## 5.5 线性方程组解集的结构

对于线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \tag{5.4}$$

我们将讨论解的存在性、解的唯一性，以及解的“形状”.

### 线性方程组解的存在性和唯一性

**定理 5.5.1.** 设 $\boldsymbol{A}\in F^{m\times n}$，而 $\boldsymbol{x}\in F^n$ 和 $\boldsymbol{b}\in F^m$ 为列向量. 记 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})$ 为相应的增广矩阵. 则

(1) 方程组 (5.4) 有解 $\Leftrightarrow\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}})$;

(2) 方程组 (5.4) 有解且唯一 $\Leftrightarrow\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}})=n$.

证明. 设 $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\in F^m$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量.

(1) 我们有

$$\begin{aligned}\text{方程组 }\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\text{ 有解}\Leftrightarrow\ &\text{存在 }\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)^{\mathsf T}\in F^n\text{ 使得 }x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}\\ \Leftrightarrow\ &\boldsymbol{b}\text{ 可以由 }\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\text{ 线性表示}\\ \xLeftrightarrow{\text{定理 5.3.22(5)}}\ &\operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b})\\ \xLeftrightarrow{\text{列秩等于秩}}\ &\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}}).\end{aligned}$$

(2) 我们有

$$\begin{aligned}\text{方程组 }\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\text{ 有唯一解}\Leftrightarrow\ &\boldsymbol{b}\text{ 可由 }\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\text{ 线性表示且表示唯一}\\ \xLeftrightarrow{\text{引理 5.4.4}}\ &\boldsymbol{b}\in\langle\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\rangle\text{ 且 }\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\text{ 线性无关}\\ \Leftrightarrow\ &\operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\text{ 且矩阵 }\boldsymbol{A}\text{ 列满秩}\\ \Leftrightarrow\ &\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}})=n.\end{aligned}$$

□

**推论 5.5.2.** 关于 $n$ 个未知元的齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 总有零解. 它有非零解的充要条件是 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<n$. 特别地，若 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶方阵，则齐次线性方程组有非零解的充要条件是 $\det(\boldsymbol{A})=0$. 教材推论 5.5.1

齐次线性方程组解集的结构

**定理 5.5.3.** 关于 $n$ 个未知元的齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解的全体

$$V=\{\,\boldsymbol{x}\in F^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\,\}$$

是 $F^n$ 的子空间, 满足 $\dim(V)=n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$, 即

解集空间的自由度 = 全空间的维数 − 约束条件的维数.

*证明.* 我们已知 $V$ 包含零向量, 从而非空. 若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. 此时, 对于任意 $\lambda\in F$, 有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$, 以及 $\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$. 故 $V$ 是 $F^n$ 的子空间.

设 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=r$. 于是, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$. 此时,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow \boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

若记 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}=(y_1,\dots,y_n)^{\mathsf{T}}$, 则

$$\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_r,0,\dots,0)^{\mathsf{T}}$$

这说明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 等价于 $y_1=\cdots=y_r=0$. 换言之, $V=\{\,\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\in\langle \boldsymbol{e}_{r+1},\dots,\boldsymbol{e}_n\rangle\,\}=\langle \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{e}_{r+1},\dots,\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{e}_n\rangle$. 另外, $\boldsymbol{e}_{r+1},\dots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关, 而 $\boldsymbol{Q}^{-1}$ 可逆, 故 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{e}_{r+1},\dots,\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{e}_n$ 也线性无关. 从而, $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{e}_{r+1},\dots,\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{e}_n$ 是空间 $V$ 的一组基. 特别地, $\dim(V)=n-r$. □

**定义 5.5.4.** 上面的子空间 $V$ 称为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的**解空间**, 也被称为系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**零空间** (并被记作 $N(\boldsymbol{A})$ 或 $\operatorname{Null}(\boldsymbol{A})$). $V$ 的任意一组基称为该方程组的**基础解系**. 显然, 一般情形下, 基础解系并不唯一.

**例 5.5.5.** 求齐次线性方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3-\ \ x_4+2x_5=0\\ 2x_1+6x_2-8x_3+5x_4+3x_5=0\\ x_1+3x_2-3x_3+6x_4+\ \ x_5=0\end{cases}$$

证明. 作初等行变换, 我们有

$$\text{系数矩阵 } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -8 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(计算留作热身题)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 33/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 2$, 从而基础解系的长度为 $5-2=3$. $x_1, x_3$ 是主元, 从而可以选取 $x_2, x_4, x_5$ 为自由元. 此时, 方程组可等价地化为

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - \frac{33}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5, \\ x_3 = -\frac{7}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5. \end{cases}$$

若分别令 $(x_2, x_4, x_5)^\mathsf{T}$ 为 $(1,0,0)^\mathsf{T}, (0,1,0)^\mathsf{T}, (0,0,1)^\mathsf{T}$, 我们可以相应得到 $(x_1, x_3)^\mathsf{T}$ 分别为 $(-3,0)^\mathsf{T}, (-33/2, -7/2)^\mathsf{T}, (1/2, 1/2)^\mathsf{T}$. 因此, 一组基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = (-3,1,0,0,0)^\mathsf{T}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = (-33/2, 0, -7/2, 1, 0)^\mathsf{T}, \quad \boldsymbol{\eta}_3 = (1/2, 0, 1/2, 0, 1)^\mathsf{T}.$$

而方程组的通解为 $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{\eta}_1 + c_2\boldsymbol{\eta}_2 + c_3\boldsymbol{\eta}_3$, 其中 $c_1, c_2, c_3$ 是任意常数. □

**例 5.5.6.** *若矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}_{n\times s}$ 满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) \leq n$.*

证明. **(思路一)** 利用推论 4.5.17 中的不等式, 我们有

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) - n \leq \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{O}) = 0.$$

**(思路二)** 对于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按列分块 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_s \end{pmatrix}$. 则 $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Ab}_1 & \cdots & \boldsymbol{Ab}_s \end{pmatrix}$. 从而对于任意的 $i$, 有 $\boldsymbol{Ab}_i = \boldsymbol{0}$. 这说明列向量 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解. 从而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s) \leq$ 解空间的维数, 即, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) \leq n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$. □

**例 5.5.7.** *设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 的实矩阵. 证明: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.*

证明. 在数域 $F = \mathbb{R}$ 上, 我们分别考虑齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$.

我们证明它们的解空间相同:

(1) 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$, 显然有 $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$. 而 $\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{Ax} = (\boldsymbol{Ax})^\mathsf{T}(\boldsymbol{Ax}) = \|\boldsymbol{Ax}\|^2$, 是向量模长的平方.* 从而 $\|\boldsymbol{Ax}\| = 0$, 即 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$.

*对于 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$, 我们一般定义其向量模长为 $\|\boldsymbol{x}\| := (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$. 显然, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 当且仅当 $\|\boldsymbol{x}\| = 0$.

此时, 由于解空间相同, 它们的空间维数相等, 即 $n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A})=n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$, 从而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$. □

**注 5.5.8.** *在上面的例子中, 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 维复矩阵, 用类似地方法, 我们可以证明: $\operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}}^\top\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$. 其中用到了对矩阵取复共轭运算. 另一方面, 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 维复矩阵, 我们一般不再有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$. 比如, 我们可以取 $\boldsymbol{A}=(1,\mathrm{i})^\top$.*

**例 5.5.9.** *设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的实矩阵, $\boldsymbol{b}$ 是 $m$ 维实的列向量. 证明: 关于 $\boldsymbol{x}$ 的线性方程组 $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{b}$ 必有解.*

证明. 只需证明矩阵的秩 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{b})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A})$. 为此, 我们只需注意到

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{b})\underbrace{\geq}_{\text{子阵的秩}}\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}),$$

以及

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{b})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^\top(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}))\underbrace{\leq}_{\text{矩阵乘积的秩}}\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^\top)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}).$$ □

**习题 5.5.10.** *求解下列含参数 $\lambda$ 的线性方程组*

$$\begin{cases}\lambda x_1+\quad x_2+\quad x_3=1\\(\lambda^2+1)x_1+\quad 2\lambda x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda+1\\x_1+\quad x_2+\quad \lambda x_3=1\\2x_1+(\lambda+1)x_2+(\lambda+1)x_3=2\end{cases}$$

**习题 5.5.11.** *设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $n$ 阶实方阵, 其主对角线上元素为正数, 而其余元素全为负数, 并满足每行元素之和均为 0. 证明: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=n-1$.* 不布置成作业

**非齐次线性方程组解集的结构** 我们有如下的事实: 若 $\gamma_1,\gamma_2$ 是非齐次的线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的任意两个解, 而 $\gamma_0$ 是对应的齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, 则

(1) $\gamma_1-\gamma_2$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解,

(2) $\gamma_1+\gamma_0$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解.

其验证很简单:

$$\boldsymbol{A}(\gamma_1-\gamma_2)=\boldsymbol{A}\gamma_1-\boldsymbol{A}\gamma_2=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{A}(\gamma_1+\gamma_0)=\boldsymbol{A}\gamma_1+\boldsymbol{A}\gamma_0=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{b}.$$

**定理 5.5.12.** 若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解集为 $W$, $\boldsymbol{\gamma}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解, 而对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间为 $V$, 则 教材定理 5.5.3

$$W=\boldsymbol{\gamma}+V\coloneqq\{\,\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}\in V\,\}.$$

**注 5.5.13.** (1) 在几何上来看, $W$ 是一个线性空间的过点 $\boldsymbol{\gamma}$ 的平移, 这被称为一个**仿射空间**. 一般而言, 我们不会将其简称为一个空间.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 是 $V$ 的一组基 (即齐次线性方程组的一组基础解系), 则

$$W=\left\{\boldsymbol{\gamma}+\sum_{i=1}^{n-r}t_i\boldsymbol{\alpha}_i\;\middle|\;t_i\in F\right\}.$$

(3) 齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有时也被称为线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的**导出组**.

**例 5.5.14.** 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathsf{T}}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-3,2,2)^{\mathsf{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases} x_1-\ \ x_2+2x_3=-1\\ 3x_1+\ \ x_2+4x_3=1\\ ax_1+bx_2+cx_3=d \end{cases}$$

的两个解. 求该方程组的通解.

*解*. 该线性方程组的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&1&4\\a&b&c\end{pmatrix}.$$

由于该方程组至少有两个不同的解, 其对应的线性方程组有非零解, 从而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<3$. 另一方面, $\boldsymbol{A}$ 有非零的 2 阶子式 $\left|\begin{smallmatrix}1&-1\\3&1\end{smallmatrix}\right|=4\neq0$, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\geq2$. 这说明 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=2$, 从而方程组所对应的齐次方程组的解空间为 $3-2=1$ 维的. 不难看出 $\boldsymbol{\alpha}_3\coloneqq\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1=(-3,1,2)^{\mathsf{T}}$ 是该解空间的一个基础解系. 此时可知, 原线性方程组有通解

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,0)^{\mathsf{T}}+k(-3,1,2)^{\mathsf{T}},$$

其中 $k$ 是任意常数. □

**例 5.5.15.** 已知有 3 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-1,2)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,a,1)^{\mathsf{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(1,2,b)^{\mathsf{T}}$.

(1) $a, b$ 为何值时, $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?

(2) $a, b$ 为何值时, $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示?

(3) $a, b$ 为何值时, $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 但是表示并不唯一?

证明. 考虑关于 $x_1, x_2, x_3$ 的非齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}.$$

该方程组的增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & a & 2 \\ -1 & 2 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \to r_3]{-2r_1 \to r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a-4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & b+1 \end{array}\right) \xrightarrow{-r_2 \to r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a-4 & 0 \\ 0 & 0 & 7-a & b+1 \end{array}\right)$$

由此看出, $\operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}}) \geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \geq 2$, 且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 2$ 的充要条件为 $a = 7$, 而 $\operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$ 的充要条件是 $a = 7$ 且 $b = -1$.

(1) 显然, $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 当且仅当方程组无解, 当且仅当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 2 < \operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$, 即 $a = 7$ 且 $b \neq -1$.

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示, 当且仅当方程组有唯一解, 当且仅当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$, 即 $a \neq 7$.

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 但是表示方式并不唯一, 该情况出现的充要条件是方程组有解但不唯一, 而这当且仅当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$, 即 $a = 7$ 且 $b = -1$. □

**例 5.5.16.** 讨论 $a, b$ 取何值时方程组无解? 何时方程组有解? 在有解时, 求其通解.

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + \phantom{2}x_3 = 2 \\ x_1 + \phantom{a}x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + \phantom{a}x_2 + bx_3 = 4 \end{cases}$$

解. 对该线性方程组的增广矩阵作初等行变换, 我们得到

$$\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & b & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 1 & 2 \\ & 1-a & 1 & 1 \\ & & b-2 & 1 \end{array}\right).$$

由此可以看出, $\operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}}) \geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \geq 2$, 并且 $\operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$ 的充要条件是 $a = 1$ 且 $b = 3$, 而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 2$ 的充要条件是 $a = 1$ 或 $b = 2$.

(1) 当 $b = 2$ 或者 $a = 1$ 且 $b \neq 3$ 时, $\operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3 > \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 2$, 从而方程组无解.

(2) 当 $a = 1$ 且 $b = 3$ 时, $\operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 2 < 3$, 故方程组有无穷组解. 此时, 方程组可以等价地化为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 1 \end{cases}$$

于是方程组的通解为

$$x_1 = 1 - t, \quad x_2 = t, \quad x_3 = 1 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

(此处有特解 $\boldsymbol{\gamma}_0 = (1, 0, 1)^{\mathsf{T}}$, 而相应的齐次方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha} = (1, -1, 0)^{\mathsf{T}}$. 从而, 通解可以表示成 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\gamma}_0 + t\boldsymbol{\alpha}$, 其中 $t$ 为任意实数)

(3) 当 $a \neq 1$ 且 $b \neq 2$ 时, $\operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 3$, 从而方程组有唯一解. 可以解出,

$$x_1 = \frac{3ab - 2b - 8a + 5}{(a-1)\,(b-2)}, \quad x_2 = -\frac{b-3}{(a-1)\,(b-2)}, \quad x_3 = \frac{1}{b-2}. \qquad \square$$

## 5.6 一般线性空间

在这一节, $F$ 仍然是数域. 我们将 $F$ 上的 $n$ 维数组空间 $F^n$ 推广, 考虑定义了**加法**和**数乘**的非空集合.

### 一般线性空间的定义

**例 5.6.1.** $F^{m \times n}$ 是数域 $F$ 上所有的 $m \times n$ 矩阵构成的集合, 有自然的加法和数乘运算, 即矩阵的加法与数乘.

**例 5.6.2.** 给定非负整数 $n$ 和数域 $F$, 考虑集合

$$F_n[x] \coloneqq \{\, a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in F \,\}.$$

这是 $F$ 上次数不超过 $n$ 的以 $F$ 为系数的多项式的全体. 这个非空集合上定义了**多项式的加法**:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i. \qquad (\text{系数的加法})$$

也定义了**多项式的数乘**:

$$\lambda \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) x^i. \qquad (\text{系数的乘法})$$

该集合 (相对于加法的) 的**零元**:

$$0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \Leftrightarrow a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0. \qquad (\text{零多项式})$$

$F_n[x]$ 对 "加法" 和 "数乘" 都**运算封闭**, 即对任意的 $f, g \in F_n[x]$ 和任意的 $\lambda \in F$ 总有 $f + g, \lambda f \in F_n[x]$.

**定义 5.6.3.** 什么叫作域 $F$ 上的**线性空间**或者**向量空间**? 学生自学定义. 要求结合刚才的例子和之前的 $n$ 维数组空间 $F^n$, 体会这些运算规律. 教材定义 5.6.1

学生自学线性空间的基本性质. 教材 P143.

**例 5.6.4** (线性空间的例子). (1) 数组空间 $F^n$ 任意的线性子空间依照数组的加法与乘法构成 (依上面抽象定义的) 一个线性空间.

(2) 例 *5.6.1* 中数域 $F$ 上所有的 $m \times n$ 矩阵构成的集合 $F^{m\times n}$ 依照矩阵的加法和数乘构成一个线性空间.

(3) 例 *5.6.2* 中的数域 $F$ 上次数不超过 $n$ 的以 $F$ 为系数的多项式的全体 $F_n[x]$ 依照多项式的加法与数乘构成一个线性空间. 更一般地, 以 $F$ 为系数的多项式的全体 $F[x] = \bigcup_{n\geq 0} F_n[x]$ 依照多项式的加法与数乘构成一个线性空间, 并且我们有如下的包含关系:

$$F = F_0[x] \subsetneq F_1[x] \subsetneq F_2[x] \subsetneq \cdots \subsetneq F[x]. \tag{5.5}$$

(4) 闭区间 $[a, b]$ 上 $n$ 阶连续可导函数 ($n$ 阶导数是连续函数) 的全体 $C^n[a, b]$, 对于函数的加法及数与函数的乘法, 构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 并有如下包含关系:

$$C[a,b] = C^0[a,b] \supsetneq C^1[a,b] \supsetneq C^2[a,b] \supsetneq \cdots \supsetneq C^n[a,b] \supsetneq \cdots \supsetneq C^\infty[a,b], \tag{5.6}$$

其中 $C^\infty[a, b] := \bigcap_{n\geq 0} C^n[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上无穷阶可导函数的全体.

(5) 复数的全体 $\mathbb{C}$ 上有自然定义的加法. 另外, 对于复数 $z=a+b\mathrm{i}\in\mathbb{C}$, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$, 我们熟知 $\lambda z=\lambda a+\lambda b\mathrm{i}\in\mathbb{C}$, 其中 $\lambda\in\mathbb{R}$. 不难看出, $\mathbb{C}$ 在这些运算下构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

**例 5.6.5** (不是线性空间的例子). (1) $\mathbb{R}^+$ 对于通常实数的加法和乘法, 不构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 它对于数乘不封闭: 可以考虑乘以 $-1$.

(2) 设 $V$ 是 $F^n$ 中的与某个非零向量不平行的所有向量的全体, 在向量的通常加法和数乘下, 不构成 $F$ 上的线性空间. 例如选取 $F=\mathbb{R}$, $V$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中不与向量 $(1,0)$ 平行的所有向量的全体. 则 $(1,1)$ 与 $(0,-1)$ 都是 $V$ 中的向量, 可是它们的向量和为 $(1,0)$, 不在 $V$ 中.

(3) 次数恰好等于 $n$ 的全体实系数多项式, 在多项式的加法与数乘多项式的运算下一般不是线性空间. 它对于加法不封闭, 例如 $n\geq 2$ 时, $f(x)=x^n+x$, $g(x)=1-x^n$, 则 $f(x)+g(x)=x+1$ 的次数不再恰好是 $n$ 了.

(4) 数域 $F$ 上的全体二阶可逆矩阵的集合, 对于矩阵的加法和数乘矩阵运算不构成线性空间. 它对于数乘不封闭, 任何矩阵乘以 0 后得到零矩阵, 而零矩阵不是可逆矩阵. 另外, 它对矩阵的加法也不是封闭的, 例如可以考虑矩阵 $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ 与 $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ 的矩阵加法.

学生自学教材 P144 的定义 5.6.2.

**例 5.6.6.** (1) 在等式 (5.5) 中, 对于每个严格包含关系, 前者都是后者的线性子空间.

(2) 在等式 (5.6) 中, 对于每个严格包含关系, 后者都是前者的线性子空间.

(3) $n$ 阶对称方阵 (*symmetric matrix*) 的全体

$$\mathrm{SM}_n(F)\coloneqq\left\{\,\boldsymbol{A}\in F^{n\times n}\mid \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{A}\,\right\}$$

和 $n$ 阶反对称方阵 (*anti-symmetric matrix*) 的全体

$$\mathrm{AM}_n(F)\coloneqq\left\{\,\boldsymbol{A}\in F^{n\times n}\mid \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}=-\boldsymbol{A}\,\right\}$$

都是 $F^{n\times n}$ 的子空间.

(4) 设 $V$ 是 $F$ 上的线性空间, $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m\in V$, 而 $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in F$, 则 $\sum_{i=1}^n\lambda_i\boldsymbol{a}_i\in V$ 称为 $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ 的一个线性组合或线性表示. $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m$ 生成的子空间

$$\langle\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_m\rangle\coloneqq\{\,\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m\mid\lambda_i\in F\,\}$$

是 $V$ 的子空间, 它是由 $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ 的线性组合的全体所构成的.

**一般线性空间的理论**

**定义 5.6.7.** 设 $V$ 是数域 $F$ 上的线性空间.

(a) 给定 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in V$, 若存在不全为零的系数 $\lambda_i \in F$, 使得线性组合 $\sum_{i=1}^n \lambda_i \boldsymbol{x}_i = \mathbf{0} \in V$, 则称向量组 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ **线性相关**; 否则, 则称该向量组**线性无关**.

(b) 设 $S \subseteq V$ 为一组非空向量集合, 其中 $S$ 的元素个数可以为无穷多个.

  (i) 对于给定的向量 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 若存在有限多个向量 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in S$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以由 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ 线性表示, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$**可以由** $S$ **线性表示**.

  (ii) 若 $S$ 的任意非空有限子集都是线性无关的, 则称 $S$ 是**线性无关**的.

当 $S$ 是一个有限集合时, 上面的定义与前面的有限向量组时的定义一致.

学生自学教材 P144 的定义 5.6.3, 需要注意集合 $S$ 可以为无穷集合.