第三次习题课讲义

一. 复习

1. 矩阵的秩与相抵

■ 秩的定义：矩阵非零子式的最高阶数

■ 性质 ① $\mathrm{rank}(A)=r \iff A$ 有 r 阶非零子式且所有 $r+1$ 阶子式为0

② $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^T)$

■ 求秩的常用方法 ① 通过初等变换将矩阵化为阶梯形矩阵B，B的非零行数r就是原矩阵A的秩

② 用定义，但当A的阶数较高时计算量较大　　(习题36, 37)

■ 相抵的定义：∃ 可逆方阵 P, Q s.t. $B=PAQ$ 则称A与B相抵

(Remark: 相抵是一个等价关系，即满足反身性、对称性和传递性)

■ 秩与相抵：　同型矩阵A与B相抵的充要条件是 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$

因此. 检验矩阵是否相抵只需验证它们的秩是否相等.

■ 一些常见的秩不等式 (灵活使用，掌握基本证明技巧. 常出现在期中压轴)

① $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$

② $\mathrm{rank}(AB) \le \min(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B))$　~~如果A可逆~~?

③ $\mathrm{rank}(A \mid B) \le \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$

④ $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B) \le \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$

⑤ $\max(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B), \mathrm{rank}(A+B)) \le \mathrm{rank}(A \mid B)$

⑥ (Frobenius不等式) 设 A, B, C 分别为 $n\times m$, $m\times p$, $p\times q$ 矩阵

则有 $\mathrm{rank}(AB)+\mathrm{rank}(BC) \le \mathrm{rank}(B)+\mathrm{rank}(ABC)$

⑦ (Sylvester不等式) A, B, C同上 则有 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B) \le m+\mathrm{rank}(AB)$

(4.11 讲义关于这一部分有详细的过程和例题)

■ 满秩、满秩分解定理

2. 线性空间（这一部分需要清楚定义，很多证明都是从定义出发）

一些定义：线性组合、线性空间、生成子空间（张成子空间）、生成元
线性相关、线性无关、线性表示（及其传递性）

线性相关在线性方程组的定义、极大无关组、向量组的等价关系

■ 向量组的秩：$\{\alpha_1 \dots \alpha_m\}$ 的极大无关组的长度，记为 $rank(\alpha_1 \dots \alpha_m)$
若 $A=(\alpha_1 \dots \alpha_m)$ 则 $rank(\alpha_1 \dots \alpha_m)=rank(A)$

■ 矩阵的行空间和列空间
（4.18 讲义的推论 5.3.21 和定理 5.3.22）

■ 基、坐标、维数、标准基

■ 过渡矩阵（转移矩阵）：基的互相转化；坐标变换公式（必考）

二、作业中的一些问题（按照作业答案中的编号，与教材顺序不同）

1. 首先，在写证明题的过程中，每一步都应该有明确的原因，尽量避免出现凭空说"xxx一定成立"的情况，以矩阵的初等变换为例，每一步怎么变的都要写出来，不能直接给出最终结果说"一定能变过去"。
其次，数学中对一些问题有一些基本套路式的处理办法，下面简单列一些：
① 题目中出现"充分必要条件是"或者"当且仅当"时，需要分两方面证明充分性和必要性（hw6.14，hw6.4），如果你认为你在证明某一边时的每一步都是等价的，也需要用"$\Leftrightarrow$"符号标明。
② 存在性和唯一性是两个概念，唯一性需要额外证明，常见方法见 hw6.12 我们通常假设不唯一，再导出矛盾。

2. $\boxed{hw5.9}$ $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 证明 $\det(I_n-BA)=\det\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n\end{pmatrix}=\det(I_m-AB)$
注意行列式没有线性性！！！ $\det(I_n-BA)\neq\det(I_n)~~BA~~-\det(BA)$ ！！！
进一步，这题是下面一个等式的特殊形式

中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{F}^{n\times m}$, $\lambda\in\mathbb{F}$. 证明

$$\lambda^n\det(\lambda I_{(m)}-AB)=\lambda^m\det(\lambda I_{(n)}-BA)$$

Pf: 设 $\operatorname{rank}A=r$ $\Rightarrow$ $\exists$ 可逆的 P,Q s.t. $A=P\begin{pmatrix}I_{(r)}&0\\0&0\end{pmatrix}Q\triangleq PCQ$

于是 $\lambda^n\det(\lambda I_{(m)}-AB)=\lambda^n\det(\lambda I_{(m)}-PCQB)$

$=\lambda^n\det(P(\lambda I_{(m)}-CQBP)P^{-1})=\lambda^n\det(\lambda I_{(m)}-CQBP)$

记 $QBP=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$ (i.e. 对 QBP 作分块) 其中 $B_{11}\in\mathbb{F}^{r\times r}$

则上式化为 $\lambda^n\det(\lambda I_{(m)}-AB)=\lambda^n\det\left(\lambda I_{(m)}-\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\0&0\end{pmatrix}\right)$

$=\lambda^n\det\begin{pmatrix}\lambda I_{(r)}-B_{11}&-B_{12}\\0&\lambda I_{(m-r)}\end{pmatrix}=\lambda^{m-r+n}\cancel{\det(\lambda I_{(r)}}\det(\lambda I_{(r)}-B_{11})$

另一方面, $\lambda^m\det(\lambda I_{(n)}-BA)=\lambda^m\det(\lambda I_{(n)}-BPCQ)$

$=\lambda^m\det(Q^{-1}(\lambda I_{(n)}-QBPC)Q)=\lambda^m\det(\lambda I_{(n)}-QBPC)$

$=\lambda^m\det\left(\lambda I_{(n)}-\begin{pmatrix}B_{11}&0\\B_{21}&0\end{pmatrix}\right)=\lambda^m\det\begin{pmatrix}\lambda I_{(r)}-B_{11}&0\\-B_{21}&\lambda I_{(n-r)}\end{pmatrix}$

$=\lambda^{m+n-r}\det(\lambda I_{(r)}-B_{11})$

于是得证 #.

3. $\boxed{\text{hw5 补充习题3}}$ 这题的结论需要熟记

注意: $\det\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\det(AD-CB)$ 是需要条件 $AC=CA$ 的, 不能随便用

证明在 20230406 讲义的例 4.4.11. 在本题的 (iii) 中, 并不知道是否有 $AC=CA$

直接 $\det\begin{pmatrix}A&0\\C&D\end{pmatrix}=\det(AD-0C)=\det(A)\det(D)$ 虽然结果对但过程是错的

反例见 hw4.2.(7). 正确结果为 $\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$

$$\begin{vmatrix}a_1&&&&&b_1\\&\ddots&&&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&\\&&a_n&b_n&&\\&&c_n&d_n&&\\&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&&&\ddots&\\c_1&&&&&d_1\end{vmatrix}$$

此时 $\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&&c_n\\&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&\\c_1&&\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}&&c_n\\&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&\\c_1&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{pmatrix}$ 用结论会错.

此外. 这题也可以用 Laplace 展开定理: 取定行 $i_1\cdots i_p$, $1\le i_1<i_2<\cdots<i_p\le n$.

遍取 $\det(A)$ 中第 $i_1\cdots i_p$ 行上的 p 阶子式 并分别乘相应的代数余子式 求和

i.e. $\det(A)=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n}A\begin{pmatrix}i_1&\cdots&i_p\\j_1&\cdots&j_p\end{pmatrix}\left((-1)^{i_1+\cdots+i_p+j_1+\cdots+j_p}A\begin{pmatrix}i_{p+1}&\cdots&i_n\\j_{p+1}&\cdots&j_n\end{pmatrix}\right)$

以 (i) 为例解释.

中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

4. $\boxed{\text{hw5.10}}$ 已知方阵的逆矩阵 A^{-1} 求 A^*

大部分同学先求 A 再求 A^*，这样太复杂了

注意 $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}A^*$ 则只需求 $\det(A)$ 又 $\det(A^{-1})=(\det(A))^{-1}$ #.

5. $\boxed{\text{hw5.11}}$ 设 n 阶方阵 A 的每行、每列元素之和为0，证明 A^* 的所有元素相等。

解：

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & \vdots \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & & & a_{nn} \end{vmatrix} \triangleq (-1)^{i+j}M_{ij}$$

M_{ij} 为余子式

加边 $M_{ij}=\begin{vmatrix} 1 & a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & & a_{nn} \end{vmatrix}$ 作 $i-1$ 次行交换

$$=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & & & a_{1n} \\ 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ 1 & a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & a_{n1} & \cdots & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对 $\forall k\in[1,n]$ 除 k 外每一行加到第 k 行

$$=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ 1 & a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

按第1列展开

$$=(-1)^{i+k}M_{kj} \Rightarrow A_{ij}=(-1)^{i+j+i+k}M_{kj}=(-1)^{k+j}M_{kj}=A_{kj}$$

同理有 $A_{ik}=A_{ij}$ #.

是一个好方法.

6. $\boxed{hw6}$ 习题12与13的区别

T12. 若 $a_1 \dots a_s \in F^n$ 线性无关，而 $a_1 \dots a_s, b$ 线性相关，则 b 可以表示为 $a_1 \dots a_s$ 的线性组合，且表示唯一

T13.（向量表示基本定理）$a_1 \dots a_n \in F^n$ 线性无关 则 $\forall b \in F^n$ 可以表示为 $a_1 \dots a_n$ 的线性组合，且表示唯一.

说明：T12中 $s \le n$，"$a_1 \dots a_s, b$ 线性相关"是为了证明 b 可由 $a_1 \dots a_s$ 线性表示的一个（题目给出的条件. 而T13实际要证明的是 $a_1 \dots a_n, b$ 线性相关

（事实上，对 F^n 中 $\forall$ n个线性无关向量，它们构成了 F^n 中的一组基）

7. trace 的性质

$tr(AB) = tr(BA)$ 常出现在一些判断题中，如（2018-2019 期中 2.(4)），hw3.11

进一步有 $tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA)$ 的"循环性质"，20230411 讲义 eg4.5.19 出现过这种技巧.

三. 补充习题

1. $A \in F^{m\times m}$，$B \in F^{n\times n}$，$S \in F^{m\times n}$

(1) 求 $\begin{pmatrix} I & S \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1}$ (2) 求 $\begin{pmatrix} A & S \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}$

(1) soln: 设 $\begin{pmatrix} I & S \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & X_3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} I & S \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} I & S \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -S \\ 0 & I \end{pmatrix}$

(2) 同理. $\begin{pmatrix} A & S \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}SB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$

（Remark：可以作为结论记一下）

2.（满秩分解定理）$A \in F^{m\times n}$ $r(A)=r$. 证明：$\exists B \in F^{m\times r}$，$C \in F^{r\times n}$ 且 $rank(B) = r(C) = r$ s.t. $A = BC$

pf: $A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = P\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} Q$ 令 $B = P\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} Q$ ※.

这个定理的证明体现了对相抵标准型的使用. 下面再看另一个例子

3. $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ $r(A)=r$. 证明存在 $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $r(B)=n-r$ s.t. $AB=BA=0$

Pf: $A=P\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$. P.Q 可逆

注意到若 $A=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 只需取 $B=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}$ 则有 $AB=BA=0$

故对于 $A=P\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$ 只需取 $B=Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}P^{-1}$ #.

4. 证明: n阶幂等方阵 A (即 $A^2=A$) 的秩等于它的迹

Pf: 设 rank $A=r$, 则存在 n 阶可逆 P, Q

s.t. $A=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$, 因为 A 幂等 代入 $A^2=A$

则有 $P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}QP\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$ 同时左乘 P^{-1}, 右乘 Q^{-1}

$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}QP\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 记 $QP=R=\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}$ $R_{11}\in\mathbb{F}^{r\times r}$

$\Rightarrow$ 上式化为 $\begin{pmatrix} R_{11} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ i.e. $R_{11}=I_{(r)}$

$\Rightarrow Q=\begin{pmatrix} I_{(r)} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}P^{-1}$

代入 $A=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{(r)} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & R_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$

由于 $f(\lambda)=\det(\lambda I_{(n)}-A)=\det\left(\lambda I_{(n)}-P\begin{pmatrix} I_{(r)} & R_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}\right)$

$=\det P\left(\lambda I_{(n)}-\begin{pmatrix} I_{(r)} & R_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)P^{-1}$

$=\det\left(\lambda I_{(n)}-\begin{pmatrix} I_{(r)} & R_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\lambda^{n-r}(\lambda-1)^r$

$\Rightarrow f(\lambda)$ 的 n-1 次项系数为 $-r$

又 $\det(\lambda I_{(n)}-A)$ 的 n-1 次项系数为 $-(a_{11}+\dots+a_{nn})\Rightarrow tr(A)=rank(A)$ #.

R: 关于 $\det(\lambda I_{(n)}+A)$ 的展开在 hw6 补充习题1 有解释. 这里仅有1个负号差别
需要知道的是 $\det(\lambda I_{(n)}+A)$ 的 n-1 项系数为 $tr(A)$, 常数项为 $\det(A)$
事实上, $\det(\lambda I-A)$ 称为 A 的特征多项式. 在 §6 会介绍.

5. 设 A是给定 $m\times n$ 矩阵. X是 $m\times n$，求 $A^TX=X^TA$ 的所有解 X

solu：设 rank A=r. 则 $\exists$ P.Q 可逆 s.t. $A=P\begin{pmatrix}I_{(r)}&0\\0&0\end{pmatrix}Q$

其中P.Q未必唯一，取定 P_0. Q_0 并代入原方程

$$\Rightarrow Q_0^T\begin{pmatrix}I_{(r)}&0\\0&0\end{pmatrix}P_0^TX = X^TP_0\begin{pmatrix}I_{(r)}&0\\0&0\end{pmatrix}Q_0$$

因此有 $\begin{pmatrix}I_{(r)}&0\\0&0\end{pmatrix}P_0^TXQ_0^{-1} = (P_0^TXQ_0^{-1})^T\begin{pmatrix}I_{(r)}&0\\0&0\end{pmatrix}$

记 $P_0^TXQ_0^{-1}=Y=\begin{pmatrix}Y_{11}&Y_{12}\\Y_{21}&Y_{22}\end{pmatrix}$ $\quad Y_{11}\in F^{r\times r}$

代入 $\begin{pmatrix}Y_{11}&Y_{12}\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Y_{11}^T&0\\Y_{12}^T&0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow Y_{11}^T=Y_{11}$, $Y_{12}=0$

$$\Rightarrow X=(P_0^T)^{-1}XQ_0=(P_0^T)^{-1}\begin{pmatrix}Y_{11}&0\\Y_{21}&Y_{22}\end{pmatrix}Q_0$$

其中 Y_{11} $\forall$ r 阶对称阵. Y_{21}, Y_{22} 为 $\forall$ $(m-r)\times r$ 和 $(m-r)\times(n-r)$ 阶阵 #.

(这题可以认为是 hw4 补充习题2 的升级版本)

6. 我们用§5线性空间的观点再次证明秩的一些结论

(1) $A\in F^{m\times n}$, $B\in F^{n\times p}$ $\Rightarrow$ rank(AB) $\le$ rank(B).

pf: 写 $B=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ $\quad b_1\dots b_n$ 为 p 维行向量 $\quad A=(a_{ij})_{m\times n}$

$\Rightarrow AB=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n a_{1j}b_j\\\vdots\\\sum_{j=1}^n a_{mj}b_j\end{pmatrix}$ 即 $(\sum_{j=1}^n a_{1j}b_j\dots\sum_{j=1}^n a_{mj}b_j)$ 可由 $(b_1\dots b_n)$ 线性表示

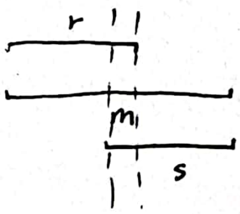
$\Rightarrow \text{rank}(\sum_{j=1}^n a_{1j}b_j\dots\sum_{j=1}^n a_{mj}b_j)\le\text{rank}(b_1\dots b_n)$ i.e. rank(AB) $\le$ rank(B) #

(2) $A\in F^{m\times n}$ r(A)=r, B为A中任取s行构成的矩阵. 证明 $r(B)\ge r+s-m$

pf: 若 $r+s-m\le 0$ 显然成立. 下设 $r+s-m>0$

设 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_m\end{pmatrix}$ $\alpha_1\dots\alpha_m$ 为n维行向量 则 $B=\begin{pmatrix}\alpha_{i_1}\\\vdots\\\alpha_{i_s}\end{pmatrix}$ $\quad 1\le i_1<\dots<i_s\le m$

不妨设 $\alpha_1\dots\alpha_r$ 线性无关，则 $\alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_s}$ 至少有 $r-(m-s)$ 个在 $\alpha_1\dots\alpha_r$ 中



$\Rightarrow$ rank(B) $\ge r+s-m$ #.