线性代数 (B1) 第四次作业

请于 2023 年 4 月 4 日周二上课前在教室里交.

补充习题可视作思考题, 正常情况下不作要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

2023 年 3 月 28 日布置的作业

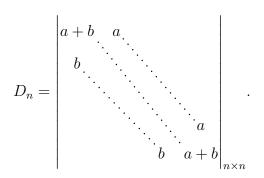
教材习题. P114 #10, #23.

补充习题 1. 对于 n 阶实方阵 \boldsymbol{A} , 我们可以定义函数 $\psi_{\boldsymbol{A}}: \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{X} \mapsto \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})$. 若 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\psi_{\boldsymbol{A}} = \psi_{\boldsymbol{B}}$, 证明: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

补充习题 2. 对于分块矩阵 $A = (A_1 \ A_2) \in F^{m \times (m+n)}$, 若方阵 A_1 可逆, 求出所有的 $B \in F^{(m+n) \times m}$ 使得 $AB = I_m$.

补充习题 3. 令 $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中为了讨论的方便, 可以假定 a,b,c 皆为正数. 利用初等的方法, 计算由 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{0}$ 为顶点构成的平行四边形的面积. 再利用定义分别计算 2 阶方阵 $(\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v})$ 和 $(\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{u})$ 的行列式. 解释一下你的"发现".

补充习题 4. 计算行列式



(提示: 可能需要就 <math>a = b 是否相等来讨论.)

2023 年 3 月 30 日布置的作业

补充习题 5. 设 $p_i(x)$ 是关于变元 x 的 i 次多项式, 其 x^i 前的系数为 c_i . 证明:

$$\begin{vmatrix} p_0(x_1) & p_1(x_1) & \cdots & p_{n-1}(x_1) \\ p_0(x_2) & p_1(x_2) & \cdots & p_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_0(x_n) & p_1(x_n) & \cdots & p_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = c_0 c_1 \cdots c_{n-1} \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

补充习题 6. 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda - a_1^2 & -a_1 a_2 \cdot \dots -a_1 a_n \\ -a_2 a_1 & \lambda - a_2^2 \cdot \dots -a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n a_1 & -a_n a_2 \cdot \dots \lambda - a_n^2 \end{vmatrix}.$$

补充习题 7. (1) 设 **A** 是一个 n 阶反对称的矩阵, 其中 n 为奇数. 证明: $det(\mathbf{A}) = 0$.

(2) 设 A 是一个 n 阶反对称的矩阵, 其中 n 为偶数. 若给 A 的每个元素都加上相同的一个数 λ , 从而得到新矩阵 B. 证明: $\det(A) = \det(B)$. (提示: 若将 B 视作 A 的每个列向量都加上了一个新的列向量所得到的矩阵. 将其行列式按列全部拆开, 你会得到 2^n 个行列式. 接下来考虑 n+1 阶反对称阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \cdots & 1 \\ -1 & & & \\ \vdots & & A \\ -1 & & \end{pmatrix}$$
,将其行列式按第一行展开,你又观察到什么?)

(3) 设 \mathbf{A} 是一个 n 阶反对称的矩阵, 其中 n 为偶数, 并且 \mathbf{A} 的对角线右上方的所有元素都是 1. 求 $\det(\mathbf{A})$.