# 第22讲：第一型(类)的曲线积分：$\int_L f(x,y,z)ds$

(2023.4.26)

## (一) 定义与主要性质：

(1) 定义：设 $L$ 为 $xOy$ 平面中的一段光滑曲线：$r(t)=(x(t),y(t))$ $\in C^1[\alpha,\beta]$ 且 $r'(t)=(x'(t),y'(t))\neq\theta$，$\forall t\in[\alpha,\beta]$。函数 $g(x,y)$ 在 $L$ 上有定义且有界。

(I) 分割 $L$ 为 $n$ 个部分：$L=L_1\cup L_2\cup\cdots\cup L_i\cup\cdots\cup L_n$，设弧段 $L_i$ 的长度 $\Delta(L_i)=\Delta s_i$，$i=1,2,\cdots,n$。$\lambda=\max\{\Delta s_1,\Delta s_2,\cdots\Delta s_n\}$。

(II) 近似：在 $L_i$ 上任取一点 $(x(\tau_i),y(\tau_i))$，作 $g(x(\tau_i),y(\tau_i))\Delta s_i$。

(III) 求和：$\sum_{i=1}^{n}g(x(\tau_i),y(\tau_i))\Delta s_i$

(IV) 极限：$\lim_{\lambda\to0^+}\sum_{i=1}^{n}g(x(\tau_i),y(\tau_i))\Delta s_i$ 若存在且唯一。

则称此极限值为 $g(x,y)$ 在曲线段 $L$ 上的第一型(类)线积分。

记作：$\int_L g(x,y)ds=\lim_{\lambda\to0^+}\sum_{i=1}^{n}g(x(\tau_i),y(\tau_i))\Delta s_i$ (*1)

(*1) 也称为数量场 $g(x,y)$ 在 $L$ 上的线积分。

可证明：$g\in C(L)$ 时，必有 $g\in R(L)$ (L上Riemann可积) (1)

(2) 主要性质：由于第一型线积分的定义与定积分的定义相同，可见，当L恰好位于 $Ox$ 轴上的直线段 $[a, b]$ 时，$g(x,y)$ 在L上的线积分即是定积分：$\int_a^b g(x,0)dx$

因此，第一型的线积分也有"十大"性质，如线性性质：
$\int_L (c_1 f+c_2 g)ds = c_1\int_L f ds + c_2\int_L g ds$，$c_1, c_2$ 为任意常数。

其中，$f, g$ 在L上 Riemann 可积，即 $f, g\in R(L)$

又如，当 $g(x,y)\in C(L)$ 时，必有 $M_0\in L$，使积分中值定理成立：
$\int_L g(x,y)ds = g(M_0)s(L) \Leftrightarrow g(M_0) = \int_L g(x,y)ds / s(L)$ 为

$g(x,y)$ 在曲线段L上取值的积分平均。

若L是由分段光滑的曲线 $L_1, L_2$ 连接而成的，则也有线积分关于积分区域的可加性：
$$\int_{L_1\cup L_2} g(x,y)ds = \int_{L_1} g(x,y)ds + \int_{L_2} g(x,y)ds$$

当 $g(x,y,z)$ 在分段光滑的空中曲线L上连续时，

同样可定义：$\int_L \varphi(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to0^+}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x(\tau_i),y(\tau_i),z(\tau_i))\Delta s_i$ (#2)

$\int_L \varphi(x,y,z)ds$ 同样也有"十大"性质。

(三) 第一型曲线积分 $\int_L \varphi(x,y)ds$，$L: r(t)=(x(t),y(t))\in C^1[\alpha,\beta]$

的计算方法：(设 $\varphi\in C(L)$)

在(#1)中，$\Delta s_i$ 是弧段 $L_i$ 的弧长，设 $L_i$ 为 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ $t\in[t_{i-1},t_i]$

则 $\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i}|r'(t)|dt \xlongequal{\text{积分中值定理}} |r'(\theta_i)|\Delta t_i$

但是，$\sum_{i=1}^{n}\varphi(x(\tau_i),y(\tau_i))|r'(\theta_i)|\Delta t_i$ 不是 Riemann 和，然而，

$\sum_{i=1}^{n}\varphi(x(\tau_i),y(\tau_i))|r'(\theta_i)|\Delta t_i = \sum_{i=1}^{n}\varphi(x(\tau_i),y(\tau_i))|r'(\tau_i)|\Delta t_i +$

$\sum_{i=1}^{n}\varphi(x(\tau_i),y(\tau_i))(|r'(\theta_i)|-|r'(\tau_i)|)\Delta t_i$，且

$\lim_{\lambda\to0^+}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x(\tau_i),y(\tau_i))|r'(\tau_i)|\Delta t_i = \int_\alpha^\beta \varphi(x(t),y(t))|r'(t)|dt = \int_L\varphi(x,y)ds$，

$\lim_{\lambda\to0^+}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x(\tau_i),y(\tau_i))(|r'(\theta_i)|-|r'(\tau_i)|)\Delta t_i = 0$ ($\because \varphi(x,y)\in C(L)$

$x(t),y(t)\in C^1[\alpha,\beta]$，$\therefore \varphi(x(t),y(t))\in C[\alpha,\beta] \Rightarrow \varphi(x(t),y(t))$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有界；

$\exists M>0$，使 $|\rho(x(t),y(t))|\le M$，$\forall t\in[\alpha,\beta]$，且 $|r'(t)|=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上 $C$

从而 $|r'(t)|$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致 $C$，即对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对 $\forall\tau_i,\theta_i\in[\alpha,\beta]$，

当 $|\tau_i-\theta_i|<\delta$ 时，必有 $\big||r'(\tau_i)|-|r'(\theta_i)|\big|\le|r'(\tau_i)-r'(\theta_i)|<\varepsilon$。当取 $0<\lambda<\delta$ 时

$\because\tau_i,\theta_i\in[t_{i-1},t_i]\subset[\alpha,\beta]$ 且 $|\tau_i-\theta_i|\le\Delta t_i\le\lambda<\delta$ 必有 $\big||r'(\tau_i)|-|r'(\theta_i)|\big|<\varepsilon$。

从而 $\left|\sum_{i=1}^{n}\rho(x(\tau_i),y(\tau_i))\big(|r'(\tau_i)|-|r'(\theta_i)|\big)\Delta t_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}M\varepsilon\Delta t_i=M(\beta-\alpha)\varepsilon$。）

即 $\int_L\rho(x,y)ds$ 的计算方法是，将 $L$ 中的参数表达式 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$

代入积分 $\int_L\rho(x,y)ds$ 中，使其中化为参数 $t$ 的定积分：

$$I=\int_L\rho(x,y)ds=\int_\alpha^\beta\rho(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt\qquad(\text{式}3)$$

同理，在 $\int_L\rho(x,y,z)ds$ 中，若 $L$ 为 $r(t)=(x(t),y(t),z(t))\in C^1[\alpha,\beta]$

则 $$I=\int_L\rho(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta\rho(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt\qquad(\text{式}4)$$

在（式3）中，若 $L$ 为 $y=f(x)\in C^1[a,b]$，则 $ds=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$；若 $L$

为 $\rho=\rho(\theta)\in C^1[\alpha,\beta]$，则 $ds=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$，（式3）相应地变为.

$I=\int_L \rho(x,y)ds=\int_a^b \rho(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx$;

$I=\int_L \rho(x,y)ds=\int_\alpha^\beta \rho(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$.

特别地，当被积函数 $\rho(x,y)=1$ 或 $\rho(x,y,z)\equiv1$ 时，有

$\int_L \rho(x,y)ds=\int_L 1ds=S(L)$，$\int_L \rho(x,y,z)ds=\int_L 1ds=S(L)$

即函数1的第一型曲线积分是积分弧段L的弧长。

(三) 例题：

$L:\begin{cases}x=x\\ y=\frac{4}{3}\sqrt{x\sqrt{2ax}}=\frac{4}{3}\sqrt[4]{2a}\,x^{\frac{3}{4}}\\ z=\sqrt{2ax}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'_x=1\\ y'_x=\sqrt[4]{2a}\,x^{-\frac{1}{4}},\ x\in[0,2a]\\ z'_x=\frac{a}{\sqrt{2ax}}\end{cases}$

例1：设L为 $\begin{cases}z^2=2ax\\ 9y^2=16xz\end{cases}$ 求从点 $O(0,0,0)$ 到点 $A(2a,\frac{8a}{3},2a)$ 的L的弧长 $S(L)$. (弧长为4a)

$=\int_0^{2a}ds=\int_0^{2a}\sqrt{1+y_x'^2+z_x'^2}\,dx=\int_0^{2a}\sqrt{1+\sqrt{2a}\,x^{-\frac{1}{2}}+\frac{a}{2x}}\,dx$

$=\int_0^{2a}\sqrt{(1+\sqrt{\frac{a}{2x}})^2}\,dx=\int_0^{2a}(1+\sqrt{\frac{a}{2x}})\,dx$

$=4a$.

例2. 求下列曲线积分 I. $L=\overline{AB}+\widehat{BC}$

(1). $\int_L(x+y+z)ds$，L由 $A(1,1,0)$ 到 $B(1,0,0)$ 的直线，再由螺旋线

$\overline{AB}$: $x=1, y=y, z=0$. $ds=\sqrt{x_y'^2+y_y'^2+z_y'^2}\,dy=\sqrt{0+1+0}\,dy=dy$

$\widehat{BC}$: $x=\cos t, y=\sin t, z=t\ (0\le t\le 2\pi)$ 组成的分段光滑曲线.

(2) $\int_L x\,ds$，L为对数螺线 $r=ae^{k\varphi}\ (k>0)$ 在圆 $r=a$ 内的那一段。(注：$r=ae^{k\varphi}=\begin{cases}>a, & \varphi>0:\text{圆外}\\ =a & \varphi=0\ \text{圆上}.\\ <a & \varphi<0\ \text{圆内}\end{cases}$)

(答案：$\frac{2a^2k\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$)

(3). $\oint_L x^2 ds$，L为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

(4). $\oint_L (xy+xz+yz) ds$，L为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

(参考答案：(1) $\frac{3}{2}+12\sqrt{2}\pi^2$；(2). $2a^2k\sqrt{1+k^2}/(4k^2+1)$；(3). $\frac{2}{3}\pi a^3$；(4) $-\pi a^3$)

(四)作业：

ex11.1：1/(1)，(3)，(4)；2/(2)，(3)，(10)，(11)，(12)；3；4.

(五) 本次讲：第一型的曲线积分与曲面积分 (2022.4.18)