例 4.2.13. 下面解释一下为何要引入或者说定义如此“复杂”的矩阵乘法运算. 接下来, 我们将所有数组空间的元素都视为列向量. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$, 则我们有一个映射

$$\mathscr{A}: F^n \to F^m, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}x_k \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}x_k \end{pmatrix}. \tag{†}$$

这样的映射之后将被称作是从 F^n 到 F^m 的一个**线性映射**, 因为它满足线性要求: 对任意的 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in F^n$ 以及 $\lambda_1, \lambda_2 \in F$ 都有 $\mathscr{A}(\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2) = \lambda_1\mathscr{A}(\boldsymbol{x}_1) + \lambda_2\mathscr{A}(\boldsymbol{x}_2)$. 于是, 从一个 $m\times n$ 矩阵出发, 我们就会得到一个从 n 维数组空间到 m 维数组空间的线性映射.

这反过来也是正确的, 即若 $\mathscr{A}: F^n \to F^m$ 是一个线性映射, 则存在一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, 使得 $\mathscr{A}$ 恰由公式 (†) 给出. 关于这一点, 请大家借用数组空间的基本向量组来验证. 于是, 数组空间之间的线性映射与矩阵就对应起来了.

接下来, 我们再引入一个新的矩阵 $\boldsymbol{B} = (b_{ij}) \in F^{n\times p}$, 于是它对应于某个线性映射

$$\mathscr{B}: F^p \to F^n, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p b_{1k}y_k \\ \sum_{k=1}^p b_{2k}y_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^p b_{nk}y_k \end{pmatrix}.$$

然后, 我们再来看复合映射

$$\mathscr{C} \coloneqq \mathscr{A}\circ\mathscr{B}: F^p \to F^n \to F^m.$$

容易验证, $\mathscr{C}$ 仍然是一个线性映射, 从而存在矩阵 $\boldsymbol{C} = (c_{ij}) \in F^{m\times p}$ 使得

$$\mathscr{C}: F^p \to F^m, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p c_{1k}y_k \\ \sum_{k=1}^p c_{2k}y_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^p c_{mk}y_k \end{pmatrix}.$$

可以直接验证

$$c_{ij} = \sum_{k=1} a_{ik}b_{kj}.$$

换言之, $\boldsymbol{C}$ 就是我们之前引入的矩阵乘法 $\boldsymbol{AB}$.

线性映射是线性代数这门课程里最重要的研究对象之一，而映射的复合是自然定义的，不需要加什么额外的条件. 在处理线性映射的复合时，我们将其视作线性映射的"乘法". 基于线性映射与矩阵的对应关系，我们将上面引入的 $\boldsymbol{C}$ 称作 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘法，记作 $\boldsymbol{AB}$. 这意味着，我们考虑如此"复杂"的矩阵的乘积，是因为线性映射的复合迫使我们不得不这么处理.

习题 4.2.14. 计算

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix},$$

并给出一个所得矩阵为零矩阵的充要条件.

例 4.2.15. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_m)$, $\boldsymbol{C} = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)$. 由学生来计算 教材例题 4.2.4

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} b_1a_{11} & b_1a_{12} & \cdots & b_1a_{1n} \\ b_2a_{21} & b_2a_{22} & \cdots & b_2a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_ma_{m1} & b_ma_{m2} & \cdots & b_ma_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} a_{11}c_1 & a_{12}c_2 & \cdots & a_{1n}c_n \\ a_{21}c_2 & a_{22}c_2 & \cdots & a_{2n}c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}c_m & a_{m2}c_2 & \cdots & a_{mn}c_n \end{pmatrix}.$$

借用这个例子，希望学生能体会对于一个矩阵分别左乘和右乘一个特殊矩阵的意义.

矩阵的幂 按照矩阵的乘法规则，矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$ 能与自身相乘的充要条件是 $m = n$. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则它可以与自身反复相乘. 对于一个正整数 k, 我们自然地定义

$$\boldsymbol{A}^k := \underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{k\text{ 个}}.$$

我们也约定 $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}_n$ (n 阶单位矩阵). 更一般地，若有一个多项式

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_kx^k,$$

则我们定义**矩阵多项式**

$$f(\boldsymbol{A}) := c_0\boldsymbol{I} + c_1\boldsymbol{A} + c_2\boldsymbol{A}^2 + \cdots + c_k\boldsymbol{A}^k.$$

注 4.2.16. (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为给定的 n 阶方阵. 一般情况下，$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$. 但是若有 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 则可以验证，对于任意的非负整数 k 皆有 $(\boldsymbol{AB})^k = (\boldsymbol{BA})^k = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

(2) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是多项式, $\boldsymbol{A}$ 为方阵, 则

$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})=\underbrace{fg}_{\text{乘积多项式}}(\boldsymbol{A}).$$

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵, 并满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则有二项式展开公式

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n=\boldsymbol{A}^n+C_n^1\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}+C_n^2\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{B}^2+\cdots+C_n^{n-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{n-1}+\boldsymbol{B}^n.$$

这儿的组合数 C_n^i 为熟知的二项式展开的系数.

例 4.2.17. 求 *Fibonacci* 数列 $F_1=F_2=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ $(n\geq 3)$ 的通项公式. 教材例题 4.2.6

解. **(解法一)** 解相应的特征方程 $x^2=x+1$ (一般地, 若线性递推数列为 $x_n=bx_{n-1}+cx_{n-2}$, 则相应的特征方程为 $x^2=bx+c$), 得到 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 令 $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 用归纳法可以证明这样一个事实: 若常数 k_1,k_2 满足 $F_1=k_1x_1+k_2x_2$ 以及 $F_2=k_1x_1^2+k_2x_2^2$, 则对任意的正整数 n 都有 $F_n=k_1x_1^n+k_2x_2^n$. 鉴于此, 我们解方程组

$$\begin{cases}F_n=k_1x_1^n+k_2x_2^n\\ F_1=F_2=1\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}k_1\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+k_2\cdot\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=1\\ k_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+k_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=1\end{cases}}\Rightarrow\begin{cases}k_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\ k_2=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

学生课前解该方程

故 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

(解法二) 考虑辅助方程组

$$\begin{cases}F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\\ F_{n-1}=F_{n-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}F_n\\ F_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{n-1}\\ F_{n-2}\end{pmatrix}\quad(n\geq 3).$$

反复利用上面的公式 (或者说用归纳法), 我们可以得到

$$\begin{pmatrix}F_n\\ F_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}F_2\\ F_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

从而

$$F_n=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_n\\ F_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

于是, 问题归结到求解矩阵的幂 $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{n-2}$. 在教材第六章中, 我们会利用矩阵的特征值将该矩阵设法相似对角化, 化为对角阵的幂来求解. 而解法一中出现的 x_1 和 x_2

就是该矩阵的特征值. 更一般地, 我们可以看出, **线性递推数列** $x_{n+2} = ax_{n-1} + bx_n$ 的通项公式为 $x_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$. □ 上课不讲

注 4.2.18. 对于矩阵方幂的求解, 除了上面提到的利用相似对角化的方法外, 通常还可以

(1) 借用 *Caylay–Hamilton* 定理 (也要涉及到矩阵的特征值问题);

(2) 对于一些特殊的矩阵作专门的分解, 再利用其特殊结构来计算;

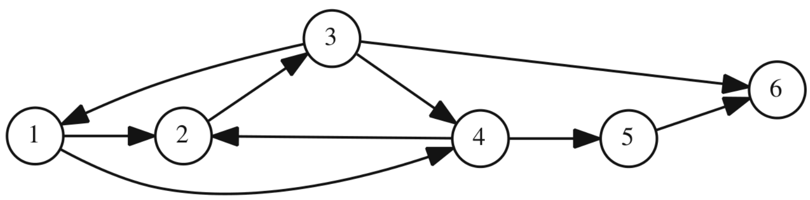
(3) 对于一些特殊地矩阵先进行初步地计算总结规律, 再利用归纳法.

注 4.2.19. 用类似的方法, 我们可以求连分数 上课不讲

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

的展开分数. 为此, 我们设 $\dfrac{p_k}{q_k} = [a_k, a_{k+1}, \dots, a_n]$. 由此, 我们得到 $\dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \dfrac{a_{k-1}p_k + q_k}{p_k}$. 于是, 可以列出矩阵等式 $\begin{pmatrix} p_{k-1} \\ q_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}$. 用归纳法不难得到, $\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 若能借此求出具体的 p_0 与 q_0, 那我们也就求出了具体的连分数的值了.

习题 4.2.20. 设 G 是一个如图所示的**定向图** (*digraph*):



它有 6 个顶点, 分别标记为 1, 2, 3, 4, 5 和 6. 同时, 它有 9 条定向边 (*directed edge*):

$$\{(1,2), (2,3), (3,4), (4,2), (1,4), (3,1), (3,6), (4,5), (5,6)\}.$$

这意味着, 比如说, 在这个定向图中, 我们允许动点通过一步从点 1 走到点 2, 但是不允许其从点 2 通过一步走到点 1. 当然, 它可以通过 $2 \to 3 \to 1$ 的方式, 通过两步走过来. 我们可以引入这个定向图的邻接矩阵 (*adjacency matrix*), $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{6\times 6}$, 其中, 若点 i 有到点 j 的定向边, 则令 $a_{ij} = 1$; 若否, 则令 $a_{ij} = 0$. 因此, 我们的 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 求出 $\boldsymbol{A}^3$ (手动计算或者用你最熟悉的软件), 并解释 $\boldsymbol{A}^3$ 中的各个元素的图论的意义.

例 4.2.21. 对于矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, 计算 $\boldsymbol{A}^m$, 其中 m 为正整数.

解. **(解法一)** 我们观察到

$$\boldsymbol{A} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: a\boldsymbol{I} + b\boldsymbol{J},$$

其中 $\boldsymbol{IJ} = \boldsymbol{JI}$ (乘法可交换), 且 $\boldsymbol{J}^2 = \boldsymbol{O}$. 此时, 利用二项式公式, 我们有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^m = (a\boldsymbol{I} + b\boldsymbol{J})^m &= \sum_{k=0}^{m} C_m^k (a\boldsymbol{I})^k (b\boldsymbol{J})^{m-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^k b^{m-k} \boldsymbol{I}^k \boldsymbol{J}^{m-k} = a^m \boldsymbol{I} + C_m^1 a^{m-1} b\boldsymbol{J} \\ &= \begin{pmatrix} a^m & ma^{m-1}b \\ 0 & a^m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(解法二) 直接计算有

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix},$$

于是猜测并用归纳法可证 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a^m & ma^{m-1}b \\ 0 & a^m \end{pmatrix}$. □

例 4.2.22. 对于矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, 计算 $\boldsymbol{A}^m$, 其中 m 为正整数.

在这儿, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$. $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的高阶方幂都很好求, 可是一般而言, $\boldsymbol{BC} \neq \boldsymbol{CB}$, 故无法利用二项式展开的公式来求解.

解. 直接计算, 有

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & (a+c)b \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & (a^2+ac+c^2)b \\ 0 & c^3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^4 = \begin{pmatrix} a^4 & (a^3+a^2c+ac^2+c^3)b \\ 0 & c^4 \end{pmatrix}.$$

因此, 可以猜测并通过归纳法来证明

$$\boldsymbol{A}^m = \begin{pmatrix} a^m & (a^{m-1}+a^{m-2}c+a^{m-3}c^2+\cdots+ac^{m-2}+c^{m-1})b \\ 0 & c^m \end{pmatrix}.$$

□

例 4.2.23. 求与 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 乘法可交换的所有矩阵.

解. 设 $\boldsymbol{X}$ 是满足条件的矩阵, 则它必为一个 3 阶方阵. 若设 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J}$, 于是 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XA} \Leftrightarrow \boldsymbol{JX} = \boldsymbol{XJ}$. 设 $\boldsymbol{X} = (x_{ij})_{3\times 3}$, 直接计算可得

$$\boldsymbol{JX} = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{XJ} = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{21} & x_{22} \\ 0 & x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}.$$

于是前面的矩阵方程等价于

$$x_{21} = x_{31} = x_{32} = 0, \qquad x_{11} = x_{22} = x_{33}, \qquad x_{23} = x_{12}.$$

这说明所求的矩阵的一般形式为

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 & x_{11} \end{pmatrix} = x_{11}\boldsymbol{I} + x_{12}\boldsymbol{J} + x_{13}\boldsymbol{J}^2,$$

其中 $x_{11}, x_{12}, x_{13} \in F$ 任意. □

习题 4.2.24. 计算

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

的幂 J^t $(t \geq 1)$, 并找出与 J 乘法可交换的所有矩阵.

逆矩阵 先回顾一下, 对一个实数 a, 如果存在一个数 b 使得 $ab = 1$, 则称 a 关于乘法有逆元 (倒数). 任何非零的实数 a 都存在唯一的一个逆元 $b = \frac{1}{a}$. 我们可以将这个概念推广到一般方阵的逆.

类似地, 设矩阵 $A \in F^{n\times n}$, 如果存在 $B \in F^{n\times n}$ 使得 $BA = AB = I_n$, 则称 A 是**可逆的**或**非奇异的**. 满足条件的矩阵 B 称为 A (在 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 中) 的**逆矩阵**.

注意一下, 1 在实数乘法里为单位元, 即对任意的实数 a 皆有 $1 \cdot a = a$. 而在矩阵乘法里, 对任意的方阵 A, 皆有 $IA = A = AI$. 因此, 在涉及到矩阵乘法时, 我们经常将单位方阵 I 类比于实数乘法中的 1.

注 4.2.25. (1) 对于 n 阶方阵 A, 它的逆矩阵若存在必唯一, 即, A 至多有一个逆矩阵. 为了看到这一点, 假设 B 和 C 都是 A 的逆矩阵. 此时,

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

因此, 在 A 的逆矩阵存在的条件下, 我们将该逆矩阵记作 A^{-1}. 此时, 若 b 为 n 维列向量, 则方程组 $Ax = b$ 有唯一的解 $x = A^{-1}b$.

(2) 若 B 是 A 的逆矩阵, 则 A 也是 B 的逆矩阵. 因此, 我们可以称 A 与 B 互为逆矩阵. 用公式表示有 $(A^{-1})^{-1} = A$.

(3) 在之后利用行列式的方法我们可以验证, 若同阶方阵 A 和 B 满足 $AB = I$, 则必有 $BA = I$, 从而 A 和 B 互为逆矩阵.

(4) 并不是所有的方阵都存在逆矩阵的. 显然, 零矩阵 O_n 不存在逆矩阵. 由于

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

而该等式右边的方阵永远都不可能成为单位矩阵 I_2, 因此 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 也不是可逆的.

(5) 当然, 可逆矩阵是存在的, $\boldsymbol{I}_n$ 就是可逆矩阵. 可以直接验算, $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}7 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ 互为逆矩阵. 一般情形下, 如何求解形如 $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}$ 的方阵的逆矩阵? 由定义, 假定其逆矩阵存在, 可以设为 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. 于是有矩阵方程

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

这等价于同时解两个线性方程组

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \qquad \text{和} \qquad \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

之前提到, 可以对各自的增广矩阵利用 *Gauss* 消元法来分别求解:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 1\\ 2 & 7 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{-2r_1\to r_2} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{array}\right) \xrightarrow{-3r_2\to r_1} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & -2\end{array}\right),$$

和

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{-2r_1\to r_2} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{-3r_2\to r_1} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right).$$

Gauss 消元法的重点在于对其系数矩阵化简成 (约化) 标准形. 显然, 这两个方程组的系数矩阵一致, 因此我们采取了相同的化简策略. 但是我们显然没有必要进行重复的操作, 它们可以同时进行:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 7 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{-2r_1\to r_2} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{-3r_2\to r_1} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 7 & -3\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right)$$

由解方程组的意义知所求的逆矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

这样的方法是求解可逆矩阵的逆矩阵的标准方法, 之后会重新讨论的.

习题 4.2.26. (1) 假定 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix}5 & -2 & 3\\ -1 & 1 & -6\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{B}$ 的第三列.

(2) 已知 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}10 & -7\\ 4 & -4\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}$ 的第一行.

用定义, 我们可以很容易地证得以下结果.

定理 4.2.27. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为同阶的可逆矩阵, 则以下三条成立: 教材定理 4.2.3

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;

(2) 若 $\lambda\neq 0$, 则 $\lambda\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(3) 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$. (形象的说法是, 脱鞋的逆是穿鞋, 脱袜子的逆是穿袜子. 我们睡觉前是先脱鞋再脱袜子, 起床时是先穿袜子再穿鞋.)

推论 4.2.28. (1) 设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\ldots,\boldsymbol{A}_k$ 是同阶的可逆矩阵, 则

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{A}_k)^{-1}=\boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{A}_{k-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵. 若 k 为正整数, 则 $(\boldsymbol{A}^k)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^k$; 我们将该矩阵记作 $\boldsymbol{A}^{-k}$. 此时, 若 m,n 为整数, 则 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{m+n}$.

注 4.2.29. 作为定理 4.2.27 (3) 的逆命题, 我们有: 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{AB}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^{-1})=(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{I}$, 这说明 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 并且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})$ 也可逆.