线性代数 (B1) 第十一次作业

请于 2023 年 5 月 30 日周二上课前在教室里交.

补充习题可视作思考题, 学有余力的同学强烈建议认真完成.

2023 年 5 月 23 日布置的作业

教材习题. P220-221: #2, #5, #6, #17.

补充习题 1. 用 Gram–Schmidt 正交化方法把 $\mathbb{R}^4$ 的一组向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

化成一组标准正交向量.

补充习题 2. 我们考虑线性空间 $V = \mathbb{R}_4[x]$, 这是次数不超过 4 的实系数多项式构成的实线性空间. 设 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 依次为 $-2, -1, 0, 1, 2$. 对于 $f, g \in \mathbb{R}_4[x]$, 定义

$$(f, g) := \sum_{i=0}^{4} f(a_i) g(a_i).$$

这给出了 V 的一个内积. 用 Gram–Schmidt 正交化方法把 V 的一组向量 $1, x, x^2$ 变成一组标准正交向量.

补充习题 3. 考虑线性空间 $V = \mathbb{R}_2[x]$, 运算为多项式的加法和数乘. 对于 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 和 $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$, 定义 $(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x)\, \mathrm{d}x$, 则 $(V, (\,,\,))$ 为欧氏空间. 用 Schmidt 正交化方法将 $1, x, x^2$ 按顺序改造成标准正交基.

补充习题 4. 设 $\boldsymbol{G}$ 是欧氏空间 V 中的向量 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ 的 Gram 矩阵.

(1) 证明: $\det(\boldsymbol{G}) \neq 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ 线性无关.

(2) 证明: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{G}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$.

2023 年 5 月 25 日布置的作业

教材习题. P221: #8, #9, #10, #11, #14.

补充习题 5 (Hadamard 不等式)**.** 设 $\boldsymbol{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 证明: $|\boldsymbol{C}|^2 \le \prod_{j=1}^{n}(c_{1j}^2 + c_{2j}^2 + \cdots + c_{nj}^2)$. (提示: 课堂上我们讲了一个不等式)

补充习题 6. 设欧氏空间 V 中有一个指定的非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 定义映射

$$\varphi : V \to V, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} - \frac{2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha})}{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}\boldsymbol{\alpha}.$$

证明 φ 是一个第二类的正交变换.