7月7日 复习课（反常积分）— 典型例题

例1（P307 T1(2)）

有无穷积分和瑕积分一定要分开

原 $= \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\mu} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\mu} dx$

①: $\frac{\arctan x}{x^\mu} \sim \frac{1}{x^{\mu-1}} \quad (x \to 0^+) \quad \Rightarrow \mu < 2$ 收敛

②: $\frac{\arctan x}{x^\mu} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^\mu} \quad (x \to \infty) \quad \Rightarrow \mu > 1$ 收敛

$\Rightarrow 1 < \mu < 2$ 收敛，其余发散

例2（P307 T2(5)）

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1+\sqrt{x})} dx$$

考虑 $\left|\frac{\sin x}{x(1+\sqrt{x})}\right| \leq \frac{1}{x(1+\sqrt{x})} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \quad (x \to +\infty)$ 收敛

$\left|\frac{\sin x}{x(1+\sqrt{x})}\right| \sim 1 \quad (x \to 0)$ 收敛

$\Rightarrow$ 绝对收敛

T2(6) $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p} dx$

考虑 $\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\right| \leq \frac{1}{x^p}$，则 $p<1$ 时 绝对收敛

若 $p \geq 1$，$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p} dx \overset{\frac{1}{x}=t}{=} \int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t^{2-p}} dt$，由例13.1.7知 $1 \leq p < 2$ 条件收敛

$p \geq 2$ 时 显然发散。

T3 – T6 后续给证明！

例2

P331

T_1 (5) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}dx$ 的收敛域

$x\to 0$ 时 $\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}\sim\frac{1}{x^{\alpha-2}}$

$\therefore$ $\alpha<3$ 时 $\int_0^1\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}dx$ 收敛

$x\to+\infty$ 时 $\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+x)}=\frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha(1+x)}\sim\frac{1-\cos 2x}{2x^{\alpha+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}}-\frac{\cos 2x}{x^{\alpha+1}}\right)$

~~当 $\alpha>-1$ 时~~ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha+1}}dx$ 在 $\alpha>0$ 时收敛

当 $\alpha>-1$ 时 $\int_1^A\cos 2x\,dx$ 关于 A 有界且 $\frac{1}{x^{\alpha+1}}\downarrow\to 0$

$\therefore$ 由 Dirichlet 判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^{\alpha+1}}dx$ 收敛

当 $\alpha\le -1$ 时. $\int_{n\pi}^{(n+\frac{1}{4})\pi}\frac{\cos 2x}{x^{\alpha+1}}dx\ge\int_{n\pi}^{(n+\frac{1}{4})\pi}\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}$

由 Cauchy 收敛准则 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^{\alpha+1}}dx$ 发散

$\therefore$ $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^{\alpha+1}}dx$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\alpha>-1$

综上收敛域为 $(0,3)$

T_2 (4) 不妨 $A>1$

$\beta(A)=\sup_{\alpha\in(1,+\infty)}\left|\int_A^{+\infty}\frac{\ln(1+\alpha^2)}{x^\alpha}dx\right|=\int_A^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{A^2}^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t}dt$

由于右式积分发散

$\therefore$ $\lim_{A\to\infty}\beta(A)\ne 0$ $\Rightarrow$ 不一致收敛

(5) $\because$ $\left|\int_1^A\cos x\,dx\right|$ 关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致有界.

且 $\frac{e^{-\alpha x}}{x^p}\le\frac{1}{x^p}$ 关于 x 单调递减. 且关于 α 一致趋于 0 $(x\to+\infty)$

$\therefore$ 由 Dirichlet 判别法知 $\int_1^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{x^p}dx$ 关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致收敛

(6) $\int_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$

$\frac{1}{1+x^p}$ 关于 x $\downarrow$ 且 $\frac{1}{1+x^p} \le 1$ 关于 p 一致有界

$\therefore$ 由 Abel 判别法知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx$ 关于 $p \in [0, +\infty)$ 一致收敛.

T7 (4)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x \left(\int_\alpha^\beta e^{-ux^2} du \right) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_\alpha^\beta x e^{-ux^2} du \right) dx$$

$\because$ $|xe^{-ux^2}| \le xe^{-\min\{\alpha,\beta\} x^2}$ 且 $\int_0^{+\infty} x e^{-\min\{\alpha,\beta\} x^2} dx$ 收敛

$\therefore$ $\int_0^{+\infty} xe^{-ux^2} dx$ 关于 $u \in [\alpha, \beta]$ 一致收敛

$\therefore$ 原式 $= \int_\alpha^\beta \left(\int_0^{+\infty} xe^{-ux^2} dx \right) du$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{1}{2u} du = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}$$

(5) 令 $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x(1+x^2)} dx$，显然可积

$\frac{dI(a)}{da} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+(ax)^2} \cdot \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(ax)^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$ 显然一致收

若 $a \ne 1$，对于 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(ax)^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{a^2}{a^2-1}}{1+(ax)^2} - \frac{\frac{1}{a^2-1}}{1+x^2} dx$

$$= \frac{a}{a^2-1} \arctan ax \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{a^2-1} \arctan x \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{a^2-1} - \frac{1}{a^2-1} \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a+1}$$

又∵ $I(0)=0 \Rightarrow I(\alpha)=\int_0^a I(t)\,dt=\int_0^a \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+t}\,dt=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$

当 $a=1$ 时，$I(1)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x(1+x^2)}\,dx \xlongequal{\text{直接计算}} \frac{\pi}{2}\ln 2$

综上 原积分 $=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$

T_8 (6) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx$

$=\int_0^{+\infty}\sin^4 x\, d(-\frac{1}{x})=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}(4\sin^3 x\cos x)\,dx$

其中 $\sin^3 x=\sin^2 x\cdot\sin x=\frac{1-\cos 2x}{2}\sin x=-\frac{1}{4}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x$

$\therefore \sin^3 x\cdot\cos x=(-\frac{1}{4}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x)\cos x=-\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 4x+\sin 2x}{2}\right)+\frac{3}{8}\sin 2x$

$=-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x$

$\therefore$ 原式 $=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}(-\frac{1}{2}\sin 4x+\sin 2x)\,dx$

$=-\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 4x}{4x}\,d(4x)+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\,d(2x)$

$=\frac{\pi}{4}$

P_{340} T_3 (9) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^2 (x-1)^2\sqrt[n]{\frac{2-x}{x-1}}\,dx$

$\xlongequal[x=1+t]{\text{目标 } \overset{x}{[1,2]}\to\overset{t}{[0,1]}} \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 t^2\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{n}}dt$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 t^{2-\frac{1}{n}}(1-t)^{\frac{1}{n}}\,dt$

$=\lim\limits_{n\to\infty}B(3-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}) \xlongequal[\text{定理13.37}]{} B(3,1)=\frac{1}{3}$

3. $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调、连续，$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，求证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

证明：若 $f(x)$ 无界，则显然 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散

$\therefore$ $f(x)$ 有极限（单调有界必收敛）

反证：若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ $(b\neq 0)$.

$\forall \varepsilon$. $\exists M$，$x>M$ 时，$|f(x)-b|<\varepsilon$ 即 $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$（不妨假设 $b-\varepsilon>0$）.

$\therefore \int_M^{+\infty} f(x)\,dx > \int_M^{+\infty} b-\varepsilon\,dx \to +\infty$.

而 $\int_a^{M} f(x)\,dx$ 收敛. $\therefore \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散，矛盾，得证.

#

4. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负，$\int_0^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，且当 $0<x<y$ 时，有

$$f(y) \le f(x) + \int_x^y g(t)\,dt$$

求证：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

证明：固定 x，则 $\forall\, y>x$ 有 $f(y) \le f(x) + \int_x^y g(t)\,dt$.

对 y 取 sup　$\sup\limits_{y>x} f(y) \le f(x) + \sup\limits_{y>x} \int_x^y g(t)\,dt$.

由于 $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛，且 $g(x)$ 非负. $\Rightarrow \sup\limits_{y>x}\int_x^y g(t)\,dt = \int_x^{+\infty} g(t)\,dt$.

再对 x 求 inf：$\inf\limits_{x}\sup\limits_{y>x} f(y) \le \inf\limits_{x}\left(f(x) + \int_x^{+\infty} g(t)\,dt\right) \le \varliminf\limits_{x\to\infty}\left(f(x) + \int_x^{+\infty} g(t)\,dt\right)$.

即 $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} f(x) \le \varliminf\limits_{x\to+\infty} f(x)$　$\Rightarrow$ 极限存在.

一个问题(级数与积分的关系).

若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，任一 $A_n \uparrow +\infty$　$(A_1 = a)$

记 $a_n = \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,dx$，则 $\sum a_n$ 收敛

附：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$　(反之亦然，用 Heine 归结原理)

若只给一个 $A_n \uparrow +\infty$ 是不够推原反常积分收敛的.

如：$f(x) = \cos x$.　$A_n = n\pi$.

则 $a_n = \int_{A_n}^{A_{n+1}} \cos x\,dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \cos x\,dx = 0$　所 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

但 $\int_0^{+\infty} \cos x\,dx$ 不收敛.

若再加上 f 非负，则又可以证明

$\forall A$. $\exists\, A_N < A \le A_{N+1}$

$$\sum_{n=1}^{N-1}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,dx \le \int_a^A f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{N}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,dx.\quad N\to\infty \text{ 得证.}$$

~~② 若 $\int_1^{+\infty} f(x)$ 收敛，则 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2}\,dx$?~~

P307

5 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负，$g(x)$ 单调递减趋于0，且 $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛

求证：$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\int_0^x f(t)dt = 0$

证明：我们只须研究 x 很大时的情况.

若有这样一个 M 满足 $0<M<x$.

则 $g(x)\int_0^x f(t)dt = g(x)\int_0^M f(t)dt + g(x)\int_M^x f(t)dt \overset{单调性}{\leq} g(x)\int_0^M f(t)dt + \underbrace{\int_M^x f(t)g(t)dt}_{*}$

$\forall \varepsilon>0$，由题意知：

$\exists M_2$ 使得当 $Y>M_2$ 时 $\int_Y^{+\infty} f(t)g(t)dt < \varepsilon$

且 $\exists M_1>M_2$ 使得当 $x>M_1$ 时 $0<g(x)<\varepsilon$

记 $A = \int_0^{M_1} f(t)dt$，当 $x>M_1$ 时

反证可以证明 A是有限值.

即有：$0 \leq g(x)\int_0^x f(t)dt \overset{①}{\leq} g(x)\int_0^{M_1} f(t)dt + \int_{M_1}^x f(t)g(t)dt \leq A\varepsilon + \varepsilon = (A+1)\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\int_0^x f(t)dt = 0.$

#

6. 条件不足. 反例：$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$，$g(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_0^x f(t)g(x-t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1}{x-t}dt.$$