7月3日 复习课（级数）

知识点复习

7.1 数项级数判别法：

i) 正项级数：比较(包括极限形式)、Cauchy、达朗贝尔、Cauchy积分(无穷积分与级数的关系)

ii) 一般级数：Leibniz、通过绝对收敛 => 收敛、Dirichlet(单调递减 $\to 0$ + 部分和有界)

Abel（单调有界 + 收敛）

iii 抽象项级数用Cauchy准则.

例：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$ (作业题)

证：先估计速度，令 $f(x)=\ln x-5x^{\frac{1}{5}}$

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{\frac{4}{5}}}=\frac{1-x^{\frac{1}{5}}}{x}$，显然 $x>1$ 时 $f'(x)<0$

$\therefore \frac{\ln n}{n^{\frac{5}{4}}}\le 5\cdot\frac{n^{\frac{1}{5}}}{n^{\frac{5}{4}}}=5\cdot\frac{1}{n^{\frac{21}{20}}}$，由比较判别法 收敛.

例：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ (作业题)

证：$\frac{1}{\sqrt[100]{n}}\downarrow\to 0$

$(-1)^n\frac{n-1}{n+1}=(-1)^n-\frac{2}{n+1}(-1)^n$，显然 $\sum(-1)^n\frac{2}{n+1}$ 由交错级数知收敛 => $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2}{k+1}$ 有部分和有界

又∵ $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ 部分和有界，由Dirichlet判别法知收敛

例 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^q}+\cdots$ $(p>0,q>0)$ 的绝对收敛与条件收敛性.

解 1°：若 $p,q>1$，不妨 $p>q$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}$，由比较判别法知收敛 => 绝对收敛

2° 若 $0<p=q\le 1$，由Leibniz判别法知 条件收敛

3° 当 $p,q>0$ i) 若 $p>1$, $0<q\le 1$ or $q>1$ $0<p\le 1$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^p}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^q}$ 一敛一散 => 原级数发散

注：通项 $\to 0$ 时 原级数与 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^q}\right)$ 同敛散

ii) $0<p<q\le 1$ (or $0<q<p\le 1$) 则 $\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^q}>\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{(2n)^q}>0$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^q}\right)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^p}$ 同阶 => 原级数发散.

例：设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 绝对收敛，试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 也收敛.

证：由于 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 绝对收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 收敛 $\Rightarrow b_n - b_1 \to A$

$\Rightarrow b_n \to b_1 + A$ 即 b_n 有界 记为 $|b_n| \le M$

由收敛的Cauchy准则知 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \frac{\varepsilon}{1+M}, \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} |b_{k+1}-b_k| < 1 \quad (\forall p \in N)$$

记 $S_{n+i} = \sum_{k=n+1}^{n+i} a_k \ (i=1,2,\cdots p)$，则 $S_{n+i+1} - S_{n+i} = a_{n+i+1}$

$$\begin{aligned}
\therefore \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| &= |a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+p}b_{n+p}| \\
&= |S_{n+1}b_{n+1} + (S_{n+2}-S_{n+1})b_{n+2} + \cdots + (S_{n+p}-S_{n+p-1})b_{n+p}| \\
&= |S_{n+1}(b_{n+1}-b_{n+2}) + S_{n+2}(b_{n+2}-b_{n+3}) + \cdots + S_{n+p-1}(b_{n+p-1}-b_{n+p}) + S_{n+p}b_{n+p}| \\
&\le |S_{n+1}||b_{n+1}-b_{n+2}| + \cdots + |S_{n+p-1}||b_{n+p-1}-b_{n+p}| + |S_{n+p}||b_{n+p}| \\
&\le \frac{\varepsilon}{1+M}\Big(\underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|b_{k+1}-b_k|}_{<1} + \underbrace{|b_{n+p}|}_{\le M}\Big) \\
&\le \varepsilon \quad (\forall p \in N)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

1.2 函数项级数

点点收敛.（数项级数）

函数列一致收敛的判别法.

i) 充要条件 $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$（适用于易求极值）

ii) Cauchy 收敛准则

$\Rightarrow$ 函数项级数：必要条件 $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x)| = 0$（考试一般都是证明收敛）

i) Weierstrass（比较法）

ii) Dirichlet（单调减（对n）且一致趋于0 + 部分和一致有界）

iii) Abel（单调（对n）且一致有界 + 一致收敛）

积分.求和可交换是在一致收敛下进行的

收敛域：用根式判别法或比值判别法 再单独讨论端点.(类似幂级数)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1$$

例：$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{n}$ 的收敛域 (作业题)

解：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x^{n^2}|}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{\sqrt[n]{n}} < 1 \Rightarrow |x|<1$

若 $x=1$, 则 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散. 若 $x=-1$, 则 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n^2}\frac{1}{n} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛

∴收敛域为 $[-1,1)$

~~例：判断级数~~ $\cancel{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}}$ ~~在$(-\infty,+\infty)$上的一致收敛性.~~

例：证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)\frac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内一致收敛.

证：$\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)\frac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}\cdot\frac{(1-x)x^n}{1-x^n}\cdot\sin nx$

其中 $\frac{1}{1+x^n}$ 对于固定的 x 关于 n 是单调的 且 $\left|\frac{1}{1+x^n}\right|\le 1$，下面只须证 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)x^n}{1-x^n}\sin nx$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 上一致收敛即可.

① $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| = \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\sin kx\right| = \left|\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos(nx+\frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \le \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{1}{4}}$

② $\cancel{\frac{(1-x)x^n}{1-x^n} = \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}}, \quad (\quad)' = \frac{nx^{n-1}(1+x+\cdots+x^{n-1}) - x^n(1+2x+\cdots+(n-1)x^{n-2})}{(1+x+\cdots+x^{n-1})^2}}$

$\cancel{\Rightarrow (1-x)x^n}$

② 由于 $\frac{(1-x)x^n}{1-x^n} = \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}} = \frac{1}{\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{x}}$ 随着 n ↓ $x\in(\frac{1}{2},1)$

且 $0\le\frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}} \le \frac{x^n}{nx^{n-1}} \le \frac{1}{n}\to 0$ 即 $\frac{(1-x)x^n}{1-x^n}\rightrightarrows 0 \ (n\to\infty)$

∴由 Dirichlet 判别法 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)x^n}{1-x^n}\sin nx$ 一致收敛.

$\Rightarrow$ 由 Abel 判别法知.原级数在 $(\frac{1}{2},1)$ 上一致收敛.

关于求和之后可微可导，连续 见作业 Ex 7.2 $T_6 - T_8$ （参考答案很详细）

T_{10} 递归定义 $[0,1)$ 上的连续可微函数列 $\{f_n\}$ 如下：$f_1=1$，在 $(0,1)$ 上有

$$f_{n+1}'(x)=f_n(x)f_{n+1}(x),\quad f_{n+1}(0)=1$$

求证：对每个 $x\in[0,1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在，并求出其极限函数.

证明：$\dfrac{f_{n+1}'}{f_{n+1}}=f_n=\left(\int_0^x f_n(t)dt\right)' \Rightarrow f_{n+1}(x)=e^{\int_0^x f_n(t)dt}\quad x\in[0,1)$

其中 $f_1(x)=1$，$f_2(x)=e^x\geq 1=f_1(x)$. 不妨设 $f_{n+1}(x)\geq f_n(x)$，则 $\to$ 说明全正

$$f_{n+2}(x)=e^{\int_0^x f_{n+1}(t)dt}\geq e^{\int_0^x f_n(t)dt}=f_{n+1}(x)$$

$\therefore \{f_n\}$ 关于 n 是 $\uparrow$

$\nearrow (f'(x)=f^2$ 猜)

又∵ 在 $x\in[0,1)$ 上，$f_1(x)\leq\dfrac{1}{1-x}$ 成立. 若 $f_n(x)\leq\dfrac{1}{1-x}$ 成立.

则 $f_{n+1}(x)=e^{\int_0^x f_n(t)dt}\leq e^{\int_0^x\frac{1}{1-t}dt}=\dfrac{1}{1-x}$

$\therefore \{f_n(x)\}$ 有上界，于是对每一个 $x\in[0,1)$，$f_n(x)$ 收敛。记 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$

（为了用积分和求和可交换，先证一致收敛性）

设 $u_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)\quad u_0(x)=f_1(x)\quad n=0,1,2,\cdots$

则 $\{u_n(x)\}$ 是连续可微正项函数列. 且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}u_k(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_{n+1}(x)=f(x)$ 收敛

且 $u_n'(x)=f_{n+1}'(x)-f_n'=f_n\cdot f_{n+1}-f_{n-1}\cdot f_n=f_n(f_{n+1}-f_{n-1})\geq 0$

$\therefore$ 对每一个 n，$u_n(x)$ 关于 x $\uparrow$

$\therefore$ 在 $[0,x]$ 上有 $\quad 0\leq u_n(t)\leq u_n(x)\quad 0\leq t\leq x$

$(0<x<1$ 固定$)$

$\therefore \sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(t)$ 在 $t\in[0,x]$ 上一致收敛，$\Rightarrow \{f_n(t)\}$ 在 $[0,x]$ 上一致收敛

$\Rightarrow f(t)$ 在 $[0,x]$ 上可积 $\Rightarrow \int_0^x f(t)dt=\int_0^x\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}u_k(t)dt=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^x\sum\limits_{k=0}^{n}u_k(t)dt$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_{n+1}(t)dt$$

$\therefore$ 对 $f_{n+1}(x)=e^{\int_0^x f_n(t)dt}\quad x\in(0,1)$ 两边求极限.

$\Rightarrow f(x)=e^{\int_0^x f(t)dt}\Rightarrow f'=f\cdot f+\boxed{f(0)=1}\quad f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

7.3 幂级数和 Taylor 展开

收敛半径. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$，注意 x^{2n} 之类.

例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 收敛半径.（作业题）

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{3^n+(-2)^n} = 3 \quad \Rightarrow R=\frac{1}{3}$

收敛域，求和函数

例：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}\cdot|x|^2 = |x|^2 \quad \Rightarrow \quad x\in(-1,1)$ 收敛.

$x=1$ 时 显然收敛 $x=-1$ 时 原 $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$ 显然收敛 $\Rightarrow$ $[-1,1]$上收敛

令 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. $x\in(-1,1)$ 时

由 $f(x)$ 的内闭一致收敛性知 $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow f(x)=\arctan x$

由课本定理7.4.1，因 $-1,1$ 处收敛 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $-1,1$ 处连续 $\Rightarrow$ $f(x)=\arctan x \quad x\in[-1,1]$

泰勒展开

例 $\frac{1}{x^2+3x+2}$ 在 $x=-4$ 处的展开.

解 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{(x+4)-3}-\frac{1}{(x+4)-2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n. \qquad |x+4|<2$$

12.1 周期函数的 Fourier 级数

f是2π周期函数，$[-\pi,\pi]$上可积且绝对可积，则 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\,dx$$

$T=2l \Rightarrow$

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx$$

$$b_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx$$

一般的$[a,b]$ $\Rightarrow$ 通过平移再做

奇/偶延拓 $\Rightarrow$ 正弦/余弦级数 $(a_n=0/b_n=0)$

收敛性：Thm 12.1. 12.2. （在跳跃点. $\rightarrow \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ ）

P27. T9. 将$f(x)=1+x\ (0\le x\le\pi)$展开成周期为2π的余弦级数，并求：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2}$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4(2n-1)}{(2n-1)^2}$

解：先进行偶延拓.

$\therefore a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1+x\,dx=2+\pi$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+x)\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)$

$\Rightarrow f(x)\sim 1+\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)\cos nx$

$=1+\frac{\pi}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4}{(2m-1)^2\pi}\cos(2m-1)x$

由收敛性保证 取$x=1$时

$$2=f(1)=1+\frac{\pi}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4}{(2m-1)^2\pi}\cos(2m-1)\Rightarrow\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)}{(2m-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}$$

$$f(4)\overset{T=2\pi}{=}f(4-2\pi)=f(-4+2\pi)$$

$$\therefore -3+2\pi=f(-4+2\pi)=1+\frac{\pi}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4}{(2m-1)^2\pi}\cos 4(2m-1)$$

$$\Rightarrow\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 4(2m-1)}{(2m-1)^2}=(1-\frac{3}{8}\pi)\pi$$

12.2 平方平均收敛

内积定义：$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$

Bessel 不等式：$f\in L^2[-\pi,\pi]$. $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2dx$

(一般来说) 我们用 Thm 12.7

parseval 等式：$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2dx$ (用来求一些复杂级数的和)

P279

T4 (1)

$m=n=0$ 时 $\int_0^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx=\pi$

$m=n\ne0$ $\int_0^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx=\frac{\pi}{2}$

$m\ne n$ 时 $\int_0^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx=0$

$\Rightarrow\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}},\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x,\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2x\cdots\cdots\right\}$

P279

T1 (1)

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2a}{\pi}$ 偶函数

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2\sin na}{n\pi}$

$b_n=0$

$\Rightarrow f(x)\sim\frac{a}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin na}{n\pi}\cos nx$

由 parseval 等式知 $\frac{2a^2}{\pi^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sin^2 na}{n^2\pi^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2dx=\frac{2a}{\pi}$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}=\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{2a}{\pi}-\frac{2a^2}{\pi^2}\right)=\frac{a}{2}(\pi-a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 na}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{a}{2}(\pi-a)$$

注：告诉你做谁的 Fourier 级数再求和是不难的

难的是直接要算级数和.

这需要大家熟悉一些基本的级数和的来源(主要就课本出现的)

期末考题型基本固定于求一个级数的和. 如 P285、T5、T7、T8-9 这一类.

12.4 Fourier 变换.

Fourier 变换： $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi$ （像函数）

逆变换： $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$ （原函数）

↓

Fourier 积分公式： $f(x) = \int_0^{+\infty} [a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x]\, d\lambda$

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi$$

正弦变换、余弦变换.（Fourier 变换根据奇偶性进行适当变化）

Fourier 变换的一些简单性质.

P294

T_1 (3) $a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2+x^2}\cos\lambda x\, dx \overset{例12.4.3}{=\!=} \frac{1}{a}e^{-a\lambda}$

$b(\lambda) = 0$

$\therefore\ f(x) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{a}e^{-a\lambda}\cos\lambda x\, d\lambda$

T_2 (1) 求 $f(x) = xe^{-a|x|}$ $(a>0)$ 的 Fourier 变换

可直接计算

也可利用微分特性 + 偶性关系

$F'(\lambda) = F[-ixf(x)]$.

$\Rightarrow F[xf(x)] = iF'(\lambda)$

$\Rightarrow F[xe^{-a|x|}] = i\frac{d}{d\lambda}F[e^{-a|x|}]$ 偶函数. 余弦变换.

$= 2i\frac{d}{d\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos\lambda x\, dx$

$\overset{例12.4.3}{=} 2i\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{a}{a^2+\lambda^2}\right)$

$= -i\frac{4a\lambda}{(a^2+\lambda^2)^2}$