例 1

用初等变换的方法把二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$ 化为标准形.

例 2

用初等变换的方法把二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$ 化为标准形.

例 3

用初等变换的方法把二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$ 化为标准形.

注 4

1. 由于初等变换的选取的不同，最终结果中的标准形可能不同.
2. 我们也可以把矩阵写成 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I})$ 的形式，先同时对 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}$ 做行变换，然后只对 $\boldsymbol{A}$ 做相应列变换. 变换的最终目标是得到 $(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})$,[a] 其中 $\boldsymbol{D}$ 为对角阵. 做法与我们上面的操作是等价的，学生只需要熟悉一种方法即可.

[a]注意这儿是 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$，而不再是 $\boldsymbol{P}$

注 5

设 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ 是欧氏空间 V 的一组基，它的 Gram 矩阵为 $\boldsymbol{G}$. 若 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ 为 V 的另外一组基，使得 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ 到 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$. 此时，可以验证 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ 的 Gram 矩阵必为 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{P}$. 若进一步地，有 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ 为 V 的一组标准正交基.

例 6

设 V 是次数不超过 2 的实系数多项式构成的 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 配有内积 $(f,g) := \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. 求 V 的一组标准正交基.

注 7

本节介绍了三种方法用于将二次型化为标准形. 其中的主轴化的方法 (坐标的正交变换) 是最重要的, 要求大家熟练掌握. 另一方面, 在下一节中, 我们会谈到二次型的正负惯性指数, 利用配方法容易帮助大家快速找到这些重要的指标.

之前我们已经证明了任意实二次型都可以化成标准形，但是标准形不唯一．例如，二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 3x_2^2$ 已是 Q 的标准形．但是若采用坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1, \\ y_2 = \sqrt{3}x_2, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

则 $Q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2$ 是 Q 的另外一个标准形．

那么，什么是二次型“最终极”的标准形呢？等价地，实对称阵可以通过相合变换得到一个什么形式的最简单的对角阵呢？

定理 8 (惯性定理)

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶实对称矩阵, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & & \\ & -\boldsymbol{I}_s & \\ & & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

并且这里的 r 与 s 是由 $\boldsymbol{A}$ 唯一决定的.

显然, 在等式 (1) 中, $r+s=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$. 我们将把等式右边的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的规范形 (normal form), 而相应的二次型称为对应于 $\boldsymbol{A}$ 的规范二次型. 上面的定理说明 $\boldsymbol{A}$ 的规范形是存在且唯一的.

定义 9

惯性定理 8 中的 r 称为 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数 (*positive index of inertia*), s 称为 $\boldsymbol{A}$ 的负惯性指数 (*negative index of inertia*)[a]. 由上面定理的证明可知，这两个指数分别是 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个标准形中正项的项数与负项的项数，从而由主轴定理可知，它们也分别是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的正项与负项的个数. 相应地，$r-s$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的符号差 (*signature*). 这儿的 r, s 和 $r-s$ 也分别被称为 $\boldsymbol{A}$ 所对应的二次型 Q 的正惯性指数、负惯性指数和符号差.

[a] 因此，有些教材里分别选用 p 和 n 来表示实对称阵的正、负惯性指数

综合前面的结果，我们不难得到如下的定理.

定理 10

任何实对称阵都可以 (实) 相合等价于一个实对角阵，并且两个相同维数的实对称阵相合等价，当且仅当它们的正、负惯性指数相等，当且仅当它们的秩和符号差相等.

例 11

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实可逆矩阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $-\boldsymbol{A}$ 相合, 则 n 为偶数. 进一步地, 若 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 $\frac{n}{2}$.

例 12

求 n 元实二次型 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j x_i x_j$ 的规范形, 其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 不全为零.

例 13

求如下 n 元实二次型的规范形, 其中 $n \geq 2$.

1. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$.
2. $\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$.

例 14

设 n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的正惯性指数分别为 $r_{\boldsymbol{A}}$, $r_{\boldsymbol{B}}$ 和 $r_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$. 证明: $r_{\boldsymbol{A}} + r_{\boldsymbol{B}} \geq r_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$.