例 5.2.13. 判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (3,4,-2,5)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,-5,0,-3)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (5,0,-1,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (3,3,-3,5)$ 是否线性无关. 教材例题 5.2.4(4)

解. 将这些向量视作行向量, 由于这些向量的长度都是 4, 而向量组的长度也是 4, 我们将其视作一个 4 阶方阵的行向量, 并计算其行列式:

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & 4 & -2 & 5\\ 2 & -5 & 0 & -3\\ 5 & 0 & -1 & 2\\ 3 & 3 & -3 & 5\end{vmatrix} \xlongequal[-r_2\to r_3]{-r_1\to r_4} \begin{vmatrix}3 & 4 & -2 & 5\\ 2 & -5 & 0 & -3\\ 3 & 5 & -1 & 5\\ 0 & -1 & -1 & 0\end{vmatrix} \xlongequal{-r_1\to r_3} \begin{vmatrix}3 & 4 & -2 & 5\\ 2 & -5 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0\end{vmatrix} = 0.$$

由推论 5.2.12 可知, 这说明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关. □

例 5.2.14. 已知列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,-1,4)^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,-1,a,3)^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (2,5,3,5)^\mathsf{T}$ 线性无关, 求参数 a.

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 是以这些向量为列向量所构成的矩阵. 那么由定理 5.2.10 可知, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩的, 即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 3$. 利用初等行变换, 我们有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 5\\ -1 & a & 3\\ 4 & 3 & 5\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1\to r_3\\ -4r_1\to r_4}]{-2r_1\to r_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & a & 5\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow[3r_2\to r_4]{ar_2\to r_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 5+a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 故上述的阶梯标准形里必恰有三个非零行出现, 即 $a \neq -5$, □

学生自习教材 P124 定理 5.2.5.

5.3 极大无关组与秩

给定一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$. 若这组向量线性相关, 则用它们来生成子空间 $\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle$ 时, 就存在冗余的向量. 这节的一个目标是: 通过反复移去多余的向量, 使得剩下的向量组不再存在冗余, 从而线性无关.

定义 5.3.1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$ 为一组向量. 若有

(1) 存在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关, 并且

(2) 任意添加一个其它的向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_{r+1}}$ 后, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}, \boldsymbol{\alpha}_{i_{r+1}}$ 线性相关,

则称 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 构成了向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 的一个**极大无关组**. 简言之, 它是原向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性无关的子向量组, 并且无法扩充为更大的线性无关的子向量组.

注 5.3.2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\in F^n$ 为一组向量, 不全为零向量. 考虑它的所有线性无关的子向量组中长度最大的任意一组, 那么这样选出来的子向量组显然是原向量组的一个极大无关组. 特别地, 极大无关组存在.

注 5.3.3 (向量组与它的极大无关组等价)**.** 在上面的定义中, 由于 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\alpha}_{i_{r+1}}$ 线性相关, 存在不全为零的标量 $\lambda_j\in F$, 使得 $\sum_{j=1}^{r+1}\lambda_j\boldsymbol{\alpha}_{i_j}=\mathbf{0}$. 但是又由于 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关, 故 $\lambda_{r+1}\neq 0$, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_{i_{r+1}}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示 (进一步地, 不难看成, 这样的线性表示也是唯一的). 由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_{r+1}}$ 的任意性可知, $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中的所有向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示, 由此可以推出 $\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\rangle\subseteq\langle\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}\rangle$. 当然, 在这儿包含关系 “$\supseteq$” 是自动成立的, 从而两个线性子空间相等.

例 5.3.4. 讨论 $\boldsymbol{a}_1=(2,-1,3,1)$, $\boldsymbol{a}_2=(4,-2,5,4)$, $\boldsymbol{a}_3=(2,-1,4,-1)$ 的极大无关组. 教材 P125 的例题 5.3.1

解. 由于 $3\boldsymbol{a}_1=a_2+a_3$, 整个向量组无法构成一个极大无关组. 另一方面, 这三个向量互不成比例, 因此其中的任何两个都线性无关, 从而线性无关. 这些二元组都构成了原向量组的极大无关组. □

引理 5.3.5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵. 证明: 列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\in F^n$ 是线性无关的当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_m$ 是线性无关的.

证明. 设 $\boldsymbol{B}$ 是以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为列向量的矩阵. 于是, $\boldsymbol{AB}$ 是以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_m$ 为列向量的矩阵. 由向量组线性无关的定义可知, 我们只需证明, 线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 有非零解的充要条件是线性方程组 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$ 有非零解. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 这是显然的. □

定理 5.3.6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\in F^n$ 为一组列向量, $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 是相应的 $n\times m$ 矩阵. 假定 $\boldsymbol{A}$ 经过一系列的初等行变换后得到矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m)$, 则 教材定理 5.3.1

(1) $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性相关 (线性无关) $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 线性相关 (线性无关);

(2) $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 为向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的极大无关组.

证明. 做初等行变换等价于左乘一个初等矩阵, 而初等矩阵是可逆的. 故, 由引理 5.3.5 可知, 这儿所列出的结论是显然的. □

例 5.3.7. 对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,5,3,-2)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(4,1,-2,9)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,-1,4)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,15,7,2)^{\mathsf{T}}$ (仅有第四个向量与教材的例 *5.3.2* 的相应向量不同), 我们有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}-1&4&2&1\\5&1&0&15\\3&-2&-1&7\\-2&9&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{约化标准形}]{\text{(计算留作热身题)}}\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\triangleq(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4).$$

通过检验相应子矩阵的秩, 我们不难看出, 整个向量组 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 是线性相关的, 子向量组 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$, $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4\}$,$\{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 是线性无关的, 而 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 线性相关. 由此可知, $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$, $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4\}$,$\{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 是向量组 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\}$ 的所有极大无关组. 从而对应地, $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$, $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4\}$,$\{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 是向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 的所有极大无关组, 而 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 线性相关.

注 5.3.8. (1) 用约化标准形可以相对比较容易地找出所有的极大无关组. 不过一般情形下, 也没有必要找出所有的极大无关组.

(2) 在定理 *5.3.6* 中, 设矩阵 $\boldsymbol{A}\in F^{n\times m}$ 用初等行变换可以得到阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m)$. 设主元依次在 $i_1<i_2<\cdots<i_r$ 列上, 则我们断言 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的一个极大无关组, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大无关组.

为了证明该断言, 我们注意到子矩阵 $\boldsymbol{B}':=(\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{\beta}_{i_r})$ 虽然不是方阵, 但是从 $(1,1)$ 出发的主对角线上的元素全部非零, 而其之下的元素皆为 0, 这说明 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}')=r$, 从而 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 线性无关.

另一方面, $\boldsymbol{B}$ 是阶梯形矩阵, 其秩为主元个数 r. 另外, $\boldsymbol{B}$ 的任意一个 $r+1$ 列的子矩阵 $\boldsymbol{B}''$ 的秩不超过 $\boldsymbol{B}$ 的秩. 这说明由 $\boldsymbol{B}$ 的列向量构成的长度为 $r+1$ 的子组必定是线性相关的. 故由定义可知, $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的一个极大无关组.

例 5.3.9. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2,0)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,4,4,0)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3,1)^{\mathsf{T}}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_4=(0,4,-2,-2)^{\mathsf{T}}$ 的一个极大无关组, 并求出其余向量相对于该极大无关组的线性表示式.

解. 将这组列向量按行排列组成矩阵 $\boldsymbol{A}$, 对其进行初等行变换操作, 以得到约化标准形

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&4&0&4\\2&4&3&-2\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{(计算留作热身题)}}\begin{pmatrix}1&2&0&2\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4).$$

由此看出, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的一个极大无关组, 而 $\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_4=2\boldsymbol{\beta}_1-2\boldsymbol{\beta}_3$ (这是约化标准形所带来的便利). 由于 $\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 通过一系列初等行变换得到的, 故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 即 $\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1\le i\le 4)$. 从而, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组, 而 $\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_3$. □

现在有一个很自然的问题: 一个向量组的不同的极大无关组的长度是否相等?

定义 5.3.10. *若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_\ell$ 可以相互线性表示, 则称它们***等价***, 并记作*

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}\quad\sim\quad\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_\ell\}.$$

由定理 5.2.7 不难看出, 这等价于说

$$\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\rangle=\langle\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_\ell\rangle\,.$$

进一步地, 不难看出, "∼" 满足等价关系的三条公理 (反身性, 对称性, 传递性).

教材定理 5.3.2

定理 5.3.11. *一个向量组与它的任何一个极大无关组等价.*

教材定理 5.3.3

证明. 利用前面的注 5.3.3. □

推论 5.3.12. *向量组的任何两个极大无关组彼此等价.*

教材推论 5.3.1

证明. 利用向量组等价关系的传递性. □

定理 5.3.13 (极大无关组就是线性无关的张成组)**.** *设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\in F^n$. 则子向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大无关组当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关且*

教材定理 5.3.4

$$\langle\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\rangle\,. \tag{5.3}$$

证明. 假设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大无关组, 从而由定义出发, 我们知道 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关, 并且由定理 5.3.11 知等式 (5.3) 成立.

反之, 设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关, 且 $\langle\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\rangle$ 成立. 为了证明 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大无关组, 由定义出发, 只需证明, 对于任意的向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_{r+1}}$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\alpha}_{i_{r+1}}$ 线性相关. 为此, 只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_{i_{r+1}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_{i_{r+1}}\in\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}\rangle$, 这是显然的. □

前面的定理把极大无关组中的线性无关和张成两个性质结合在一起了. 那么, 对于一般的向量组, 这两个性质之间有怎样的关系呢?

定理 5.3.14 (线性无关组的长度 $\leq$ 张成组的长度). *设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 并且可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示, 即, $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_s$ 所张成的线性子空间中的一组线性无关的向量. 那么, 我们有 $r \leq s$.*

证明. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示, 存在系数 $\mu_{ij} \in F$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{s}\mu_{ij}\boldsymbol{\beta}_j$. 将这些向量视为列向量, 并按行依次排列组成矩阵, 则有

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots\cdots & \boldsymbol{\alpha}_r\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \cdots\cdots & \boldsymbol{\beta}_s\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \underbrace{\begin{pmatrix}\mu_{11} & \cdots\cdots & \mu_{r1}\\ \vdots & & \vdots\\ \mu_{1s} & \cdots\cdots & \mu_{rs}\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{C}}.$$

将其记为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$, 并注意 $\boldsymbol{C}$ 中元素的下标.

由于 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 线性无关, 由定理 5.2.10 可知, $\boldsymbol{A}$ 是列满秩的: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r$. 另一方面, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) \leq \min(n,s) \leq s$. 此时,

$$r = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{BC}) \leq \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) \leq s.$$

其中的不等式用到了例 4.5.13 的结果. □

推论 5.3.15. *若两个线性无关的向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 和 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 等价, 则 $r = s$.* 教材定理 5.3.5

推论 5.3.16. *一个向量组的任何两个极大无关组的长度相等.* 教材推论 5.3.2

定义 5.3.17. *一个向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 的极大无关组的长度称为该向量组的***秩***, 记为 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 或 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m)$. 我们约定: 只含零向量的向量组以及空的向量组 (即此处 $m = 0$ 的情形, 可类比于空集) 的秩为 0.*

注 5.3.18. 在上面的定义中, 若将这些向量视为列向量, 并按行依次排列得到矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots\cdots & \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix},$$

则向量组的秩 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 等于矩阵的秩 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$. 这是因为注 *5.3.8* 中我们已经证明了向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 有一个极大无关组, 其长度就是 $\boldsymbol{A}$ 的阶梯标准形的非零行数, 即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.

定义 5.3.19. *给定 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 则*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix}$$

将 $\boldsymbol{A}$ 写成了行向量按列排列以及列向量按行排列的形式. 行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 组成的 F^n 中的向量组的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行秩**, 列向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n$ 组成的 F^m 中的向量组的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**列秩**. 与之相关地, 行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的 F^n 的子空间称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行空间** (记作 $\mathrm{Row}(\boldsymbol{A})$), 列向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n$ 生成的 F^m 的子空间称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**列空间** (记作 $\mathrm{Col}(\boldsymbol{A})$).

定理 5.3.20. *任何矩阵的秩等于它的行秩和列秩.* 教材定理 5.3.7

证明. 在注 5.3.18 中, 我们证明了 $\boldsymbol{A}$ 的列秩 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$.

对称地, $\boldsymbol{A}$ 的行秩 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$. □

再结合定理 5.2.10, 我们容易得到如下的结果.

推论 5.3.21. *对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 以下几条等价:* 教材推论 5.3.3

(1) $\boldsymbol{A}$ *可逆;*

(2) $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=n$*;*

(3) $\boldsymbol{A}$ *的行向量线性无关;*

(4) $\boldsymbol{A}$ *的列向量线性无关;*

(5) $\det(\boldsymbol{A})\neq 0$.

定理 5.3.22. *设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_s\in F^n$, 则有:* 教材定理 5.3.6

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$ *线性无关当且仅当* $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r)=r$*;*

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$ *线性相关当且仅当* $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r)<r$*;*

(3) *若* $\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ *可以由* $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ *线性表示, 则* $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_s)\le\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r)$*;*

(4) *若* $\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ *与* $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ *等价, 则* $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_s)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r)$*;*

(5) *向量* $\boldsymbol{b}\in F^n$ *可以表示成* $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$ *的线性组合当且仅当* $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{b})$.

证明. 将这些向量视为列向量, 并且记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_s)$.

利用定理 5.2.10 和定理 5.3.20, 我们知道 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关的充要条件是 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})<r$, 而这又等价于向量组的秩 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r)<r$. 从而 (1) 与 (2) 成立.

关于 (3), 若 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 可以由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 线性表示, 那么由定义, 这等价于说存在矩阵 $\boldsymbol{C}\in F^{r\times s}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$. 于是 (3) 等价于证明 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{AC})\le\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$. 由例 4.5.13 知该不等式成立.

关于 (4), 由定义可知, $\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 与 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 等价意味着这两组向量可以相互线性表示, 从而 (4) 可由 (3) 推出.

关于 (5), 先设向量 $\boldsymbol{b}\in F^n$ 可以表示成 $S_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 的线性组合, 而这等价于向量组 $S_2=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{b}\}$ 可由向量组 S_1 线性表示. 但是 S_1 总是可以由 S_2 线性表示, 从而这等价于说 S_1 与 S_2 可以相互线性表示, 即 S_1 与 S_2 等价. 由 (4) 推出 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{b})$.

反之, 设 $\operatorname{rank}(S_1)=\operatorname{rank}(S_2)=t$. 不失一般性, 假定 $S_3=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_t\}$ 是 S_1 的一个极大无关组. 由于 S_2 的子向量组 $S_4=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_t,\boldsymbol{b}\}$ 显然可以由 S_2 线性表示, 从而 $\operatorname{rank}(S_4)\le\operatorname{rank}(S_2)=t$. 而 S_4 的长度为 $t+1$, 大于 t, 因而 S_4 线性相关. 这说明了 $\boldsymbol{b}$ 可以由 S_3 线性表示 (教材习题 #13), 从而等价地, $\boldsymbol{b}$ 可以由 S_1 线性表示. □

推论 5.3.23. *若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=r$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的不等于零的 r 阶子式所在的行 (列) 构成 $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组的极大无关组.* 教材推论 5.3.4

证明. 不妨设 $\left|\boldsymbol{A}\binom{1,\cdots,r}{1,\cdots,r}\right|\neq 0$. 将 $\boldsymbol{A}$ 写成行向量按列排列的形式: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}$, 并记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_r\end{pmatrix}$. 则, $\left|\boldsymbol{B}\binom{1,\cdots,r}{1,\cdots,r}\right|\neq 0$. 从而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})=r$, 从而 $\boldsymbol{B}$ 是行满秩的, 从而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r)=r$, 从而由定理 5.3.22(1) 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. 而教材作业 #22 表明, 这 r 个线性无关的行向量就是矩阵行向量组的一个极大无关组. □

习题 5.3.24. (1) *设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r. 任取 $\boldsymbol{A}$ 的 r 个线性无关的行和 r 个线性无关的列. 证明: 这 r 行和这 r 列交叉处的 r 阶子阵可逆.*

(2) *若上题中的 $r<\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$, 则其结论不成立. 试给出反例.*

(3) *证明: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式所在的行向量组和列向量组都是线性无关的.*

(4) *上题的逆命题不成立, 即位于线性无关的行向量组和线性无关的列向量组交叉处的子式不一定非零. 试给出反例.*

学生课后比较教材例题 5.3.4(P131) 与例题 4.5.7(P112) 的证明.

补充例题

例 5.3.25. 已知向量组 $(S_1):\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$, $(S_2):\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$, $(S_3):\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$, 且向量组的秩 $\operatorname{rank}(S_1)=\operatorname{rank}(S_2)=3$, $\operatorname{rank}(S_3)=4$. 证明: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4.

证明. 由于 $\operatorname{rank}(S_1)=\operatorname{rank}(S_2)=3$, 我们知道向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的, 而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性相关的, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_4=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合. 由此, 不难验证, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 与向量组 (S_3) 是等价的, 从而该向量组的秩为 $\operatorname{rank}(S_3)=4$. □

例 5.3.26. 在 F^n 中, 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示, 而且 $s>t$, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

证明. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t$ 视为列向量, 考虑矩阵

$$\boldsymbol{A}=\Big(\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{\alpha}_s\Big)_{n\times s}\qquad\text{和}\qquad\boldsymbol{B}=\Big(\boldsymbol{\beta}_1\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{\beta}_t\Big)_{n\times t}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示, 存在矩阵 $\boldsymbol{C}\in F^{t\times s}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$. 此时, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})\le\operatorname{rank}(\boldsymbol{C})\le t<s$. 这说明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不是列满秩的, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关. □

例 5.3.27. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n\in F^n$ 为 n 个线性无关的向量. 证明: 矩阵的秩 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$ 等于向量组的秩 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n)$. 特别地, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=n$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

证明. 由定理 5.3.20, 向量组的秩 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n)$ 等于矩阵的秩

$$\operatorname{rank}((\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n))=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n))=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}).$$

最后的等式成立是因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性无关的 n 为列向量, 从而矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是可逆矩阵.

特别地, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=n$ 当且仅当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n)=n$, 当且仅当向量组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. □

例 5.3.28. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是两个向量组, 满足 $r\ge 2$, $\boldsymbol{\beta}_i=\sum_{j\neq i}\boldsymbol{\alpha}_j$. 试证明向量组的秩 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)$.

证明. 我们只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是等价的向量组.

(思路一) 我们只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示即可. 注意到 $\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+\boldsymbol{\beta}_r=(r-1)(\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r)$. 因此, 对任意的 i, 我们有 $\boldsymbol{\alpha}_i=(\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r)-\boldsymbol{\beta}_i=\frac{1}{r-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+\boldsymbol{\beta}_r)-\boldsymbol{\beta}_i$, 是 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 的一个线性组合.

(思路二) 容易看出 $(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{T}$, 其中矩阵

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

下面来证明矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的行列式非零, 即 $\boldsymbol{T}$ 为可逆矩阵. 于是 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) = (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r)\boldsymbol{T}^{-1}$. 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 是等价的向量组.

(a) **(加边法)**

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{r\times r} \xlongequal{\text{加边}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{(r+1)\times(r+1)} \xlongequal{-r_1\to r_i, \forall i\geq 2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -1 & & & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-c_i\to c_1, \forall i\geq 2} \begin{vmatrix} 1-r & 1 & \cdots & 1 \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{vmatrix} = (-1)^r(1-r) \neq 0.$$

(b) **(利用 Schur 公式)**, 即教材作业 P115 #25.

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{T}) &= \det(-\boldsymbol{I}_r + (1,1,\ldots,1)^{\mathsf{T}}(1,1,\ldots,1)) \\ &= (-1)^r \det(\boldsymbol{I}_r - (1,1,\ldots,1)^{\mathsf{T}}(1,1,\ldots,1)) \\ &= (-1)^r \det(\boldsymbol{I}_1 - (1,1,\ldots,1)(1,1,\ldots,1)^{\mathsf{T}}) \\ &= (-1)^r \det(1-r) = (-1)^r(1-r). \end{aligned}$$

□

习题 5.3.29. (1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$ 的某个阶梯标准形的所有非零行的行向量, 证明这些向量生成了行空间 $\mathrm{Row}(\boldsymbol{A})$.

(2) 证明: 向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,-1,3), \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,4,1,-2), \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (3,6,3,-7)$$

与

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 2, -4, 11), \quad \boldsymbol{\beta}_2 = (2, 4, -5, 14)$$

等价.