

线性代数 (B1) 第十四次作业

请于 2023 年 6 月 20 日周二上课前在教室里交.

补充习题可视作思考题, 学有余力的同学强烈建议认真完成.

2023 年 6 月 13 日布置的作业

教材习题. P246: #12, #13, #15, #18(2), #19(2), #21.

补充习题 1. 已知 2021 阶实对称阵 A 满足 $A^2 = 2021A$. 证明: $I + A + \cdots + A^{2021}$ 必然是正定的.

补充习题 2. 设 n 阶实矩阵 A 是正定矩阵, B 为 $n \times m$ 实矩阵. 证明: $\text{rank}(B^T A B) = \text{rank}(B)$.

补充习题 3. 若 n 阶正定矩阵 A 也是正交矩阵, 则 $A = I_n$.

2023 年 6 月 15 日布置的作业

教材习题. P246: #14, #16, #20, #23, #24(1), #28.

补充习题 4. 对实二次型 $Q(X) = X^T A X$, 证明以下几条等价.

(1) $A \geq 0$.

(2) A 相合于它的相抵标准形 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

(3) A 的特征值全为非负实数.

(4) 存在 $m \times n$ 维矩阵 P 使得 $A = P^T P$. (可以由此推出, $m \geq \text{rank}(A)$)

(5) 存在 $m \times n$ 维矩阵 P 使得 $A = P^T P$, 其中 $m = \text{rank}(A)$.

(6) 存在 $n \times n$ 维矩阵 P 使得 $A = P^T P$.

(7) 所有的主子式皆非负.

(做了这道题, 就不用做作业 28 题了. 另外, (7) 推 (3) 在课堂上已经推过了.)