第20讲：n重积分 $\iint\cdots\int_{\Omega} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$

(2023.4.21)

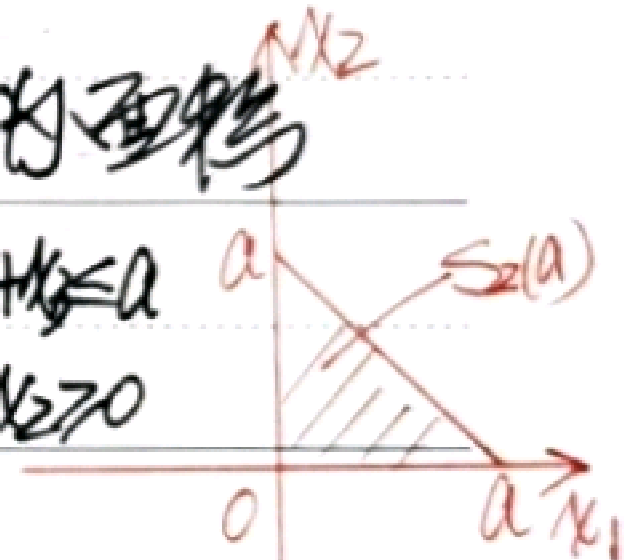
(一) 求n维单形(simple shape) $S_n(a)$：

"$0\le x_1+x_2+\cdots+x_n\le a$，$x_1\ge 0, x_2\ge 0,\cdots,x_n\ge 0$，$(a>0)$ 的"体积"

或测度(measure) $V(S_n(a))$

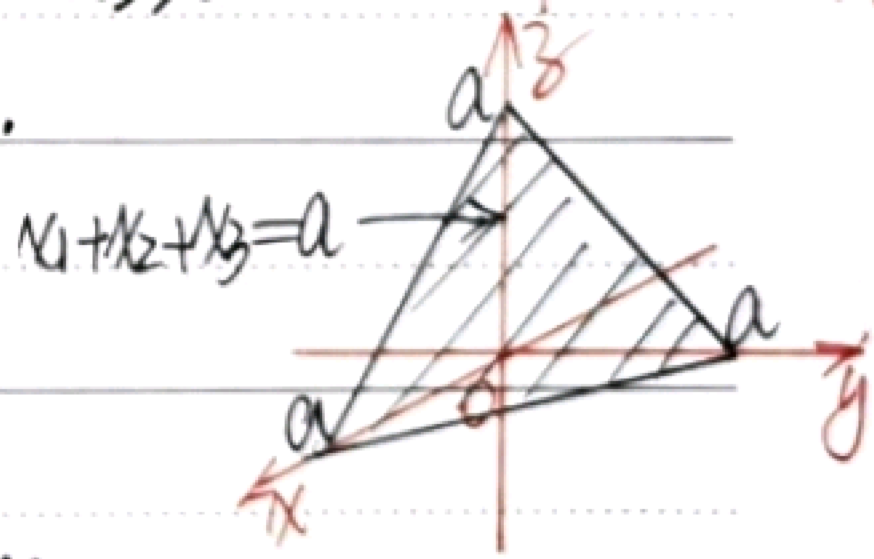
(1°) 一维单形 $S_1(a)$：$0\le x_1\le a$ 之测度为长度 $V(S_1(a))=a$；

二维单形 $S_2(a)$：$\begin{cases}0\le x_1+x_2\le a\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases}$ 之测度为面积



$V(S_2(a))=\frac{1}{2}a^2$；三维单形 $S_3(a)$：$\begin{cases}0\le x_1+x_2+x_3\le a\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\\ x_3\ge 0\end{cases}$

的测度为体积 $V(S_3(a))=\frac{1}{6}a^3=\frac{a^3}{3!}$.



(2°) 可以证明：$V(S_n(a))=\frac{a^n}{n!}$.

证：$V(S_n(a))=\underset{S_n(a)}{\int\int\cdots\int} 1\,dx_1dx_2\cdots dx_n$

作可逆线性变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & & 0\\ & a & \\ 0 & & \ddots & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}$. 则 $dx_1dx_2\cdots dx_n=$

$\left|\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}\right|du_1du_2\cdots du_n=\begin{vmatrix}a & & 0\\ & a & \\ 0 & & \ddots & a\end{vmatrix}du_1du_2\cdots du_n$

$=a^n du_1du_2\cdots du_n$. (1)

此时，$S_n(a) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} S_n(1)$

$$V(S_n(a)) = a^n \underset{u_1+u_2+\cdots+u_n\le 1}{\int\int\cdots\int} 1\,du_1du_2\cdots du_n = a^n V(S_n(1))$$

而 $V(S_n(1)) = \int_0^1 \Big(\underset{u_2+u_3+\cdots+u_n\le 1-u_1}{\int\int\cdots\int} 1\,du_2du_3\cdots du_n\Big)du_1$

$$= \int_0^1 (1-u_1)^{n-1} V(S_{n-1}(1))\,du_1 = \frac{V(S_{n-1}(1))}{-1}\int_0^1 (1-u_1)^{n-1} d(1-u_1)$$

$$= \frac{V(S_{n-1}(1))}{n} = \frac{1}{n(n-1)}V(S_{n-2}(1)) = \cdots = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\times\cdots\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\times 1 = \frac{1}{n!}$$

故 $V(S_n(a)) = \frac{a^n}{n!}$，$\forall n\in N^*$ （结1）

（三）设 $B_n(a): x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \le a^2$ $(a>0)$ 表示半径为 a 的 n 维超球体（ball），当 $a>0$ 时，求 $B_n(a)$ 的 n-维体积 $V(B_n(a))$.

解：（1°）$V(B_1(a)) = 2a$（长度），$V(B_2(a)) = \pi a^2$（面积）；

$V(B_3(a)) = \frac{4}{3}\pi a^3$（体积）

（2°）可以证明：$V(B_n(a)) = (\sqrt{\pi}a)^n / \Gamma(\frac{n}{2}+1)$，$\forall n\in N^*$.（结2）

其中 $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$ $(s>0)$ 为伽玛函数（多13.5.1）

证：∵ $V(B_n(a))=\underset{(\frac{x_1}{a})^2+(\frac{x_2}{a})^2+\cdots+(\frac{x_n}{a})^2\le 1}{\int\int\cdots\int} 1\,dx_1dx_2\cdots dx_n$

∴ 当作可逆线性变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & & 0\\ & a & \\ 0 & & \ddots\ a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}$ 时.

$dx_1dx_2\cdots dx_n=a^n du_1du_2\cdots du_n$ 且 $u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2\le 1$

$V(B_n(a))=a^n\underset{u_1^2+\cdots+u_n^2\le 1}{\int\int\cdots\int} du_1du_2\cdots du_n=a^nV(B_n(1))$

而 $V(B_n(1))=\underset{u_1^2+u_2^2\le 1}{\int\int}\Big(\underset{u_3^2+\cdots+u_n^2\le 1-u_1^2-u_2^2}{\int\int\cdots\int} 1\,du_3du_4\cdots du_n\Big)du_1du_2$

$=\underset{u_1^2+u_2^2\le 1}{\int\int}(1-u_1^2-u_2^2)^{\frac{n-2}{2}}V(B_{n-2}(1))du_1du_2 \xrightarrow[u_2=r\sin\theta]{u_1=r\cos\theta}$

$V(B_{n-2}(1))\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1(1-r^2)^{\frac{n}{2}-1}rdr\Big)d\theta=\frac{2\pi}{n}V(B_{n-2}(1))$

从而 $V(B_{2n}(1))=\frac{2\pi}{2n}V(B_{2n-2}(1))=\frac{2\pi}{2n}\frac{2\pi}{2n-2}V(B_{2n-4}(1))=\cdots$

$=\frac{2\pi}{2n}\cdot\frac{2\pi}{2n-2}\cdot\frac{2\pi}{2n-4}\cdot\cdots\frac{2\pi}{4}\cdot V(B_2(1))$，且 $V(B_2(1))=\pi$.

故 $V(B_{2n}(1))=\frac{\pi^n}{n!}$，$\forall n\in N^*\Rightarrow V(B_{2n}(a))=\frac{a^{2n}\pi^n}{n!}$.（得证）

(3).

$$V(B_{2n-1}(1))=\frac{2\pi}{2n-1}\cdot\frac{2\pi}{2n-3}\cdot\frac{2\pi}{2n-5}\cdots\frac{2\pi}{5}\cdot\frac{2\pi}{3}V(B_1(1))$$

且 $V(B_1(1))=2$，$\therefore V(B_{2n-1}(1))=2^n\pi^{n-1}/(2n-1)!! \Rightarrow$

$$V(B_{2n-1}(a))=a^{2n-1}V(B_{2n-1}(1))=a^{2n-1}2^n\pi^{n-1}/(2n-1)!!,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ (\text{式}4)$$

(式3)，(式4)可用伽马函数 $\Gamma(s)$ 统一表示为：

$$V(B_n(a))=(\sqrt{\pi}a)^n/\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

利用(式4)，(式3)可知：

$$V(B_4(a))\xlongequal{n=2}\pi^2a^4/2;\quad V(B_5(a))\xlongequal{n=3}a^5\cdot2^3\cdot\pi^2/5!!=\frac{8}{15}\pi^2a^5;$$

$$V(B_6(a))\xlongequal{n=3}a^6\pi^3/3!=\frac{1}{6}\pi^3a^6;\ \cdots,V(B_{10}(a))=\frac{\pi^5a^{10}}{120}.$$

(三)用正交变换 $\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 化简 n 重积分：

$$I=\iint\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le1}f(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)dx_1dx_2\cdots dx_n,$$

其中 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq\theta$ 是常向量，$f\in C$.

例1. 化简 $I=\iiint\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\le1}f(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4$

解：令 $\lambda=(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)^{\frac{1}{2}}$，则 $\lambda>0$，设4阶方阵 A

$$=\begin{pmatrix} \frac{a_1}{\lambda} & \frac{a_2}{\lambda} & \frac{a_3}{\lambda} & \frac{a_4}{\lambda} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$ 为正交阵，即满足 $AA^T=E=A^TA$

作正交变换：$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 则 $\lambda u_1=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4$

且 $dx_1dx_2dx_3dx_4=\left|\frac{\partial(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial(u_1,u_2,u_3,u_4)}\right|du_1du_2du_3du_4=\frac{du_1du_2du_3du_4}{|\pm 1|}$

$u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=(u_1\ u_2\ u_3\ u_4)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}=(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)A^TA\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\le 1$.

$$I=\iiiint\limits_{u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2\le 1} f(\lambda u_1)\,du_1du_2du_3du_4=\int_{-1}^{1}f(\lambda u_1)\Big(\iiint\limits_{u_2^2+u_3^2+u_4^2\le 1-u_1^2} 1\,du_2du_3du_4\Big)du_1$$

$$=\int_{-1}^{1}f(\lambda u_1)\frac{4}{3}\pi(1-u_1^2)^{\frac{3}{2}}du_1=\begin{cases} 0, & \text{若} f \text{为奇} \\ \frac{8\pi}{3}\int_0^1 f(\lambda u_1)(1-u_1^2)^{\frac{3}{2}}du_1, & f\text{为偶} \\ \text{其它}. \end{cases}$$

例2. 化简 $I=\iint\cdots\int\limits_{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\le 1} f(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5)\,dx_1dx_2dx_3dx_4dx_5$

解：令 $\lambda=(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2)^{\frac{1}{2}}$，则 $\lambda>0$，取5阶正交阵

$$A=\begin{pmatrix} \frac{a_1}{\lambda} & \frac{a_2}{\lambda} & \frac{a_3}{\lambda} & \frac{a_4}{\lambda} & \frac{a_5}{\lambda} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix},$$ 作正交变换 $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$

则 $dx_1dx_2dx_3dx_4dx_5 = \dfrac{du_1du_2du_3du_4du_5}{\left|\dfrac{\partial(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)}{\partial(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)}\right|} = \dfrac{du_1du_2du_3du_4du_5}{||A||}$

$= du_1du_2du_3du_4du_5$ 且 $u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2 \le 1$

$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5 = \lambda u_1 . \Rightarrow$

$$I = \iiiint\!\!\int_{u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2\le 1} f(\lambda u_1)\,du_1du_2du_3du_4du_5$$

$$= \int_{-1}^{1} f(\lambda u_1)\,du_1 \iiiint_{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2\le (1-u_1^2)^{\frac{2}{2}}} 1\,du_2du_3du_4du_5$$

$$= \int_{-1}^{1} f(\lambda u_1)\,\frac{\pi^2\left((1-u_1^2)^{\frac{1}{2}}\right)^4}{2}\,du_1 = \frac{\pi^2}{2}\int_{-1}^{1}(1-u_1^2)^2 f(\lambda u_1)\,du_1 .$$

余类推。

(四)作业:

(1). 推导半径为a的n维球体 $B_n(a)$ 的体积公式 $(a>0)$;

(2) 化简: $I = \iint\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_6^2\le 1} f(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5+a_6x_6)\,dx_1\cdots dx_6$

$(a_1,a_2,\ldots,a_6)\neq 0$, $f\in C$

(3) ex10.4/1; ch10综/3.