38

第4讲：复习与小结 ~~(2022.1.7)~~ 2023.6.5

(一) Euler(欧拉)公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ i^2=-1$的推导。

(1°) 令$z_n=a_n+ib_n$，则$\sum_1^\infty z_n$ con $\Leftrightarrow \sum_1^\infty a_n, \sum_1^\infty b_n$均con.

(2°) 若$\sum_1^\infty |z_n|$ con，则$\sum_1^\infty z_n$必con，称之为绝对con.

利用：$0\le|a_n|\le|z_n|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，$0\le|b_n|\le|z_n|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$及$\sum_1^\infty|z_n|$ con $\Rightarrow$ $\sum_1^\infty a_n, \sum_1^\infty b_n$均绝对con $\Rightarrow \sum_1^\infty z_n$绝对con。

(3°) 对$\forall z\in\mathbb{C}$(复数集)，$\sum_{n=0}^\infty \frac{|z|^n}{n!}=e^{|z|}\Rightarrow \sum_{n=0}^\infty\frac{z^n}{n!}=e^z,\ \forall z\in\mathbb{C}$

(4°) 取$z=i\theta,\theta\in\mathbb{R}$，则$\sum_{n=0}^\infty\frac{(i\theta)^n}{n!}=e^{i\theta}=1+\frac{(i\theta)^1}{1!}+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\frac{(i\theta)^4}{4!}+\cdots$

$=(1+(-\frac{\theta^2}{2!})+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots)+i(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots)=\cos\theta+i\sin\theta.$

利用Euler公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，可推导出所有的三角公式。

(二). Wallis(瓦里斯)公式：$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$

(1°) 利用：$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x$，$\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})\Rightarrow$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\,dx$

$\Rightarrow \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\times 1 < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\times\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\times 1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{(2n+1)}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n}$，令 $\begin{cases} a_n = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \\ b_n = \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \end{cases}$

则从 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+8n+3} > 1 \Rightarrow a_n\uparrow$ 且 $a_n < \frac{\pi}{2}$，$\therefore \{a_n\}$ conv，

从 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4n^2+4n}{4n^2+4n+2(n+1)} < 1 \Rightarrow b_n\downarrow$ 且 $b_n > \frac{\pi}{2}$，$\therefore \{b_n\}$ conv.

且从 $a_n < \frac{\pi}{2} < b_n$ 及 $0 < \frac{\pi}{2} - a_n < b_n - a_n = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n(2n+1)} \to 0$

由夹逼准则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - a_n\right) = 0 \Rightarrow a_n \to \frac{\pi}{2}$，$b_n \to \frac{\pi}{2}\ (n\to\infty)$.

(三) Stirling(斯特林)公式：$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$，$\theta_n\in(0,1)$

1°) 当 $x\in(-1,1)$ 时，有 $\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$

$-\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right) = 2x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots\right)$

取 $x = \frac{1}{1+2n}$，则 $\frac{1+x}{1-x} = \left(1+\frac{1}{n}\right)$，$2x = \frac{2}{1+2n}$ 从而有

$\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots \Rightarrow$

$1 < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{(2n+1)^6} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}$

$\Rightarrow e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}} \Leftrightarrow 1 < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}}$

(2).

(2) 设 $a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ 则 $1<\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}}{e}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}$

一方面，$a_n>a_{n+1}$ 且 $a_n>0$ $\Rightarrow\{a_n\}$收敛，令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 另一方面

从: $a_ne^{-\frac{1}{12n}}<a_{n+1}e^{-\frac{1}{12(n+1)}}$ 知 $a_ne^{-\frac{1}{12n}}\uparrow a$，即有

$$a_ne^{-\frac{1}{12n}}<a<a_n\Rightarrow e^{-\frac{1}{12n}}<\frac{a}{a_n}<1\Leftrightarrow 1<\frac{a_n}{a}<e^{\frac{1}{12n}}$$

$0<\ln\frac{a_n}{a}<\frac{1}{12n}\Rightarrow 0<\frac{\ln\frac{a_n}{a}}{\frac{1}{12n}}<1$，令 $\frac{\ln\frac{a_n}{a}}{\frac{1}{12n}}=\theta_n$.

则 $\theta_n\in(0,1)$ 且 $a_n=ae^{\frac{\theta_n}{12n}}=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\Rightarrow$

$$n!=a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^ne^{\frac{\theta_n}{12n}},\quad (2n)!=a\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}.\quad (*)$$

(3) 利用 $\frac{\pi}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{(2^nn!)^4}{((2n)!)^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{2^{4n}\left(a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^ne^{\frac{\theta_n}{12n}}\right)^4}{\left(a\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{na^2}{2(2n+1)}\frac{e^{\frac{\theta_n}{3n}}}{e^{\frac{\theta_{2n}}{12n}}}$$

$=\frac{1}{4}a^2\Rightarrow a=\sqrt{2\pi}$

(4). $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^ne^{\frac{\theta_n}{12n}}$，$\theta_n\in(0,1)$.

(四). 当n充分大时，证明：(1) $\ln n!\sim\ln n^n$，(2). $C_{2n}^n\sim\frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$

(3). $\sqrt[n]{n!}\,e\sim n$.

(3).

(五) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致con的Abel判法：若

$\begin{cases} (1)\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \text{ 在 } I \text{ 上一致con}; \\ (2)\ \{v_n(x)\} \text{ 在 } I \text{ 上关于 } n \text{ 单调且一致有界}, |v_n(x)|\le M.\ M\text{与}n,x\text{无关}. \end{cases}$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致con.

当数项级数 $\sum_{1}^{\infty}a_n$ con时，将它视为函数项级数，则它在任意区间上都是一致con的。

(1) 设 $\sum_{1}^{\infty}a_n$ con. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{e^{nx}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致con；

(2). 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$, $x\in[-R,R)$ 或 $x\in(-R,R]$, $(R>0)$

则 $S(x)$ 在 $x=-R$ 处右C 或在 $x=R$ 处左C. 即有

$S(-R)=\lim_{x\to -R^+}S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-R)^n$, 或 $S(R)=\lim_{x\to R^-}S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$

(六). $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$ 在 I 一致con的Dirichlet判法：若

$\begin{cases} ①\ S_n(x)=u_1(x)+\cdots+u_n(x) \text{ 在 } I \text{ 上一致有界}: |S_n(x)|\le M.\ M\text{与}n,x\text{无关}. \\ ②\ \{v_n(x)\} \text{ 在 } I \text{ 上关于 } n \text{ 单减且一致趋零}. \end{cases}$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致con.

证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$ 在 $[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}]$ 上当 $\alpha>1$ 时绝对收敛且一致收敛；

依照一致conv的狄氏判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 中一致conv.

即 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)x^n}{1-x^n}\sin nx$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 中一致conv.

最后, 由一致conv的Abel判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)d_n(x)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 中一致conv.

即 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)\frac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 中一致conv;

综合上述 (1°)(2°) 知, $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)\frac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$ 在 $[0,1)$ 中一致conv。

~~四) 期末数学分析B1考试通知:~~

~~(1) 考试时间: 2022.1.13 上午 8:30~10:30;~~

~~(2) 考试地点: 5102, 5103;~~

~~(3) 座位按教务处的随机安排入座;~~

~~(4) 各位同学提前20分钟进入考场。~~

五) 第38讲作业: (2023.6.5上午布置)

ex7.1/14; ex7.2/1; ex7.3/2(1), 2(4), 2(5); ex7.4/1; 4.

第十讲(续)：一致收敛的狄利克雷判法与Abel判法应用：

(二) 设数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛，证明 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{e^{nx}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛。

证：(1°) 令 $u_n(x)=a_n$，$v_n(x)=\frac{1}{e^{nx}}$，$x\in[0,+\infty)$，则

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 在任意区间上都是一致收敛的。(对 $\forall \varepsilon>0$，N 都仅与 ε 有关，与 x 无关！)，从而 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 在 $[0,+\infty)$ 上是一致收敛；

(2°)，对 $\forall x\in[0,+\infty)$，关于 n 的函数列 $v_n(x)=\frac{1}{e^{nx}}=\left(\frac{1}{e^x}\right)^n$ 是单减且一致有界的：$|v_n(x)|=\frac{1}{e^{nx}}\le\frac{1}{e^0}=1=M$，这 M 与 x 取值无关，依一致收敛的Abel判法，$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，即 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{e^{nx}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛。

(三) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$，和函数为 $S(x)$，收敛域为 $(-R,+R]$ 或 $[-R,+R)$，则 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续，或在 $x=-R$ 处右连续。

(1).

证(1°). 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ conv. 要证 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续。

利用 $a_n x^n = (a_n R^n)(\frac{x}{R})^n$，令 $u_n(x)=a_n R^n$，$V_n(x)=(\frac{x}{R})^n$，

$x\in(-R,R]$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 作为数项级数，在 $(-R,R]$

中视为函数项级数是一致 conv 的，(2°). $V_n(x)=(\frac{x}{R})^n$

对 $\forall x\in(-R,R]$，关于 n 是单调且一致有界的：

$|V_n(x)| = |\frac{x}{R}|^n \le (\frac{R}{R})^n = 1 = M$. $\forall x\in(-R,R]$，$\forall n\in N$.

依一致 conv 的 Abel 判法，$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)V_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R,R]$ 中

是一致收敛于 $S(x)$ 的，再从每项 $a_n x^n$ 在 $(-R,R]$ 中皆连续，

知 $S(x)$ 在 $x=R$ 处也连续，即 $\lim_{x\to R^-} S(x) = S(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$，

同理可证：$\lim_{x\to -R^+} S(x) = S(-R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$。

(3). 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{e^{nx}\sqrt{n+x}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致 conv.

证：令 $u_n(x)=\sin x\sin nx$，$V_n(x)=\frac{1}{e^{nx}\sqrt{n+x}}$，$x\in[0,+\infty)$，$x\neq 2k\pi$，

则 $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)=\sin x(\sin 1x+\sin 2x+\cdots+\sin nx)$

(2)

即 $|S_n(x)| = |\sin x| \left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right| \le |\sin x| \frac{2}{2|\sin\frac{1}{2}x|} = \frac{|\sin x|}{|\sin\frac{1}{2}x|}$

$= \frac{|2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}|}{|\sin\frac{1}{2}x|} = 2|\cos\frac{x}{2}| \le 2 = M$. $\forall x \in [0,+\infty)$，$x \ne 2k\pi$.

而当 $x = 2k\pi$ 时，$u_n(x) = \sin x \sin nx \equiv 0 \Rightarrow S_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x) \equiv 0$.

$\Rightarrow |S_n(x)| = 0 \le 2 = M$. 综上知，对 $\forall x \in [0,+\infty)$，恒有：

$|S_n(x)| = |u_1(x) + \cdots + u_n(x)| \le M = 2$，即 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致有界.

且对 $\forall x \in [0,+\infty)$，$V_n(x) = \frac{1}{e^{nx}} \frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 关于 n 单减且 从

$0 < V_n(x) < \frac{1}{e^0} \frac{1}{\sqrt{n+0}} \downarrow 0 \ (n\to\infty)$ 知 $\{V_n(x)\}$ 一致趋零。

（对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 与 x 无关只与 ε 有关的 $N(\varepsilon)$，当 $n > N(\varepsilon)$ 时，$|V_n(x) - 0| < \varepsilon$ 恒成立）

依一致收敛的 Dirichlet 判别法：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) V_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{e^{nx}\sqrt{n+x}}$

在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛。

(四) 证明：$\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)\frac{x^n}{1-x^{2n}} \sin nx$ 在 $[0,1)$ 上一致收敛.

证：(1) 先证在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上，所给级数一致收敛；

利用 $\frac{1-x}{1-x^{2n}} = \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}} \Rightarrow \left|(1-x)\frac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx\right| \le \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{2n-1}}$

(3).

$< \frac{x^n}{1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$，$\forall x\in[0,\frac{1}{2}]$. 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ con，依优级数判

法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)\frac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上一致con；

(b) 再证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)\frac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 上一致con 即可。

令 $u_n(x)=\frac{(1-x)x^n}{1-x^n}\sin nx$，$v_n(x)=\frac{1}{1+x^n}$，$x\in(\frac{1}{2},1)$.

则对 $\forall x\in(\frac{1}{2},1)$，$v_n(x)$ 关于 n 单调递减且 $|v_n(x)|\le 1=M$，$\forall x\in(\frac{1}{2},1)$

$\forall n\in N^*$. 即 $\{v_n(x)\}$ 单调且一致有界（界 $M=1$ 与 x 无关）.

依Abel判别法，只要 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 中一致con即可.

在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)x^n}{1-x^n}\sin nx$ 中，令 $\begin{cases} a_n(x)=\sin nx, \\ b_n(x)=\frac{(1-x)x^n}{1-x^n} \end{cases}$，$x\in(\frac{1}{2},1)$

则 $|S_n(x)|=|a_1(x)+\cdots+a_n(x)|=|\sin x+\cdots+\sin nx|=\left|\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right|$

$\le\frac{2}{2|\sin\frac{1}{2}x|}\le\frac{1}{\sin\frac{1}{4}}\triangleq M$，$\forall x\in(\frac{1}{2},1)$. 即 $S_n(x)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 中

一致有界. 且 $b_n(x)=\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}<\frac{x^{n-1}}{1+x+\cdots+x^{n-2}}=b_{n-1}(x)$

即 $b_n(x)$ 关于 n 单减且一致趋零：$b_n(x)=\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}<\frac{x^n}{nx^{n-1}}$

$=\frac{x}{n}<\frac{1}{n}$，$\forall x\in(\frac{1}{2},1)$. $\frac{1}{n}\downarrow 0$ 时，对 $\forall\varepsilon>0$，N 取法与 x 无关。

若 $0<\alpha\leq 1$ 时，条件con且一致con；若 $\alpha<0$ 时，div。

(2) 设 $f(x)\in C[a,b]$，$F_0(x)=\int_a^x f(u)du$，$F_n(x)=\int_a^x F_{n-1}(u)du$，$n\in N^*$，

$x\in[a,b]$。证明：(1) $\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致con；(2) 令

$\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x)=S(x)$，$x\in[a,b]$，则 $\begin{cases} S'(x)-S(x)=f(x) \\ S(a)=0 \end{cases}$

(3) 用 $f(x)$ 表示 $S(x)$。

(1). (1°) 若 $\sum_{1}^{\infty}a_n$，$\sum_{1}^{\infty}b_n$ 均con，则 $\sum_{1}^{\infty}(c_1a_n+c_2b_n)$ 必con，$\forall c_1,c_2\in R$。

(2°) 若 $\sum_{1}^{\infty}a_n$，$\sum_{1}^{\infty}b_n$ 均abs con，则 $\sum_{1}^{\infty}(c_1a_n+c_2b_n)$ abscon，$\forall c_1,c_2\in R$，

(3°) 若 $\sum_{1}^{\infty}a_n$ con，$\sum_{1}^{\infty}b_n$ div，则 $\sum_{1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 必div，

(4°). $\sum_{1}^{\infty}a_n$ div，$\sum_{1}^{\infty}b_n$ div，则 $\sum_{1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 未必div，

(5°) $\sum_{1}^{\infty}a_n$ 条件con，$\sum_{1}^{\infty}b_n$ abscon，则 $\sum_{1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 条件con；

(6°) $\sum_{1}^{\infty}a_n$ 条件con，$\sum_{1}^{\infty}b_n$ 条件con，则 $\sum_{1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 未必条件con.

(7°). 若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，$\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$ 分别在 I_1，I_2 上一致con，$I_1\subset I_2$，

则 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)(x-x_0)^n$ 在 I_1 上一致con。