第十周作业参考

胡铁宁

2023 年 5 月 29 日

目录

一点说明

(i) 作业讲义部分题过程可能有省略。如对作业仍有疑问可以在群里或答疑课上讨论。

(ii) **作业讲义会随时间更新。**

(iii) 请及时核对自己在 BB 系统里的分数，如有问题请向对应的助教反馈。

(iv) 附录里的内容仅供有兴趣的同学参考，有可能涉及之后才会学习或课外的知识，不要求在现阶段掌握。

(v) 讲义最好用电脑打开，文档内置了链接功能，复习或查看指定的作业很方便。

成绩说明：成绩公式为

$$\text{score} = \begin{cases} 10 - k \cdot \max\{n - n_0, 0\} & \text{未迟交} \\ 5 & \text{迟交} \end{cases}$$

其中 n 为错题数，n_0 为容忍度；k 为系数，取决于当周作业的题量。本周不考虑补充题共 5 题，$n = 5$，考虑到一些同学出现了计算失误、笔误、抄错题目等等情况，$n_0 = 1$；$k = 0.5$。对于一些不严格的证明，助教也会酌情给分。也意味着作业得到满分不代表作业没有问题，请认真查看自己的作业。

上述评分标准对每个助教都成立。

1 第十周作业

1.1 5 月 16 日布置的作业

1.1.1 教材习题 P191-192: 21, 22, 23, 24

习题 1 (教材习题 P192: 21). *设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$, 满足 $\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{O}$, 其中 $m \geqslant 2$ 为正整数.*

(i) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(ii) 证明: $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角矩阵;

(iii) 证明: $\det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}) = 1$.

证明. (i) 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是属于 λ 的一个特征向量. 则 $\mathbf{0} = \boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha} = \lambda^m\boldsymbol{\alpha}$. 所以 $\lambda = 0$. 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 0.

(ii) 假如 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵, 则由 (i) 可知 $\boldsymbol{A}$ 相似于零矩阵, 即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 矛盾. 故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角矩阵.

(iii) 由 (i) 可知, $\boldsymbol{A}$ 必相似于一个主对角元全为 0 的上三角形矩阵 $\boldsymbol{B}$. 于是 $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}$ 必相似于主对角元全为 1 的上三角形矩阵 $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}$. 因此 $\det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}) = 1$.

□

习题 2 (教材习题 P192: 22). *设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵, $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$. 证明: $\boldsymbol{B}$ 相似于对角矩阵.*

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个互异的特征值分别为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 对应线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$. 于是

$$\boldsymbol{AB}\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{BA}\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{B}(\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i) = \lambda_i\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

这表明了 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的特征向量. 又由题目条件知对于 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值, 特征子空间均为一维 (因为 n 个特征值的几何重数均为正整数, 其和不能超过 n, 故各特征值的几何重数均为 1). 故存在复数 μ_i 使得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_i = \mu_i\boldsymbol{\alpha}_i$. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个线性无关的特征向量. 因此 $\boldsymbol{B}$ 相似于对角矩阵. □

另证. 由题意知, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个互异的特征值. 于是由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 可得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APP}^{-1}\boldsymbol{BP} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BPP}^{-1}\boldsymbol{AP}$, 即

$$\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}\boldsymbol{\Lambda}. \tag{1}$$

我们设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=(c_{ij})$, 则等式(1)表明

$$\begin{pmatrix}\lambda_1c_{11} & \lambda_1c_{12} & \cdots & \lambda_1c_{1n}\\ \lambda_2c_{21} & \lambda_2c_{22} & \cdots & \lambda_2c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_nc_{n1} & \lambda_nc_{n2} & \cdots & \lambda_nc_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1c_{11} & \lambda_2c_{12} & \cdots & \lambda_nc_{1n}\\ \lambda_1c_{21} & \lambda_2c_{22} & \cdots & \lambda_nc_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1c_{n1} & \lambda_2c_{n2} & \cdots & \lambda_nc_{nn}\end{pmatrix}$$

对比上式的各分量, 并注意到 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 互异, 不难得到 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 是对角矩阵. 结论得证. □

习题 3 (教材习题 P192: 23)**.** *设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$. 证明: $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}$, 其中 $0\leqslant r\leqslant n$.*

证明. 首先设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ, 对应着一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$. 则

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}.$$

这说明 $\lambda^2=1$, 即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 ±1. 我们设 1 的代数重数为 $r, 0\leqslant r\leqslant n$. 由 Sylvester 不等式可得

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})&\leqslant\operatorname{rank}((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}))+n\\&=\operatorname{rank}(\boldsymbol{O})+n\\&=n.\end{aligned}$$

而 1 的几何重数为 $n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$, -1 的几何重数为 $n-\operatorname{rank}(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})$. 故

$$\begin{aligned}n&\geqslant(n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}))+(n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}))\\&=2n-(\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}))\\&\geqslant 2n-n\\&=n.\end{aligned}$$

于是上式不等号均为等号, 从而 ±1 的几何重数之和为 n, 故 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}$. □

习题 4 (教材习题 P192: 24)**.** *设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实方阵, 若 $\boldsymbol{A}$ 在实数域上不相似于上三角形矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 是否一定在复数域上相似于对角矩阵?*

解. 由 Shur 定理, 若 $\boldsymbol{A}$ 有三个实特征值, 则可实上三角化, 这是不可能的. 由数学分析的结论, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 (次数为奇数) 必有实根. 又由于虚根必须成对出现 (即任何虚根的共轭仍是根), 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式恰有一个实根和一对共轭虚根. 于是 $\boldsymbol{A}$ 作为复方阵有 3 个不同的复特征值, 一定在复数域上相似于对角矩阵. □

1.1.2 补充习题 1

习题 5 (补充习题 1)**.** *对于 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$, 我们定义线性变换 $\mathscr{A} : F^{n\times n} \to F^{n\times n}, \boldsymbol{B} \mapsto \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$.*

(i) 若 $\boldsymbol{A}$ 为对角阵, 验证 $F^{n\times n}$ 中的标准矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ 是 $\mathscr{A}$ 的特征向量.

(ii) 若 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化, 证明 $\mathscr{A}$ 也可以对角化.

证明. (i) 设 $\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}(a_{11}, \cdots, a_{nn})$, 则可以计算得

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{ij}) = \boldsymbol{AE}_{ij} - \boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A} = (a_{ii} - a_{jj})\boldsymbol{E}_{ij}.$$

故 $\boldsymbol{E}_{ij}(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ 是 $\mathscr{A}$ 的特征向量.

(ii) 设 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵:

$$\boldsymbol{PAP}^{-1} = \boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵. 从而

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{P}) &= \boldsymbol{AP}^{-1}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{PA} \\
&= \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{PAP}^{-1}\boldsymbol{E}_{ij} - \boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{PAP}^{-1})\boldsymbol{P} \\
&= \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{\Lambda E}_{ij} - \boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P} \\
&= (\lambda_i - \lambda_j)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{P}.
\end{aligned}$$

于是 $\mathscr{A}$ 有 n^2 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{P}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$. 所以 $\mathscr{A}$ 可以对角化.

□

1.2 5 月 18 日布置的作业

1.2.1 教材习题 P220: 3

习题 6 (教材习题 P220: 3)**.** *已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, -1, 1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 3, 1, -1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (-1, -1, -2, 2)$,*

(i) 求 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的长度及彼此间的夹角.

(ii) 求与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交的向量.

解. (i) 设 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 间的夹角为 $\theta_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$. 不难通过定义计算:

$$|\boldsymbol{\alpha}_1| = \sqrt{7}, \quad |\boldsymbol{\alpha}_2| = \sqrt{15}, \quad |\boldsymbol{\alpha}_3| = \sqrt{10}.$$

$$\cos\theta_{12} = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)}{|\boldsymbol{\alpha}_1| \cdot |\boldsymbol{\alpha}_2|} = \frac{6}{\sqrt{105}}, \quad \cos\theta_{23} = \frac{-9}{\sqrt{150}}, \quad \cos\theta_{31} = \frac{1}{\sqrt{70}}.$$

$$\theta_{12} = \arccos\frac{2\sqrt{105}}{35}, \quad \theta_{23} = \arccos\left(-\frac{3\sqrt{6}}{10}\right), \quad \theta_{31} = \arccos\frac{\sqrt{70}}{70}.$$

(ii) 我们只需把这个问题转化成齐次线性方程组的问题. 设向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交. 则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}.$$

不难解得 $\boldsymbol{x} = (-5(t_1 - t_2), 3(t_1 - t_2), t_1, t_2), t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ 就是所有与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交的向量.

□

1.2.2 补充习题 2, 3, 4, 5

习题 7 (补充习题 2)**.** *证明 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 满足平行四边形法则:*

$$|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|^2 + |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|^2 = 2|\boldsymbol{u}|^2 + 2|\boldsymbol{v}|^2.$$

证明. 只需利用定义和简单的性质:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|^2 + |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|^2 &= (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \\ &= (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + 2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - 2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \\ &= 2|\boldsymbol{u}|^2 + 2|\boldsymbol{v}|^2. \end{aligned}$$

□

习题 8 (补充习题 3)**.** *设 4 维实的列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度为 5, 求 $\left|\boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right|$ 的值.*

解. 由教材 P115 习题 25 可知

$$\det\left(\boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right) = \det\left(\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right) = \det\left(1 - 5^2\right) = -24.$$

□

习题 9 (补充习题 4)**.** *我们考虑线性空间 $V = \mathbb{R}_4[x]$, 这是次数不超过 4 的实系数多项式构成的实线性空间. 设 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 依次为 $-2, -1, 0, 1, 2$. 对于 $f, g \in \mathbb{R}_4[x]$, 定义*

$$(f, g) \coloneqq \sum_{i=0}^{4} f(a_i) g(a_i).$$

这给出了 V 的一个内积. 求它在自然基 $1, x, x^2, x^3, x^4$ 下的度量矩阵.

解. 根据定义, 对任意的 $k, l = 0, 1, 2, 3, 4$, 有

$$(x^k, x^l) = \sum_{i=0}^{4} a_i^k a_i^l = \sum_{j=-2}^{2} j^{k+l}$$

于是度量矩阵就是

$$((x^k, x^l))_{0\leqslant k,l\leqslant 4} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 & 0 & 34 \\ 0 & 10 & 0 & 34 & 0 \\ 10 & 0 & 34 & 0 & 130 \\ 0 & 34 & 0 & 130 & 0 \\ 34 & 0 & 130 & 0 & 514 \end{pmatrix}.$$

□

习题 10 (补充习题 5)**.** *设 $\mathbb{R}_2[x]$ 中的某个内积在基 $\boldsymbol{a}_1 = x-1, \boldsymbol{a}_2 = x+1, \boldsymbol{a}_3 = x^2$ 下的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则该内积在基 $\boldsymbol{b}_1 = 2x, \boldsymbol{b}_2 = -x+1, \boldsymbol{b}_3 = x^2+2$ 下的度量矩阵是什么?*

解. 我们把题目中的度量矩阵记作 $\boldsymbol{A}$. 设从基 $\boldsymbol{a}_1 = x-1, \boldsymbol{a}_2 = x+1, \boldsymbol{a}_3 = x^2$ 到基 $\boldsymbol{b}_1 = 2x, \boldsymbol{b}_2 = -x+1, \boldsymbol{b}_3 = x^2+2$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$. 容易计算得

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是我们要求的内积在基 $\boldsymbol{b}_1 = 2x, \boldsymbol{b}_2 = -x+1, \boldsymbol{b}_3 = x^2+2$ 下的度量矩阵是

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 11 & -4 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

□