第34讲：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 与一致收敛性（要点）

(2023.5.26)

(一) 复习：

(1) 三角级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ 当 $\alpha>1$ 时，对 $\forall x\in R$ 都绝对且一致收敛；当 $0<\alpha\le 1$ 时 对 $x\ne k\pi$，都条件收敛；当 $\alpha\le 0$ 时，都发散。

(2)，对 $\forall x\in(0,+\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 都收敛，对 $\forall [a,b]\subset(0,+\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 都在 $[a,b]$ 中一致收敛。

(3)，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在 $(-1,1)$ 中逐点绝对收敛，对 $\forall [a,b]\subset(-1,1)$ $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛。

(二) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的收敛域与和函数 $S(x)$。

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ con，则称 x_0 是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的一个收敛点；$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的收敛点的全体称为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的收敛域，记作 I。

这时，记 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)=S(x)$，$x\in I$，称 $S(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的和函数。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的收敛域求法（通常求使 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ conv. 的范围）

(1°) 利用 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \rho(x)<1$，求出收敛域 I；

(2°) 利用 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n(x)|}=\rho(x)<1$，求出收敛域 I。

(3). 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的逐点收敛与一致收敛：

在 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)=S(x)$, $x\in I$ 中，记 $S_n(x)=a_1(x)+a_2(x)+\cdots+a_n(x)$，

则 $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$, $x\in I$. 即 对 $\forall x\in I$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon,x)\in N^*$, 当 $n>N(\varepsilon,x)$

时，$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$ 恒成立. 此时称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上逐点收敛于 $S(x)$；

对 $\forall x\in I$, $\forall \varepsilon>0$, 若 $\exists N(\varepsilon)$ 仅与 ε 有关, 且当 $n>N(\varepsilon)$ 时,

$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$ 恒成立. 则称此时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$。

一致收敛必定逐点收敛，反之未必。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛的判别法：

Th1 (Cauchy 准则)：对 $\forall \varepsilon>0$, $\forall x\in I$, 若 $\exists N(\varepsilon)\in N^*$, 对 $\forall n>N(\varepsilon)$

若 $|a_{n+1}(x)+a_{n+2}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)|<\varepsilon$ 恒成立, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

反之亦然。特别地，若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 I 上一致收敛，且取 $p=1$

则 $|a_{n+1}(x)|<\varepsilon$ 恒成立，这时称 $\{a_n(x)\}$ 一致趋于零。即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$

在 I 上一致收敛的必要条件是：通项 $a_n(x)$ 在 I 上一致趋于零。$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|a_n(x)|=0$$

Th2 (Weierstrass)：若 $|a_n(x)|\le b_n$，$\forall x\in I$，$\forall n\in N^*$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ con.

则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 I 上绝对收敛且一致收敛。称数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 为

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 的优级数或控制级数，亦称强级数。

还有 Dirichlet 判别法与 Abel 判别法，到第4讲再介绍。

(四) 例题：

例1. 当 $\alpha>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛；绝对收敛。

例2. $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 中非一致收敛，但内闭一致收敛，绝对收敛。

例3. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ 在 $(-1,1)$ 中非一致收敛，但内闭一致收敛；且逐点绝对 con.

例4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中一致收敛；且绝对收敛

例5. Riemann函数 $\zeta(x) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 中逐点绝对收敛，但非一致收敛，对 $\forall \alpha>1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 中一致收敛，且绝对收敛。

上述例2、例3、例5的解决都需要下面的Th3：

Th3：设 $a_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 (a,b) 内逐点收敛，且 $a_n(x)$ 在 a 点右连续，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(a)$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 (a,b) 中非一致收敛。(用反证法：若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 (a,b) 中一致收敛，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)\in N^*$ 当 $n>N(\varepsilon)$ 时，对 $\forall x\in(a,b)$，$\forall p\in N^*$，$|a_{n+1}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$。由 $a_n(x)$ 在 a 点右连续 $\Rightarrow |a_{n+1}(a)+a_{n+2}(a)+\cdots+a_{n+p}(a)|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n(a)$ 收敛 矛盾！故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 (a,b) 中非一致收敛。同样可考虑 b 点。若 $a_n(x)$ 在 b 点左连续，且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(b)$ div，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 (a,b) 中非一致收敛。

作业：ex7.2

2/(1)，(2)，(3)，(7)；4/(1)，(2)，(3)，(4)，(5)。

134

第六讲(续) 关于Th7.28及推论7.30的证明与应用

(一) 关于Th7.28: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)\xrightarrow{\text{一致}}S(x),\ x\in I \iff S_n(x)=a_1(x)+\cdots+a_n(x)$

在I上一致收敛于S(x) $\xLeftrightarrow[\text{准则}]{\text{Cauchy}}$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)\in N^*$, 对$\forall n>N(\varepsilon)$,

$|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon/2,\ \forall x\in I \Rightarrow \sup\limits_{x\in I}|S(x)-S_n(x)|\triangleq\beta_n\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon \iff$

$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$. 即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在I上一致收敛于S(x)的充要条件是

$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$, 其中, $\beta_n=\sup\limits_{x\in I}|S(x)-S_n(x)|$ (★1)

(二) 关于推论7.30: 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在I上一致收敛于S(x), 则对$\forall\varepsilon>0$,

$\exists N(\varepsilon)\in N^*$, 对$\forall n>N(\varepsilon)$, $\forall p\in N^*$, $\forall x\in I$, $|a_{n+1}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

恒成立. 特别是$p=1$时也成立: $|a_{n+1}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x\in I$. $\Rightarrow$

$\alpha_n\triangleq\sup\limits_{x\in I}|a_{n+1}(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}|a_n(x)|=0$.

即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在I上一致收敛于S(x)的必要条件是:

$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, 其中, $\alpha_n=\sup\limits_{x\in I}|a_n(x)|$ (★2)

(★1), (★2)都常用来证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在I上的不一致收敛。

例1 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$，$x \in [0,1]$

(1) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的收敛域为 $I=[0,1]$ 且和函数 $S(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x<1, \\ 1, & x=1. \end{cases}$

(2) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 $\forall [a,b]\subset(0,1)$ 中一致收敛于 $S(x)=0$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 $(0,1)$ 中内闭一致收敛于 $S(x)=0$；

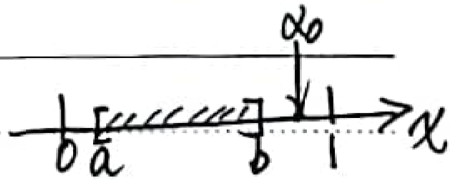
(3) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 $(0,1)$ 中不一致收敛，从而在 $[0,1]$ 中也只是逐点收敛，而不一致收敛。

证(1)：$\because S_n(x) = x + x(x-1) + x^2(x-1) + \cdots + x^{n-1}(x-1) = x^n = \begin{cases} x^n, & 0\le x<1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$

$\therefore S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & 0\le x<1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$

即虽然通项 $a_n(x)=x^{n-1}(x-1)$ 在 $x=1$ 处都连续，$n=1,2,3,\cdots$

但和函数 $S(x)$ 在 $x=1$ 处却不连续。



证(2)：对 $\forall x\in[a,b]\subset(0,1)$，$\exists \alpha_0\in(0,1)$

使 $|a_n(x)| = |x^{n-1}(x-1)| \le |x|^{n-1} \le \alpha_0^{n-1}$，$\forall n\in N^*$，$\forall x\in[a,b]\subset(0,1)$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_0^{n-1} = \frac{1}{1-\alpha_0}$，依优级数判法，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

(2)

且对 $\forall x\in[a,b]\subset(0,1)$，都有 $S_n(x)=x^n\xrightarrow{n\to\infty}0=S(x)$.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 $(0,1)$ 中内闭一致收敛于和函数 $S(x)=0$;

记 (3°)：对 $\forall x\in(0,1)$，$S_n(x)=x^n$，$S(x)\equiv0\Rightarrow\sup\limits_{x\in(0,1)}|S(x)-S_n(x)|$

$=\sup\limits_{x\in(0,1)}x^n$，对 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，$\exists x_0=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\in(0,1)$，$\forall n\geq2$，有

$\sup\limits_{x\in(0,1)}x^n\geq\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n=\frac{1}{2}>\varepsilon$，$\forall n\geq2$. 即 $\beta_n\geq\frac{1}{2}>\varepsilon$，$\forall n\geq2$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$ 不成立，故由 Th7.28 的(1)，知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 $(0,1)$

中非一致收敛。

由以上的 (1°)，(2°)，(3°) 可知，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-1}(x-1)$ 在 $[0,1]$ 上

逐点收敛于和函数 $S(x)=\begin{cases}0, & 0\leq x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$. 且在 $(0,1)$ 中内闭一致

收敛，并且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(0)=0$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(1)=1$. 但在 $(0,1)$ 中非一致收敛。

回忆课本上的 Th3：若 $a_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在

(a,b) 中逐点收敛，且 $a_n(x)$ 在 a 点右连续，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(a)$ div. 则

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 (a,b) 中必然非一致收敛。

(3).

有同学可能认为：从上述1)2)应该可以得到如下结论：
若 $a_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 (a,b) 中内闭一致收敛，
且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(a)$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(b)$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 (a,b) 中一致收敛。

但是上述例1)的(2°)告诉我们，既使有 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 $(0,1)$ 中内闭一致收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(0)$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(1)$ 都收敛，另外 $a_n(x)=x^{n-1}(x-1)$ 在 $[0,1]$ 上也连续，但是，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-1}(x-1)$ 在 $(0,1)$ 中却是非一致收敛。

(3) 关于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 的Dirichlet判法与Abel判法：

(1). 若 $\begin{cases} ① \ S_n(x)=a_1(x)+\cdots+a_n(x) \text{ 在 } I \text{ 中一致有界；} \\ ② \ \{b_n(x)\} \text{ 在 } I \text{ 中单减且一致趋于零，} \end{cases}$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在 I 中一致收敛（Dirichlet判法）

(2). 若 $\begin{cases} ① \ \sum_{n=1}^{\infty}a_n(x) \text{ 在 } I \text{ 中一致收敛；} \\ ② \ \{b_n(x)\} \text{ 在 } I \text{ 中关于} n \text{单调且一致有界；} \end{cases}$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在 I 中一致收敛（Abel判法）

（注：Cauchy准则是判断一致收敛的充要条件，而优级数判法、Dirichlet判法及Abel判法都只是判别一致收敛的充分条件）