第八次作业答案

21讲 (4.24) ex10.1/2(4)(7); ex10.2/3(2); 4; 6; 7 ex10.3/3(7)(8); 4/(4)(5)

22讲 (4.26) ex11.1/1(1)(3)(4); 2/(2)(3)(10)(11)(12); 3; 4

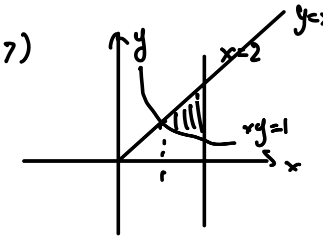
23讲 (4.28) ex11.2/1(1)(4)(6)(7); 2/(2)(3); 3/(1),(2)

10.1.2 计算下列积分 (4) $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$ D: 由 $x^2+y^2=a^2$ 围成的圆在第一象限的部分

(7) $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$ D: 由 $x=2$, $y=x$, $xy=1$ 围成

(4) $\iint_D (x+y)\,dx\,dy \xlongequal{\text{极坐标}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a} r(\sin\theta+\cos\theta)\cdot r\,dr\,d\theta = \boxed{\frac{2}{3}a^3}$

(7)



$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy = \int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy\,dx = \int_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x} dx$$

$$= \int_1^2 x^3 - x\,dx = \frac{15}{4} - \frac{3}{2} = \boxed{\frac{9}{4}}$$

10.2.3 求下列曲线围成的有界区域的面积 (2) $(x-y)^2+x^2=a^2$

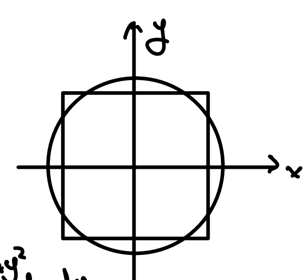
$$\begin{cases} x-y = r\cos\theta \\ x = r\sin\theta \end{cases} \qquad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$$

区域为 $r=a$

故 $S = \int_0^a \int_0^{2\pi} 1 \cdot r\,dr\,d\theta = \boxed{\pi a^2}$

10.2.4. 证明 $\iint_{x^2+y^2\le 1} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy \le \left[\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{x^2}\,dx\right]^2$

Proof: 右 $= \int_{D_2} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$ $D_2: \left[-\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]^2$ $D_1: x^2+y^2\le 1$

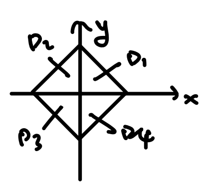


$S(D_1) = \pi$ $S(D_2) = \pi$ $D_0 := D_1 \cap D_2$

在 $D_2 \setminus D_0$ 上 $x^2+y^2 \ge 1$ 在 $D_1 \setminus D_0$ 上 $x^2+y^2 \le 1$

故 $\int_{D_2\setminus D_0} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy \ge S(D_2\setminus D_0) = S(D_1\setminus D_0) \ge \int_{D_1\setminus D_0} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$ □

10.2.6. 设 $f(x)$ 为连续的奇函数. 证明 $\iint_{|x|+|y|\le 1} e^{f(x+y)}\,dx\,dy \ge 2$

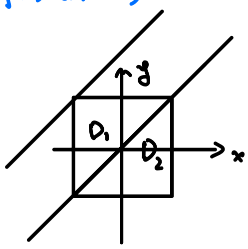


$\iint_{D_1+D_3} e^{f(x+y)}\,dx\,dy = \iint_{D_1} e^{f(x+y)} + e^{-f(x+y)}\,dx\,dy \ge 2S(D_1)$

□

10.2.7. 设 $f(t)$ 为连续函数. 求证: $\iint_D f(x-y)\,dxdy = \int_{-A}^{A} f(t)\,(A-|t|)\,dt$

其中 D 为: $|x| \le A/2$, $|y| \le A/2$. $A>0$ 为常数



令 $\begin{cases} t = x-y \\ s = y \end{cases}$ $\left|\dfrac{\partial(t,s)}{\partial(x,y)}\right| = 1$ D: $|x| \le A/2$ $|y| \le A/2$

D_1: $-A \le t \le 0$ $\quad$ D_2: $0 < t \le A$

$-t-\frac{A}{2} \le s \le A/2$ $\quad$ $-\frac{A}{2} \le s \le -t+\frac{A}{2}$

$$\iint_D f(x-y)\,dxdy = \iint_{D_1+D_2} f(t)\,dt\,ds$$

$$= \int_{-A}^{0} f(t) \int_{-t-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} ds\,dt + \int_0^A f(t) \int_{-\frac{A}{2}}^{-t+\frac{A}{2}} ds\,dt$$

$$= \int_{-A}^{0} f(t)\,(A+t)\,dt + \int_0^A f(t)\,(A-t)\,dt$$

$$= \int_{-A}^{A} f(t)\,(A-|t|)\,dt \qquad \square$$

10.3.3 计算下列三重积分 (7) $\iiint_V e^{|z|}\,dxdydz$ $\quad V: x^2+y^2+z^2 \le 1$

(8) $\iiint_V (|x|+z)\,e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dxdydz$ $\quad V: 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$

(7) $$\iiint_V e^{|z|}\,dxdydz = 2\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1\\ z\ge 0}} e^z\,dxdydz = 2\int_0^1 e^z \int_{x^2+y^2 \le 1-z^2} dxdy\,dz$$

$$= 2\int_0^1 e^z\,\pi(1-z^2)\,dz$$

$$= 2\pi\,(-z^2+2z-1)\,e^z\Big|_0^1 = \boxed{2\pi}$$

(8) $$\iiint_V (|x|+z)\,e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dxdydz \xlongequal{\text{对称性}} 8\iiint_{V_1} x\,e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dxdydz$$ $\quad V_1$: V在第一卦限的部分

$$\xlongequal{\text{球坐标}} 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_1^2 r\sin\theta\cos\varphi \cdot e^{-r^2}\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta \int_1^2 r^3 e^{-r^2}\,dr$$

$$= \boxed{\pi\left(\frac{2}{e}-\frac{5}{e^4}\right)}$$

10.3.4. 利用对称性, 求下列三重积分 (4) $\iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz$ $\quad V: r^2 \le x^2+y^2+z^2 \le R^2$ $\quad z \ge 0$

(5) $\iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz$ $\quad V: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$

(4) $$\iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz \xlongequal{\text{球坐标}} 4\iiint_{V_1} r^2\sin^2\theta\; r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = \boxed{\frac{4}{15}\pi(R^5-r^5)}$$

(5) $$\iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz \xlongequal{\text{"椭球坐标"}} 8\iiint_{V_1} \sqrt{1-r^2}\; r^2\sin\theta\,abc\,dr\,d\theta\,d\varphi = \boxed{\frac{\pi^2}{4}abc}$$

1. 计算下列曲线弧长 (1) $r(t)=e^t\cos t\,\vec{i}+e^t\sin t\,\vec{j}+e^t\vec{k}$ $(0\le t\le 2\pi)$

(3) $x=a\cos t$ $y=a\sin t$ $z=a\ln\cos t$ $(0\le t\le \pi/4)$

(4) $z^2=2ax$ 与 $9y^2=16xz$ 的交线，由点 $O(0,0,0)$ 到点 $A(2a, 8a/3, 2a)$

(1) $\int_L 1\cdot ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{(e^t(\cos t-\sin t))^2+(e^t(\sin t+\cos t))^2+(e^t)^2}\,dt=\boxed{\sqrt{3}(e^{2\pi}-1)}$

(3) $\int_L 1\,ds=\int_0^{\pi/4}\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+(a\frac{-\sin t}{\cos t})^2}\,dt=a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos t}\,dt=\ln(\frac{1}{\cos t}+\tan t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\boxed{a\ln(1+\sqrt{2})}$

(4) $z=t$ $x=\frac{t^2}{2a}$ $y=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{z^3}{2a}}$

$\int_L 1\,ds=\int_0^{2a}\sqrt{(\frac{t}{a})^2+(\sqrt{\frac{2t}{a}})^2+1^2}\,dt=\frac{1}{a}\int_0^{2a}(t+a)\,dt=\boxed{4a}$

11.1.2 计算下列曲线积分 (2) $\int_L\frac{z^2}{x^2+y^2}ds$ L: $x=a\cos t$ $y=a\sin t$ $z=at$ $(0\le t\le 2\pi)$

(3) $\int_L(x+y)\,ds$ L: 顶点为 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ 的三角形闭界

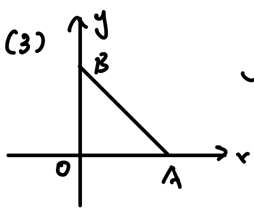
(10) $\int_L(x^2+y^2+z^2)^n\,ds$ L: 圆周 $x^2+y^2=a^2$ $z=0$

(11) $\int_L x^2\,ds$ L: 圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $x+y+z=0$

(12) $\int_L(xy+yz+zx)\,ds$ L: 圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $x+y+z=0$

(2) $\int_L\frac{x^2}{x^2+y^2}ds=\int_0^{2\pi}\frac{(at)^2}{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+a^2}\,dt=\int_0^{2\pi}t^2\sqrt{2}a\,dt=\boxed{\frac{8}{3}\sqrt{2}a\pi^3}$

(3)



$\int_L(x+y)ds=\int_{OA}(x+y)ds+\int_{AB}(x+y)ds+\int_{BO}(x+y)ds$

$=\int_0^1 x\,dx+\int_0^1\sqrt{2}\,dt+\int_0^1 y\,dy=\boxed{1+\sqrt{2}}$

Rmk: 第一型曲线积分，无定向 例如:

$\int_{BO}(x+y)ds$ BO: $\begin{cases}x=0\\ y=1-t\end{cases}$ $0\le t\le 1$ $\int_{OB}(x+y)ds$ $\begin{cases}x=0\\ y=t\end{cases}$ $0\le t\le 1$

$=\int_0^1(1-t)\,dt=\frac{1}{2}$ $=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$

(10) $\int_L(x^2+y^2+z^2)^n ds=a^{2n}\int_L ds=\boxed{2\pi a^{2n+1}}$

(11) 由对称性 $\int_L x^2ds=\int_L y^2ds=\int_L z^2ds=\frac{1}{3}\int_L x^2+y^2+z^2ds=\frac{1}{3}\int_L a^2ds=\boxed{\frac{2}{3}\pi a^3}$

(12) $\oint_L (xy+yz+zx)\,ds = \oint_L \frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}\,ds = -\frac{a^2}{2}\oint_L ds = -\pi a^3$

3. 求曲线 $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ 从 $t=0$ 到任意点间那段弧的质量，设它各点的密度与该点到原点的距离平方成反比，且在 $(1,0,1)$ 处的密度为 1.

$\rho\cdot(x^2+y^2+z^2)=1\cdot 2 \Rightarrow \rho=\frac{2}{x^2+y^2+z^2}$

$m=\int_0^k \frac{2}{x^2+y^2+z^2}\sqrt{(e^t(\cos t-\sin t))^2+(e^t(\sin t+\cos t))^2+(e^t)^2}\,dt$

$=\int_0^k \frac{1}{e^{2t}}\cdot\sqrt{3e^{2t}}\,dt$

$=\sqrt{3}\int_0^k e^{-t}\,dt=\sqrt{3}(1-e^{-k})$

4. 求螺旋线一圈 $x=a\cos t$ $y=a\sin t$ $z=\frac{h}{2\pi}t$ $(0\le t\le 2\pi)$ 对于各坐标轴的转动惯量 $(\rho=1)$

$I_z=\int_0^{2\pi}\rho(x^2+y^2)\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}\,dt=2\pi a^2\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}$

$I_y=\int_0^{2\pi}\rho(x^2+z^2)\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}\,dt=\left(\frac{2}{3}\pi h^2+\pi a^2\right)\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}$

$I_x=\int_0^{2\pi}\rho(y^2+z^2)\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}\,dt=\left(\frac{2}{3}\pi h^2+\pi a^2\right)\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}$

11.2.1. 求下列曲面在指定部分的面积 (1) 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=2x$ 内的部分

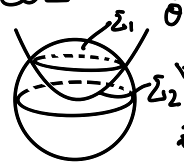
(4) 球面 $x^2+y^2+z^2=3a^2$ 和抛物面 $x^2+y^2=2az$ $(z\ge 0)$ 所围成的立体的全表面

(1) 选取参数 r,θ $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $z=r$ $r=2\cos\theta$

$\vec{r_r'}=(\cos\theta,\sin\theta,1)$ $\vec{r_\theta'}=(-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$ $|\vec{r_r'}\times\vec{r_\theta'}|=\sqrt{2}r$

$S=\iint_\Sigma ds=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{2}r\,dr=\sqrt{2}\pi$

(4)



两面的交平面为 $z=a$

$z\ge a$ 时为球面部分 Σ_1，$0\le z<a$ 时为抛物面部分 Σ_2

Σ_1: 球面坐标变换: $\begin{cases} x=\sqrt{3}a\sin\theta\cos\varphi \\ y=\sqrt{3}a\sin\theta\sin\varphi \\ z=\sqrt{3}a\cos\theta \end{cases}$ (θ,φ 为参数) $|\vec{r_\theta}\times\vec{r_\varphi}|=3a^2\sin\theta$ $\cos\theta_0=\frac{a}{\sqrt{3}a}$

$I_1=\iint_{\Sigma_1} 1\,dS = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\theta_0} 3a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 6a^3\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\Sigma_2: \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \quad z=\frac{1}{2a}r^2 \quad \left|\vec{r}_r' \times \vec{r}_\theta'\right| = r\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}$

$I_2=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\sqrt{2}a} r\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}\, dr = \pi a^2 \int_0^{\sqrt{2}a} \sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}\, d\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)$

$= \pi a^2 \int_1^3 \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3}\pi a^3 (3\sqrt{3}-1)$

$I_1+I_2 = \frac{16}{3}\pi a^3$

(6) 锥面 $z^2=x^2+y^2$ 被 oxy 平面和平面 $z=\sqrt{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)$ 所截下的部分

(7) 螺旋面 $x=r\cos\varphi$ $y=r\sin\varphi$ $z=h\varphi$ 在 $0<r<a$, $0<\varphi<2\pi$ 的部分

(6) 两曲面交线在 xoy 的投影为 $\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 围成的区域记为 Σ'

$S=\iint_{\Sigma'} 1\, dS = \iint_{\Sigma'} \sqrt{1^2+z_x'^2+z_y'^2}\, dx\,dy = \sqrt{2}\iint dx\,dy = \sqrt{2}\,\pi\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2 = 8\pi$

(7) $\vec{r}_r'=(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ $\vec{r}_\varphi'=(-r\sin\varphi, r\cos\varphi, h)$ $\left|\vec{r}_r' \times \vec{r}_\varphi'\right| = \sqrt{h^2+r^2}$

$I=\iint_{\Sigma} 1\, dS = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{a} \sqrt{h^2+r^2}\, dr\, d\varphi = 2\pi\left(\frac{a\sqrt{a^2+h^2}}{2}+\frac{h^2}{2}\ln(a+\sqrt{a^2+h^2})-\frac{h^2}{2}\ln h\right)$

11.2.2 计算下列曲面积分

(2) $\iint_S xyz\, dS$ $S: x+y+z=1$ 的第一卦限部分

(3) $\iint_S (x^2+y^2)\, dS$ S: 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=1$ 所围成的立体表面

(2) 取 x, y 为参数

$\iint_S xyz\, dS = \iint_{\substack{x+y\le 1 \\ x,y\ge 0}} xy(1-x-y)\sqrt{3}\, dx\, dy = \frac{\sqrt{3}}{120}$

(3) $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \quad z=r \qquad \Sigma_1$: 锥面部分. Σ_2: 平面部分

$I_1=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} r^2\cdot \sqrt{2}r\, dr\, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

$I_2=\iint_{\Sigma_2} (x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} r'^2\cdot r'\, dr'\, d\theta' = \frac{\pi}{2}$

$I=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi$

11.2.3 利用对称性计算曲面积分

(1) $\iint_S (x^2+y^2)\,dS \quad S: x^2+y^2+z^2=R^2$

(2) $\iint_S (x+y+z)\,dS \quad S: x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (z\geq 0)$

(1) $\iint_S x^2 dS = \iint_S y^2 dS = \iint_S z^2 dS$

故 $\iint_S (x^2+y^2)\,dS = \frac{2}{3}\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS = \frac{2}{3}R^2\cdot 4\pi R^2 = \boxed{\frac{8}{3}\pi R^4}$

(2) 由对称性 $\iint_S x\,dS = \iint_S y\,dS = 0$

$\iint_S z\,dS \xlongequal{\text{球面坐标}} \int_0^{2\pi}\!\!{}_{\varphi} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\!\!{}_{\theta} a\cos\theta \quad a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \boxed{\pi a^3}$