第12讲：多元函数微分学习题课(Ⅲ)　2023.3.31.

(一) 设(r_0,θ_0,φ_0)为点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的球坐标，证明：三个球坐标曲面$\Sigma_1: r=r_0$；$\Sigma_2: \theta=\theta_0$；$\Sigma_3: \varphi=\varphi_0$在$M_0$处两两正交且三条球坐标曲线$\Gamma_1: \begin{cases}\Sigma_1\\ \Sigma_2\end{cases}$；$\Gamma_2: \begin{cases}\Sigma_1\\ \Sigma_3\end{cases}$；$\Gamma_3: \begin{cases}\Sigma_2\\ \Sigma_3\end{cases}$在$M_0$处也两两正交。(注：$\Sigma_1$是半径为$r_0$的球面；$\theta=\theta_0$即$\Sigma_2$是顶点在$O(0,0,0)$的圆锥面；$\Sigma_3$是半平面且此半平面与$xOz$坐标面的二面角为$\varphi_0$)

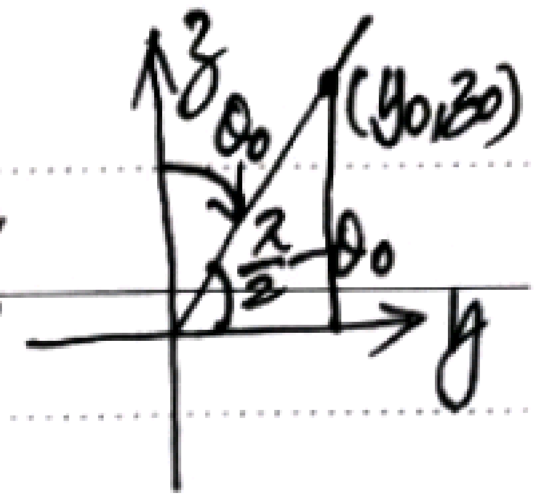
(二) 设(r_0,θ_0,z_0)是点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的柱坐标，证明：三个柱坐标曲面$\Sigma_1: r=r_0$；$\Sigma_2: \theta=\theta_0$；$\Sigma_3: z=z_0$在$M_0$处两两正交且三条柱坐标曲线$\Gamma_1: \begin{cases}\Sigma_1\\ \Sigma_2\end{cases}$；$\Gamma_2: \begin{cases}\Sigma_1\\ \Sigma_3\end{cases}$；$\Gamma_3: \begin{cases}\Sigma_2\\ \Sigma_3\end{cases}$在$M_0$处也两两正交。

(三)，ex9.5/5；7/(4)，(5)；16；20；ch9综/13；16.

(四)、作业：ex9.5/5；7/(4)，~~(5)~~；16；20；21；ch9综/10；13；16.

证(一)/(1) ∵Σ_1的方程为$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r_0$(常数)$\Longrightarrow \Sigma_1$的方程为：
$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-r_0^2=0$，$\Sigma_1$在$M_0$处的法向量$\vec{n}_1(M_0)=(F_x,F_y,F_z)\big|_{M_0}$
$=\nabla F(M_0)=(2x_0,2y_0,2z_0)$

$\Sigma_2: \theta=\theta_0 \Rightarrow \frac{z}{y}=\tan(\frac{\pi}{2}-\theta_0)=\cot\theta_0 \triangleq k_1 \Rightarrow$ 直线

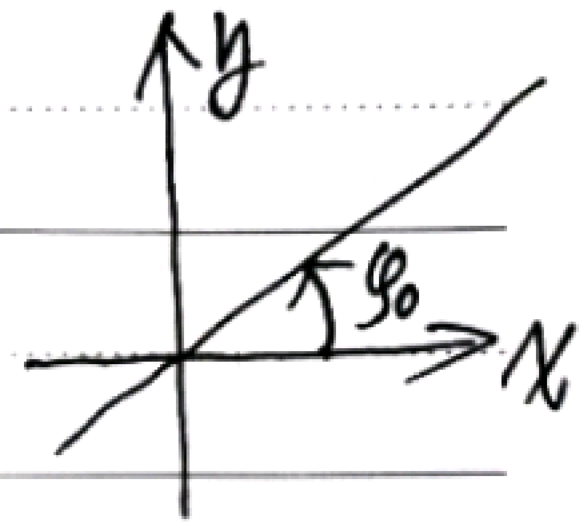


$z=k_1y$ 绕z轴旋转一周的圆锥面是Σ_2:

$z=k_1(\pm\sqrt{y^2+x^2}) \Rightarrow \Sigma_2: \underbrace{k_1^2x^2+k_1^2y^2-z^2}_{\triangleq E(x,y,z)}=0$. Σ_2在M_0处的法

向量$\vec{n_2}(M_0)=\nabla E|_{M_0}=(2k_1^2x_0, 2k_1^2y_0, -2z_0)$

$\Sigma_3: \varphi=\varphi_0 \Rightarrow \frac{y}{x}=\tan\varphi_0 \triangleq k_2$, 半平面$\Sigma_3$:



$k_2x-y=0$, Σ_3在M_0处的法向量$\vec{n_3}(M_0)=(k_2,-1,0)$

另外, $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$都过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$. $\therefore \begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=r_0^2 \\ k_1^2x_0^2+k_1^2y_0^2-z_0^2=0 \\ k_2x_0-y_0=0 \end{cases}$

从$\vec{n_1}(M_0)\cdot\vec{n_2}(M_0)=(2x_0,2y_0,2z_0)\cdot(2k_1^2x_0, 2k_1^2y_0, -2z_0)=4(k_1^2x_0^2+k_1^2y_0^2-z_0^2)$

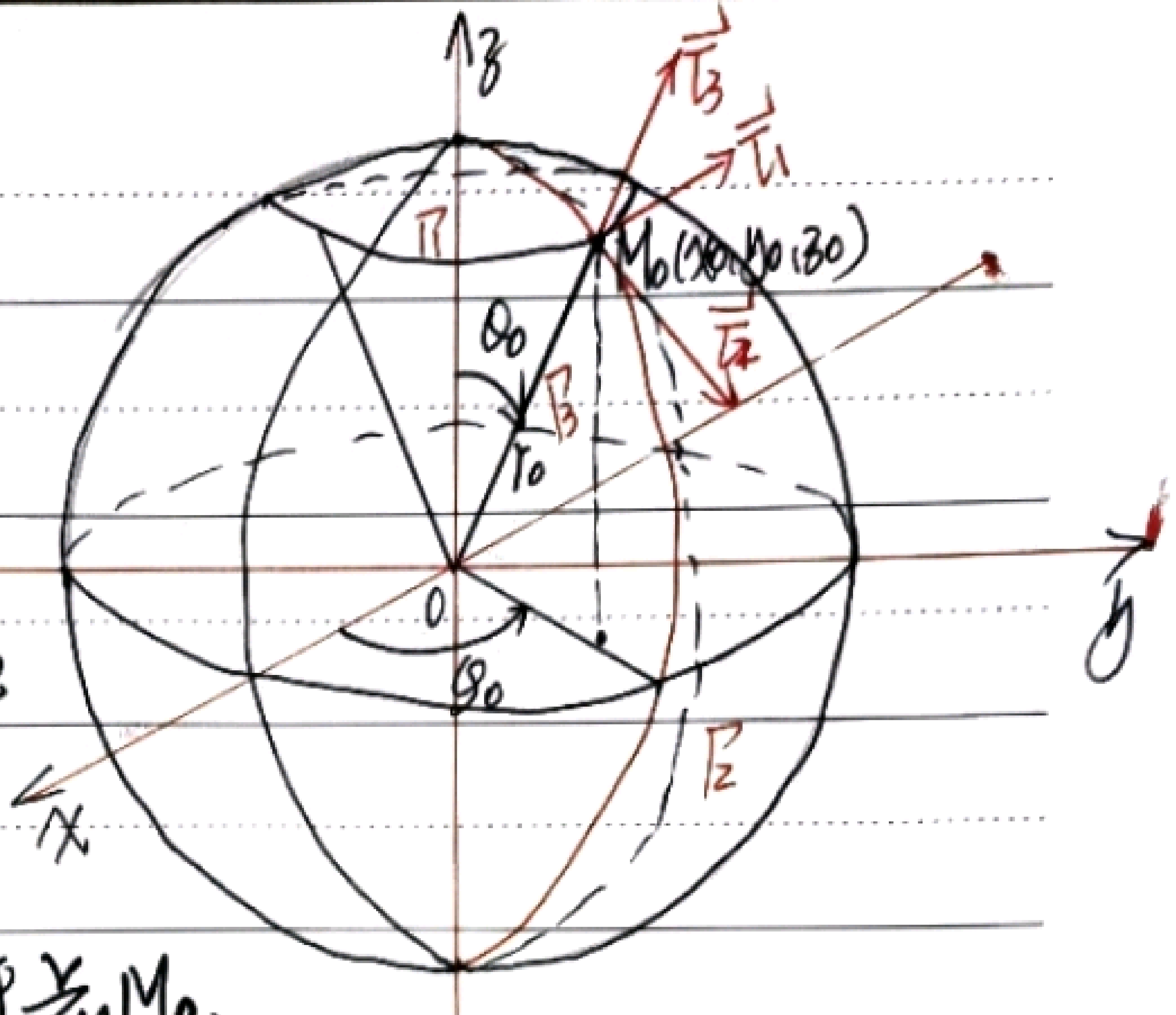
$=4\times0=0 \Rightarrow \vec{n_1}(M_0)\perp\vec{n_2}(M_0)$; 从$\vec{n_1}(M_0)\cdot\vec{n_3}(M_0)=(2x_0,2y_0,2z_0)\cdot(k_2,-1,0)$

$=2(k_2x_0-y_0)=2\times0=0 \Rightarrow \vec{n_1}(M_0)\perp\vec{n_3}(M_0)$; 从$\vec{n_2}(M_0)\cdot\vec{n_3}(M_0)=2k_1^2\times0=0$

$\Rightarrow \vec{n_2}(M_0)\perp\vec{n_3}(M_0)$, 故$\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$正交于点$M_0$处.

证(一)(2), 设曲线$\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$的切向量为$\vec{\tau_1},\vec{\tau_2},\vec{\tau_3}$, 则

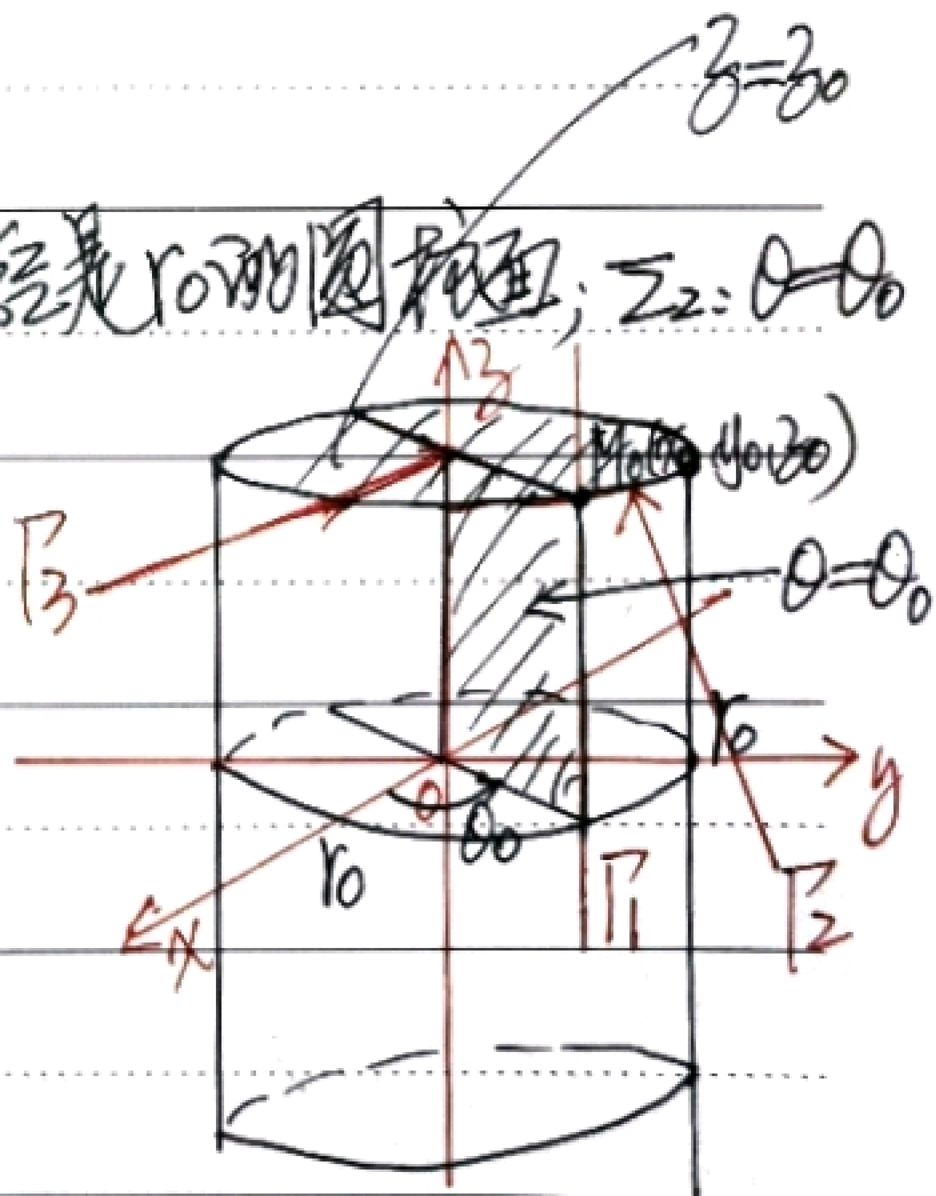
$\vec{\tau_1}=\vec{n_2}(M_0)$, $\vec{\tau_2}=\vec{n_2}(M_0)$, $\vec{\tau_3}=\vec{n_1}(M_0)$. $\therefore \vec{\tau_1}\perp\vec{\tau_2}\perp\vec{\tau_3} \Leftrightarrow \Gamma_1\perp\Gamma_2\perp\Gamma_3$.



Σ_1：半径为 r_0 的球面：$x^2+y^2+z^2=r_0^2$

Σ_2：与 Oz 轴正向夹角为 θ_0 的圆锥面；Σ_3 是与 xOz 平面形成二面角为 φ_0 的半平面．$\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$ 正交于点 M_0，

$\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ 这三条球形坐标曲线也正交于 M_0．Γ_1 是圆周，Γ_2 是半圆周，Γ_3 是射线．



同理可论(三)．其中 Σ_1：$r=r_0$ 为半径是 r_0 的圆柱面；Σ_2：$\theta=\theta_0$ 是半平面；而 Σ_3：$z=z_0$ 为水平面

而 Γ_1,Γ_3 都是直线，Γ_2 是圆周．

补 ex9.5/5：$z=z(x,y)$ 由方程：

$z^3-2xz+y=0$ 所确定且 $z(1,1)=1$，而 $z(x,y)$ 在 $M_0(1,1)$ 的二阶 Taylor 式为：$z(x,y)=z(1,1)+(x-1)z_x'(1,1)+(y-1)z_y'(1,1)+\frac{1}{2}[z''_{xx}(1,1)(x-1)^2+2(x-1)(y-1)z''_{xy}(1,1)+z''_{yy}(1,1)(y-1)^2]+o(\rho^2)$

而方程 $z^3-2xz+y=0$ 两边对 x, y 分别求偏导:

$$\begin{cases} 3z^2 z'_x - 2z - 2x z'_x = 0 \\ 3z^2 z'_y - 2x z'_y + 1 = 0 \end{cases} \quad (※1). \text{以} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \text{代入得} \begin{cases} z'_x(1,1)=2 \\ z'_y(1,1)=-1 \end{cases}$$

(※1) 两边对 x, y 再分别求偏导:

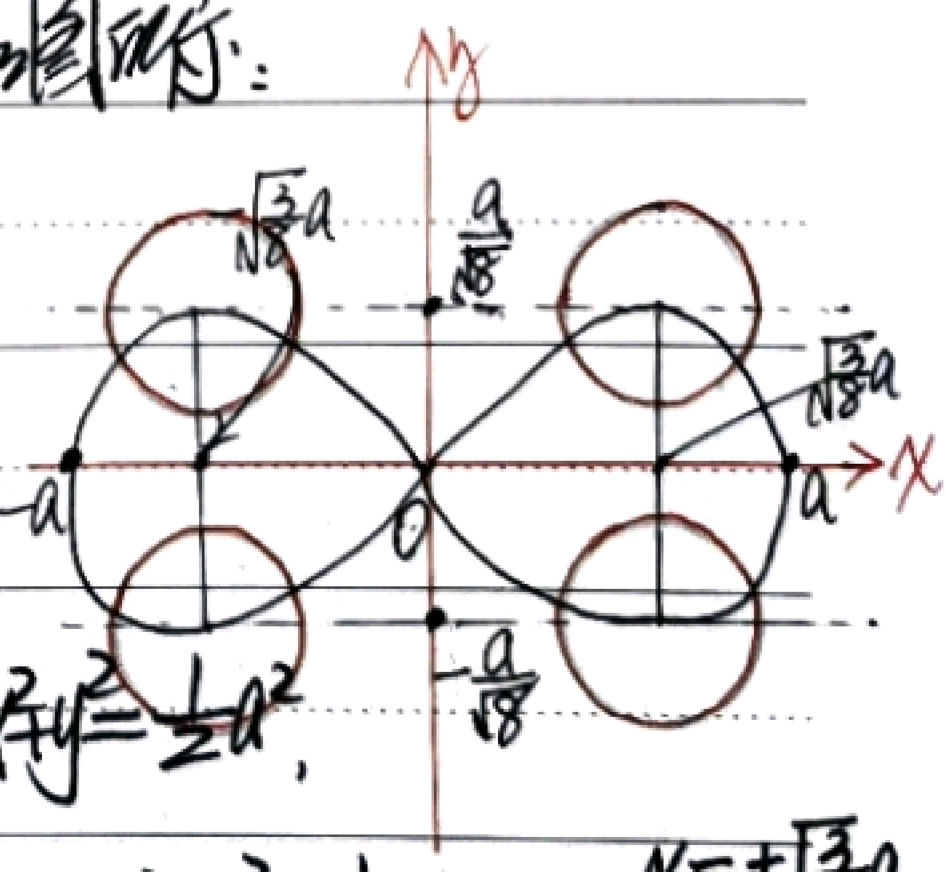
$$\begin{cases} 3\times 2z(z'_x)^2 + 3z^2 z''_{xx} - 2z'_x - 2z'_x - 2x z''_{xx} = 0 \\ 6z z'_y z'_x + 3z^2 z''_{xy} - 2z'_y - 2x z''_{xy} = 0 \\ 6z(z'_y)^2 + 3z^2 z''_{yy} - 2x z''_{yy} = 0 \end{cases} \quad \text{以} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \\ z'_x(1,1)=2 \\ z'_y(1,1)=-1 \end{cases} \text{代入}$$

得 $z''_{xx}(1,1)=16$, $z''_{xy}(1,1)=z''_{yx}(1,1)=10$, $z''_{yy}(1,1)=-6$.

故 $z(x,y)=1+2(x-1)-(y-1)+\frac{1}{2}[16(x-1)^2+2\times 10(x-1)(y-1)-6(y-1)^2]+o(\rho^2)$

第7(4) 令 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$. 则原方程化为 $\rho^2=a^2\cos2\theta$

作该曲线(称为伯努利双纽线)如图所示:



令 $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)$ 则

$$\begin{cases} F'_x=4x(x^2+y^2)-2a^2x \\ F'_y=4y(x^2+y^2)+2a^2y \end{cases} \quad \text{而 } y'(x)=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$=-\frac{4x(x^2+y^2)-2a^2x}{4y(x^2+y^2)+2a^2y}, \text{令 } y'(x)=0 \Rightarrow x^2+y^2=\frac{1}{2}a^2.$$

将 $x^2+y^2=\frac{1}{2}a^2$ 代入 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2) \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2}a^2 \\ x^2-y^2=\frac{1}{4}a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{\frac{3}{8}}a \\ y=\pm\frac{a}{\sqrt{8}} \end{cases}$.

在$(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}a, \frac{a}{\sqrt{8}})$附近，隐函数$y(x)$取极(最)大值$\frac{a}{\sqrt{8}}$；在$(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}a, \frac{-a}{\sqrt{8}})$附近，隐函数$y(x)$取极(最)小值$\frac{-a}{\sqrt{8}}=-\frac{a}{\sqrt{8}}$.

解 7(5) 方法(一) 配方法：$(z-2)^2=16-[(x-1)^2+(y+1)^2]\Rightarrow$

$z=2+\sqrt{16-[(x-1)^2+(y+1)^2]}$，$z=2-\sqrt{16-[(x-1)^2+(y+1)^2]}$

在点$M_1(1,-1,6)$附近，隐函数$z(x,y)$有极大值6；在点$M_2(1,1,-2)$附近，$z(x,y)$有极小值-2。

方法(二)：令$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10$ 则$\begin{cases}F'_x=2x-2\\F'_y=2y+2\\F'_z=2z-4\end{cases}$

$z'_x=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x-2}{2z-4}$，$z'_y=-\frac{2y+2}{2z-4}$

$z''_{xx}=-\frac{2(2z-4)-2z'_x(2x-2)}{(2z-4)^2}$，$z''_{xy}=+\frac{(2x-2)(2z'_y)}{(2z-4)^2}$，$z''_{yy}=-\frac{2(2z-4)-2z'_y(2y+2)}{(2z-4)^2}$

令$z'_x=0$，$z'_y=0$得驻点$M_0(1,-1)$，将$\begin{cases}x=1,\ z=6\\y=-1\\z'_x(1,-1)=0\\z'_y(1,-1)=0\end{cases}$代入$z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$

$\Rightarrow A=z''_{xx}(M_0)=-\frac{1}{4}$，$B=0$，$C=z''_{yy}(M_0)=-\frac{1}{4}$，$Hf(M_0)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & 0\\ 0 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}<0$

$\Rightarrow f(M_0)=z=6$为极大值；将$x=1, y=-1, z=-2, z'_x(1,-1)=0, z'_y(1,-1)=0$

代入$z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}\Rightarrow A=\frac{1}{4}=C$，$B=0$，$Hf(M_0)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}>0\Rightarrow$

$f(M_0)=z=-2$为极小值。

解 ex9.5/16. 设平行六面体 Ω 的三条棱对应向量 $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$.

且 $|\vec{x}|=x>0$, $|\vec{y}|=y>0$, $|\vec{z}|=z>0$. 则 Ω 的体积 $V(\Omega)=|(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z}|$

$=\left||\vec{x}\times\vec{y}|\,|\vec{z}|\cos(\widehat{\vec{x}\times\vec{y},\vec{z}})\right|\le|\vec{x}\times\vec{y}|\,z\cdot1=|\vec{x}||\vec{y}|\sin(\widehat{\vec{x},\vec{y}})\,z$

$\le x\cdot y\cdot z\cdot1\le\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$, 已知 $4(x+y+z)=12a\Rightarrow x+y+z=3a$

$\therefore V(\Omega)\le\left(\frac{3a}{3}\right)^3=a^3$, 等号当且仅当 $x=y=z=a$ 时成立.

即平行六面体为棱长为 a 的正方体时, 体积最大为 a^3。

解 ex9.5/20: 方法一: 过 Σ: $\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$ 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 作

切平面 $\pi_{切}$: $\frac{xx_0}{4}+yy_0+zz_0=1$ 使 $\pi_{切}$ // 已知平面 π: $x+y+2z=9$

则 $(\frac{x_0}{4},y_0,z_0)//(1,1,2)\Longrightarrow\frac{\frac{x_0}{4}}{1}=\frac{y_0}{1}=\frac{z_0}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_0=4y_0\\z_0=2y_0\end{cases}$

代入 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2+z_0^2=1\Rightarrow y_0=\pm\frac{1}{3}$, $x_0=\pm\frac{4}{3}$, $z_0=\pm\frac{2}{3}$.

Σ 上点 $M_1(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 到 π: $x+y+2z=9$ 的距离最近为 $\sqrt{6}$;

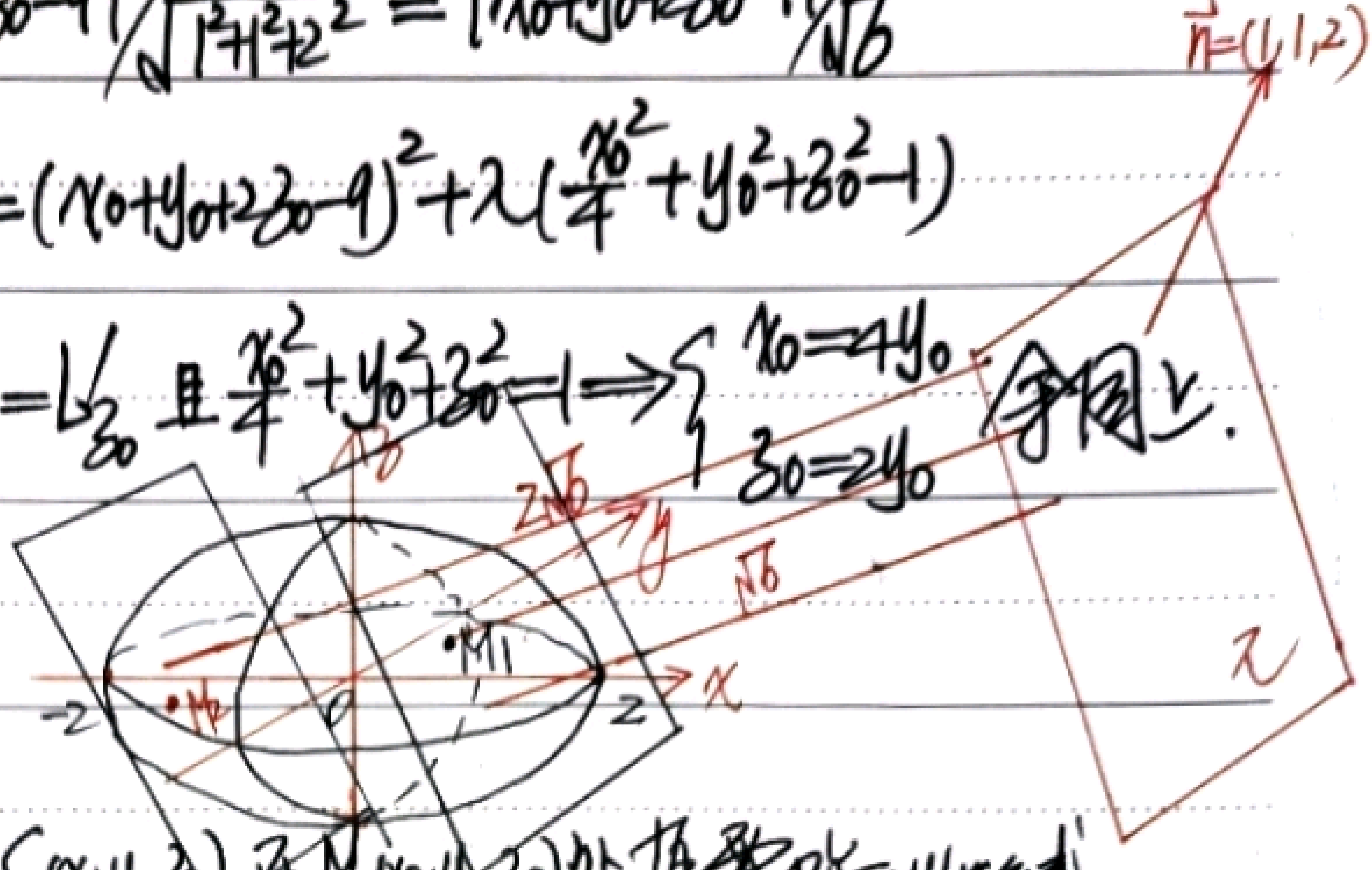
Σ 上点 $M_2(-\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$ 到 π 的距离最远为 $2\sqrt{6}$.

方法二: 条件极值法: 取 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$, 则 M_0 到 π 的距离

$$d=\frac{|x_0+y_0+2z_0-9|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{|x_0+y_0+2z_0-9|}{\sqrt{6}}$$

作 $L(x_0,y_0,z_0)=(x_0+y_0+2z_0-9)^2+\lambda\left(\frac{x_0^2}{4}+y_0^2+z_0^2-1\right)$

令 $L'_{x_0}=0=L'_{y_0}=L'_{z_0}$ 且 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2+z_0^2=1 \Longrightarrow \begin{cases} x_0=4y_0 \\ z_0=2y_0 \end{cases}$ 余同上.



例 ch9 综/13:

$\because f\in C^1(R^3)$ $\therefore f(x,y,z)$ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处有零阶 Taylor 公式:

$f(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)+(x-x_0)f'_x(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0),z_0+\theta(z-z_0))+(y-y_0)\cdot$

$f'_y(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0),z_0+\theta(z-z_0))+(z-z_0)f'_z(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0),z_0+\theta(z-z_0))$

取 $x_0=x+y+z$, $z_0=y_0=0$ 代入上式: (由 $\begin{cases} x-x_0=-y-z \\ y-y_0=y \\ z-z_0=z \end{cases}$)

$f(x,y,z)=f(x+y+z,0,0)+(-y-z)f'_x(x+y+z+\theta(-y-z),\theta y,\theta z)+yf'_y(x+y+z+\theta(-y-z),$

$\theta y,\theta z)+zf'_z(x+y+z+\theta(-y-z),\theta y,\theta z)\xlongequal{f'_x=f'_y=f'_z}f(x+y+z,0,0)+$

$(-y-z+y+z)f'_x(x+y+z+\theta(-y-z),\theta y,\theta z)=f(x+y+z,0,0)>0$ 得证。

记 ch9 综/16: 设 $a_1>0,a_2>0,\cdots,a_n>0$, 则

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\le RMS=\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}},\ \forall p>1.$$

(注: ch9 综/7,8,9,10 四题也可用多元函数的零阶 Taylor 公式法来证明)

证：设 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a$（常数）则 $\because$ 平均值不等式：

$$\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\sqrt[n]{a_1^p a_2^p\cdots a_n^p}\right)^{\frac{1}{p}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

且当且仅当 $a_1^p=a_2^p=\cdots=a_n^p$ 即 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n=\frac{a}{n}$

时成立，即 $\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}_{min}=\sqrt[n]{\frac{a}{n}\frac{a}{n}\cdots\frac{a}{n}}=\frac{a}{n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

即 $\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

故对任意 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 有：

$$H=\left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}\leq G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leq RMS=$$

$$\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}},\ \forall p>1.$$

称 $RMS=\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$ 为 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 的 p 次

均方根，$p=2$ 时，简称为均方根。

(四) 第16讲：二重积分的概念与性质（十大性质）

证ch9练/16：$a_i\geq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$，$p>1$，证明：

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leq\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$$

证：(1°) 当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ 时，结论显然成立；(2°) 当 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2>0$ 时，

令 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a$，则 $a>0$. 设目标函数为 $f(a_1,a_2,\cdots a_n)=\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}$

且约束条件：$a_1\geq 0,\cdots a_n\geq 0$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=a>0$.

设拉式函数为 $L(a_1,a_2,\cdots a_n)=\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}+\lambda(a-a_1-a_2-\cdots-a_n)$

令 $\begin{cases}L'_{a_1}=\frac{p}{n}a_1^{p-1}-\lambda=0\\ L'_{a_2}=\frac{p}{n}a_2^{p-1}-\lambda=0\\ \vdots\\ L'_{a_n}=\frac{p}{n}a_n^{p-1}-\lambda=0\\ a_1+a_2+\cdots+a_n=a\end{cases}$ 则 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\left(\frac{n\lambda}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ 代入 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a$ 得唯一驻点：$a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{a}{n}$.

再比较 f 在边界上的值与 $f(\frac{a}{n},\frac{a}{n},\cdots\frac{a}{n})$ 的大小，即比较 $f(a,0,0,\cdots,0)=\frac{a^p}{n}=f(0,a,0,\cdots,0)=\cdots=f(0,0,\cdots,0,a)$ 与 $f(\frac{a}{n},\frac{a}{n},\cdots\frac{a}{n})=\left(\frac{a}{n}\right)^p$ 的大小，易知 $\frac{a^p}{n}\geq\left(\frac{a}{n}\right)^p$. 故 $f(\frac{a}{n},\frac{a}{n},\cdots\frac{a}{n})=\left(\frac{a}{n}\right)^p$ 是 f 的条件最小值. 故有

$f(a_1,a_2,\cdots a_n)=\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\geq f(\frac{a}{n},\frac{a}{n},\cdots\frac{a}{n})=\left(\frac{a}{n}\right)^p=\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^p\Leftrightarrow$

$\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}\geq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

综合(1°),(2°)可知，当$a_i>0$ ($i=1,2,\cdots n$)，$p>1$时，有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\le\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}\triangleq RMS$$ (p次均方根)

等号成立，当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$.

但是，若要同时比较调和平均数$\bar{H}$，几何平均数$\bar{G}$，算术平均数$\bar{A}$及RMS时，应假定$a_1>0, a_2>0, \cdots a_n>0$. 否则$\bar{H}$与$\bar{G}$会无意义。当$a_1>0, a_2>0, \cdots a_n>0$且$a_1+a_2+\cdots+a_n=a>0$时，必有：

$$\bar{H}=\left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}\le\bar{G}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\bar{A}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\le RMS=\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}, \forall p>1.$$

且等号成立当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{a}{n}$