定理 4.3.27. 行列式函数满足以下的性质.

(a) 设 $\boldsymbol{B}$ 由方阵 $\boldsymbol{A}$ 通过倍乘行的初等行变换得到: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\lambda r_i} \boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}_i(\lambda)\boldsymbol{A}$, 则 $\det(\boldsymbol{B}) = \lambda \det(\boldsymbol{A})$.

(b) 若 $\boldsymbol{A}$ 的不同两行 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 对应成比例, 则 $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.

(c) 设 $\boldsymbol{B}$ 由方阵 $\boldsymbol{A}$ 通过倍加的初等行变换得到: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\lambda r_j \to r_i} \boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)\boldsymbol{A}$, 则 $\det(\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A})$.

(d) 设 $\boldsymbol{B}$ 由方阵 $\boldsymbol{A}$ 通过交换行的初等行变换得到: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_j \leftrightarrow r_i} \boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}_{ij}\boldsymbol{A}$, 则 $\det(\boldsymbol{B}) = -\det(\boldsymbol{A})$.

证明. 由于 (a) 可以从定理 4.3.26 的 (b) 得到, 接下来, 我们只需验证 (c), (d) 和 (b). 先考虑下标 i, j 是相邻的情形.

(b) 由于有 (a), 这儿我们不妨假定 α_i 与 α_j 是相等的两行, 从而接下来只需运用定理 4.3.26 (c) 即可.

(c) 先看 $j = i + 1$, 此时我们有

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{B}) &= \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\alpha}_i + \lambda\boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) \\
&\xlongequal{\text{定理 4.3.26 (b)}} \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) \\
&\qquad + \lambda \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \underbrace{\boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}}_{\text{相等的相邻行}}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) \\
&\xlongequal{\text{定理 4.3.26 (c)}} \det(\boldsymbol{A}) + \lambda 0 = \det(\boldsymbol{A}).
\end{aligned}$$

该证明显然也适用于 $j = i - 1$ 的情形.

(d) 我们仍然不妨设 $j = i + 1$, 接下来, 我们反复运用 (c):

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{B}) &= \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_{i+2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) \\
&\xlongequal{-r_{i+1} \to r_i} \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1} - \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_{i+2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) \\
&\xlongequal{r_i \to r_{i+1}} \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1} - \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i + (\boldsymbol{\alpha}_{i+1} - \boldsymbol{\alpha}_i), \boldsymbol{\alpha}_{i+2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) \\
&= \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1} - \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \boldsymbol{\alpha}_{i+2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) \\
&\xlongequal{-r_{i+1} \to r_i} \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, -\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \boldsymbol{\alpha}_{i+2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) \\
&\xlongequal{\text{定理 4.3.26 (b)}} -\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \boldsymbol{\alpha}_{i+2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) \\
&= -\det(\boldsymbol{A}).
\end{aligned}$$

接下来对于一般的指标 $i\neq j$, 我们来考虑(c), (d) 和(b). 为此, 我们反复进行 “交换相邻两行” 的操作, 再利用上面的讨论即可. 我们给出几个简单 4 阶方阵的例子来说明, 具体的证明留给同学们自己来补充. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵, 其行向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(b) 若 $\boldsymbol{\alpha}_4=\lambda\boldsymbol{\alpha}_1$,

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{A})&=\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\lambda\boldsymbol{\alpha}_1)=-\det(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\lambda\boldsymbol{\alpha}_1)\\&=\det(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\lambda\boldsymbol{\alpha}_1)\xlongequal[\text{相邻且成比例}]{\text{最后两个向量}}0.\end{aligned}$$

更一般地, 若第 i 行和第 j 行成比例, 可以先通过 $|j-i|-1$ 个交换相邻行的方法, 将指定的两个行向量置于新矩阵的相邻行位置, 从而得到其行列式为 0 的事实.

(c) 若 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\lambda r_1\to r_4}\boldsymbol{B}$, 那么

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{B})&=\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\lambda\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_4)=\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\lambda\boldsymbol{\alpha}_1)+\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\\&\xlongequal[\text{利用 (b)}]{\text{有不同的两行成比例}}0+\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4).\end{aligned}$$

(d) 若 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\boldsymbol{B}$, 那么 $\det(\boldsymbol{B})=\det(\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1)=-\det(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1)=\det(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_1)=-\det(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4)=\det(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=-\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$. 更一般地, 若要交换第 i 行和第 j 行, 可以通过 $2|j-i|-1$ 次交换相邻行的方法来实现. □

推论 4.3.28. (1) $\det(\boldsymbol{S}_{ij})=-1$, $\det(\boldsymbol{D}_i(\lambda))=\lambda$, $\det(\boldsymbol{T}_{ij}(\lambda))=1$.

(2) *若 $\boldsymbol{E}$ 是一个初等矩阵, 则 $\det(\boldsymbol{EA})=\det(\boldsymbol{E})\det(\boldsymbol{A})$.*

证明. (1) 由于初等矩阵可以从 $\boldsymbol{I}_n$ 出发利用初等行变换得到, 利用定理 4.3.22 (1), 定理 4.3.26 (a), 和定理 4.3.27 的 (a), (c) 和 (d) 即可.

(2) 同样地, 利用定理 4.3.22 (1), 以及定理 4.3.27 的 (a), (c) 和 (d), 还有上面的计算结果. □

定理 4.3.29. *设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为同阶的方阵, 则 $\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$. 特别地, $\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{BA})$.*

证明. 若 $\boldsymbol{AB}$ 可逆, 在注 4.2.29 中我们已经见到, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 同时可逆. 由定理 4.3.24 可知, 存在初等方阵 $\boldsymbol{E}_1,\dots,\boldsymbol{E}_r$ 和 $\boldsymbol{E}_1',\dots,\boldsymbol{E}_s'$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_1\cdots\boldsymbol{E}_r$, 而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_1'\cdots\boldsymbol{E}_s'$. 此时, 反复运用推论 4.3.28 (2), 我们有

$$\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{E}_1\cdots\boldsymbol{E}_r)=\det(\boldsymbol{E}_1)\det(\boldsymbol{E}_2\cdots\boldsymbol{E}_r)=\cdots=\det(\boldsymbol{E}_1)\cdots\det(\boldsymbol{E}_r),$$

以及

$$\det(\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{E}_1' \cdots \boldsymbol{E}_s') = \det(\boldsymbol{E}_1') \cdots \det(\boldsymbol{E}_s'),$$

和

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{E}_1 \cdots \boldsymbol{E}_r \boldsymbol{E}_1' \cdots \boldsymbol{E}_s') = \det(\boldsymbol{E}_1) \cdots \det(\boldsymbol{E}_r) \det(\boldsymbol{E}_1') \cdots \det(\boldsymbol{E}_s').$$

由此可以迅速看出, $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$.

另一方面, 若 $\boldsymbol{AB}$ 不可逆, 则 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 不可逆. 接下来只需验证 "若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\det(\boldsymbol{A}) = 0$", 从而 $\det(\boldsymbol{AB}) = 0 = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$. 对于该断言, 若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 由定理 4.3.24可知, $\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})$ 不是单位阵, 即它的最后一行全为 0. 此时, 我们可以找到初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \ldots, \boldsymbol{E}_r$, 使得 $\boldsymbol{E}_1, \ldots, \boldsymbol{E}_r\boldsymbol{A} = \mathrm{rref}(\boldsymbol{A})$. 于是由定理 4.3.26 (b) 和推论 4.3.28(2) 可知,

$$0 = \det(\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})) = \det(\boldsymbol{E}_1 \cdots \boldsymbol{E}_r \boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{E}_1) \cdots \det(\boldsymbol{E}_r) \det(\boldsymbol{A}).$$

由于初等方阵的行列式非零, 这迫使 $\det(\boldsymbol{A}) = 0$. □

推论 4.3.30. (a) *方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \det(\boldsymbol{A})^{-1}$.*

(b) *对于同阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$, 我们有 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I} \Leftrightarrow \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$.*

(c) *$\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^\mathsf{T})$.*

(d) *定理 4.3.26 和定理 4.3.27 中的性质对于列向量也成立. 另外, 行列式可以按照任意行展开, 也可以按照任意列展开.*

证明. (a) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则存在 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 此时 $\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \det(\boldsymbol{AA}^{-1}) = \det(\boldsymbol{I}) = 1$. 这说明 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$. 若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 定理 4.3.29 的证明里我们已经证得了 $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.

(b) 由对称性, 我们只需证明 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$, 则 $\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{I}) = 1$, 故 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 此时, 对 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$ 的两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 可得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$, 从而亦有 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

(c) 对于任意的初等方阵 $\boldsymbol{E}$, 我们容易看出其转置矩阵为同类型初等方阵:

$$\boldsymbol{S}_{ij}^\mathsf{T} = \boldsymbol{S}_{ij}, \qquad \boldsymbol{D}_i(\lambda)^\mathsf{T} = \boldsymbol{D}_i(\lambda), \qquad \boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)^\mathsf{T} = \boldsymbol{T}_{ji}(\lambda).$$

从而, 由推论 4.3.28(1)可知, 我们总有 $\det(\boldsymbol{E}) = \det(\boldsymbol{E}^\mathsf{T})$. 接下来对于 $\boldsymbol{A}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 我们可以找到一列初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1 \cdots \boldsymbol{E}_r$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1, \dots, \boldsymbol{E}_r$. 此时, $\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \boldsymbol{E}_r^\mathsf{T} \cdots \boldsymbol{E}_1^\mathsf{T}$. 利用定理 4.3.29 或者推论 4.3.28 (2), 我们不难验证 $\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^\mathsf{T})$.

若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 由定理 4.2.35 (5) 可知, $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$ 也不可逆, 从而 $\det(\boldsymbol{A}) = 0 = \det(\boldsymbol{A}^\mathsf{T})$.

(d) 第一句话中的论断利用前面一条性质即可. 关于第二句话中的论断, 我们引入的行列式的定义是说行列式可以按照第一列展开, 利用转置运算, 这说明行列式可以按照第一行展开; 再通过交换行的方法, 可以看出行列式可以通过任意行展开; 最后, 再次利用转置运算, 可以看出行列式可以按照任意列展开. □ 请仔细研究细节

对于方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, 从中取出第 $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ 行与 $j_1 < j_2 < \cdots < j_p$ 列的交叉位置的元素. 这些有序排列的元素构成了 $\boldsymbol{A}$ 的一个 p **阶子阵**:

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots\cdots & a_{i_1j_p} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots\cdots & a_{i_2j_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_pj_1} & a_{i_pj_2} & \cdots\cdots & a_{i_pj_p} \end{pmatrix}.$$

之前提到, 行列式可以按照任何一行展开来求解. 这其实可视作下面结果的一个特例.

注 4.3.31 (**Laplace 展开定理***). 若取定行指标 $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$, 则

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_p} \det\left(\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix}\right)\left((-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_p+j_1+j_2+\cdots+j_p}\det\left(\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_{p+1} & i_{p+2} & \cdots & i_n \\ j_{p+1} & j_{p+2} & \cdots & j_n \end{pmatrix}\right)\right),$$

其中

$$\begin{aligned}\{1,2,\dots,n\} &= \{i_1 < i_2 < \cdots < i_p\} \cup \{i_{p+1} < i_{p+1} < \cdots < i_n\} \\ &= \{j_1 < j_2 < \cdots < j_p\} \cup \{j_{p+1} < j_{p+1} < \cdots < j_n\}.\end{aligned}$$

作为之前概念的推广, 我们也称其中的 $(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_p+j_1+j_2+\cdots+j_p}\det\left(\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_{p+1} & i_{p+2} & \cdots & i_n \\ j_{p+1} & j_{p+2} & \cdots & j_n \end{pmatrix}\right)$ 为相对于 $\det\left(\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix}\right)$ **的代数余子式**.

我们不给出该公式的证明. 感兴趣的同学可以自己研究.

*克莱因所著的《古今数学思想》里介绍: 参照克莱姆和贝祖的工作, 拉普拉斯在 1772 年的论文《对积分和世界体系的探讨》(Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde) 中, 证明了范德蒙德的一些规则, 并推广了他的展开行列式的方法, 用 r 行中所含的子式和它们的余子式的集合来展开行列式, 这个方法现在仍然以他的名字命名.

作为一个示例, 对于

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\-1&0&1&0\\1&2&-1&-1\\0&1&-2&3\end{pmatrix},$$

若我们选定 $i_1=1$, $i_2=2$, 则需要计算以下行列式:

$$\det\left(\boldsymbol{A}\left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&2\end{smallmatrix}\right)\right)=\begin{vmatrix}1&-1\\-1&0\end{vmatrix}=-1,\quad(-1)^{(1+2)+(1+2)}\det\left(\boldsymbol{A}\left(\begin{smallmatrix}3&4\\3&4\end{smallmatrix}\right)\right)=(-1)^{(1+2)+(1+2)}\begin{vmatrix}-1&-1\\-2&3\end{vmatrix}=-5,$$

$$\det\left(\boldsymbol{A}\left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&3\end{smallmatrix}\right)\right)=\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}=1,\quad(-1)^{(1+2)+(1+3)}\det\left(\boldsymbol{A}\left(\begin{smallmatrix}3&4\\2&4\end{smallmatrix}\right)\right)=(-1)^{(1+2)+(1+3)}\begin{vmatrix}2&-1\\1&3\end{vmatrix}=-7,$$

$$\det\left(\boldsymbol{A}\left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&4\end{smallmatrix}\right)\right)=\begin{vmatrix}1&1\\-1&0\end{vmatrix}=1,\quad(-1)^{(1+2)+(1+4)}\det\left(\boldsymbol{A}\left(\begin{smallmatrix}3&4\\2&3\end{smallmatrix}\right)\right)=(-1)^{(1+2)+(1+4)}\begin{vmatrix}2&-1\\1&-2\end{vmatrix}=-3,$$

$$\det\left(\boldsymbol{A}\left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&3\end{smallmatrix}\right)\right)=\begin{vmatrix}-1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1,\quad(-1)^{(1+2)+(2+3)}\det\left(\boldsymbol{A}\left(\begin{smallmatrix}3&4\\1&4\end{smallmatrix}\right)\right)=(-1)^{(1+2)+(2+3)}\begin{vmatrix}1&-1\\0&3\end{vmatrix}=3,$$

$$\det\left(\boldsymbol{A}\left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&4\end{smallmatrix}\right)\right)=\begin{vmatrix}-1&1\\0&0\end{vmatrix}=0,\quad(-1)^{(1+2)+(2+4)}\det\left(\boldsymbol{A}\left(\begin{smallmatrix}3&4\\1&3\end{smallmatrix}\right)\right)=(-1)^{(1+2)+(2+4)}\begin{vmatrix}1&-1\\0&-2\end{vmatrix}=2,$$

$$\det\left(\boldsymbol{A}\left(\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right)\right)=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1,\quad(-1)^{(1+2)+(2+3)}\det\left(\boldsymbol{A}\left(\begin{smallmatrix}3&4\\1&2\end{smallmatrix}\right)\right)=(-1)^{(1+2)+(2+3)}\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1.$$

于是, 由 *Laplace* 展开定理可知

$$\det(\boldsymbol{A})=(-1)\cdot(-5)+1\cdot(-7)+1\cdot(-3)+(-1)\cdot 3+0\cdot 2+(-1)\cdot 1=-9.$$

习题 4.3.32. 在这里, 验证 *Laplace* 展开定理的一个特殊形式 (有困难的同学可以参考教材上的定理 *4.3.1*). 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, $1<k\leq n$. 对任意的 $1\leq i<j\leq n$, 记 D_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 删去第 $1,k$ 行, 并删去第 i,j 列后得到的 $n-2$ 阶方阵的行列式. 证明:

$$\det(\boldsymbol{A})=\sum_{1\leq i<j\leq n}(-1)^{1+k+i+j}\begin{vmatrix}a_{1i}&a_{1j}\\a_{ki}&a_{kj}\end{vmatrix}D_{ij}.\tag{4.7}$$

习题 4.3.33. 在这里, 再考虑 *Laplace* 展开定理的另外一种特殊形式. 事实上, *Laplace* 展开定理的 (复杂) 证明就是以讨论形如这样的结果开始的. 对于下面的分块矩阵, 证明相应的行列式公式, 其中 $\boldsymbol{A}\in F^{m\times m}$, $\boldsymbol{D}\in F^{n\times n}$, $\boldsymbol{C}\in F^{n\times m}$, $\boldsymbol{B}\in F^{m\times n}$.

(i) $\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}=\det(\boldsymbol{A})$.　　(ii) $\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\det(\boldsymbol{D})$.

(iii) $\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{D})=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$.

(*提示: 在前两小问里分别对最后一行和第一行作展开, 在第三小问里可以利用前两小问的矩阵的乘法. 第三小问的公式要求熟记.*)

关于矩阵乘积的行列式 (参见定理 4.3.29), 我们还有如下的进一步推广.

注 4.3.34 (关于矩阵乘积的 **Binet–Cauchy** 公式)**.** 对于矩阵 $\boldsymbol{A}$, 我们用 $\boldsymbol{A}\left(\begin{smallmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r\end{smallmatrix}\right)$ 来表示由 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1<i_2<\cdots<i_r$ 行第 $j_1<j_2<\cdots<j_r$ 列元素构成的 r 阶子方阵. 假定 $\boldsymbol{A}\in F^{p\times q}$, $\boldsymbol{B}\in F^{q\times s}$, 则对于 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 其 r 阶子阵的行列式为

$$\left|\boldsymbol{C}\left(\begin{smallmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r\end{smallmatrix}\right)\right|=\begin{cases}0, & \text{当 } r>q,\\ \displaystyle\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_r\le q}\left|\boldsymbol{A}\left(\begin{smallmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r\end{smallmatrix}\right)\right|\cdot\left|\boldsymbol{B}\left(\begin{smallmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r\end{smallmatrix}\right)\right|, & \text{当 } r\le q.\end{cases}$$

我们不给出该公式的证明. 感兴趣的同学可以自己研究.

作为一个示例, 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, 那么在 *Binet–Cauchy* 公式中, 取 $r=2$, $i_1=j_1=1$, $i_2=j_2=2$ 后, 我们会有

$$\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-28.$$

习题 4.3.35. 利用 *Binet–Cauchy* 公式来证明如下的 *Cauchy* 恒等式:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ic_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_id_i\right)-\left(\sum_{i=1}^n a_id_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_ic_i\right)=\sum_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)(c_id_j-c_jd_i).$$

行列式的展开　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量. 在前面的讨论里我们已经提到, 由于这些行向量的有序排列唯一地决定了方阵 $\boldsymbol{A}$, 行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ 也可以视为关于行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的函数: $\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$. 该多元函数满足:

(1) **反对称性**: 交换两个行向量的位置, 则行列式变号.

(2) **多重线性**: 行列式关于每个行向量都是线性的 (在固定其它行向量的条件下).

(3) **规范性**: 若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 是 n 维数组空间 F^n 中的基本向量, 则 $\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1$. 注意, 这组基本向量对应的方阵为 $\boldsymbol{I}_n$.

注 4.3.36. (a) 值得一提的是, 我们在定理 *4.3.27*, 推论 *4.3.28*, 定理 *4.3.29* 和推论 *4.3.30* 的证明中, 我们仅用到了行列式函数 det 满足定理 *4.3.26* 所给出的性质. 由于在多重线性的条件下, 反对称性与定理 *4.3.26* 中的 (c) 是等价的, 这说明, 若关于 n 个 n 维行向量的多元函数满足以上三条, 则它必然是相应矩阵的行列式.

(b) $\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 的几何意义是这 n 个向量在 n 维空间中张成的平行多面体的有向体积.

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, 而 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个行向量 $(1 \le i \le n)$. 设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 是 n 维数组中的基本向量, 写成行向量的形式. 因此, $\boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\boldsymbol{e}_j$. 从而

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A}) &= \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) \\
&= \det\left(\sum_{j_1=1}^n a_{1j_1}\boldsymbol{e}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n a_{2j_2}\boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, \sum_{j_n=1}^n a_{nj_n}\boldsymbol{e}_{j_n}\right) \\
&\xlongequal{\text{多重线性}} \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \det(\boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_n})
\end{aligned}$$

注意到若 $j_p = j_q$ 而 $p \ne q$, 则对应的行列式为 0. 于是

$$\text{上式} = \sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_n \in \{1,2,\ldots,n\} \\ \text{且互不相等}}} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \det(\boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_n})$$

其中的求和的条件也称为 $j_1, j_2, \ldots, j_n$ 构成 $1, 2, \ldots, n$ 的一个**排列**. 为了表示的方便, 我们将其记作 $(j_1, j_2, \ldots, j_n) \in \mathcal{S}_n$, 而 $\mathcal{S}_n$ 表示所有的 $1, 2, \ldots, n$ 的排列的集合. 有的教材里也将这个集合记作 S_n 或者 $\mathfrak{S}_n$. 故

$$\text{上式} = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n) \in \mathcal{S}_n} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \det(\boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_n}).$$

因此, 关于行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ 的计算化归成关于 $\det(\boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_n})$ 的计算. 后者是单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$ 打乱行的顺序后得到的新矩阵的行列式. 由于其可以通过若干次交换行的操作得到 (参见接下来的讨论), 因此该行列式为 $(-1)^? \det(\boldsymbol{I}_n) = \pm 1$.

接下来具体讨论其取值. 不妨设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{j_1} \\ \boldsymbol{e}_{j_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{j_n} \end{pmatrix}$ 是由单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$ 通过 N 次的交换行

得到的. 很明显, 不同人来操作, 所选用的 N 可能不同, 但是其奇偶性必然一致, 这是因为 $\det(\boldsymbol{A}) = (-1)^N$ 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 唯一决定. 下面关注 N 的奇偶性.

更一般地, 考察由两两不同的实数构成的一个有序数组 $s = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, 并称之为一个**排列**. 对于该 s, 若 $i < j$ 而 $a_i > a_j$, 则数对 (a_i, a_j) 称为 (相对于 s 的) 一个**逆序**. s 的逆序的个数称为 s 的**逆序数**, 记作 $\tau(s)$. 若 $\tau(s) = 0$, 即 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, 则 s 称为一个**顺序排列**. 若 $\tau(s)$ 为奇数 (对应地, 偶数), 则称 s 为一个**奇排列** (对应地, **偶排列**). 对于一个排列, 若交换其中的两个元素的位置, 则称对其做了一次**对换**.

例 4.3.37.

$$
\begin{array}{ccc}
s = (1,3,4,2) & \text{逆序为: } (3,2),\ (4,2) & \tau(s) = 2 \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \text{对换 } 2,4} & & \\
s' = (1,3,2,4) & \text{逆序为: } (3,2) & \tau(s') = 1 \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \text{对换 } 2,3} & & \\
s'' = (1,2,3,4) & \text{这是一个顺序排列} & \tau(s'') = 0
\end{array}
$$

引理 4.3.38. *每个排列 s 都可以经过 $\tau(s)$ 次相邻位置的对换变成一个顺序排列.* 教材引理 4.3.1 课堂不讲

证明. 设 s 是关于 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 的一个排列. 设在 s 中形如 $(*, a_i)$ 的逆序的个数为 m_i, 则显然 $\tau(s) = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$. 此时, a_1 必然在 (从左数的) 第 $m_1 + 1$ 个位置上. 该 a_1 可以通过 m_1 次与相邻靠前的元素的对换, 移到第 1 个位置上. 每次对换时, 相应的 $m_2, m_3, \ldots, m_n$ 都不改变.

再考虑此时的后 $n-1$ 数构成的有序数组, 它是 $a_2 < a_3 < \cdots < a_n$ 的一个排列. 其逆序数为 $m_2 + m_3 + \cdots + m_n$. 由归纳法, 我们可以通过这么多个对换, 形成一个顺序排列.

由于 a_1 在这些数之前, 比这些数都小, 连接在一起后, 我们得到一个顺序排列. 这说明原来的有序数组 s 可以通过 $\tau(s)$ 个相邻对换得到一个顺序排列. $\square$

例 4.3.39. *例如, 我们可以考虑排列 $s = (2,5,4,3,1)$, 它的所有逆序数对为*

$$(2,1), (5,1), (4,1), (3,1), (5,3), (4,3)(5,4),$$

因此逆序数为 $\tau(s) = 7$. 通过如下 7 个交换相邻位置, 我们可以从 s 得到顺序 $(1,2,3,4,5)$:

$$
\begin{aligned}
s = (2,5,4,3,1) &\to (2,5,4,1,3) \to (2,5,1,4,3) \to (2,1,5,4,3) \to (1,2,5,4,3) \\
&\to (1,2,5,3,4) \to (1,2,3,5,4) \to (1,2,3,4,5).
\end{aligned}
$$

推论 4.3.40. $\mathcal{S}_n$ 中的排列 $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ 可以通过 $\tau(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ 个对换得到顺序排列 $(1, 2, \ldots, n)$, 从而 $\det(\boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_n}) = (-1)^{\tau(j_1, j_2, \ldots, j_n)} \det(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = (-1)^{\tau(j_1, j_2, \ldots, j_n)}$.

综上, 我们证明了行列式有如下的展开式.

定理 4.3.41. 设方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, 则 教材定理 4.3.3

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n) \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}. \tag{4.8}$$

注 4.3.42. 课堂不讲

(1) 若 $\mathcal{S}_n$ 中的排列 $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ 可以通过 k 个对换得到顺序排列 $(1, 2, \ldots, n)$, 则 $\det(\boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_n}) = (-1)^k$. 这说明 k 与 $\tau(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ 同奇偶, 即 $(-1)^k = (-1)^{\tau(j_1, j_2, \ldots, j_n)}$.

(2) 前面提到一个排列可以通过若干次对换得到顺序排列. 这样的操作若反过来, 则可以用来说明这样一个简单事实: 任何一个 $\mathcal{S}_n$ 中的排列总可以通过若干次的对换得到 $\mathcal{S}_n$ 中事先指定的排列.

(3) 若一个排列 σ 在经过一次对换后得到新的排列 σ', 则 σ' 在经过相同的对换后可以还原到 σ. 这说明 σ' 可以通过 $\tau(\sigma) + 1$ 次对换得到顺序排列. 特别地, 这说明了 σ 与 σ' 的奇偶性相反.

注 4.3.43. 对于展开式 (4.8) 中的项 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, 若任意调换其中因子的顺序得到了 $a_{i_1k_1} a_{i_2k_2} \cdots a_{i_nk_n}$, 则其行指标和列指标分别构成了排列 $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ 和 $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. 它们的逆序数有如下的关系: 课堂不讲

$$(-1)^{\tau(j_1, j_2, \ldots, j_n)} = (-1)^{\tau(i_1, i_2, \ldots, i_n) + \tau(k_1, k_2, \ldots, k_n)},$$

或者等价地, $\tau(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ 与 $\tau(i_1, i_2, \ldots, i_n) + \tau(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ 有相同的奇偶性.

为了看出这一点, 我们注意到任意对调 $a_{i_1k_1} a_{i_2k_2} \cdots a_{i_nk_n}$ 中的两个因子时, 排列 $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ 和 $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ 同时做了一次对换, 于是 $\tau(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ 和 $\tau(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ 同时改变了奇偶性. 因而 $\tau(i_1, i_2, \ldots, i_n) + \tau(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ 的奇偶性不变. 又因为 $a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ 可由 $a_{i_1k_1} a_{i_2k_2} \cdots a_{i_nk_n}$ 经过有限次对调因子得到, 所以 $\tau(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ 与 $\tau(i_1, i_2, \ldots, i_n) + \tau(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ 有相同的奇偶性.

作为上面注解的一个重要应用, 我们还有如下的公式.

定理 4.3.44. 方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式还可以对称地按列的自然顺序展开成

$$\det(\boldsymbol{A})=\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathcal{S}_n}(-1)^{\tau(i_1,i_2,\ldots,i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

证明. **(思路一)** 我们只需证明

课堂不讲

$$\sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in\mathcal{S}_n}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\ldots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathcal{S}_n}(-1)^{\tau(i_1,i_2,\ldots,i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

对于左边求和式中的通项

$$(-1)^{\tau(j_1,j_2,\ldots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

假定在适当打乱因子的顺序后假定我们有

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=a_{i_11}a_{i_2i}\cdots a_{i_nn}.$$

由注 4.3.43 可知, 我们有

$$(-1)^{\tau(j_1,j_2,\ldots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=(-1)^{\tau(i_1,i_2,\ldots,i_n)}a_{i_11}a_{i_2i}\cdots a_{i_nn}.$$

由于不同的排列 $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ 给出了不同的排列 $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$, 当 $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ 遍历 $\mathcal{S}_n$ 时, 对应的 $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ 也遍历 $\mathcal{S}_n$. 故结论成立.

(思路二) 我们已经有 $\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{A}^\mathsf{T})$. 接下来只需将公式 (4.8) 用于 $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$ 即可. □

之前我们已经引入了方阵的代数余子式 A_{ij} 的概念. 对于方阵 $\boldsymbol{A}$, 我们定义 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵** (adjoint matrix) 为

$$\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^*:=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\cdots\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}\cdots\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}\cdots\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}.$$

如用之前的记号, 它可以表示为 $(A_{ij})_{n\times n}^\mathsf{T}$. 请特别注意其下标的排列顺序. 特别地, $\boldsymbol{A}^*$ 的第 (i,j) 元素为 $\boldsymbol{A}$ 的第 (j,i) 元素对应的代数余子式 A_{ji}. 不难看出

$$(\boldsymbol{A}^\mathsf{T})^*=(\boldsymbol{A}^*)^\mathsf{T}.$$

定理 4.3.45. 对于方阵 $\boldsymbol{A}$, 我们有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\det(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{I}_n$.

教材定理 4.3.7

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 的行向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{P} = (p_{ij})_{n\times n}$.

(1) 对 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, 我们可以按第 i 行展开, 从而得到

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}.$$

按照上面的记号, 这恰为 p_{ii}.

(2) 若 $1 \leq i \neq j \leq n$, 令

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{i-1} \\ \boldsymbol{\alpha}_j \\ \boldsymbol{\alpha}_{i+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}. \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

则 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行与第 j 行完全相同, 从而 $\det(\boldsymbol{B}) = 0$. 另外, 我们还注意到, $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行的元素的代数余子式与 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的元素的代数余子式对应相等. 此时, 对于 $\boldsymbol{B}$ 的行列式按第 i 行展开, 我们类似得到

$$0 = \det(\boldsymbol{B}) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik} = p_{ji}.$$

综上,

$$p_{ij} = \begin{cases} \det(\boldsymbol{A}), & \text{若 } i = j, \\ 0, & \text{若 } i \neq j. \end{cases}$$

这说明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{I}_n$. 类似可证明 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{I}_n$. $\square$

上面的定理有个非常重要的推论.

定理 4.3.46. *若方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \cdot \boldsymbol{A}^*$.* 教材定理 4.3.8

证明. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$, 由定理 4.3.45 可知:

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \cdot \boldsymbol{A}^*\right) = \left(\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \cdot \boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n.$$

这说明 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在, 且为 $\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \cdot \boldsymbol{A}^*$. $\square$

注 4.3.47. 上面的定理给出了求可逆矩阵的逆矩阵的一个理论解法. 不过由于它需要求解 n^2 个 $n-1$ 阶方阵的行列式, 计算量大, 并不实用. 当然, 在 $n=2$ 时, 该方法是非常合适的.

命题 4.3.48. *对于 $n \geq 2$, 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 则 $\det(\boldsymbol{A}^*) = \det(\boldsymbol{A})^{n-1}$.*

证明. 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}_n$ 出发, 我们得到 $\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{A}^*) = \det(\boldsymbol{A})^n$.

若 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$, 从而可以得到 $\det(\boldsymbol{A}^*) = \det(\boldsymbol{A})^{n-1}$.

若 $\det(\boldsymbol{A}) = 0$, 我们只需证明 $\det(\boldsymbol{A}^*) = 0$. 若否, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 再由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{O}$ 出发可推知, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 从而 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$. 这与 $\det(\boldsymbol{A}^*) \neq 0$ 的假设相矛盾. □

习题 4.3.49. *设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 n 阶反对称方阵. 若 n 为奇数, 验证 $\boldsymbol{A}^*$ 是一个对称矩阵; 若 n 为偶数, 验证 $\boldsymbol{A}^*$ 是一个反对称矩阵.*

习题 4.3.50. *设 $\boldsymbol{A}_n$ 为一个 n 阶反对称方阵, 其主对角线的右上角的元素全是 1. 计算 $\boldsymbol{A}_n^*$. (提示: 答案依赖于 n 的奇偶性. 若 $n = 2k$, 由习题 4.3.19 中的计算可知, $|\boldsymbol{A}_{2k}| = 1$. 于是 $\boldsymbol{A}_{2k}^* = \boldsymbol{A}_{2k}^{-1}$. 当 $n = 4$ 时,*

$$\boldsymbol{A}_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

对于一般的 $n = 2k$, $\boldsymbol{A}_n^{-1}$ 具有类似的形式.

对于 $n = 2k+1$, $|\boldsymbol{A}_{2k+1}| = 0$. 从而由 $\boldsymbol{A}_{2k+1}\boldsymbol{A}_{2k+1}^* = |\boldsymbol{A}_{2k+1}|\boldsymbol{I}$ 可知, $\boldsymbol{A}_{2k+1}^*$ 的每个列向量都是方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解. 可以解出该方程组的解的全体为 $\boldsymbol{x} = \lambda(1, -1, 1, -1, \ldots, 1)^{\mathsf{T}}$, $\lambda \in F$. 接下里利用 $\boldsymbol{A}_{2k+1}^*$ 的 $(1,1)$ 位置的元素为 $|\boldsymbol{A}_{2k}| = 1$, 以及 $\boldsymbol{A}_{2k+1}^*$ 为一个对称矩阵, 可以推出 $\boldsymbol{A}_{2k+1}^* = ((-1)^{i+j})_{n\times n}$.)

习题 4.3.51. *设 $\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有 2 阶代数余子式之和.*