第29讲：Stokes公式及其应用 (2023.5.15)

(一) Stokes公式：

设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中的区域，$\vec{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\in C^1(\Omega)$，双侧光滑曲面 $\Sigma\subset\Omega$，$\Gamma=\partial\Sigma$，且 Γ 的正向与 Σ 的正侧满足右手系，则有：

$$\oint_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$ 即

$$\oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{\tau}\,ds=\iint_{\Sigma}(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}dS$$

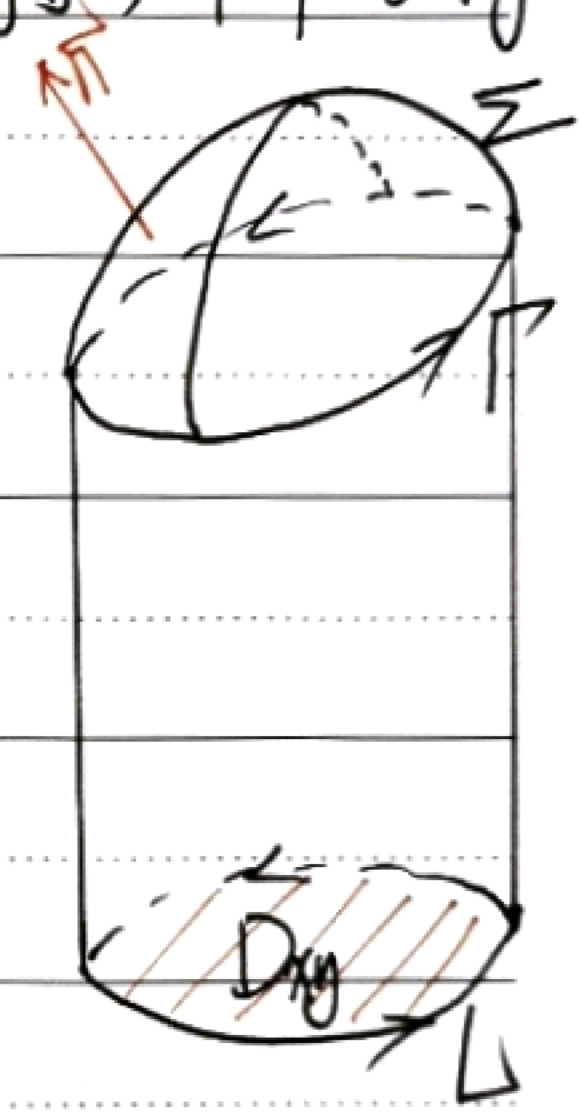
特别地，当 Σ 是位于 xOy 平面中的平面区域 D，且 Σ 取上侧时，由于 $z=0\Rightarrow dz=0\Rightarrow dy\,dz=0,\ dz\,dx=0$，Stokes 化为Green公式：$\oint_{\partial D}P\,dx+Q\,dy=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$.

因此，Stokes公式是Green公式在 $\mathbb{R}^3$ 中的推广。

$\nabla\times\vec{A}\triangleq\mathrm{rot}(\vec{A})$ 称为 $\vec{A}$ 的旋度 (rotation)

Stokes公式的证明思路同Green公式与Gauss公式，即先就特殊情形加以证明，再就一般情形证明。

(1) 设Σ为显式光滑曲面：$z=z(x,y)\in C^1(D_{xy})$，取上侧，$\Gamma=\partial\Sigma$，且Γ的方向与Σ的正侧成右手系，而Γ在xoy平面中的投影曲线为L，如图：



设L的参数表示为 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$，$t: a\to b$.

则Γ的参数表示为 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(x(t),y(t)) \end{cases}$ $t: a\to b$.

从而 $\oint_\Gamma P(x,y,z)dx=\int_a^b P(x,y,z(x,y))x'(t)dt$

$=\oint_L P(x,y,z(x,y))dx+0dy \overset{Green}{=\!=\!=}$ $\quad\Sigma: z=z(x,y)$

$\iint_{D_{xy}}\left[\frac{\partial 0}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y,z(x,y))}{\partial y}\right]dxdy=-\iint_{D_{xy}}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy$. (*)

而从$\Sigma: z=z(x,y)$取上侧知，$\Sigma: F(x,y,z)=z-z(x,y)$，$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$=(F'_x,F'_y,F'_z)/\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}=(-z'_x,-z'_y,1)/\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\Rightarrow$

$\cos\beta=-z'_y/\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=-z'_y\cos\gamma\Rightarrow z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\cos\beta}{\cos\gamma}$.

代入(*1)可知：$\oint_\Gamma P(x,y,z)dx = -\iint\limits_\Sigma \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\left(-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\right]\cos\gamma\, dS$

$= \iint\limits_\Sigma \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\, dS - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\, dS = \iint\limits_\Sigma \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$ (*2)；

(ii)，若Σ为光滑曲面：$x=x(y,z)\in C^1(D_{yz})$，Σ取前侧时，

同样可推得：$\oint_\Gamma Q(x,y,z)dy = \iint\limits_\Sigma \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz$ (*3)，

若Σ为光滑曲面：$y=y(x,z)\in C^1(D_{xz})$，Σ取右侧时，

有 $\oint_\Gamma R(x,y,z)dz = \iint\limits_\Sigma \frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx$ (*4)。

(iii)，若Σ同时为：$z=z(x,y)$，$x=x(y,z)$，$y=y(x,z)$时，

例如，椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在每个卦限都如此。

则(*2)，(*3)，(*4)同时成立，(*2)+(*3)+(*4)得：

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz = \iint\limits_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \iint\limits_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint\limits_\Sigma (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{n}\,dS$$

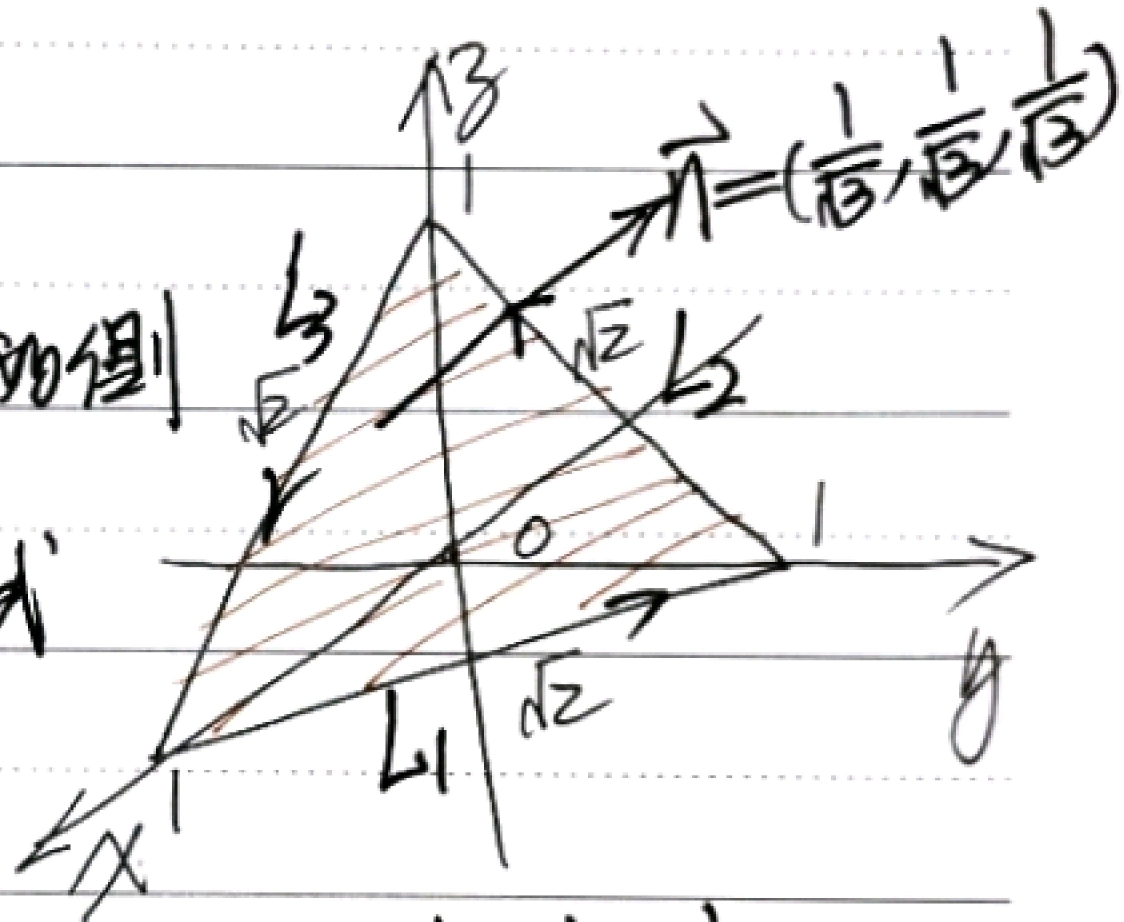
(iv)，若Σ可分成有限块上述曲面时，通过作辅助线，然后在每块上应用stokes公式，再相加，最后辅助线上两

(3).

功量全部抵消，在Σ上L13有stokes公式成立。

(三)例题:

例1、设Σ为平面$x+y+z=1$在第一卦限部分，取上侧，求力场$\vec{F}(x,y,z)=(y^2,z^2,x^2)$绕$\partial\Sigma$正向一周所做的功量W。



解法(一)：∵$\partial\Sigma$的正向与Σ的侧服从右手系，∴可用stokes公式求W:

$$\partial\Sigma=L_1+L_2+L_3.$$

$$W=\oint_{\partial\Sigma}\vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{\tau}\,ds$$

$$=\oint_{\partial\Sigma}Pdx+Qdy+Rdz=\oint_{\partial\Sigma}y^2dx+z^2dy+x^2dz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}dS$$

$$=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ y^2&z^2&x^2\end{vmatrix}dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma((-2x)+(-2y)+(-2z))dS$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(x+y+z)dS=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma 1dS=-\frac{2}{\sqrt{3}}S(\Sigma)=-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2=-1$$

解法(七)：参数方程曲线积分. $\oint_{L_1+L_2+L_3} y^2dx+z^2dy+x^2dz$

利用 $\partial\Sigma=L_1+L_2+L_3$ 是循环轮换对称性,

可推得: $\oint_{\partial\Sigma} y^2dx=-\frac{1}{3}=\oint_{\partial\Sigma} z^2dx=\oint_{\partial\Sigma} x^2dz \Rightarrow IV=3\times\frac{-1}{3}=-1$.

⑩ 在L_1上, $z=0$, $y=1-x$, $x:1\to 0$. 取x的参变量.

则 $z^2dy=0$, $x^2dz=0$, $\int_{L_1} y^2dx=\int_1^0 (1-x)^2dx=-\int_0^1(x-1)^2d(x-1)$

$=-\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_0^1=\frac{-1}{3}$. 即 $\int_{L_1} y^2dx+z^2dy+x^2dz=\frac{-1}{3}$. 同理,

$\int_{L_2} y^2dx+z^2dy+x^2dz=\frac{-1}{3}=\int_{L_3} y^2dx+z^2dy+x^2dz$, 故

$W=\oint_{L_1+L_2+L_3} y^2dx+z^2dy+x^2dz=\frac{-1}{3}+\frac{-1}{3}+\frac{-1}{3}=-1$.

例2. 设L是Σ_1: $z=3x^2+4y^2$ (椭圆抛物面) 与 Σ_2: $4x^2+y^2=4y$ (椭圆柱面) 的交线.

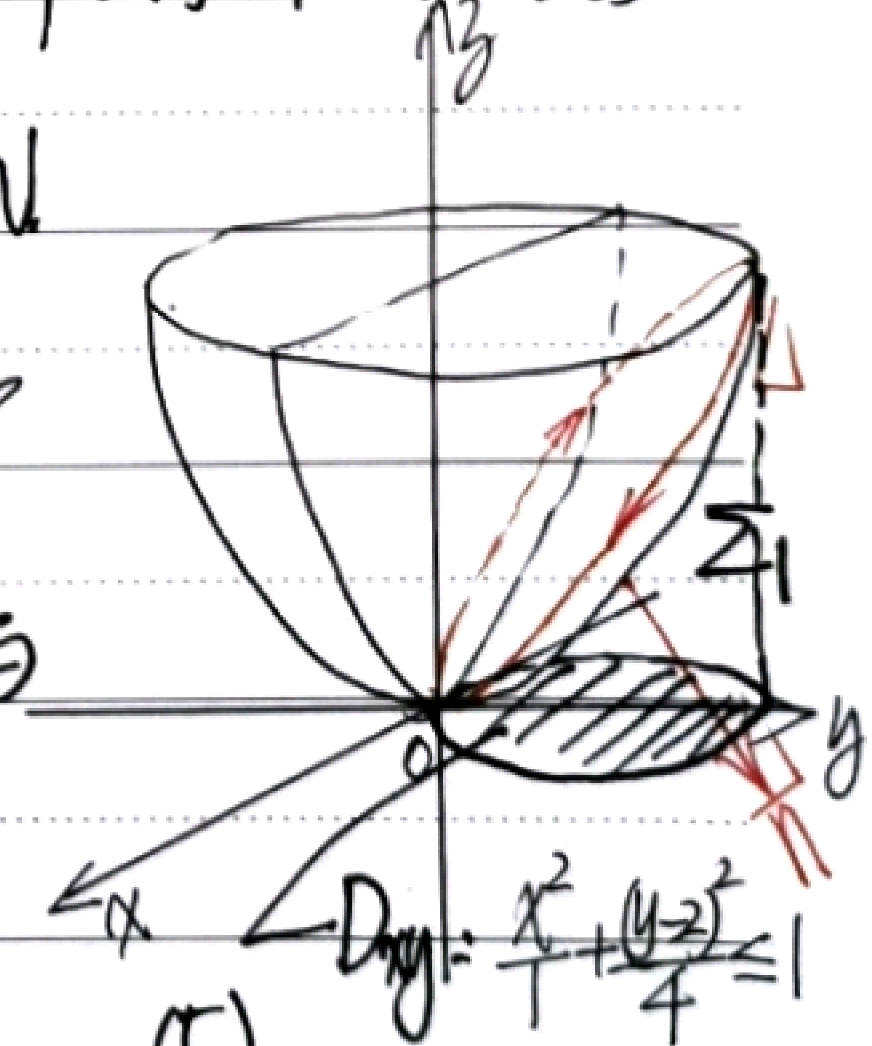
从z轴正方向看, L的方向是顺时针方向. 求 $\vec{A}(x,y,z)=$

$(y(z+1),\ xz,\ xy-z)$ 沿L的环流量W

解: 设Σ_1是闭曲线L张成的光滑

曲面. 当Σ_1取下侧时, L的正向与

Σ_1的侧(正)服从右手系, 如图所示。



(5)

$W=\oint_L \vec{A}\cdot\vec{\tau}\,ds=\oint_L y(z+1)dx+xz\,dy+(xy-z)dz \overset{stokes}{=}$

$$\iint_{\Sigma_1}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y(z+1) & xz & xy-z \end{vmatrix} = -\iint_{\Sigma} dxdy = -(-1)\iint_{D_{xy}} dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}} dxdy = S(D_{xy}) = \pi\cdot 1\cdot 2 = 2\pi.$$

例3. 若 $\vec{A}(x,y,z)=(P,Q,R)\in C^1(\Omega)$ 且 $\nabla\times\vec{A}(x,y,z)\equiv 0$, $\forall (x,y,z)$. 则称 $\vec{A}(x,y,z)$ 是 Ω 中的无旋场. 证明:

若 $\vec{A}(x,y,z)$ 是曲面单连通域 Ω 中的无旋场, 则 $\vec{A}(x,y,z)$ 必是 Ω 中的保守场. (若 Ω 中任一闭路都可在 Ω 中张成一片光滑曲面, 则 Ω 称为曲面单连通域)

证: 在 Ω 中任取正向闭路 Γ, 且 Γ 在 Ω 中张成光滑曲面 Σ 的侧与 Γ 的正向服从右手系. 则由stokes公式:

$\oint_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{\tau}\,ds = \iint_\Sigma (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{n}\,ds \equiv \iint_\Sigma 0\cdot\vec{n}\,ds = 0$ 知 $\vec{A}$ 是 Ω 中的保守场。

三) 作业: ex11.3/1(6); ex11.4/2; ex11.5/1(6); 9(1),(2).(6)