例 4.2.31. 设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵, k 为某个正整数, 满足 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$. 由多项式恒等式

$$x^k-1=(x-1)(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1)$$

可知,

$$\boldsymbol{A}^k-\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}^{k-1}+\boldsymbol{A}^{k-2}+\cdots+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}).$$

这说明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 可逆, 且

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=-(\boldsymbol{A}^{k-1}+\boldsymbol{A}^{k-2}+\cdots+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}).$$

习题 4.2.32. 设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵, k 为某个正整数, 满足 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$. 若 $\lambda\in F=\mathbb{R}$, $\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{I}$ 是否可逆? 若可逆, 求出其逆矩阵; 若不可逆, 解释原因.

例 4.2.33. 假设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$, 我们验证 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 可逆, 并求其逆. 为此, 对多项式 x^2+x-2 关于 $x-2$ 作带余除法:

$$x^2+x-2=(x-2)(x+3)+4.$$

这说明

$$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})+4\boldsymbol{I}.$$

从而

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\left(-\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})\right)=\boldsymbol{I}.$$

这说明 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 可逆, 且其逆矩阵为 $-\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{I})$.

矩阵的转置 从一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 出发, 我们有时候需要构造一个各列是 $\boldsymbol{A}$ 的各行的 $n\times m$ 矩阵. 这样的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵** (transpose), 记作

$$\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}:=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

有的教材里也将其记为 $\boldsymbol{A}^t$, $\boldsymbol{A}^\tau$, 或 $\boldsymbol{A}'$.

例 4.2.34. 对于 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, 我们有转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$.

定理 4.2.35. 矩阵的转置运算有如下的基本性质 (在运算允许的条件下). 教材定理 4.2.4

(1) $(\boldsymbol{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \boldsymbol{A}$.

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^\mathsf{T} = \boldsymbol{A}^\mathsf{T} + \boldsymbol{B}^\mathsf{T}$.

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^\mathsf{T} = \lambda\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$, 其中 λ 为标量.

(4) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^\mathsf{T} = \boldsymbol{B}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$.

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆方阵, 则 $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^\mathsf{T})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^\mathsf{T}$.

证明. (4) 的证明. 设 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in F^{n\times p}$, 则 $\boldsymbol{A}^\mathsf{T} \in F^{n\times m}$, $\boldsymbol{B}^\mathsf{T} \in F^{p\times n}$. 为了说明的方便, 在这儿, 对于一个矩阵右下角的双重下标 ij, 我们是在表示该矩阵的第 (i,j) 元素. 此时

$$\begin{array}{ccccc}
\left((\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^\mathsf{T}\right)_{ij} & = & (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})_{ji} & = & \sum_{k=1}^n \boldsymbol{A}_{jk}\boldsymbol{B}_{ki} \\
 & & & & \| \\
(\boldsymbol{B}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}^\mathsf{T})_{ij} & = & \sum_{k=1}^n (\boldsymbol{B}^\mathsf{T})_{ik}(\boldsymbol{A}^\mathsf{T})_{kj} & = & \sum_{k=1}^n \boldsymbol{B}_{ki}\boldsymbol{A}_{jk}
\end{array}$$

(5) 的证明. 只需验证 $(\boldsymbol{A}^{-1})^\mathsf{T}\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \boldsymbol{I}$. 这一点可直接验证:

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^\mathsf{T}\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})^\mathsf{T} = \boldsymbol{I}^\mathsf{T} = \boldsymbol{I}. \qquad \square$$

推论 4.2.36. 在矩阵乘法有意义的条件下,

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{A}_k)^\mathsf{T} = \boldsymbol{A}_k^\mathsf{T}\boldsymbol{A}_{k-1}^\mathsf{T}\cdots\boldsymbol{A}_2^\mathsf{T}\boldsymbol{A}_1^\mathsf{T}.$$

从转置运算出发, 我们可以引入更多的概念.

(1) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**对称的** (symmetric) 是指其满足 $\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \boldsymbol{A}$.

(2) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**反对称的**或者**斜对称的** (skew-symmetric) 是指其满足 $\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = -\boldsymbol{A}$. 这样的矩阵的主对角线上的元素全为 0.

(3) 实数方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为是**正交的** (orthogonal) 是指其满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \boldsymbol{I}$ (或等价地, $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$). 不难看出, 正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且它的逆 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 正好为 $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$.

习题 4.2.37. (1) 给定列向量 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, 假定 $\boldsymbol{u}^\mathsf{T}\boldsymbol{u} = 1$. 对于 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\mathsf{T}$ 以及 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_n - 2\boldsymbol{P}$, 证明:

(i) $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$, (ii) $\boldsymbol{P}^\mathsf{T} = \boldsymbol{P}$, (iii) $\boldsymbol{Q}^2 = \boldsymbol{I}_n$.

(2) 在上面一小问中, 变换 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 被称作一个**投影**, 而 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ 被称作一个**豪斯霍尔德反射** (*Householder reflection*). 为了理解这一点, 对于 $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, 分别计算 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 以及 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$. 用几何的语言来解释 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 的关系.

复矩阵的共轭 对于复数 $z = a + bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$, 它的 (复) 共轭是 $\overline{z} = a - bi \in \mathbb{C}$. 类似地, 对于复矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, 我们可以定义其**共轭** (conjugate) 为

$$\overline{\boldsymbol{A}} := (\overline{a_{ij}}) = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} \cdots\cdots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} \cdots\cdots & \overline{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_{m1}} & \overline{a_{m2}} \cdots\cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}.$$

例 4.2.38. 对于 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3+5i & 7+8i \\ 13-6i & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 我们有 $\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3-5i & 7-8i \\ 13+6i & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

注 4.2.39. (1) 作为正交矩阵的推广, 复数方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为一个**酉矩阵**是指其满足 $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}} = \boldsymbol{I}$. 于是, 一个实方阵是正交矩阵当且仅当它是一个酉矩阵.

(2) 对于一般的复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 而言, 有 $(\overline{\boldsymbol{A}})^{\mathsf{T}} = \overline{\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}}$; 我们可以将其称为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置 (*conjugate transpose*). 有不少教材会将其记作 $\boldsymbol{A}^*$, 但是这与我们教材里稍后要介绍的伴随矩阵的记号相冲突, 所以我们暂时不采用这样的记号. 当然, 也有不少教材会将其记作 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}$.

方阵的迹 方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 的对角线元素的和称为 $\boldsymbol{A}$ 的**迹** (trace):

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

例 4.2.40. (1) 对于 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, 我们有 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = 1 + 5 + 9 = 15$.

(2) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{I}_n) = n$.

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵, 则 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = 0$.

定理 4.2.41. 矩阵的迹有如下的性质 (在运算允许的条件下).

教材定理 4.2.5

(1) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})+\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$.

(2) $\operatorname{tr}(\lambda\boldsymbol{A})=\lambda\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$, 其中 λ 为标量.

(3) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})$, $\operatorname{tr}(\overline{\boldsymbol{A}})=\overline{\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})}$.

(4) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$. 这儿的 $\boldsymbol{A}\in F^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in F^{n\times m}$, 不要求矩阵为方阵, 只要求相应的维数相反.

证明. (4) 的证明. 为了说明的方便, 在这儿, 对于一个矩阵右下角的双重下标 ij, 我们是在表示该矩阵的第 (i,j) 元素. 此时,

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) & = & \sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{AB})_{ii} & = & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{B}_{ji} \\ & & & & \| \\ \operatorname{tr}(\boldsymbol{BA}) & = & \sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{BA})_{jj} & = & \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{B}_{ji}\boldsymbol{A}_{ij} \end{array}$$

□

例 4.2.42. 对于 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 证明:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}\Leftrightarrow\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathsf{T}})=0\Leftrightarrow\operatorname{tr}(\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A})=0.$$

证明. 由于有定理 4.2.41(4), 我们只需证明 "$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathsf{T}})=0\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$". 为此, 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 则由上面的计算可知 $0=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathsf{T}})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$. 右式的求和是一些非负实数的和, 故对每个 (i,j), 必有 $|a_{ij}|^2=0$, 即 $a_{ij}=0$. 这说明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. □

习题 4.2.43. 对于 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$, 我们可以定义函数 $\psi_{\boldsymbol{A}}:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$, $\boldsymbol{X}\mapsto\operatorname{tr}(\boldsymbol{AX})$. 若 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\psi_{\boldsymbol{A}}=\psi_{\boldsymbol{B}}$, 证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

分块矩阵 若把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按行分成若干组, 按列分成若干组, 则 $\boldsymbol{A}$ 可以视为由若干个子矩阵有序排列构成的数表:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\cdots\cdots & \boldsymbol{A}_{1s} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\cdots\cdots & \boldsymbol{A}_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2}\cdots\cdots & \boldsymbol{A}_{rs} \end{pmatrix}.$$

这是将 $\boldsymbol{A}$ 写成**分块矩阵**的形式, 并可简写为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{r\times s}$. 所有的这些 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**子块** (block). 显然, 上面的表示中, 任何一行的子块具有相同的行数, 任何一列的子块具有相同的列数. 在 $r=s$ 的条件下*, 我们还有以下三个特殊情形值得关注:

*在这一块, 不同的教材可能会有不同的定义

(i) 若 $\boldsymbol{A}_{ij} = \boldsymbol{O}$ 对任意的 $i \neq j$ 都成立, 而每个 $\boldsymbol{A}_{ii}$ 都是方阵, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为一个**分块对角矩阵** (block diagonal matrix) 或**准对角矩阵**, 可以将其记作

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_{rr} \end{pmatrix} \qquad \text{或} \qquad \boldsymbol{A} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{22}, \ldots, \boldsymbol{A}_{rr});$$

(ii) 若 $\boldsymbol{A}_{ij} = \boldsymbol{O}$ 对所有的 $i > j$ 都成立, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**准上三角矩阵**;

(iii) 类似可以定义**准下三角矩阵**.

例 4.2.44. 对于矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

我们可以将一、二行视为一组, 三、四行视为一组, 从而在第二、三行之间画一条横线, 我们再将一、二、三列视为一组, 四、五列视为一组, 从而在第三、四列之间画一条竖线, 于是将 $\boldsymbol{C}$ 分块得到了如下的表示形式:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} \\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & -2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hdashline 3 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right),$$

其中

$$\boldsymbol{C}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C}_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C}_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

注 4.2.45. 本章一开始提到的, 将矩阵写成将其列向量按行排列的形式, 或者写成将其行向量按列排列的形式, 都是将矩阵写成分块矩阵的特殊情形.

分块矩阵的运算只是矩阵运算的分块表示而言. 具体来说, 我们有如下的操作; 它们的证明只需直接运用定义即可.

(1) **加法**. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{r\times s}$ 和 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{ij})_{r\times s}$ 满足 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 的大小相同, 即 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为同型 (具有相同的维数) 的矩阵, 并且采用相同的方法分块:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\cdots\cdots & \boldsymbol{A}_{1s}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\cdots\cdots & \boldsymbol{A}_{2s}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2}\cdots\cdots & \boldsymbol{A}_{rs}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\cdots\cdots & \boldsymbol{B}_{1s}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\cdots\cdots & \boldsymbol{B}_{2s}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{r1} & \boldsymbol{B}_{r2}\cdots\cdots & \boldsymbol{B}_{rs}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_{ij}+\boldsymbol{B}_{ij})_{r\times s}$, 即有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{B}_{12}\cdots\cdots & \boldsymbol{A}_{1s}+\boldsymbol{B}_{1s}\\ \boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{B}_{22}\cdots\cdots & \boldsymbol{A}_{2s}+\boldsymbol{B}_{2s}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{r1}+\boldsymbol{B}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2}+\boldsymbol{B}_{r2}\cdots\cdots & \boldsymbol{A}_{rs}+\boldsymbol{B}_{rs}\end{pmatrix}.$$

(2) **数乘**. 假设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{r\times s}$ 分块如上, 则其对于标量 λ 的数乘为 $\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda\boldsymbol{A}_{ij})_{r\times s}$, 即有

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{A}_{11} & \lambda\boldsymbol{A}_{12}\cdots\cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{1s}\\ \lambda\boldsymbol{A}_{21} & \lambda\boldsymbol{A}_{22}\cdots\cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{2s}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \lambda\boldsymbol{A}_{r1} & \lambda\boldsymbol{A}_{r2}\cdots\cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{rs}\end{pmatrix}.$$

(3) **矩阵乘法**. 假设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{r\times s}$ 分块如上, 而矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{ij})_{s\times t}$, 即分块为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\cdots\cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\cdots\cdots & \boldsymbol{B}_{2t}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{B}_{s2}\cdots\cdots & \boldsymbol{B}_{st}\end{pmatrix},$$

并进一步假设, $\boldsymbol{A}_{ij}$ 是 $m_i\times l_j$ 矩阵 $(1\le i\le r,\ 1\le j\le s)$, $\boldsymbol{B}_{jk}$ 是 $l_j\times n_k$ 矩阵 $(1\le j\le s,\ 1\le k\le t)$, 即 $\boldsymbol{A}$ 分块时列的组数等于 $\boldsymbol{B}$ 分块时的行的组数, 且 $\boldsymbol{A}$ 的每个列组的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的相应行组的行数. 此时,

$$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{C}_{ij})_{r\times t}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\cdots\cdots & \boldsymbol{C}_{1t}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22}\cdots\cdots & \boldsymbol{C}_{2t}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{r1} & \boldsymbol{C}_{r2}\cdots\cdots & \boldsymbol{C}_{rt}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}_{ik}=\sum_{j=1}^{s}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{B}_{jk}$ 是 $m_i\times n_k$ 矩阵. 这与将分块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中的每个块**视为**标量时矩阵乘法的规则具有相同的**形式**.

(4) **转置**. 假设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{r\times s}$ 分块如上, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}=(\boldsymbol{B}_{ij})_{s\times r}$, 其中 $\boldsymbol{B}_{ij}=\boldsymbol{A}_{ji}^{\mathsf{T}}$, 即有

$$\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathsf{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathsf{T}}\cdots\cdots\boldsymbol{A}_{r1}^{\mathsf{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathsf{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathsf{T}}\cdots\cdots\boldsymbol{A}_{r2}^{\mathsf{T}}\\ \vdots & \vdots\qquad\qquad\vdots\\ \boldsymbol{A}_{1s}^{\mathsf{T}} & \boldsymbol{A}_{2s}^{\mathsf{T}}\cdots\cdots\boldsymbol{A}_{rs}^{\mathsf{T}}\end{pmatrix}$$

(5) **等等**.

注 4.2.46. 矩阵分块时的分组一般需要依照具体运算的要求, 对于矩阵乘法, 一般会尽可能地凑出零矩阵或者单位矩阵.

例 4.2.47. 对于

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:c}1&0&0\\0&1&0\\ \hdashline -1&2&1\\1&1&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&3&2\\-1&2&0&1\\ \hdashline 1&0&4&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix},$$

我们有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\0&2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}.$$

由此可知,

$$\boldsymbol{AB}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&3&2\\-1&2&0&1\\ \hdashline -2&4&1&1\\0&2&3&3\end{array}\right).$$