专门讲：三重积分的概念、性质与计算

2023.4.14.

(一) 概念：设 Ω 为 R^3 中的有界闭区域，$f(x,y,z)$ 在 Ω 中有界，(I) 分割 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\cdots\cup\Omega_i\cup\cdots\cup\Omega_n$ 且子区域 Ω_i 的体积为 $V(\Omega_i)$，直径为 d_i，$i=1,2,\cdots,n$，$\lambda=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$.

(II) 近似，在 Ω_i 中任取一点 (ξ_i,η_i,τ_i)，作积 $f(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\cdot V(\Omega_i)$

(III) 求和：$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\tau_i)V(\Omega_i)$ —— Riemann和.

(IV) 极限：若 $\lim\limits_{\lambda\to0^+}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\tau_i)V(\Omega_i)$ 存在且唯一，即该极限的值与分割方法及 (ξ_i,η_i,τ_i) 的取法均无关，则称该极限为 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的三重积分，记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV$，即

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV \triangleq \lim_{\lambda\to0^+}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\tau_i)V(\Omega_i) \qquad (*)$$

可积，当 $f\in C(\Omega)$ 时，上述极限存在唯一，即 $f\in R(\Omega)$.

即 $f(x,y,z)$ 是区域 Ω 上 Riemann 可积的。

注(1)：今后，我们遇到的三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV$，绝大多数是 $f\in C(\Omega)$ 的，另外 dV 可用 $dxdydz$ 表示，即用平行于坐标面的平面去分割 Ω，可得 $dV=dxdydz$，

注(2)：因为三重积分与二重积分的定义方式相同，故三重积分也有与二重积分类似的十大性质。

(二) 三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dV$ 的定义性质：(设 $f,g\in R(\Omega)$)

(1)、$\iiint_\Omega (C_1 f(x,y,z)+C_2 g(x,y,z))dV = C_1\iiint_\Omega f dV + C_2\iiint_\Omega g dV$，(线性性质)

(2)、$\iiint_{\Omega_1\cup\Omega_2} f dV = \iiint_{\Omega_1} f dV + \iiint_{\Omega_2} f dV$，(关于积分区域的可加性)

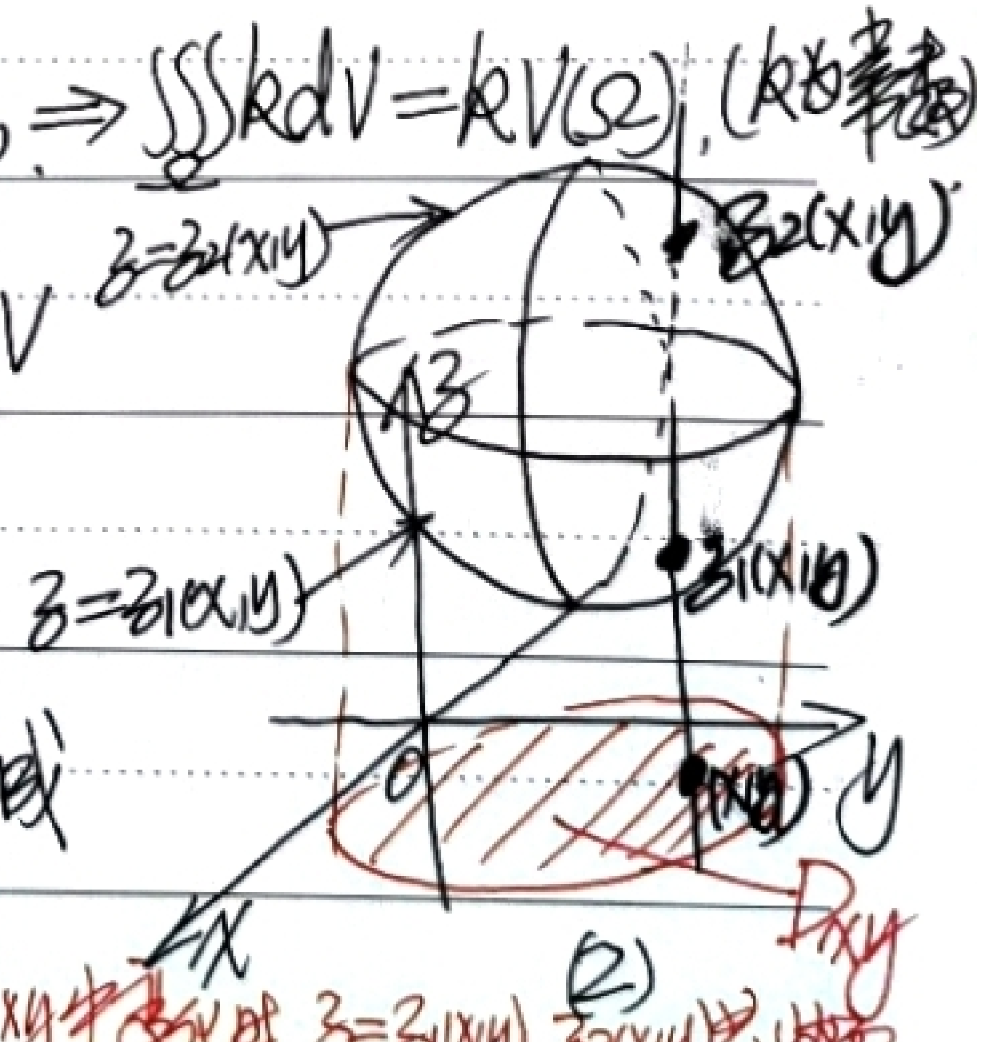
(3)、若 $f(x,y,z)\geq g(x,y,z)$，$\forall(x,y,z)\in\Omega$，则 $\iiint_\Omega f dV \geq \iiint_\Omega g dV$，(保序性)

(4)、若 f 在有界闭区域 Ω 中连续，则有三重积分的中值定理：

$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV = f(M_0)V(\Omega)$，$M_0\in\Omega$，此时，称 $f(M_0)=\iiint_\Omega f(x,y,z)dV \big/ V(\Omega)$ 为 f 在 Ω 中取值的积分平均值。

(5)、$\iiint_\Omega 1dV = V(\Omega)$：$\Omega$ 的体积 $\Rightarrow \iiint_\Omega k dV = kV(\Omega)$，($k$ 为常数)

(6)、$\left|\iiint_\Omega f(x,y,z)dV\right| \leq \iiint_\Omega |f(x,y,z)|dV$



(三)、三重积分的计算方法：

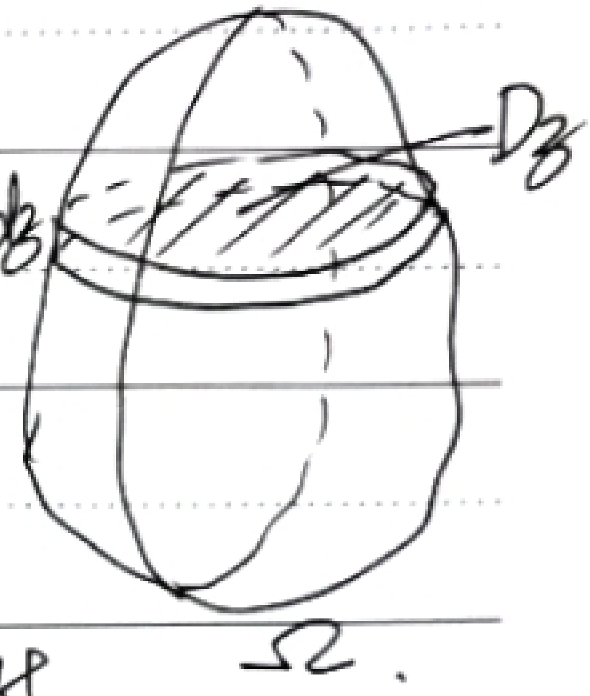
(1)、若 Ω 由 $\begin{cases} z_1(x,y)\leq z\leq z_2(x,y) \\ (x,y)\in D_{xy} \end{cases}$ 组成

$(x,y)\in D_{xy}$ 中固定时是一点 $(x,y)\in D_{xy}$ 中变化时，$z=z_1(x,y)$，$z_2(x,y)$ 是曲面

则 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_{D_{xy}}\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dxdy$

此法称为"先一后二"法. 若 D_{xy} 为 $\begin{cases} g_1(x)\le y\le g_2(x) \\ a\le x\le b \end{cases}$，则

$I=\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx=\int_a^b dx\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$



(2) 若 Ω 在 z 固定时，截~~面积~~(平面)为 D_z，$z\in[c,d]$，

则 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\int_c^d\left(\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy\right)dz$

此法称之为"先二后一"法，尤其是 $f(x,y,z)=g(z)$ 时，

特别适合用此法：$I=\int_c^d\left(\iint\limits_{D_z} g(z)dxdy\right)dz=\int_c^d g(z)S(D_z)dz$

$S(D_z)=\iint\limits_{D_z}1dxdy$ 是 D_z 的面积。

(3). 柱坐标变换法：令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$ 则 $dxdydz=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right|drd\theta dz$

$=rdrd\theta dz \Rightarrow I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega_1} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta dz$

(4). 球坐标变换法：令 $\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow dxdydz=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right|drd\theta d\varphi$

$=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \Rightarrow \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV=\iiint\limits_{\Omega_1} f(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

(5).

(四)例题：

例1. 证明：$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} f(z)dV = \pi\int_{-1}^{1} f(z)(1-z^2)dz$，其中 $f\in C$.

例2. 设 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ 且 $f\in C^1$，求 $F'(t)$.

例3. 用各种方法求椭球体 $\Omega:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 $V(\Omega)$.

注 例3 解法(一)：用广义球坐标变换 $\begin{cases} x=ar\sin\theta\cos\varphi \\ y=br\sin\theta\sin\varphi \\ z=cr\cos\theta \end{cases}$，$\begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le\pi \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases}$

$dxdydz=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right|drd\theta d\varphi=abcr^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$.

$V(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega} 1dV=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^1 abcr^2\sin\theta\, dr\right)d\theta\right)d\varphi=\frac{4}{3}\pi abc$.

解法(二)：先一后二法. $V(\Omega)=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} 1dz\right)dxdy$

$=2\iint\limits_{D_{xy}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$，$D_{xy}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$.

解法(三)：先二后一法：$V(\Omega)=\int_{-c}^{c}dz\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}} 1dxdy=\int_{-c}^{c}S(D_z)dz$

$=\int_{-c}^{c}\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz=\frac{4}{3}\pi abc$.

(五)作业：题X10.3　1/(1),(2)；2/(1),(2),(3)；3/(1),(3),(6)，7；8.