## 第33讲：任意项级数收敛的精细判法

(2023.5.24)

(一)复习：

(1) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则任意重排 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 后，新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n$ 仍收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

证：(1°) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A$（常数），$\tilde{A}_n=\tilde{a}_1+\tilde{a}_2+\cdots+\tilde{a}_n$

则 $\tilde{A}_n\le a_1+a_2+a_3+\cdots=A$，且 $\tilde{A}_n\uparrow$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{A}_n$ 存在

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{A}_n=\alpha$（常），则 $\alpha\le A$；且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n=\alpha$.

(2°) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n$ 重排后的结果，同理有 $A\le\alpha$，

综上，$\alpha=A$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n=\alpha=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A$.

(2) 若任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则任意重排 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 后，新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$；且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\tilde{a}_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

证：(1°) ∵ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，∴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 都是收敛的正项级数，其中 $a_n^+=\frac{|a_n|+a_n}{2}=\begin{cases}a_n, & a_n>0\\ 0, & a_n\le 0\end{cases}$，$a_n^-=\frac{|a_n|-a_n}{2}=\begin{cases}-a_n, & a_n<0\\ 0, & a_n\ge 0\end{cases}$

由(1)可知，$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n^+=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$，$\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n^-=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$

(2°)、从 $a_n=a_n^+-a_n^-$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 均收敛知，

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$，$\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n^-=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^+-a_n^-)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

(3°) 利用 $|a_n|=a_n^++a_n^-$，$|\tilde{a}_n|=\tilde{a}_n^++\tilde{a}_n^-\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|\tilde{a}_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n^++\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n^-$

$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^++\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^++a_n^-)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

即绝对收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，经重排后，新级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n$ 仍绝对收敛，且收敛于同一个数。

(三) Dirichlet 精细判法：

在级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 中，若部分和 $A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 有界：$\exists M>0$

使 $|A_n|\le M$，$\forall n\in\mathbb{N}^*$，且 $b_n\downarrow 0\ (n\to\infty)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛。

证：(1°) 先证 $\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\le M(|b_1|+2|b_n|)$，设 $A_0=0$，

则 $\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}(A_i-A_{i-1})b_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}A_ib_i-\sum_{i=1}^{n}A_{i-1}b_i\right|$

$=\left|A_nb_n+\sum_{i=1}^{n-1}A_ib_i-\sum_{i=1}^{n-1}A_ib_{i+1}\right|=\left|A_nb_n+\sum_{i=1}^{n-1}A_i(b_i-b_{i+1})\right|\le$

$|A_n||b_n|+\sum_{i=1}^{n-1}|A_i|(b_i-b_{i+1})$

$\le M(|b_n|+M|[b_1-b_2+b_2-b_3+\cdots+b_{n-1}-b_n]|\le M(|b_1|+2|b_n|)$

(2°). 同理，有 $|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_ib_i|\le M(|b_{n+1}|+2|b_{n+p}|)$, $p\in N^*$, (*1)

(3°) 利用 $b_n\downarrow 0\ (n\to\infty)$. 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in N^*$, 当 $n\ge n_0$ 时，

$|b_n|<\frac{\varepsilon}{3M}$. 从而 $|b_{n+1}|<\frac{\varepsilon}{3M}$, $|b_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{3M}$, $\forall p\in N^*$. $\Rightarrow$ 代入(*1):

$|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_ib_i|\le M(|b_{n+1}|+2|b_{n+p}|)<M(\frac{\varepsilon}{3M}+\frac{2\varepsilon}{3M})=\varepsilon$, $\forall p\in N^*$.

(4°). 依级数收敛的Cauchy准则，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛。

注(1). 当 $b_n\uparrow 0$ 时，$-b_n\downarrow 0$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=-\sum_{n=1}^{\infty}a_n(-b_n)$，因此，

当 $A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 有界且 $b_n\uparrow 0$ 时，仍有 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛。

注(2). 在 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 中，若 $a_n=(-1)^{n-1}$，且 $b_n\downarrow 0$ 则 $A_n=1-1+1-1+1+\cdots+(-1)^{n-1}$

$=\begin{cases}0 & n=2m\\ 1 & n=2m+1\end{cases}$ 即 $|A_n|\le M=1$, $\forall n\in N^*$. 依Dirichlet判法，

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ con. 这正是交错级数的Leibniz判法。

(三). Abel精细判法：

在 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 中，若 $\begin{cases}① \sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ con};\\ ② \{b_n\}\text{单调有界}.\end{cases}$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

证明：令 $A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A$（常数）

依"有极限必有界"的原理，$\exists M>0$ 使 $|A_n|\le M$，$\forall n\in N^*$

从 $\{b_n\}$ 单调有界知，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$（常）

且设 $b_n\downarrow B\ (n\to\infty)$，则 $(b_n-B)\downarrow 0\ (n\to\infty)$，依Dirichlet

判法：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(b_n-B)$ conv，另外 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}Ba_n$ 也conv，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a_n(b_n-B)+Ba_n]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 也收敛。

（四）例题：

(1). 设 $x\neq 2k\pi$，$k\in Z$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\lambda}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\lambda}$ 当 $\lambda>1$ 时

绝对收敛；当 $0<\lambda\le 1$ 时条件收敛；当 $\lambda\le 0$ 时发散。$(x\neq k\pi)$

(2). 研究下列级数的敛散性：（设 $\alpha>0$）

(1°). $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$，(2°). $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln(\ln n))^{1+\alpha}}$，(3°). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(e^{\frac{1}{n^2}}-1)$

(4°). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda n}{n+1}\right)^n$（$\lambda>0$，常数），(5°). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$，(6°). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{n})^n$

(7°). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right)$，(8°). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

解(1)：(1°) 当 $\lambda>1$ 时，$\because\left|\frac{\cos nx}{n^\lambda}\right|\le\frac{1}{n^\lambda}$，$\left|\frac{\sin nx}{n^\lambda}\right|\le\frac{1}{n^\lambda}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\lambda}$

收敛，依比较判法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos nx}{n^\lambda}\right|$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^\lambda}\right|$ 当 $\lambda>1$ 时

都收敛，从而当 $\lambda>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\lambda}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\lambda}$ 都绝对收敛；

(2°) 当 $0<\lambda\le 1$ 时，令 $A_n=\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$，$(x\neq 2k\pi)$

$b_n=\frac{1}{n^\lambda}$，则 $b_n\downarrow 0$ $(n\to\infty)$ 且 $|A_n|=\left|\frac{2\sin\frac{x}{2}(\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx)}{2\sin\frac{x}{2}}\right|$

$=\left|\frac{\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x+\cdots+\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin(n-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|=\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right|$

$\le\left|\frac{2}{2\sin\frac{x}{2}}\right|=\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\triangleq M$，$\forall n\in N^*$。依Dirichlet判法，当 $0<\lambda\le1$ 时，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\lambda}$ 收敛，$(x\neq 2k\pi)$。且 $\left|\frac{\cos nx}{n^\lambda}\right|\geqslant\frac{\cos^2 nx}{n^\lambda}=\frac{1+\cos 2nx}{2n^\lambda}\geqslant 0$

而 $0<\lambda\le1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\lambda}$ div，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^\lambda}$ con (Dirichlet判法)。

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos 2nx}{2n^\lambda}$ 当 $0<\lambda\le1$ 时 div；依比较法 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos nx}{n^\lambda}\right|$

在 $0<\lambda\le1$ 时 div。从而，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\lambda}$ 当 $0<\lambda\le1$ 时条件收敛。

同理，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\lambda}$ 当 $0<\lambda\le1$ 时条件收敛。

(3°) 当 $\lambda\le0$ 时，$a_n=\frac{\cos nx}{n^\lambda}\longrightarrow0$ $(n\to\infty)$ 不成立，

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\lambda}$ 当 $\lambda\le0$ 时 div；当 $x\neq k\pi$ 时，$a_n=\frac{\sin nx}{n^\lambda}\longrightarrow0$ $(n\to\infty)$

不成立 $(\lambda\le0)$，故 $\lambda\le0$，$x\neq k\pi$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\lambda}$ div。

second(2)/(1°): 设 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$, $x\in[2,+\infty)$, $\alpha>0$. 则 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上 C, 非负, 单减且 $\int_2^{+\infty}f(x)dx=\int_2^{+\infty}\frac{d\ln x}{(\ln x)^{\alpha}}\xlongequal{\ln x=u}\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{du}{u^{\alpha}}$

当 $\alpha>1$ 时收敛, 当 $0<\alpha\le 1$ 时发散. 从而级数:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ 当 $\alpha>1$ 时收敛; 当 $0<\alpha\le 1$ 时发散.

第(2)/(2°): 令 $f(x)=\frac{1}{x\ln x(\ln(\ln x))^{1+\alpha}}$, $x\in[3,+\infty)$, $\alpha>0$.

则 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上 C, 非负, 单减且 $\int_3^{+\infty}f(x)dx=$

$\int_3^{+\infty}\frac{d(\ln(\ln x))}{(\ln(\ln x))^{1+\alpha}}\xlongequal{\ln(\ln x)=u}\int_{\ln(\ln 3)}^{+\infty}\frac{du}{u^{1+\alpha}}$ 当 $\alpha>0$ 时 con,

依 Cauchy 积分判别法: $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln(\ln n))^{1+\alpha}}$ con.

第(2)/(3°): 利用 Taylor 公式: $e^{x}=1+x+o(x)\Rightarrow e^{x}-1\sim x\ (x\to 0)$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{n^2}}-1\sim\frac{1}{n^2}$ 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 绝对 con 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n^2}}-1)(-1)^{n-1}$ 绝对 con.

第(2)/(4°): $\because\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda n}{n+1}=\lambda>0$. $\therefore$ 当 $0<\lambda<1$ 时,

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda n}{n+1}\right)^n$ con, 当 $\lambda>1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda n}{n+1}\right)^n$ div, 当 $\lambda=1$ 时,

$a_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=\left(\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}\right)^{\frac{-n}{n+1}}\to e^{-1}\neq 0\ (n\to\infty)$

$\therefore\lambda=1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda n}{n+1}\right)^n$ div。

练(2)/(5')：$\because 0<\frac{1}{n!}<\frac{1}{(n-1)n}\ (n\geq 2)$，且 $\frac{1}{(n-1)n}\sim\frac{1}{n^2}\ (n\to\infty)$

$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ con. $\therefore \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}$ con $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ con.

练(2)/(6')：依 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ con.（$\because A_n=\sin 1+\sin 2+\cdots+\sin n$ 有界：$A_n=\left|\frac{\cos\frac{1}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{1}{2}}\right|\leq\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}\triangleq M$，且 $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\downarrow 0$），

又 $(1+\frac{1}{n})^n$ 单调有界：$0<(1+\frac{1}{n})^n<3$．再依 Abel 判别法知．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{n})^n$ con.

注：$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$，$x\neq 2k\pi$）

练(2)/(7')．利用 Taylor 公式：$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\Longrightarrow$

$x-\ln(1+x)\sim\frac{x^2}{2}\ (x\to 0)\Longrightarrow\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{2}(\frac{1}{n})^2\ (n\to\infty)$.

且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2}(\frac{1}{n})^2$ 绝对收敛．$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n}))$ 绝对 con.

练(2)/(8')：$\because \sin\pi\sqrt{n^2+1}=\sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n+n)=(-1)^n\sin\pi(\sqrt{n^2+1}-n)$

$=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 且 $\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\downarrow 0\ (n\to\infty)$．依 Leibniz 判别法，交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ con．但 $\left|(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right|$

$\sim\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{\pi}{2n}\ (n\to\infty)$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2n}$ div．$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right|$ div.

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 条件收敛。

五. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$ 的证明:

设 $S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ 则:

$$S_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\ln 2n+\eta_0+\alpha_1(n)-(\ln n+\eta_0+\alpha_2(n)) \quad \begin{cases}\eta_0\approx 0.5772,\\ \alpha_1(n)\to 0,\ \alpha_2(n)\to 0 \ (n\to\infty).\end{cases}$$

$$=\ln\frac{2n}{n}+\alpha_1(n)-\alpha_2(n)\longrightarrow \ln 2+0-0=\ln 2 \quad (n\to\infty).$$

且 $S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{2n+1}\longrightarrow \ln 2+0=\ln 2 \ (n\to\infty)$.

故 $S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n}}{n}\longrightarrow \ln 2,\ (n\to\infty) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$.

六) 作业:

ex7.1/ 2/(7), (10), (13); 12/(4), (6), (9), (10); 15/(1), (2), (4).

第34讲: 函数项级数: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$, $x\in I$.