例 1

考虑线性空间 $F_2[x]$ 中的向量 (多项式)

$$p_1(x) = x^2 - 2x + 3, \quad p_2(x) = 2x^2 + x + 8, \quad p_3(x) = x^2 + 8x + 7$$

是否线性无关.

请翻开教材

1. 自学教材定理 5.6.2, 定理 5.6.3, 定义 5.6.7, 定理 5.6.4, 推论 5.6.1, 定理 5.6.4, 推论 5.6.2, 定义 5.6.8, 定理 5.6.6, 定义 5.6.9, 定理 5.6.7, 定理 5.6.8. 即, P146-148 的所有定义、定理、推论.
2. 例子请课后再看.
3. 请注意, P148 中指出: “除非特别申明, 本书只考虑有限维线性空间. 注意: 有限维的线性空间一定可以由一组向量生成.”

假设 V 是有限维线性空间, $\dim(V)=n$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基, $\boldsymbol{\beta}\in V$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下有坐标 $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, 即 $\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^n\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i$. 我们可以形式地将其写作

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix};$$

若 V 是列向量组成的空间, 采用这种表示是自然的. 特别地, 在固定基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的条件下, 我们可以把 β 一一对应于 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$, 即 n 维数组空间 F^n 中的一个列向量, 从而把有限维线性空间的讨论转换为有限维数组空间中的相应讨论, 而后者对于我们来说是比较熟悉的. 下面举两个小例子来说明这一点.

作为第一个例子, 假定我们有 V 中的一组向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m$, 并设它们在这组基下的坐标向量分别是 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$, 而 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$ 是以这些向量为列向量的 $n \times m$ 矩阵. 若具体而言有 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$, 那么

$$\text{对于 } 1 \leq j \leq m, \text{ 我们有 } \boldsymbol{\beta}_j = \sum_i \boldsymbol{\alpha}_i b_{ij}. \tag{1}$$

这说明我们可以将所含的抽象向量视作列向量来理解其运算规则. 此时, 我们可以将其记作

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix} \boldsymbol{B}.$$

假定此时另有向量组 $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$, 且它可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示, 于是存在 $\boldsymbol{C} = (c_{ij}) \in F^{n \times p}$, 使得

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdots & \gamma_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix} \boldsymbol{C},$$

即 $\gamma_j = \sum_i \boldsymbol{\beta}_i c_{ij}$. 从而, $\gamma_j = \sum_i (\sum_k \boldsymbol{\alpha}_k b_{ki}) c_{ij} = \sum_k \boldsymbol{\alpha}_k (\sum_i b_{ki} c_{ij})$, 即

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdots & \gamma_p \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix} \boldsymbol{B} \right) \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix} (\boldsymbol{BC}).$$

这提示我们, 关于矩阵的常见运算法则在这儿仍然适用.

作为第二个例子, 接着上面的讨论, 我们可以验证, $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{B}$ 是列满秩的. 这是因为 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m$ 是线性无关的, 当且仅当不存在不全为零的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得 $\sum_i \lambda_i \boldsymbol{\beta}_i = \mathbf{0}$. 但是左边的求和为

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) \boldsymbol{B} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}.$$

这说明列向量 $\boldsymbol{B}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^{\mathsf{T}}$ 是 $\mathbf{0} \in V$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标列向量, 从而为 $\mathbf{0} \in F^n$. 于是, 上面 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的线性无关性等价于 $\boldsymbol{B}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^{\mathsf{T}} = \mathbf{0}$ 仅存在零解, 而这当然等价于 $\boldsymbol{B}$ 是列满秩的.

注

接下来的讨论中，我们会反复地使用如下的事实：设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_m$ 是线性空间 V 中两组长度皆为 m 的向量组. 设第二组向量可以用第一组向量线性表示，即，存在 m 阶矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \dots & \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix} \boldsymbol{T}.$$

那么，若 $\boldsymbol{T}$ 为可逆矩阵，则这两组向量等价.

例 2

继续考虑线性空间 $F_2[x]$. 向量 (多项式) $1, x, x^2$ 是这个线性空间的一组基. 这说明 $F_2[x]$ 是 F 上的 3 维线性空间. 这三个向量与向量 $1, 1+x, 1+x^2$ 是等价的, 从而后者也构成了这个线性空间的一组基. 用矩阵来表示, 我们有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+x & 1+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

以及

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+x & 1+x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

注意: 这两个 “过渡矩阵” 互为逆矩阵.

例 3

1. 更一般地，线性空间 $F_n[x]$ 是 $n+1$ 维的，而 $1, x, x^2, \ldots, x^n$ 是它的一组基，称为 $F_n[x]$ 的标准基.
2. 对于 $F[x] = \bigcup_{n\geq 0} F_n[x]$ (多项式的全体构成的线性空间)，不难验证 $1, x, x^2, \ldots$ 是它的一组基，从而 $F[x]$ 是无穷维线性空间. 类似地可以证明，对于任意的非负整数 $n \geq 0$, $C^n[a, b]$ 都是无穷维线性空间.

例 4

矩阵空间 $F^{m\times n}$ 是 mn 维的，它有一组基 $\{\boldsymbol{E}_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$，其中 $\boldsymbol{E}_{ij} \in F^{m\times n}$ 仅在 (i, j) 处为 1，其它位置皆为 0. 这组基称为 $F^{m\times n}$ 的标准基.

例 5

考虑数域 F 上全体二阶对称矩阵的集合 $\mathrm{SM}_2(F)$. 任何一个"向量" $\boldsymbol{A} \in \mathrm{SM}_2(F)$ 形如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a\boldsymbol{\alpha}_1 + b\boldsymbol{\alpha}_2 + c\boldsymbol{\alpha}_3,$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 := \boldsymbol{E}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 := \boldsymbol{E}_{12} + \boldsymbol{E}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 := \boldsymbol{E}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这三个方阵构成了 $\mathrm{SM}_2(F)$ 的一组基. 特别地, $\dim(\mathrm{SM}_2(F)) = 3$.

- 与之相关地，不难看出二阶反对称矩阵的全体 $\mathrm{AM}_2(F)$ 是一维的，由矩阵 $\boldsymbol{E}_{12}-\boldsymbol{E}_{21}=\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ 生成.
- 更一般地，对称 n 阶方阵的全体 $\mathrm{SM}_n(F)$ 构成了 $F^{n\times n}$ 的 $n(n+1)/2$ 维子空间，而反对称 n 阶方阵的全体 $\mathrm{AM}_n(F)$ 构成了 $F^{n\times n}$ 的 $n(n-1)/2$ 维子空间. 请写出各自的一组基.
- 注意到任何一个方阵都可以表示成一个同阶对称矩阵和一个同阶反对称矩阵的线性组合，而一个方阵若同时为对称矩阵和反对称矩阵，则必为零矩阵. 用教材 §5.7.3 的语言来说，$F^{n\times n}$ 是子空间 $\mathrm{SM}_n(F)$ 与 $\mathrm{AM}_n(F)$ 的直和，写作 $F^{n\times n}=\mathrm{SM}_n(F)\bigoplus\mathrm{AM}_n(F)$.

例 6

对于 $\mathbb{R}$ 上次数不超过 n 的多项式的全体 $\mathbb{R}_n[x]$, 我们暂时令 P_e 是 $\mathbb{R}_n[x]$ 中偶函数 (*even function*) 的全体, P_o 是奇函数 (*odd function*) 的全体. 容易验证 P_e 与 P_o 都是 $\mathbb{R}_n[x]$ 的子空间. 任意多项式 $f \in \mathbb{R}_n[x]$, 都可以写成 $f = f_e + f_o$, 其中

$$f_e = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \in P_e,$$

而

$$f_o = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \in P_o.$$

显然同时为奇函数与偶函数的多项式为零多项式. 用 §5.7.3 的语言来说, $\mathbb{R}_n[x]$ 是子空间 P_e 与 P_o 的直和, 写作 $\mathbb{R}_n[x] = P_e \bigoplus P_o$.

容易验证,

$$\{x^m \mid \ 0 \le m \le n, \text{ 且 } m \text{ 为偶数}\}$$

构成了 P_e 的一组基, 从而 $\dim P_e = 1 + [\frac{n}{2}]$. 其中的方括号表示高斯取整函数. 对称地,

$$\{x^m \mid \ 0 \le m \le n, \text{ 且 } m \text{ 为奇数}\}$$

构成了 P_o 的一组基, 从而 $\dim P_o = [\frac{n+1}{2}]$.

例 7

考虑实系数的多项式

$$g_1 = 1 + x + x^2 + x^3, \quad g_2 = x + x^2 + x^3, \quad g_3 = x^2 + x^3, \quad g_4 = x^3,$$
$$h_1 = 1 - x - x^3, \quad h_2 = 1 + x, \quad h_3 = 1 + x - x^2, \quad h_4 = 1 - x + x^2.$$

1. 证明: g_1, g_2, g_3, g_4 与 h_1, h_2, h_3, h_4 都是线性空间 $\mathbb{R}_3[x]$ 的基.
2. 求从基 g_1, g_2, g_3, g_4 到基 h_1, h_2, h_3, h_4 的过渡矩阵.
3. 若 $\mathbb{R}_3[x]$ 中的元素 $p(x)$ 在基 g_1, g_2, g_3, g_4 下的坐标为 $\boldsymbol{X} = (1, -2, 0, 1)^{\mathsf{T}}$, 求 $p(x)$ 在基 h_1, h_2, h_3, h_4 下的坐标 $\boldsymbol{Y}$.

用行列式的方法来讨论 $(n-1)$ 阶连续可导函数空间 $C^{n-1}[a,b]$ 中的 n 个向量是否线性相关

假定有函数 $f_1(x),\dots,f_n(x)\in C^{n-1}[a,b]$. 若这 n 个线性相关, 则存在不全为零的 $\lambda_i\in\mathbb{R}$ 使得 $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x)=0$. 对该函数等式逐次求导, 我们得到了方程组

$$\begin{cases}\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\cdots+\lambda_n f_n(x)=0,\\ \lambda_1 f'_1(x)+\lambda_2 f'_2(x)+\cdots+\lambda_n f'_n(x)=0,\\ \qquad\vdots\\ \lambda_1 f_1^{(n-1)}(x)+\lambda_2 f_2^{(n-1)}(x)+\cdots+\lambda_n f_n^{(n-1)}(x)=0.\end{cases}\tag{2}$$

从而对于任意的 $x_0 \in [a,b]$, 关于 λ 的齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \cdots\cdots\cdots\cdots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) \cdots\cdots\cdots\cdots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) \cdots\cdots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{3}$$

都有非零解 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^\mathsf{T}$, 而这等价于说线性方程组 (3) 的系数矩阵的行列式是零. 又由于该事实对任意的 $x_0 \in [a,b]$ 都成立, 这说明, 若函数 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ 线性相关, 则线性方程组 (3) 的系数矩阵的行列式是零函数.

为此，我们称该行列式为函数 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ 的朗斯基行列式 (Wronskian determinant)，并将其记作 $W[f_1, f_2, \ldots, f_n]$，即有

$$W[f_1, f_2, \ldots, f_n](x) := \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots\cdots & f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \cdots\cdots & f'_n(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots\cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

定理 8

设 $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C^{n-1}[a,b]$. 若存在 $[a,b]$ 中的一个点 x_0 使得 $W[f_1, f_2, \ldots, f_n](x_0) \neq 0$, 则 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ 线性无关. (注意: 这不是充要条件)

注意到多项式函数是无穷阶可微的, 作为上面定理的应用, 我们看到

$$W[1, x, x^2, x^3] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12$$

恒不为零, 从而 $1, x, x^2, x^3$ 是 $\mathbb{R}_3[x] \subsetneq C^3[a,b]$ 中线性无关的向量 (这儿是 $F_3[x]$ 在 $F = \mathbb{R}$ 时的情形). 当然, 这一事实是显而易见的.

受此启发, 我们考察一个特例, 使得上面的定理成为充要条件. 设 $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbb{R}_{n-1}[x] \subsetneq C^{n-1}[a,b]$, 那么存在矩阵 $\boldsymbol{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & \cdots & x^{n-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{T}.$$

从而对于 $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ 有高阶导数满足

$$\begin{pmatrix} f_1^{(i)} & f_2^{(i)} & \cdots & f_n^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{(i)} & x^{(i)} & \cdots & (x^{n-1})^{(i)} \end{pmatrix} \boldsymbol{T}.$$

这说明

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & \cdots & f_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & \cdots & x^{n-1} \\ 1^{(1)} & x^{(1)} & \cdots & (x^{n-1})^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1^{(n-1)} & x^{(n-1)} & \cdots & (x^{n-1})^{(n-1)} \end{pmatrix} \boldsymbol{T}.$$

由此不难看出

$$W[f_1, f_2, \ldots, f_n] = W[1, x, \ldots, x^{n-1}] \det(\boldsymbol{T}).$$

由于 $W[1, x, \ldots, x^{n-1}] = \prod_{i=1}^{n} i!$ 是 $\mathbb{R}$ 中的非零数，同时 $\det(\boldsymbol{T})$ 也是实数，故 $W[f_1, f_2, \ldots, f_n]$ 也是实数，并且

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \text{ 线性相关} \Leftrightarrow f_1, f_2, \ldots, f_n \text{ 与基 } 1, x, \ldots, x^{n-1} \text{ 不等价} \Leftrightarrow \boldsymbol{T} \text{ 不可逆}$$
$$\Leftrightarrow \det(\boldsymbol{T}) = 0 \Leftrightarrow W[f_1, f_2, \ldots, f_n] = 0.$$

与上面的定理作比较后，我们发现，当把考察的函数空间变小后，我们得到了更强的结果.

§5.7 子空间的运算（※）

本节打星号. 希望课后仔细阅读教材与教案, 有疑问的欢迎讨论.

线性变换

数学里一个重要的原理是: 研究一个数学对象时, 单单研究这一对象本身是不够的, 我们需要研究这个对象与其它相近对象之间的联系, 才能更好地了解这一数学对象. 具体到我们的线性空间, 单单研究线性空间是不全面的, 我们需要了解这个线性空间与其它线性空间之间的联系, 而这一联系是通过映射建立起来的. 因为我们处理的是线性的空间, 因此, 要求相关的映射保持线性的结构也是自然而合理的.

例 9

设 F 为数域, $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in F^{n\times p}$, 则 $\boldsymbol{AB} \in F^{m\times p}$. 固定矩阵 $\boldsymbol{A}$, 考虑两个线性空间之间的映射

$$\mathscr{A}: F^{n\times p} \to F^{m\times p}, \qquad \boldsymbol{B} \mapsto \boldsymbol{AB}.$$

则由矩阵乘法的性质可以得到映射 $\mathscr{A}$ 满足以下两个条件:

1. 对于任意的 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2 \in F^{n\times p}$, 有 $\mathscr{A}(\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2) = \mathscr{A}(\boldsymbol{B}_1) + \mathscr{A}(\boldsymbol{B}_2)$, 即, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2) = \boldsymbol{AB}_1 + \boldsymbol{AB}_2$.
2. 对于任意的 $\boldsymbol{B} \in F^{n\times p}$, 对于任意的 $\lambda \in F$, 有 $\mathscr{A}(\lambda\boldsymbol{B}) = \lambda\mathscr{A}(\boldsymbol{B})$, 即, $\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B}) = \lambda(\boldsymbol{AB})$.

定义 10

设 V, V' 为数域 F 上的两个线性空间. 若映射 $\mathscr{A}: V \to V'$ 满足条件

- (保加法) 对于任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, 有 $\mathscr{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathscr{A}(\boldsymbol{x}) + \mathscr{A}(\boldsymbol{y})$;
- (保数乘) 对于任意的 $\boldsymbol{x} \in V$ 和 $\lambda \in F$, 有 $\mathscr{A}(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \mathscr{A}(\boldsymbol{x})$,

则称 $\mathscr{A}$ 是 V 到 V' 的一个线性映射. 若进一步有 $V = V'$, 则称 $\mathscr{A}$ 是 V 上的一个线性变换 (*linear transformation*) 或线性算子 (*linear operator*).

线性变换的例子

例 11

考察数组空间 F^n, 将里面的元素看成列向量. 若 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$, 则

$$\mathscr{A}: F^n \to F^n, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

是 F^n 上的一个线性变换.

事实上, 我们将证明, F^n 上的每个线性变换都具有这样的形式.

例 12

特别地, 我们看一下平面 $\mathbb{R}^2$ 上的一些典型的线性变换.

1. $\mathscr{A}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{x} \mapsto 3\boldsymbol{x}$, 是平面上对向量伸长 3 倍的线性变换, 对应的矩阵是 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
2. $\mathscr{A}_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(a, b)^{\mathsf{T}} \mapsto (a, 0)^{\mathsf{T}}$, 是平面上投影到 x 轴的线性变换, 对应的矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $\mathscr{A}_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(a, b)^{\mathsf{T}} \mapsto (a, -b)^{\mathsf{T}}$, 是平面上关于 x 轴作对称的线性变换, 对应的矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
4. $\mathscr{A}_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(a, b)^{\mathsf{T}} \mapsto (-b, a)^{\mathsf{T}}$, 是平面上关于原点 $\boldsymbol{O}$ 作逆时针旋转 $90°$ 的线性变换, 对应的矩阵是 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

例 13

集合

$$C^\infty[a,b] := \{\text{闭区间 } [a,b] \text{ 上的无穷可微的函数}\}$$

是 $\mathbb{R}$ 上的无穷维线性空间. 映射

$$\mathscr{A}_1(f) := f', \qquad \text{(求导)}$$

$$\mathscr{A}_2(f) := g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{(求变上限积分)}$$

是 $C^\infty[a,b]$ 上的两个典型的线性变换.

例 14

对任何线性空间 V,

$$\begin{aligned} \mathscr{E}: V \to V, \quad & \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}, & \text{(恒等变换)} \\ \mathscr{O}: V \to V, \quad & \boldsymbol{x} \mapsto \mathbf{0}, & \text{(零变换)} \end{aligned}$$

是 V 上两个平凡的线性变换.

定理 15 (线性映射的性质)

用前面定义 *10* 中的记号，则

1. $\mathscr{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. (代入 $\lambda = 0$)
2. $\mathscr{A}(-\boldsymbol{x}) = -\mathscr{A}(\boldsymbol{x})$. (代入 $\lambda = -1$)
3. $\mathscr{A}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathscr{A}(\boldsymbol{x}_i)$，其中 $\lambda_i \in F$, $\boldsymbol{x}_i \in V$.
4. 若 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ 是 V 中线性相关的向量，则 $\mathscr{A}(\boldsymbol{x}_1), \ldots, \mathscr{A}(\boldsymbol{x}_n)$ 亦线性相关. 作为逆否命题，若 $\mathscr{A}(\boldsymbol{x}_1), \ldots, \mathscr{A}(\boldsymbol{x}_n)$ 线性无关，则 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ 亦线性无关. 显然，由 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ 线性无关，我们无法推出 $\mathscr{A}(\boldsymbol{x}_1), \ldots, \mathscr{A}(\boldsymbol{x}_n)$ 亦线性无关.

定义 16

设 $\mathscr{A}: V_1 \to V_2$ 是向量空间之间的线性映射, 则 $\mathscr{A}$ 的核 (*kernel*) 定义为

$$\ker(\mathscr{A}) := \{\boldsymbol{x} \in V_1 \mid \mathscr{A}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \in V_2\},$$

而 $\mathscr{A}$ 的像(*image*) 或值域(*range*) 定义为

$$\operatorname{im}(\mathscr{A}) = \mathscr{A}(V_1) := \{\mathscr{A}(\boldsymbol{x}) \in V_2 \mid \boldsymbol{x} \in V_1\}.$$

不难验证如下的事实 (留作习题):

定理 17

设 $\mathscr{A}: V_1 \to V_2$ 是向量空间之间的线性映射, 则 $\ker(\mathscr{A})$ 是 V_1 的子空间, 而 $\operatorname{im}(\mathscr{A})$ 是 V_2 的子空间.

例 18

对于由给定方阵 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$ 定义的线性映射 $\mathscr{A}: F^n \to F^m$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 其像空间 $\mathrm{im}(\mathscr{A}) = \mathscr{A}(F^n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列空间, 其线性空间维数为 $\boldsymbol{A}$ 的列秩, 即 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$. 而 $\mathscr{A}$ 的核空间 $\ker(\mathscr{A})$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解空间. 特别地,
$n = \dim(\ker(\mathscr{A})) + \dim(\mathrm{im}(\mathscr{A}))$.

注

更一般地, 设 $\mathscr{A}: V_1 \to V_2$ 是向量空间之间的线性映射, 则

$$\dim(V_1) = \dim(\ker(\mathscr{A})) + \dim(\mathrm{im}(\mathscr{A})).$$

其证明可大致勾勒如下: 先找到 $\ker(\mathscr{A})$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 接下来将其扩充为 V_1 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_t$, 并且验证 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}_1), \ldots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}_t)$ 构成 $\mathrm{im}(\mathscr{A})$ 的一组基.

线性变换的矩阵

之前在介绍抽象的线性空间时, 在确定一组基的前提下, 我们通过向量的坐标将对抽象向量的讨论, 可以转化为对相应的列向量、矩阵等的讨论. 这儿, 对于线性变换的处理也是类似的.

设 V 是数域 F 上的有限维线性空间, $\dim(V) = n$, 而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基. 设 $\mathscr{A}$ 是 V 上的一个线性变换.

线性变换在一组基下的矩阵

对于 $1 \le i \le n$, 向量 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i) \in V$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一地线性表示出来:

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\boldsymbol{\alpha}_j, \qquad \text{其中 } a_{ji} \in F. \tag{4}$$

形式上, 我们可以采用矩阵的写法, 将其写作

$$\begin{pmatrix} \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1) & \cdots & \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}}.$$

之前我们已经提到，我们以将抽象向量视为列向量的方式，即式 (4) 中所表达的方式，来理解上面的矩阵乘法. 其中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵. 更进一步地，我们将 $\begin{pmatrix} \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1) & \cdots & \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n) \end{pmatrix}$ 简记为 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，从而有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix} \boldsymbol{A}.$$