向量 $1,x,x^2$ 变成一组标准正交向量.

解. 只需按照定义。

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=1,(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=\sum_{i=0}^{4}(1\times1)=5\xrightarrow{||\boldsymbol{\beta}_1||=\sqrt{5}}\boldsymbol{\epsilon}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\epsilon}_1)\boldsymbol{\epsilon}_1=x-(x,\frac{1}{\sqrt{5}})\frac{1}{\sqrt{5}},(x,\frac{1}{\sqrt{5}})=\sum_{i=0}^{4}\left(a_i\times\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=0$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{\beta}_2=x,(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)=\sum_{i=0}^{4}(a_i\cdot a_i)=10\to\boldsymbol{\epsilon}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}x$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\epsilon}_1)\boldsymbol{\epsilon}_1-(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\epsilon}_2)\boldsymbol{\epsilon}_2=x^2-(x^2,\frac{1}{\sqrt{10}}x)\frac{1}{\sqrt{10}}x-(x^2,\frac{1}{\sqrt{5}})\frac{1}{\sqrt{5}}=x^2-2$$

$$(\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_3)=14\to\boldsymbol{\epsilon}_3=\frac{1}{\sqrt{14}}(x^2-2)$$

即 $\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{10}}x,\frac{1}{\sqrt{14}}(x^2-2)$ 为一组标准正交向量。 □

习题 7 (补充习题 3)**.** *考虑线性空间 $V=\mathbb{R}_2[x]$, 运算为多项式的加法和数乘. 对于 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ 和 $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$, 定义 $(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 则 $(V,(\ ,\ ))$ 为欧氏空间。用 Schmidt 正交化方法将 $1,x,x^2$ 按顺序改造成标准正交基。*

解. 只需按照定义。

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=1,(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=\int_0^1 1\cdot 1\mathrm{d}x=1\xrightarrow{||\boldsymbol{\beta}_1||=1}\boldsymbol{\epsilon}_1=\boldsymbol{\beta}_1=1$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\epsilon}_1)\boldsymbol{\epsilon}_1=x-(x,1)1,(x,1)=\int_0^1 x\cdot 1\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{\beta}_2=x-\frac{1}{2},(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}\to\boldsymbol{\epsilon}_2=\sqrt{12}\boldsymbol{\beta}_2=2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\epsilon}_1)\,\boldsymbol{\epsilon}_1-(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\epsilon}_2)\,\boldsymbol{\epsilon}_2=x^2-\left(x^2,2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)-(x^2,1)1=x^2-x+\frac{1}{6}$$

$$(\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_3)=\frac{1}{180}\to\boldsymbol{\epsilon}_3=6\sqrt{5}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)$$

即 $1,2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right),6\sqrt{5}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)$ 为 $(V,(\ ,\ ))$ 的一组标准正交向量。 □

习题 8 (补充习题 4)**.** 设 $\boldsymbol{G}$ 是欧氏空间 V 中的向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的 *Gram* 矩阵.
(1) 证明: $\det(\boldsymbol{G})\neq 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关.
(2) 证明: $\mathrm{rank}(\boldsymbol{G})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$.

解. (1)

(i) $\det(\boldsymbol{G})\neq 0\to\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。假设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性相关，说明存在一组 $\lambda_i,i=1,2,\cdots,m$，使得 $\sum_{i=1}^m\lambda_i\boldsymbol{x}_i=\mathbf{0}$，将 λ_i 作为坐标写成列向量 $\boldsymbol{\lambda}$，有

$$(\boldsymbol{G}\boldsymbol{\lambda})_i=\sum_{j=1}^m\boldsymbol{G}_{ij}\lambda_j=\sum_{j=1}^m(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)\lambda_j=(\boldsymbol{x}_i,\sum_{j=1}^m\boldsymbol{x}_j\lambda_j)=(\boldsymbol{x}_i,\mathbf{0})=0\Rightarrow\boldsymbol{G}\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}$$

由于 $\boldsymbol{G}$ 是 $m\times m$ 阶矩阵，因此 $\det(\boldsymbol{G})$ 是良定义的；存在 $\boldsymbol{\lambda}$ 使得 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}$ 说明 $\det(\boldsymbol{G})=0$。因此 $\det(\boldsymbol{G})\neq 0$ 时一定有 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。

(ii) $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关 $\to\det(\boldsymbol{G})\neq 0$。若 $\det(\boldsymbol{G})=0$，说明存在 $\boldsymbol{\lambda}\neq\mathbf{0}$ 使得 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{\lambda}=0$。取 $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^m\boldsymbol{x}_i\lambda_i$，则 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{0}=0$。而 $\boldsymbol{x}$ 是欧氏空间 V 中的一个向量，根据正定性，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geq 0$ 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}=\sum_{i=1}^m\boldsymbol{x}_i\lambda_i$，说明 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性相关。因此 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关时一定有 $\det(\boldsymbol{G})\neq 0$。若 $\det(\boldsymbol{G})=0$

(2) 与第一问类似，考虑 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}$ 与 $\sum_{i=1}^m\lambda_i\boldsymbol{x}_i=\mathbf{0}$ 解集的结构，使用与第一问相同的方法容易证明

(i) $\sum_{i=1}^m\lambda_i\boldsymbol{x}_i=\mathbf{0}$ 的解也是 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}$ 的解。

(ii) $\boldsymbol{G\lambda}=\mathbf{0}$ 的解也是 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\boldsymbol{x}_i=\mathbf{0}$ 的解。

因此解空间维度相同，矩阵的秩 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{G})=m-\dim(V_{\boldsymbol{G\lambda}=\mathbf{0}})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$.

注：此题的证明不应涉及内积的具体形式。 □

2 5 月 25 日布置的作业

2.1 教材习题 P221:8,9,10,11,14

习题 9 (教材习题 8). 设 $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基，且

$$\boldsymbol{\alpha_1} = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_2} - \boldsymbol{e_3}), \boldsymbol{\alpha_2} = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2} + 2\boldsymbol{e_3}), \boldsymbol{\alpha_3} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{e_1} - 2\boldsymbol{e_2} - 2\boldsymbol{e_3})$$

(1) 证明:$\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$ 也是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基*;*

(2) 求把 $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ 变换到 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$ 的正交变换的矩阵*;*

(3) 求标准正交基 $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ 到标准正交基 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$ 的坐标变换矩阵*.*

证明. (1) 由标准正交基的定义易验证.

(2)

$$(\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}) = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

□

习题 10 (教材习题 9). 写出所有 3 阶正交矩阵，它的元素是 0 或 1.

解. 设正交矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3})$，由 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ 可得 $||\boldsymbol{\alpha_1}|| = ||\boldsymbol{\alpha_2}|| = ||\boldsymbol{\alpha_3}|| = 1, \boldsymbol{\alpha_i}^T\boldsymbol{\alpha_j} = 0 (i \neq j)$，故 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$ 是向量 $(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T$ 的排列组合，满足题意的矩阵共有 $A_3^3 = 6$ 种. □

习题 11 (教材习题 10). 如果一个正交矩阵中每个元素都是 $\frac{1}{4}$ 或 $-\frac{1}{4}$, 那么这个正交矩阵是几阶的？

解. 不妨设矩阵的某个列向量为 $\boldsymbol{\alpha_1}$，为了满足它的模长为 1，设矩阵为 n 阶，易见 $\frac{n}{4^2} = 1$，故为 16 阶的. □

习题 12 (教材习题 11). 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一个单位向量，证明:$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$ 是一个正交矩阵. 当 $\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$ 时，具体求出 $\boldsymbol{Q}$.

解. 验证 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T = (\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T) = \boldsymbol{I} - 4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + 4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T = \boldsymbol{I} - 4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + 4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T = \boldsymbol{I}$. 即 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵. 当 $\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$ 时，代入 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. □

习题 13 (教材习题 14). 证明：任何二阶正交矩阵必取下面两种形式之一：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in [-\pi, \pi]$$

证明. 设正交变换 $\mathscr{A}$ 在二维平面上任意一组标准正交基 $M = \{\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}\}$ 下的矩阵为 A，则 A 为正交方阵，它的两列 $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}$ 分别是 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha_1}), \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha_2})$ 在基 M 下的坐标. 我们有 $|\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha_1})| = |\boldsymbol{\alpha}| = 1$. 设由 $\boldsymbol{\alpha_1}$ 绕原点旋转到 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha_1})$ 所称的角是 θ，则 $\boldsymbol{A_1} = (\cos\theta, \sin\theta)^T$. 由于 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha_2}) \perp \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha_1})$, 从 $\boldsymbol{\alpha_1}$ 旋转到 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha_2})$ 所成的角为 $\theta \pm \frac{\pi}{2}$，于是 $\boldsymbol{A_2} = (\cos(\theta \pm \frac{\pi}{2}), \sin(\theta \pm \frac{\pi}{2}))^T = \pm(-\sin\theta, \cos\theta)^T$，于是得证任何二阶正交矩阵必取上述两种形式之一. □

2.2 补充习题 5,6

习题 14 (补充习题 5). *(Hadamard 不等式)* 设 $\boldsymbol{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 证明:$|\boldsymbol{C}|^2 \le \prod_{j=1}^{n}(c_{1j}^2 + \cdots + c_{nj}^2)$.

证明. 参考 https://zhuanlan.zhihu.com/p/377664850 有多种看法. □

习题 15 (补充习题 6). 设欧式空间 V 中有一个指定的非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 定义映射

$$\varphi : V \to V, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} - \frac{2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha})}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}\boldsymbol{\alpha},$$

证明 φ 是一个第二类的正交变换.

证明. 对欧式空间中的任意 $\boldsymbol{x}$ 由定义 $(\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{\alpha})) = (\boldsymbol{x} - \frac{2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}\boldsymbol{\alpha}, -\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{\alpha}) + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha})$，即 φ 是一个正交变换. 下面可以证明 φ 在适当的标准正交基下的矩阵为 $\mathrm{diag}(-1, 1, ..., 1)$，因此这是一个第二类的正交变换. 取单位向量 $\boldsymbol{\alpha_1} = \frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$ 扩充为标准正交基 $S = \{\boldsymbol{\alpha_1}, ..., \boldsymbol{\alpha_n}\}$. 则通过简单计算有

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha_1}) = -\boldsymbol{\alpha_1}$$

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha_i}) = \boldsymbol{\alpha_i} - \frac{2(\boldsymbol{\alpha_i}, \boldsymbol{\alpha})}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha_i}, 2 \le i \le n$$

即 φ 在适当的标准正交基下的矩阵为 $\mathrm{diag}(-1, 1, ..., 1)$，它的行列式为 -1，是一个第二类正交变换.

□

致谢

感谢各助教对本文档的校对工作和内容补充，感谢申伊塃老师以及同学对助教工作的支持。