问题 1 (2023, 数学一)

已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{O}$. $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 记矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3. 则 (　).

(A) $r_1 \leq r_2 \leq r_3$　(B) $r_1 \leq r_3 \leq r_2$　(C) $r_3 \leq r_2 \leq r_1$　(D) $r_2 \leq r_1 \leq r_3$

问题 2 (2023, 数学二、三)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, $\boldsymbol{M}^*$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的伴随矩阵. 则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^* = (\quad)$.

(A) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$

问题 3 (2023, 数学一)

下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是 (　　)

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$　　(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

问题 4 (2023, 数学一、二、三)

已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示, 也可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示, 则 $\boldsymbol{\gamma}=(\quad)$.

(A) $k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}, k\in\mathbb{R}$.

(B) $k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix}, k\in\mathbb{R}$.

(C) $k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, k\in\mathbb{R}$.

(D) $k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix}, k\in\mathbb{R}$.

问题 5 (2023, 数学二、三)

二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 - 4(x_2 - x_3)^2$ 的规范形为 (   )

(A) $y_1^2 + y_2^2$ (B) $y_1^2 - y_2^2$ (C) $y_1^2 + y_2^2 - 4y_3^2$ (D) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

问题 6 (2023, 数学一)

已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3$. 若 $\boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, 则 $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 =$ __________.

问题 7 (2023, 数学二、三)

方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 = 2 \end{cases}$ 有解, 其中 a, b 为常数. 若 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 4$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} =$ __________.

问题 8 (2023, 数学一)

已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3,$$
$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_2y_3.$$

1. 求可逆变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成 $g(y_1, y_2, y_3)$.
2. 是否存在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成 $g(y_1, y_2, y_3)$?

问题 9 (2023, 数学二、三)

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足: 对任意 x_1, x_2, x_3 均有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$.

1. 求 $\boldsymbol{A}$;
2. 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$.