Ex13.1 1(2)(3)(6)(7)(10)(14); 2(4)

1.判断下列反常积分的敛散性：

(2)$\int_0^{+\infty}\sqrt{x}e^{-x}dx$

$LHS=\int_0^1\sqrt{x}e^{-x}dx(conv.)+\int_1^{+\infty}\sqrt{x}e^{-x}dx$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}e^{-x}}{x^{-2}}=0$

而$\int_1^{+\infty}x^{-2}dx=1$

因此**conv**

(3)$\int_0^{+\infty}\frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$

$LHS=\int_0^1\frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx(conv.)+\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}}/x^{-\frac{1}{3}}=\frac{\pi}{2}$

而$\int_1^{+\infty}x^{-\frac{1}{3}}=+\infty$

因此**div**

(6)$\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}dx$

$x=1$为瑕点

$\lim_{x\to1}\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}/\frac{x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}=1$，$LHS$与$\int_0^1\frac{x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}dx$同敛散.

$\int_0^1\frac{x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}dx=\frac{3}{4}(1-x^2)^{-\frac{2}{3}}|_0^1=+\infty$

因此**div**

(7)$\int_0^1\frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$

$x=0$为瑕点

$\lim_{x\to0}\frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}/\frac{1}{\sqrt{x}}=1$，$LHS$与$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$同敛散.

$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}|_0^1=2$

因此**conv**

(10)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$

$x=0$为瑕点

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}/x^{-\frac{3}{4}}=\lim_{x\to 0}x^{\frac{1}{4}}\ln\sin x=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\tan x}}{-\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}}=0$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^{-\frac{3}{4}}dx=4x^{\frac{1}{4}}|_0^{\frac{\pi}{2}}=4(\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{4}}$

因此**conv**

(14)$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\mu}dx$

$\mu\le 0$时，显然**div**

$\mu>0$时，$x=0$为瑕点，$LHS=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\arctan x}{x^\mu}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\mu}dx$

这同敛散于$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{x^{\mu-1}}dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty}\frac{1}{x^\mu}dx$

因此$1<\mu<2$时，**conv**，否则**div**

2.研究下列积分的条件收敛性与绝对收敛性：

(4)$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}dx(p>0)$

$x=0$为瑕点，$LHS=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2(1+x^p)}dx$

这同敛散于$\int_0^1\frac{1}{x}dx+M(M>0)$

因此**div**

Ex13.3 1(1)(2); 2(1)(3); 3; 4(1)(2)

1.试用两种方法计算以下极限：

(1)$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+a^2}dx$

方法一：

$\int_{-1}^1\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{1}{2}a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})|_{-1}^1=\sqrt{1+a^2}+a^2\ln\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{-1+\sqrt{1+a^2}}$

因此$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+a^2}dx=1$

方法二：

$\sqrt{x^2+a^2}$连续，因此$\int_{-1}^1\sqrt{x^2+a^2}dx$对$a$连续，所以$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+a^2}dx=\int_{-1}^1|x|dx=1$

(2)$\lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx$

方法一：

$\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{1+\alpha^2}}|_\alpha^{\alpha+1}$

因此$\lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=\arctan 1-\arctan 0=\frac{\pi}{4}$

方法二：

$f(\alpha)=\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx$连续，因此$\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=f(0)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$

2.求$F'(\alpha)$

(1)$F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$

$F'(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx-\sin\alpha e^{\alpha|\sin\alpha|}-\cos\alpha e^{\alpha|\cos\alpha|}$

(3)$F(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx$

$F'(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\alpha x}dx+\frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}=\frac{2\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}$

3.设$f(x)$在$[a,b]$上连续，证明：

$y(x)=\frac{1}{k}\int_c^x f(t)\sin k(x-t)dt, c,x\in[a,b)$

满足常微分方程$y''+k^2y=f(x)$，其中c与k为常数.

$y'=\frac{1}{k}\int_c^x kf(t)\cos k(x-t)dt=\int_c^x f(t)\cos k(x-t)dt$

$y''=f(x)-\int_c^x kf(t)\sin k(x-t)dt$

$y''+k^2y=f(x)-\int_c^x kf(t)\sin k(x-t)dt+k^2\frac{1}{k}\int_c^x f(t)\sin k(x-t)dt=f(x)$

4.应用对参数进行微分或积分的方法，计算下列积分：

(1)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx$, $(a>0,b>0)$

$\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)=\ln a^2+\ln(\sin^2x+\frac{b^2}{a^2}\cos^2x)$

$t=\frac{b}{a}$

则$I(t)=\pi\ln a+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin^2x+t^2\cos^2x)dx$

$I'(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2t\cos^2x}{\sin^2x+t^2\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2t}{\tan^2x+t^2}dx=\frac{\pi}{1+t}$

$I(t)=\pi\ln(t+1)+C$

$I(1)=\pi\ln a$

$C=\pi\ln\frac{a}{2}$，于是$I(\frac{b}{a})=\pi\ln(\frac{a}{2}(\frac{b}{a}+1))=\pi\ln\frac{a+b}{2}$

(2)$\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$, $(0\le a<1)$

$I(a)=\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$

$I'(a)=\int_0^{\pi}\frac{2a-2\cos x}{1-2a\cos x+a^2}dx=0$

$$LHS = I(0) = \int_0^\pi \ln 1 dx = 0$$