反常积分和含参变量积分

彭辉阳

2023.6.28

- 反常积分和含参变量积分
  - 反常积分
    - 分类、定义
    - 收敛判别
  - 含参变量积分
    - 积分限不依赖参数
    - 积分限依赖参数
  - 含参变量反常积分
    - 一致收敛性与判别法
    - 其他性质与判别法
    - 几个重要积分
  - Euler积分
    - Γ函数与B函数

反常积分定义

1. 正常积分：有界区域、有界函数；反之有一个不成立则为反常积分。

2. 无穷限反常积分：积分区域无界。
3. 瑕积分：被积函数无界。
4. 以上两条都成立时，称为**混合反常积分**。

5. **混合反常积分：** 通常被分为两部分处理，如：
$\int_0^{\infty} f(x)dx, \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$，通常处理为：

$$\int_0^a f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

收敛判别

条件收敛、绝对收敛

反常积分与无穷级数的平行理论：

- (1)定义：$\int_a^{+\infty} f(x)dx\ conv. \Leftrightarrow \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx\ conv.$
- (2)非负连续函数积分：$\int_a^{+\infty} f(x)dx\ conv. \Leftrightarrow$ 部分和$\int_a^b f(x)dx$有上界
- (3)比较判别法：$0 \le f(x) \le g(x)$，$\int_a^{+\infty} g(x)dx\ conv.$，则$\int_a^{+\infty} f(x)dx\ conv.$
- (4)**极限形式的比较判别法**：$f(x) \ge 0, g(x) > 0, \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A_0$，则：
- $0 < A_0 < +\infty$，则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$与$\int_a^{+\infty} g(x)dx$同敛散
- $A_0 = 0$，$\int_a^{+\infty} g(x)dx\ conv.$，则$\int_a^{+\infty} f(x)dx\ conv.$
- $A_0 = +\infty$，$\int_a^{+\infty} g(x)dx\ div.$，则$\int_a^{+\infty} f(x)dx\ div.$

- **Cauchy收敛准则**：$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$收敛 $\boxed{\leftrightarrow}$ $\forall \epsilon > 0, \exists A_0 > a, s.t.$ 只要 $A', A'' > A_0$，就有$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| < \epsilon$

- **Dirichlet判别法**：$\int_{a}^{b} f(x)dx, \forall b > a$有界，$g(x)$在$[a, +\infty)$单调趋于零，则$\int_{a}^{+\infty} f(x)g(x)dx\ \ conv$.
- **Abel判别法**：$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$收敛，$g(x)$在$[a, +\infty)$上单调有界，则$\int_{a}^{+\infty} f(x)g(x)dx\ \ conv$.

- **P积分**：(常结合[极限形式]比较判别法)
- $\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}(a > 0)$当$p > 1\ conv, p \leq 1\ div$
- $\int_{a}^{b} \frac{dx}{(x-a)^p}(b > a)$当$p < 1\ conv, p \geq 1\ div$

含参变量积分(积分限中无参数)

- **连续性**(极限与积分可交换)：$f(x,u)$在$[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续，则$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)dx$在$[\alpha,\beta]$上连续。

- **积分次序可交换**：$f(x,u)$在$[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续，则$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)dx$满足：$\int_\alpha^\beta \varphi(u)du=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,u)dx\right]du=\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right]dx$

- **可微性**(极限与求导可交换)： $f(x,u)$在$[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续，且对$u$有连续的偏微商，则$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)dx$可微，且$\varphi'(u)=\frac{\partial}{\partial u}\int_a^b f(x,u)dx=\int_a^b\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$

含参变量积分(积分限中有参数)

- **连续性**(极限与积分可交换)：$f(x,u)$在$[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续，函数$a(u)$、$b(u)$在$[\alpha,\beta]$上连续，且$a(u)$、$b(u)\in[a,b]$，则$\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}f(x,u)dx$在$[\alpha,\beta]$上连续。

- **可微性(Leibniz公式)：** $f(x,u)$在$[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续，且对$u$有连续的偏微商，函数$a(u)$、$b(u)$在$[\alpha,\beta]$上可微，且$a(u)$、$b(u)\in[a,b]$，则$\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}f(x,u)dx$可微，且$\psi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx+f(b(u),u)b'(u)-f(a(u),u)a'(u)$

含参变量反常积分的一致收敛性

- 定义：
  - 收敛：$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$收敛⬌ $\forall u, \forall \epsilon, \exists X, A > X$时有$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)dx\right| < \epsilon$
  - 一致收敛：$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$一致收敛⬌ $\forall \epsilon > 0$，$\exists X, A > X$时，$\forall u, \left|\int_A^{+\infty} f(x,u)dx\right| < \epsilon$
  - **一致收敛的另一种写法**：$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$一致收敛⬌ $\lim\limits_{A\to+\infty} \beta(A) = 0$，其中$\beta(A) = \sup\limits_{u\in[\alpha,\beta]} |\int_A^{+\infty} f(x,u)dx|$

含参变量反常积分的一致收敛性

- **Cauchy收敛准则**： $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$一致收敛$\Leftrightarrow$ $\forall\epsilon > 0, \exists X, s.t. A', A'' > X$时，有$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)dx\right| < \epsilon$

- **Weierstrass**：$p(x)$在$[a,+\infty)$上可积，且$|f(x,u)| \le |p(x)|$对于$\forall u$以及充分大的x成立，则$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$一致收敛

含参变量反常积分的一致收敛性

- **Dirichlet**：$f(x,u),g(x,u)$对$\forall u$在任意有限$[a,b]$上可积，且：
  1. $\int_a^b f(x,u)dx \le M, \forall b \ge a, u$（一致有界）
  2. $g(x,u)$关于x单调，且$x \to +\infty$时一致收敛到0
  3. 则$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)dx$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛。

- **Abel**：$f(x,u),g(x,u)$对$\forall u$在任意有限$[a,b]$上可积，且：
  1. $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 关于u一致收敛
  2. $g(x,u)$关于x单调，且关于u一直有界

  则$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)dx$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛。

含参变量反常积分的其他分析性质

- **连续性**：$f(x,u)$在$[a,+\infty] \times [\alpha,\beta]$上连续，且积分$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)dx$关于$u$一致收敛，则$\varphi(u)$连续。

- **可微性**：$f(x,u)$满足：
  1. $f(x,u)$和$\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}$在$[a,+\infty] \times [\alpha,\beta]$上连续
  2. $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$在$[\alpha,\beta]$收敛
  3. $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$在$[\alpha,\beta]$一致收敛

  则$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)dx$可微，且$\varphi'(u) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$

含参变量反常积分的其他分析性质

- **积分次序可交换**：$f(x,u)$在$[a,+\infty]\times[\alpha,\beta]$上连续，且积分$\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$关于$u$一致收敛，则

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)du=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^{+\infty}f(x,u)dx\right]du=\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right]dx$$

- 无穷区间积分次序可交换(不重要，实分析里会讲这个)：$f(x,u)$:
  1. $f(x,u)$在$[a,+\infty]\times[\alpha,+\infty]$上连续
  2. $\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$在任何有限区间$[\alpha,\beta]$上一致收敛，$\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)du$ 在任何有限区间$[a,b]$上一致收敛
  3. $\int_\alpha^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty}|f(x,u)|dx\right]du$，$\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|du\right]dx$至少有一个存在，则：

$$\int_\alpha^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty}f(x,u)dx\right]du=\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)du\right]dx$$

重要积分（会算、记住结果）

- **Dirichlet积分**：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}(I(u)=\int_0^{+\infty}e^{-ux}\left(\frac{\sin x}{x}\right)dx)$
- **Laplace积分**：
- $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}$
- $\mathrm{J}(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}$
- **Fresnel积分**：(比较复杂，P329)
- $\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx=\int_0^{+\infty}\cos x^2dx=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$

Γ函数与B函数

- 定义：
- $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$
- $\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$

- 连续性、可微性、对称性($\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p)$)

Γ函数与B函数

- **Γ递推**：$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s), s=n$时$\Gamma(n+1)=n!$
- **余元公式**：$\Gamma(s)\Gamma(1-\mathrm{s})=\frac{\pi}{\sin s\pi}$

- **B与Γ的联系**：$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(\mathrm{q})}{\Gamma(p+q)}$
- 加倍公式/Legendre公式：$\Gamma(2p)=\frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(p)\Gamma(\mathrm{p}+\frac{1}{2})$

划重点

- Ex13.1 1（这一题12小题全都能用**比较判别法**，看几题就行了），4（Cauchy，类比无穷级数），例13.1.3（Dirichlet）
- Ex13.2 反常多重积分不是考点，但是第1题也可以看一下
- Ex13.3 **2**（含参变量积分求导），4(1)(2)（对参数求导算积分），例13.3.1（主动引入参数）
- Ex13.4 6（Weierstrass），例13.4.3，例13.4.4（Dirichlet，Abel），7（主动拆二重积分），8（特殊积分的应用）
- Ex13.5 **3 （把各种形式积分转变为$\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{B}$的形式），**5（应用）