推论 7.3.26. *如果 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的复根都是实数, 且 $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 是一个对称阵.*

证明. 由引理 7.3.25 可知, 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B} \coloneqq \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为上三角阵. 此时, $\boldsymbol{B}^\mathsf{T} = \boldsymbol{Q}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}(\boldsymbol{Q}^{-1})^\mathsf{T} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{Q}$, 从而 $\boldsymbol{B}^\mathsf{T}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\mathsf{T}$. 由于 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 是实的上三角阵, 对于 $i = 1, 2, \ldots, n$, 我们有 $(\boldsymbol{B}^\mathsf{T}\boldsymbol{B})_{ii} = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^\mathsf{T})_{ii}$, 即 $\sum_{j=1}^{i} b_{ji}^2 = \sum_{k=i}^{n} b_{ik}^2$. 依次考虑 $i = 1, 2, \ldots, n$, 我们可以推出对于 $k > i$, 我们有 $b_{ik} = 0$, 从而 $\boldsymbol{B}$ 为对角阵. 于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^\mathsf{T}$ 为对称阵. □

这个技巧还可以用来证明: 实对称阵一定**正交相似**于对角阵. 注意, 用正交阵做相似变换等同于用其做相合变换.

定理 7.3.27. *对于 n 阶实对称方阵 $\boldsymbol{A}$, 总存在同阶正交阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角阵.*

证明. **(思路一)** 由引理 7.3.25 可知, 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B} \coloneqq \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为上三角阵. 此时, $\boldsymbol{B}^\mathsf{T} = \boldsymbol{Q}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}(\boldsymbol{Q}^{-1})^\mathsf{T} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{B}$ 为对角阵.

(思路二) 我们对于阶数 n 作归纳法. $n = 1$ 的情形是显然的. 假设 $n - 1$ 时结论成立. 对于 n 的情形, 设 λ_1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 由命题 7.3.23, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. 对于特征子空间

$$V_{\boldsymbol{A}}(\lambda_1) = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda_1 \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\},$$

由条件已知 $V_{\boldsymbol{A}}(\lambda_1)$ 不是零空间, 从而可以找到非零向量 $\boldsymbol{x}_1 \in V_{\boldsymbol{A}}(\lambda_1)$. 通过归一化, 我们可以假定 $\|\boldsymbol{x}_1\| = 1$. 将 $\boldsymbol{x}_1$ 可以扩充为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. 设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ 构成了矩阵 $\boldsymbol{T}_n$ 的列向量序列, 则 $\boldsymbol{T}_n$ 是一个正交矩阵, 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_n = \boldsymbol{T}_n \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{n-1} \end{pmatrix}$, 即

$$\boldsymbol{T}_n^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{T}_n$ 为正交矩阵, 上面的左式为实对称阵, 从而上面的右式实际上为 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{n-1} \end{pmatrix}$, 并且子方阵 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 为 $(n-1)$ 阶实对称矩阵.

由归纳假设, 存在 $(n-1)$ 阶正交矩阵 $\boldsymbol{T}_{n-1}$ 使得 $\boldsymbol{T}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{T}_{n-1} = \operatorname{diag}(\lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ 为对角阵. 此时, 令 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_n \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boldsymbol{T}_{n-1} \end{pmatrix}$. 可以直接验证, $\boldsymbol{T}$ 是正交阵, 满足

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$ □

例 7.3.28. *如果实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵, 证明: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.*

证明. 因为 $\boldsymbol{A}$ 为幂零矩阵, 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 0. 因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵, 它可以相似对角化, 而对角化后的矩阵的矩阵显然只能为零矩阵, 从而 $\boldsymbol{A}$ 也只能为零矩阵. □

注 7.3.29. *下面给出定理 7.3.27 中的正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 计算步骤.*

(1) *求出实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式*

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s},$$

其中当 $i\neq j$ 时, 特征值 $\lambda_i\neq\lambda_j$, 而 n_i 为 λ_i 的代数重数.

(2) *由于 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化, λ_i 的代数重数 n_i 等于它的几何重数 m_i. 这说明特征子空间 $V_{\boldsymbol{A}}(\lambda_i)$ 存在一组基 $\boldsymbol{x}_{i,1},\boldsymbol{x}_{i,2},\dots,\boldsymbol{x}_{i,n_i}$. 利用 Gram–Schmidt 正交化过程, 不妨假定 $\boldsymbol{x}_{i,1},\boldsymbol{x}_{i,2},\dots,\boldsymbol{x}_{i,n_i}$ 是一个标准正交向量组.*

(3) *由于 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值之间的特征向量是相互正交, 我们得到了 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基*

$$\{\,\boldsymbol{x}_{i,j}\mid 1\le i\le s,1\le j\le n_i\,\}.$$

将这些列向量有序排列得到矩阵

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{x}_{1,1},\boldsymbol{x}_{1,2},\dots,\boldsymbol{x}_{1,n_1},\boldsymbol{x}_{2,1},\boldsymbol{x}_{2,2},\dots,\boldsymbol{x}_{2,n_2},\dots,\boldsymbol{x}_{s,1},\boldsymbol{x}_{s,2},\dots,\boldsymbol{x}_{s,n_s}),$$

则 $\boldsymbol{T}$ 是一个正交矩阵, 满足

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_1,\dots,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_2,\dots,\lambda_2,\dots,\lambda_s,\lambda_s,\dots,\lambda_s).$$

例 7.3.30. *考虑例 6.3.10 中的对称阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$. 我们已经计算出, 对于特征值 $\lambda=5$, $\boldsymbol{A}$ 有特征向量 $\boldsymbol{x}_1=(1,1,1)^{\mathsf{T}}$, 对于二重的特征值 $\lambda=-1$, $\boldsymbol{A}$ 有线性无关的特征向量 $\boldsymbol{x}_2=(-1,1,0)^{\mathsf{T}}$ 和 $\boldsymbol{x}_3=(-1,0,1)^{\mathsf{T}}$. 对 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 做正交化, 我们得到 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基* 这种计算一定要熟练

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

由此, 若我们取

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

那么 $\boldsymbol{T}$ 为正交矩阵, 满足

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\operatorname{diag}(5,-1,-1).$$

例 7.3.31. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶的实对称方阵. 证明: $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 的充要条件是存在正交方阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 同时为对角阵.

证明. 由于充分性是显然的, 我们只证明必要性.

由于 $\boldsymbol{B}$ 为实对称阵, 存在正交方阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\lambda_1\boldsymbol{I}_{n_1},\ldots,\lambda_s\boldsymbol{I}_{n_s}),$$

其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的所有不同的特征值, n_i 是 λ_i 的代数重数, 也是其几何重数. 令 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$. 则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 当且仅当

$$\operatorname{diag}(\lambda_1\boldsymbol{I}_{n_1},\ldots,\lambda_s\boldsymbol{I}_{n_s})\widetilde{\boldsymbol{A}}=\widetilde{\boldsymbol{A}}\operatorname{diag}(\lambda_1\boldsymbol{I}_{n_1},\ldots,\lambda_s\boldsymbol{I}_{n_s}).$$

又由于 $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ 互不相同, 上式成立当且仅当 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 为准对角形

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\operatorname{diag}(\widetilde{\boldsymbol{A}}_1,\ldots,\widetilde{\boldsymbol{A}}_s),$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$ 为 n_i 阶方阵. 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 相合, 故 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 是实对称阵, 从而主对角线上每个子块 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$ 也都是实对称阵, 于是存在 n_i 阶正交方阵 $\boldsymbol{P}_i$ 使得 $\boldsymbol{P}_i^{\mathsf{T}}\widetilde{\boldsymbol{A}}_i\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{D}_i$ 为对角阵. 此时,

$$\begin{aligned}&\operatorname{diag}(\boldsymbol{P}_1,\ldots,\boldsymbol{P}_s)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(\boldsymbol{P}_1,\ldots,\boldsymbol{P}_s)\\ =&\operatorname{diag}(\boldsymbol{P}_1,\ldots,\boldsymbol{P}_s)^{\mathsf{T}}\operatorname{diag}(\widetilde{\boldsymbol{A}}_1,\ldots,\widetilde{\boldsymbol{A}}_s)\operatorname{diag}(\boldsymbol{P}_1,\ldots,\boldsymbol{P}_s)\\ =&\operatorname{diag}(\boldsymbol{D}_1,\ldots,\boldsymbol{D}_s),\end{aligned}$$

而同时有

$$\begin{aligned}&\operatorname{diag}(\boldsymbol{P}_1,\ldots,\boldsymbol{P}_s)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(\boldsymbol{P}_1,\ldots,\boldsymbol{P}_s)\\ =&\operatorname{diag}(\boldsymbol{P}_1,\ldots,\boldsymbol{P}_s)^{\mathsf{T}}\operatorname{diag}(\lambda_1\boldsymbol{I}_{n_1},\ldots,\lambda_s\boldsymbol{I}_{n_s})\operatorname{diag}(\boldsymbol{P}_1,\ldots,\boldsymbol{P}_s)\\ =&\operatorname{diag}(\lambda_1\boldsymbol{I}_{n_1},\ldots,\lambda_s\boldsymbol{I}_{n_s}).\end{aligned}$$

这说明它们确实可以同时正交相似对角化. □

7.4 欧几里得空间的子空间 (※)

7.5 酉空间 (※)

第八章　实二次型

教材的 §2.2.5 简要地介绍了三维欧氏空间中的二次曲面. 由二次多项式定义, 我们有

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4y^2 + a_5yz + a_6z^2 + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10} = 0.$$

其中,

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4y^2 + a_5yz + a_6z^2$$

为二次项, 不为零,

$$a_7x + a_8y + a_9z$$

为一次项、线性项, 而 a_{10} 为常数项. 通过适当的坐标变换 (正交变换 + 平移变换; 这两种变换都能保持向量之间的距离不变, 其中正交变换是线性变换, 而平移变换一般不是线性变换), 可以把二次曲面 (quadratic surface) 归结成几种标准曲面:

(1) 椭球面, 单叶双曲面, 双叶双曲面, 二次锥面, 椭圆柱面, 双曲柱面; (它们没有线性项)

(2) 椭圆抛物面, 双曲抛物面, 抛物柱面. (它们有线性项)

其中, 柱面型二次曲面是退化的二次曲面. 各位同学需要自行阅读教材的 §2.2.5 中的相关内容, 做到能将各类二次曲面与其标准方程熟练对应.

在这一章里, 我们将系统学习如何将二次多项式化成标准形. 特别地,

(1) 我们在多元 (n 维) 中考虑;

(2) 我们研究什么是“标准”的.

8.1　二次型的矩阵表示

定义 8.1.1. 关于 n 个变量 $x_1, \ldots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

其中 $a_{ij} = a_{ji}$, 称为 $x_1, \ldots, x_n$ 的**二次型** (*quadratic form*) 或**二次形式**. 当所有 a_{ij} 都是实数、复数或者整数时, Q 称为**实二次型**、**复二次型**或者**整二次型**. 在本书里, 我们只考虑实二次型.

例 8.1.2. 对于

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 4x_2x_3,$$

有 $a_{11} = 3$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = -1$, $a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, $a_{13} = a_{31} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$, $a_{23} = a_{32} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

一般地, 实二次型可以表示成为

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \boldsymbol{X}^\mathsf{T} \boldsymbol{A} \boldsymbol{X},$$

其中 $\boldsymbol{X} = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n \times n}$. 由于 $a_{ij} = a_{ji}$, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是实对称阵. 在刚刚的例子里, 我们有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1/2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

这样的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 Q 的**矩阵**.

课堂练习 8.1.3. 写出以

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

为矩阵的关于 x_1, x_2, x_3 的二次型.

注 8.1.4. 若将上面的二次型 Q 视为关于 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ 的函数, 则相应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的元素也可以由该函数的特殊取值表示出来. 例如, 不妨设 $n = 3$, 那么, $a_{11} = Q(1, 0, 0)$, $a_{22} = Q(0, 1, 0)$, 而 $a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}(Q(1, 1, 0) - Q(1, 0, 0) - Q(0, 1, 0))$.

如果把 $\boldsymbol{X} = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ 看成 n 维线性空间 V 中的向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在某组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标, 那么二次型 Q 可以看成关于向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 的函数, 从而记作

$$Q(\boldsymbol{\gamma}) \coloneqq \boldsymbol{X}^\mathsf{T} \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}.$$

此时, $\boldsymbol{A}$ 也称为二次型 $\boldsymbol{Q}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的**矩阵**. 同一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在不同基下的坐标可能不同. 接下来, 我们考察二次型 Q 在不同基下的矩阵的变换公式.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的两组基. 设 $\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^n$ 在这两组基下的坐标分别为 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$, 即

$$\boldsymbol{\gamma}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{Y}.$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$, 即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}.$$

则坐标之间有变换公式

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X},\qquad \text{或等价地},\qquad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}.$$

设二次型 Q 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$. 此时,

$$Q(\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{Y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Y}.$$

故 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$. 这说明二次型 $\boldsymbol{Q}$ 在不同基下的矩阵是相合的.

我们知道相合关系是一种等价关系, 可以保持二次型 Q 的矩阵的秩不变, 因此, 二次型 Q 在任意一组基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩也被称为二次型 Q 的**秩**.

对于可逆方阵 $\boldsymbol{P}$, 我们称坐标变换

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$$

给出了一个**可逆**的或者**满秩**的**线性变换**. 请注意, 这只是坐标的一个保数乘保加法的变换操作, 并不是我们之前提到的线性空间到自身的线性变换.

例 8.1.5. 考虑二元的二次型

$$Q(\boldsymbol{\gamma})=3x_1^2-4x_1x_2-4x_2^2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}3&-2\\-2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}.$$

若采用可逆的线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$, 其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, 那么

$$\begin{aligned}Q(\boldsymbol{\gamma})&=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}3&-2\\-2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\\&=(y_1,y_2)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix}3&-2\\-2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (y_1, y_2)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= 3y_1^2 + 2y_1y_2 - 5y_2^2.
\end{aligned}
$$

当然, 由于 $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_2$, 最后的结果也可由

$$Q = 3(y_1 + y_2)^2 - 4(y_1 + y_2)y_2 - 4y_2^2$$

直接化简得到.

8.2 二次型的标准形

定义 8.2.1. 假定二次型 $Q(x_1, \ldots, x_n) = \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}$ 通过某个坐标的可逆线性变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 化为不含混合项 (交叉项) 的形式:

$$Q(x_1, \ldots, x_n)|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}} \coloneqq \boldsymbol{Y}^\top (\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}) \boldsymbol{Y} = \mu_1 y_1^2 + \mu_2 y_2^2 + \cdots + \mu_n y_n^2,$$

即

$$\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{P} = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n).$$

我们称该形式为二次型 Q 的**标准形** (*canonical form*).

注 8.2.2. 标准形显然不唯一. 例如

$$Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2 = y_1^2 + y_2^2,$$

其中 $y_1 = \sqrt{2}x_1$, $y_2 = \sqrt{3}x_2$.