矩阵可对角化的充要条件

定理 1

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

注 2

1. 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则将其对角化的矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的列向量为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，而对角化后的对角阵上的主对角线上的元素为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.
2. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有足够多的特征向量来形成 F^n 的基. 我们不妨称这样的基为特征向量基.
3. 用来对角化的矩阵 $\boldsymbol{T}$ 并不是唯一的. 例如，将 $\boldsymbol{T}$ 的各列重新排列，或者将它们分别乘以不同的非零标量，这样得到的新矩阵仍然可以将 $\boldsymbol{A}$ 对角化.

矩阵特征向量之间的线性相关性

命题 3

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 n 阶方阵, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的两两互不相等的特征值, $\{\boldsymbol{x}_{i,j} \mid 1 \le j \le k_i\}$ 为属于 λ_i 的线性无关的特征向量, 则 $\{\boldsymbol{x}_{i,j} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le k_i\}$ 线性无关.

例 4

考虑矩阵 (1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

推论 5

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 n 阶方阵, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的两两互不相等的特征值, $\boldsymbol{x}_i$ 为属于 λ_i 的特征向量, 则 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ 线性无关.

另外, 如下的推论给出了一个常用的矩阵可对角化的充分条件.

推论 6

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值两两不同, 则 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

注 7

若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对角阵，其对角线上的元素各不相等. 那么我们可以证明: 同阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换的充要条件是 $\boldsymbol{B}$ 为对角阵. 教材习题 *P192#22* 给出了与之等价的形式，留作课后作业.

例 8 (与教材 P157 的作业题 #48 题相关)

设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 F 上的 n 阶方阵，有 n 个互不相等的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, 对应分别有特征向量 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. 记 $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, 则 $\boldsymbol{T}$ 是一个可逆方阵，并且

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \xlongequal{\text{记作}} \boldsymbol{B}.$$

容易验证 $V = \{\boldsymbol{C} \in F^{n\times n} \mid \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\}$ 是 $F^{n\times n}$ 的一个子空间. 同样地，易验证 $\boldsymbol{C} \in V$ 当且仅当 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}^{-1}$, 当且仅当 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}) = (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{T})\boldsymbol{B}$. 由于 $\boldsymbol{B}$ 是主对角线上元素互不相等的对角阵，这等价于说 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}$ 是一个 F 上的对角阵. 由此，我们看出 $\dim(V) = n$, 而 V 有一组基 $\{\boldsymbol{T}\boldsymbol{E}_{ii}\boldsymbol{T}^{-1} \mid 1 \le i \le n\}$.

接下来, 我们给出 V 的另外一组基. 若记之前提到的对角阵 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}=\mathrm{diag}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$, 由 Lagrange 插值公式 (教材 P115#32) 可知, 存在 $f(x)\in F_{n-1}[x]$, 使得 $f(\lambda_i)=\mu_i$, $1\leq i\leq n$. 这说明矩阵的多项式 $f(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}$, 即

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{T}f(\boldsymbol{B})\boldsymbol{T}^{-1}=f(\boldsymbol{T}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}^{-1})=f(\boldsymbol{A}).$$

这说明 $\boldsymbol{C}$ 可由 $\left\{\boldsymbol{I},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,\ldots,\boldsymbol{A}^{n-1}\right\}$ 生成. 由于这组向量显然在 V 中, 它们构成了 V 的一组生成元. 又由于已知 $\dim(V)=n$, 这足以说明 $\left\{\boldsymbol{I},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,\ldots,\boldsymbol{A}^{n-1}\right\}$ 也构成了 V 的一组基.

特征值的代数重数与几何重数（※）

这是书上的打星号内容，考试不作要求，但是强烈建议掌握

定义 9

对于复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 设其特征多项式为

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s},$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有两两不同的特征值 *(不计重数)*. $n_i \geq 1$ 称为 λ_i 的代数重数 (*algebraic multiplicity*). 对于 λ_i, 考察特征子空间

$$V_{\boldsymbol{A}}(\lambda_i) = \{\boldsymbol{x} \in F^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_i \boldsymbol{x}\}.$$

则向量空间维数 $m_i = \dim(V_{\boldsymbol{A}}(\lambda_i)) \geq 1$ 称为 λ_i 的几何重数 (*geometric multiplicity*).

定理 10

用上面的记号, 则对于每个 i, 我们总有 $1 \leq m_i \leq n_i$. 而 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化的充要条件是对于每个 i, 等号成立: $m_i = n_i$.

定理的证明与书上本节的例子, 请课后阅读

注 11 (求相似对角阵的方法)

设 $\boldsymbol{A}$ 是给定的 n 阶方阵.

1. 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 得到 $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = \prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有两两不同的特征值.
2. 若对每个 i 都有 $n - \mathrm{rank}(\lambda_i \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = n_i$, 则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化; 否则, $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.
3. 在可对角化的前提下, 对每个 λ_i, 求出方程组 $(\lambda_i \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的一组基础解系 $\boldsymbol{x}_{i1}, \boldsymbol{x}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{in_i}$.
4. 令 $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{x}_{11}, \boldsymbol{x}_{12}, \ldots, \boldsymbol{x}_{1n_1}, \boldsymbol{x}_{21}, \boldsymbol{x}_{22}, \ldots, \boldsymbol{x}_{in_2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{s1}, \boldsymbol{x}_{s2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{sn_s})$, 则 $\boldsymbol{T}$ 是可逆方阵, 并满足

$$\boldsymbol{T}^{-1} A \boldsymbol{T} = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{n_1 \text{ 个}}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{n_2 \text{ 个}}, \ldots, \underbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}_{n_s \text{ 个}}).$$

例 12

重新考察矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

例 13

对于下三角方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 2 & 0 \\ 3 & 2 & c & 2 \end{pmatrix}$, 问 a, b, c 各为何值时, $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化?

例 14

已知 $\boldsymbol{A}_t = \begin{pmatrix} t & t-2 & 4-2t \\ 3 & -1 & 0 \\ 1+t & t-2 & 3-2t \end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{A}_t$ 可对角化, 描述此时的 t, 并求出 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_t\boldsymbol{P}$ 是对角阵.

例 15

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 为幂等矩阵: $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$. 证明:

1. $\boldsymbol{A}$ 的特征值只有 0 和 1;
2. $\boldsymbol{A}$ 相似于其相抵标准形 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$, 其中 $r = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$;
3. $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$. (教材第六章作业题 #27)