注. 建议阅读 *Shores* [6]* 上面的三个有应用背景的解线性方程组的的例子 (*P4-9*).

在中学里我们已经学过简单的线性方程组的求解. 那么, 在大学里, 当我们重新涉及线性方程组的求解时, 我们到底在干什么? 有什么新的认识角度? 先看一个简单的例子.

例 3.1.1. 考察二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x - \ \ y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

请学生先自行解方程. 答案为 $x = 1$, $y = 2$.

(1) **矩阵的看法**. 之后对此类方程组的标准处理是将其写成

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}},$$

即

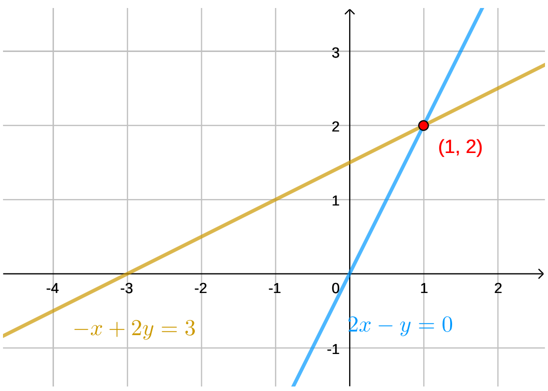
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 称为方程组的**系数矩阵**. 矩阵可以视作数组向量的推广, 是以二维点阵的方式来有序地描述一些数 (数学量). 若是类比于求解如下的简单方程:

$$5x = 6 \Rightarrow 5^{-1} \cdot (5x) = 5^{-1} \cdot 6 \Rightarrow (5^{-1} \cdot 5)x = \frac{6}{5} \Rightarrow 1x = \frac{6}{5} \Rightarrow x = \frac{6}{5},$$

我们会希望得到一个代数对象 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 使得 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. 在之后的学习里, 我们会看到如何定义矩阵的乘法, 以及什么时候矩阵 $\boldsymbol{A}$ 会存在相应的 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2) **行的看法**. 线性方程组的每一行都是一个线性方程. 在这个例子里, 它们分别代表着二维平面中不同的直线. 求解方程组则对应于考察这些直线的交点. 这提供了一个以几何的观点来解线性方程组的视角.

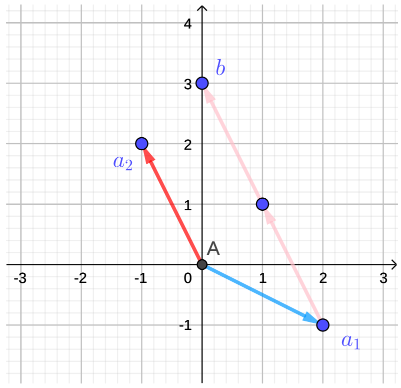


*Thomas S. Shores, *Applied linear algebra and matrix analysis*, 2nd ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2018.

(3) **列的看法**. 原线性方程组可以写成 2 维列向量的线性组合的形式:

$$x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

将上式中出现的 3 个列向量依次记作 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}$. 则上面的线性组合的写法意味着寻找合适的系数 x 与 y.



从这个观察点出发, 我们以后的讨论会问类似于下面的问题:

(i) 这样的线性组合是否存在 (对应于原线性方程组是否有解)? 这样的线性组合的表示方式是否唯一 (原线性方程组的解是否唯一)?

(ii) 通过调整线性组合的系数, $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_2$ 的线性组合能否得到平面上的所有向量?

3.2 Gauss 消元法

解线性方程组时, 该方程组的解的全体称为该方程组的**解集**. 若方程组的解集为空集, 我们称该方程组是**不相容的**, 否则, 称之为**相容的**.

在大学里处理线性方程组问题时一般会借用较为整体更加抽象的方法, 但它不是空中楼阁, 是建立在我们中学已有的知识上的. **第一步**, 我们将方程组视为一个整体, 一个系统, 用 **Gauss 消元法***来求解. 其核心是先消元, 然后利用回代逐步求解.

例 3.2.1. 对前面例 *3.1.1* 中的线性方程组求解.

$$\xrightarrow[\text{首先消去 } x]{\text{开始消元}} \begin{cases} 2x - \ \ y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - \ \ y = 0 \end{cases} \xrightarrow{2(1)\to(2)} \begin{cases} -x + 2y = 3 \\ \qquad 3y = 6 \end{cases}$$

*类似的消元法大约在公元前 250 年由中国数学家应用. 这种方法在西方直到 19 世纪才由著名德国数学家 C.F. 高斯发现. 德国工程师 W. 若尔当把它写在 1988 年的一本测地学著作中, 这种方法才被普及.

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}(2)} \begin{cases} -x+2y=3 \\ \qquad\quad y=2 \end{cases} \xrightarrow[-(2)\to(1)]{\text{开始回代}} \begin{cases} -x \qquad = -1 \\ \qquad\quad y=2 \end{cases} \xrightarrow{-(1)} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

在上面的例子里, 我们本质上进行了如下 3 类基本操作. 为了讨论的方便, 我们**暂时**采用如下更为简洁的记号来表示相应的操作:

(交换两个线性方程) $(i)\leftrightarrow(j)$, 表示将第 i 个方程与第 j 个方程互换.

(某个方程乘以一个非零的常数) $\lambda(i)$, 表示将第 i 个方程乘以非零的常数 λ.

(某个方程乘以常数后加到另一个方程) $\lambda(i)\to(j)$, 表示将第 i 个方程乘以常数 λ 后加到第 j 个方程.

它们被称为解线性方程组的**初等变换**.

注 3.2.2. *需要指出的是, 这些变换是***可逆的***. 若两个方程被对换, 则再次对换它们就会还原为原来的状态. 若某个方程乘以非零常数 λ, 则将所得的方程乘以 $1/\lambda$ 就得出原来的方程. 最后, 若把第 i 个方程的 λ 倍加到第 j 个方程得到新的第 j 个方程, 那么把第 i 个方程的 $-\lambda$ 倍加到新的第 j 个方程上就得到原来的第 j 个方程.*

在求解线性方程组时, 方程组的具体形式会改变. 对于每次操作, 我们有理由希望相邻的两个方程组的解具有相同的解集, 即该求解的操作会得到**同解的**方程组 (也称为**等价的**方程组). 从注 3.2.2 不难验证, 上面提到的每个初等变换都能保证得到同解的方程组, 从而最初的方程组与经过一系列初等变换后化简得到的方程组具有相同的解集.

定义 3.2.3. *关于变量 $x_1,\dots,x_n$ 的 $n\times n$ 的线性方程组若称为***严格三角形的方程组***, 是指: 对于 $1\le k\le n$, 第 k 个方程的前 $k-1$ 个变量前的系数均为 0, 且 x_k 前的系数不为 0.*

利用上面的记号, 我们再来看一个稍微复杂一点的例子.

例 3.2.4.

教材例题 3.1.1, P57

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-\ \ x_3=6 \\ \ \ x_1+3x_2+2x_3=9 \\ 2x_1-\ \ x_2+3x_3=3 \end{cases} \xrightarrow[(1)\leftrightarrow(2)]{\text{消元. 先消去 } x_1} \begin{cases} \ \ x_1+3x_2+2x_3=9 \\ 3x_1+2x_2-\ \ x_3=6 \\ 2x_1-\ \ x_2+3x_3=3 \end{cases} \xrightarrow[-2(1)\to(3)]{-3(1)\to(2)} \begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=9 \\ \quad -7x_2-7x_3=-21 \\ \quad -7x_2-\ \ x_3=-15 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[-(2)\to(3)]{\substack{\text{暂时无法消去 } x_1, \\ \text{但是可以开始考虑消去 } x_2}} \begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=9 \\ \quad -7x_2-7x_3=-21 \\ \qquad\qquad 6x_3=6 \end{cases} \xrightarrow[-\frac{1}{7}(2),\ \ \frac{1}{6}(3)]{\substack{\text{已经得到严格三角形的形式,} \\ \text{但是可以形式上可以进一步简化}}} \begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=9 \\ \qquad x_2+\ \ x_3=3 \\ \qquad\qquad\ \ x_3=1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{回代}]{\substack{-2(3)\to(1)\\-(3)\to(2)}}\begin{cases}x_1+3x_2 & =7\\ \quad x_2 & =2\\ \quad\quad x_3 & =1\end{cases}\xrightarrow{-3(2)\to(1)}\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\\x_3=1\end{cases}$$

可以看出, 在如上的 Guass 消元法里, 我们利用初等变换依次地在部分的方程里部分地消去未知元, 以期得到严格三角形的形式. 然后再回代, 反序地逐次求解各个未知元. 大致来说, 我们的回代是通过第 n 个方程解出 x_n, 将其代入第 $n-1$ 个方程, 解得 x_{n-1}; 将 x_n 与 x_{n-1} 的值代入第 $n-2$ 个方程解得 x_{n-2}, 并以此类推. 不难看出, 若 $n\times n$ 的线性方程组通过化简确实能得到严格三角形的形式, 则我们会同时得到解的存在性与唯一性.

我们有必要练习一下回代的过程.

课堂练习 3.2.5. *用刚才介绍的记号求解*

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3-2x_4=1\\ \qquad x_2-2x_3+3x_4=2\\ \qquad\qquad 4x_3+3x_4=3\\ \qquad\qquad\qquad 4x_4=4\end{cases}$$

答案*:* $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=0$, $x_4=1$.

再做一个稍微复杂的练习.

课堂练习 3.2.6. *用刚才介绍的记号求解*

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=3\\3x_1-x_2-3x_3=-1\\2x_1+3x_2+x_3=4\end{cases}$$

答案*:* $x_1=3$, $x_2=-2$, $x_3=4$.

作为抽象化、规范化处理解线性方程组问题的**第二步**, 我们需要将线性方程组改写成矩阵的形式, 即, 将

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & =b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & =b_2\\ \qquad\vdots & \\a_{m1}x_m+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & =b_m\end{cases}$$

改写成对应的**增广矩阵**

$$\left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots\cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$
$$\qquad\boldsymbol{A}\qquad\qquad\boldsymbol{b}$$

该矩阵由两个子矩阵构成, 分别为**系数矩阵** $\boldsymbol{A}$ 与**常数项向量** $\boldsymbol{b}$. 增广矩阵里面便于理解的竖线, 无论是实线还是虚线都无关紧要, 并且不一定非得要写出.

我们将用 r_i 来表示增广矩阵的第 i 行 (row). 对应于方程组求解的三个初等变换, 我们有矩阵的三个**初等行变换**:

(对换行) 互换矩阵的两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$, 表示将矩阵的第 i 行和第 j 行互换.

(倍乘行) 某一行乘以一个非零的常数, 记作 λr_i, 表示将矩阵的第 i 行乘以非零的常数 λ.

(倍加行) 将某一行乘以一个常数后加到零一行去, 记作 $\lambda r_i \to r_j$, 表示将矩阵的第 i 行乘以 λ 后加到矩阵的第 j 行去.

例 3.2.7. *下面将例 3.2.4 中的求解过程用矩阵的方式表示出来.*

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[-2r_1 \to r_3]{-3r_1 \to r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & -7 & -21 \\ 0 & -7 & -1 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{-r_2 \to r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & -7 & -21 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{7}r_2]{\frac{1}{6}r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-2r_3 \to r_1]{-r_3 \to r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-3r_2 \to r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

注 3.2.8. *对于 $n \times n$ 的线性方程组, 在逐步消元后, 我们希望得到严格三角形的形式. 若将相应的化简过程描述在增关矩阵上, 大致上是采取了如下的步骤. 第一步, (正常情况下) 增广矩阵的第一列不会为零, 在这一列中选取一个不为零的 (最为简单的) 元素令为*主元 *(pivot), 将其所在行令为*主行 *(pivotal row), 并通过交换行的方法, 把主行移到第一行的位置. 接下来, 进行初等行变换, 用主元将其它行的第一个元素 (即该主元下面的元素) 消去. 第二步, 在第二列中从第二行到第 n 行选取一个不为零的 (最为简单的)*

元素令为新的主元, 将其所在行令为新的主行, 通过交换行的方法, 把新的主行移到第二行的位置. 接下来, 进行初等行变换, 用主元将其下面的元素消去. 对后面的列作类似的操作. 理想状态下, 如果在每一步中都能在该列找到相应的主元, 则最后必然得到一个严格 (上) 三角形的形式.

并不是所有的 $n \times n$ 的线性方程组都能通过化简得到严格三角形的形式的.

例 3.2.9. 解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ \qquad x_2 - \ x_3 + \ x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 \qquad - 3x_4 = 1 \\ \quad - 7x_2 + 3x_3 + \ x_4 = -3 \end{cases}$$

解.

$$\xrightarrow{\text{矩阵形式}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{消元}]{\substack{-r_1 \to r_3 \\ 7r_2 \to r_4}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{4}r_4]{-5r_2 \to r_3} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2r_3 \to r_4} \left(\begin{array}{cccc:c} \boxed{1} & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{回代}]{\substack{r_3 \to r_2 \\ -r_3 \to r_1}} \left(\begin{array}{cccc:c} \boxed{1} & -2 & 0 & 2 & -14 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2r_2 \to r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 - x_4 = 3 \\ x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{令 } x_4 \text{ 为自由变量 } t}$$

$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 3 + t \\ x_3 = 6 + 2t \\ x_4 = t \end{cases} \quad (\text{其中 } t \text{ 任意}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

上面的计算结果给出了线性方程组的**通解**, 而 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 3, 6, 0)$ 是方程组的一个**特解**. $\square$