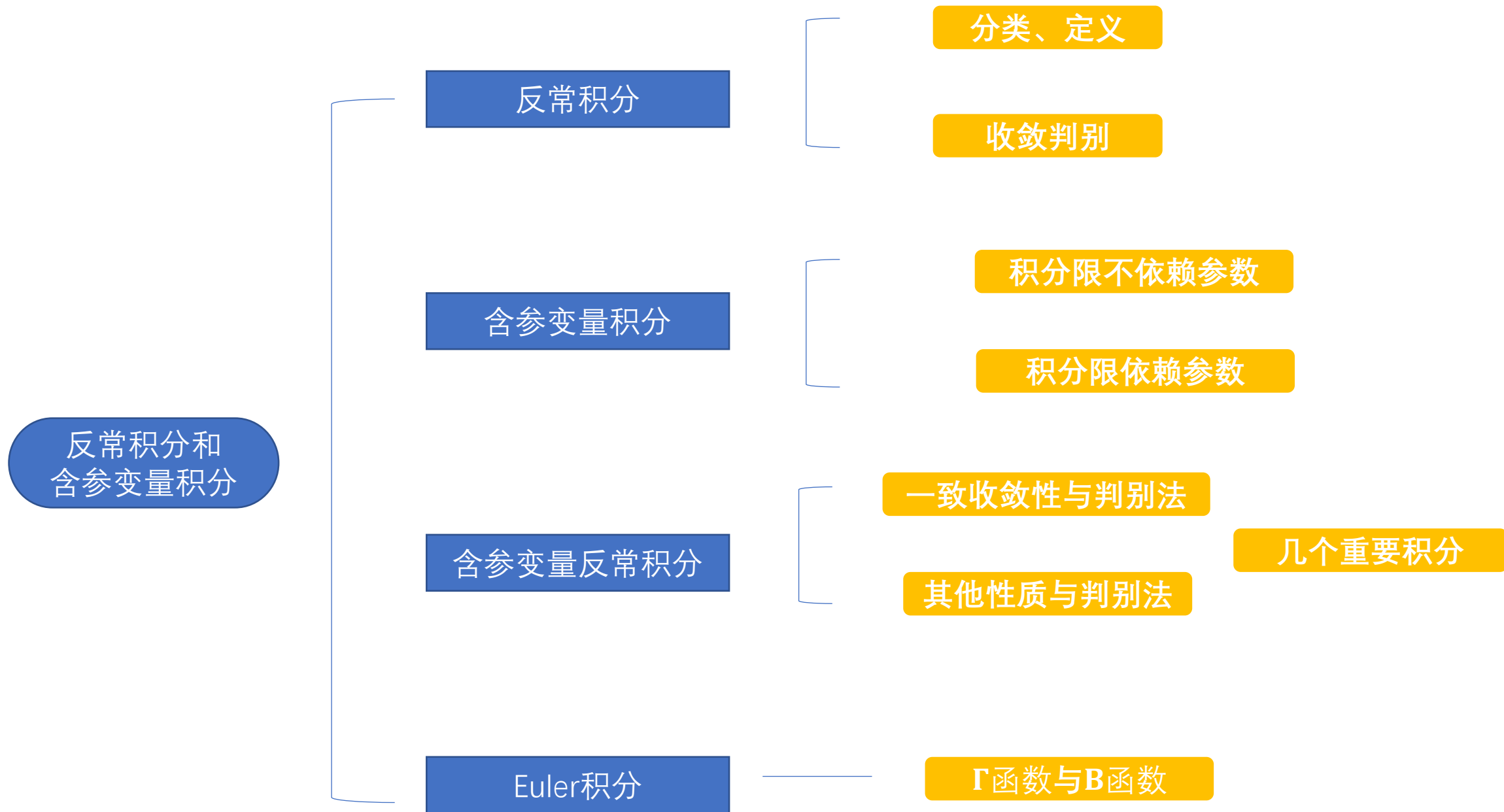


# 反常积分和含参变量积分

彭辉阳

2023.6.28



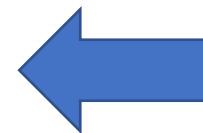
# 反常积分定义

1. 正常积分：有界区域、有界函数；反之有一个不成立则为反常积分。
2. 无穷限反常积分：积分区域无界。
3. 瑕积分：被积函数无界。
4. 以上两条都成立时，称为**混合反常积分**。

5. **混合反常积分**：通常被分为两部分处理，如：

$\int_0^{\infty} f(x)dx, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ，通常处理为：

$$\int_0^a f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$



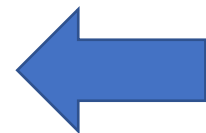
# 收敛判别

条件收敛、绝对收敛

反常积分与无穷级数的平行理论：

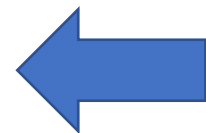
- (1)定义：  $\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ conv.} \Leftrightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx \text{ conv.}$
- (2)非负连续函数积分：  $\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ conv.} \Leftrightarrow$  部分和  $\int_a^b f(x)dx$  有上界
- (3)比较判别法：  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ,  $\int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ conv.}$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ conv.}$
- (4)极限形式的比较判别法：  $f(x) \geq 0, g(x) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A_0$ , 则：
  - $0 < A_0 < +\infty$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  与  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  同敛散
  - $A_0 = 0$ ,  $\int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ conv.}$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ conv.}$
  - $A_0 = +\infty$ ,  $\int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ div.}$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ div.}$

- **Cauchy收敛准则:**  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists A_0 > a, s.t.$  只要  $A', A'' > A_0$ , 就有  $\left| \int_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \epsilon$
- **Dirichlet判别法:**  $\int_a^b f(x)dx, \forall b > a$  有界,  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  单调趋于零, 则  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  conv.
- **Abel判别法:**  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛,  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调有界, 则  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$  conv.
- **P积分:** (常结合[极限形式]比较判别法)
- $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} (a > 0)$  当  $p > 1$  conv,  $p \leq 1$  div
- $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} (b > a)$  当  $p < 1$  conv,  $p \geq 1$  div



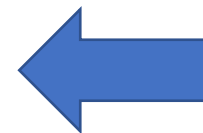
# 含参变量积分(积分限中无参数)

- **连续性**(极限与积分可交换):  $f(x, u)$  在  $[a, b] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 则  $\varphi(u) = \int_a^b f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续。
- **积分次序可交换**:  $f(x, u)$  在  $[a, b] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 则  $\varphi(u) = \int_a^b f(x, u) dx$  满足: 
$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \int_a^b f(x, u) dx \right] du = \int_a^b \left[ \int_{\alpha}^{\beta} f(x, u) du \right] dx$$
- **可微性**(极限与求导可交换):  $f(x, u)$  在  $[a, b] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 且对  $u$  有连续的偏微商, 则  $\varphi(u) = \int_a^b f(x, u) dx$  可微, 且  $\varphi'(u) = \frac{\partial}{\partial u} \int_a^b f(x, u) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx$



# 含参变量积分(积分限中有参数)

- **连续性**(极限与积分可交换):  $f(x, u)$  在  $[a, b] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 函数  $a(u)$ 、 $b(u)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续, 且  $a(u)$ 、 $b(u) \in [a, b]$ , 则  $\psi(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续。
- **可微性(Leibniz公式)**:  $f(x, u)$  在  $[a, b] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 且对  $u$  有连续的偏微商, 函数  $a(u)$ 、 $b(u)$  在  $[\alpha, \beta]$  上可微, 且  $a(u)$ 、 $b(u) \in [a, b]$ , 则  $\psi(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(x, u) dx$  可微, 且  $\psi'(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx + f(b(u), u)b'(u) - f(a(u), u)a'(u)$



# 含参变量反常积分的一致收敛性

- 定义:

- 收敛:  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  收敛  $\Leftrightarrow \forall u, \forall \epsilon, \exists X, A > X$  时有  $\left| \int_A^{+\infty} f(x, u) dx \right| < \epsilon$

- 一致收敛:  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  一致收敛  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X, A > X$  时,  
 $\forall u, \left| \int_A^{+\infty} f(x, u) dx \right| < \epsilon$

- 一致收敛的另一种写法:  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  一致收敛  $\Leftrightarrow \lim_{A \rightarrow +\infty} \beta(A) = 0$ ,  
其中  $\beta(A) = \sup_{u \in [\alpha, \beta]} \left| \int_A^{+\infty} f(x, u) dx \right|$



# 含参变量反常积分的一致收敛性

- **Cauchy收敛准则:**  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 一致收敛  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X, s. t. A', A'' > X$  时, 有  $\left| \int_{A'}^{A''} f(x, u) dx \right| < \epsilon$
- **Weierstrass:**  $p(x)$  在  $[a, +\infty)$  上可积, 且  $|f(x, u)| \leq |p(x)|$  对于  $\forall u$  以及充分大的  $x$  成立, 则  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  一致收敛

# 含参变量反常积分的一致收敛性

- **Dirichlet:**  $f(x, u), g(x, u)$  对  $\forall u$  在任意有限  $[a, b]$  上可积, 且:
  1.  $\int_a^b f(x, u) dx \leq M, \forall b \geq a, u$  (一致有界)
  2.  $g(x, u)$  关于  $x$  单调, 且  $x \rightarrow +\infty$  时一致收敛到 0
  3. 则  $\int_a^{+\infty} f(x, u)g(x, u)dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛。
- **Abel:**  $f(x, u), g(x, u)$  对  $\forall u$  在任意有限  $[a, b]$  上可积, 且:
  1.  $\int_a^{+\infty} f(x, u)dx$  关于  $u$  一致收敛
  2.  $g(x, u)$  关于  $x$  单调, 且关于  $u$  一直有界则  $\int_a^{+\infty} f(x, u)g(x, u)dx$  在  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛。



# 含参变量反常积分的其他分析性质

- **连续性**:  $f(x, u)$  在  $[a, +\infty] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 且积分  $\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  关于  $u$  一致收敛, 则  $\varphi(u)$  连续。

- **可微性**:  $f(x, u)$  满足:

1.  $f(x, u)$  和  $\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}$  在  $[a, +\infty] \times [\alpha, \beta]$  上连续

2.  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  在  $[\alpha, \beta]$  收敛

3.  $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx$  在  $[\alpha, \beta]$  一致收敛

则  $\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  可微, 且  $\varphi'(u) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} dx$

# 含参变量反常积分的其他分析性质

- **积分次序可交换**:  $f(x, u)$  在  $[a, +\infty] \times [\alpha, \beta]$  上连续, 且积分  $\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  关于  $u$  一致收敛, 则

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right] du = \int_a^{+\infty} \left[ \int_{\alpha}^{\beta} f(x, u) du \right] dx$$

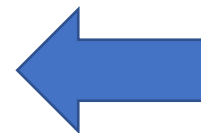
- **无穷区间积分次序可交换**(不重要, 实分析里会讲这个):  $f(x, u)$ :

1.  $f(x, u)$  在  $[a, +\infty] \times [\alpha, +\infty]$  上连续

2.  $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$  在任何有限区间  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛,  $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x, u) du$  在任何有限区间  $[a, b]$  上一致收敛

3.  $\int_{\alpha}^{+\infty} \left[ \int_a^{+\infty} |f(x, u)| dx \right] du, \int_a^{+\infty} \left[ \int_{\alpha}^{+\infty} |f(x, u)| du \right] dx$  至少有一个存在, 则:

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \left[ \int_a^{+\infty} f(x, u) dx \right] du = \int_a^{+\infty} \left[ \int_{\alpha}^{+\infty} f(x, u) du \right] dx$$



# 重要积分（会算、记住结果）

- **Dirichlet积分**:  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} (I(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ux} \left( \frac{\sin x}{x} \right) dx)$

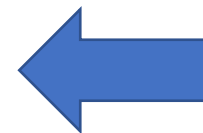
- **Laplace积分**:

- $I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta}$

- $J(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}$

- **Fresnel积分**: (比较复杂, P329)

- $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$



# $\Gamma$ 函数与B函数

- 定义:
- $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$
- $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$
- 连续性、可微性、对称性( $B(p, q) = B(q, p)$ )

# $\Gamma$ 函数与B函数

- **$\Gamma$ 递推**:  $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s), s = n$ 时 $\Gamma(n + 1) = n!$
- **余元公式**:  $\Gamma(s)\Gamma(1 - s) = \frac{\pi}{\sin s\pi}$
- **B与 $\Gamma$ 的联系**:  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
- **加倍公式/Legendre公式**:  $\Gamma(2p) = \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(p)\Gamma(p + \frac{1}{2})$

# 划重点

- Ex13.1 1（这一题12小题全都能用**比较判别法**，看几题就行了），4（Cauchy，类比无穷级数），例13.1.3（Dirichlet）
- Ex13.2 反常多重积分不是考点，但是第1题也可以看一下
- Ex13.3 **2**（含参变量积分求导），4(1)(2)（对参数求导算积分），例13.3.1（主动引入参数）
- Ex13.4 6（Weierstrass），例13.4.3，例13.4.4（Dirichlet, Abel），7（主动拆二重积分），8（特殊积分的应用）
- Ex13.5 **3**（把各种形式积分转变为 $\Gamma, B$ 的形式），5（应用）