例 1

设有 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 1$.

1. 若 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) \neq 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.
2. 若 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

例 2

讨论下列线性变换的特征值和特征向量:

1. 实数域上的线性空间 $\mathbb{R}[x]_n$ 上的线性变换 $\mathscr{B} : f(x) \mapsto xf'(x)$;
2. 实数域上的线性空间 $\mathbb{R}[x]_n$ 上的线性变换 $\mathscr{C} : f(x) \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

例 3

对于 $n \geq 2$, 计算行列式
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -2 & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1-n & \cdots & -2 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

相似于上三角矩阵

由于不是所有的复方阵都可以对角化，我们退而求其次，考虑在相似变换后其它可能的简单情形：上三角化.

定理 4 (Schur 定理)

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 n 阶方阵，在 F 中有 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (不要求互不相等)，那么一定存在 F 上的可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为上三角矩阵.

推论 5

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 n 阶方阵，在 F 中有 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (不要求互不相等).

1. 设 $f(x)$ 是 F 上的多项式，那么，$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ 是 $f(\boldsymbol{A})$ 的所有特征值.
2. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \ldots, 1/\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的所有特征值.

注 6

1. 定理 4 中的条件在 $F=\mathbb{C}$ 时自动成立，这说明任何复方阵都复相似于一个上三角矩阵.
2. 用转置运算，我们可以看出，复方阵也可以相似于一个下三角矩阵.
3. 显然，定理中的上三角矩阵的主对角线上的元素就是全部这些特征值，并且我们的证明可以进一步保证，这些特征值按照指定的顺序在对角线上来排列.
4. 我们上面定理的证明相对比较粗略. 事实上，任何复方阵都可以相似于某个若尔当矩阵 (称为该矩阵的若尔当标准形). 这种上三角矩阵可视为原矩阵的相似等价类中的最简形式的代表元. 书上这一块的内容，感兴趣的学生可以课后自学.
5. 对于上面定理中用来上三角化的可逆复矩阵 $\boldsymbol{T}$，我们可以通过正交化的方法，进一步假定其为一个酉矩阵.

注 7

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 为实方阵, 并且 n 个复特征值 (带重数) 都是实数, 那么上面的定理说明 $\boldsymbol{A}$ 可以实相似于实的上三角矩阵. 其逆命题也显然成立: 若实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值不是实数, 那么它显然无法实相似于实的上三角矩阵.

事实上, 特征值不全是实数的实方阵 $\boldsymbol{A}$ 只能实相似于某种准上 (或下) 三角阵: 其主对角线上是 2 阶方阵或 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 其中特征值为原实方阵的特征多项式的实根, 2 阶方阵块对应于成对出现的共轭复根.

大致证明思路如下:

1. 若 $\lambda=a+bi$ 为实方阵 $\boldsymbol{A}$ 的虚特征值 (故 $b\neq 0$), 而 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\mathrm{i}\in\mathbb{C}^n$ 是相应的复特征向量, 其中 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\mathbb{R}^2$, 即有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$. 可以验证 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关 (留作练习), 从而可以扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n$. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, 而 $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}}=\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}$, 故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=a\boldsymbol{x}_1-b\boldsymbol{x}_2$, 以及 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=b\boldsymbol{x}_1+a\boldsymbol{x}_2$. 这说明 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & *\\ \boldsymbol{O} & *\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$.
2. 利用定理 4 的证明思路不难推出, 存在可逆的实矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得
$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & *\\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix}$$
为准上三角阵, 其中的方阵 $\boldsymbol{A}_j$ 为形如 $\begin{pmatrix}a_j & b_j\\ -b_j & a_j\end{pmatrix}$ 的实方阵 (此时, $\boldsymbol{A}$ 有复特征值 $a\pm bi$), 或为由实数 ($\boldsymbol{A}$ 的实特征值) 给出的 1 阶矩阵.

例 8 (Caylay–Hamilton)

[1] 令 $\boldsymbol{A}$ 是复数域上的一个 n 阶方阵, $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式. 证明: $p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$.

在给出定理的证明之前, 我们解释一下上面“零化多项式”的意思. 例如对于矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 我们有 $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5$. 那么, 上面的定理指出

$$p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^3 - 3\boldsymbol{A}^2 - 9\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I}_3 = \boldsymbol{O}_3.$$

[1]Hamilton 在 1853 年首先证明了复二阶矩阵情形. Caylay 在 1858 年声称这个结论对于三阶矩阵也是成立的, 不过他并没有给出证明. 一般性的证明是 Frobenius 在 1878 年得到的

例 9

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 它的特征多项式是

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{A}) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 7\lambda - 10.$$

利用 *Caylay–Hamilton* 定理, 这说明了

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{10}\left(\boldsymbol{A}^2 - 4\boldsymbol{A} + 7\boldsymbol{I}_3\right) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 2 & -16 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

这是求矩阵逆的新方法.

例 10

求 $\boldsymbol{A}^{100}$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

可以求出, $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^3$. 对多项式 λ^{100} 关于 $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 作带余除法:

$$\lambda^{100}=p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)f(\lambda)+r(\lambda), \tag{1}$$

其中 $r(\lambda)=a\lambda^3+b\lambda^2+c\lambda+d$. 由于 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的单特征值, 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的 3 重特征值, 从而, 0 是 $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 的根, 1 是 $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda), p'_{\boldsymbol{A}}(\lambda), p''_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 的根.

基于此观察, 我们在等式 (1) 中代入 $\lambda=0$ 和 $\lambda=1$, 对等式 (1) 两边依次求导和求二次导后代入 $\lambda=1$, 我们可以建立如下四个方程:

$$\begin{cases} 0^{100}=p_{\boldsymbol{A}}(0)f(0)+r(0)=r(0)=d, \\ 1^{100}=p_{\boldsymbol{A}}(1)f(1)+r(1)=r(1)=a+b+c+d, \\ 100\cdot 1^{99}=p'_{\boldsymbol{A}}(1)f(1)+p_{\boldsymbol{A}}(1)f'(1)+r'(1)=r'(1)=3a+2b+c, \\ 100\cdot 99\cdot 1^{98}=p''_{\boldsymbol{A}}(1)f(1)+2p'_{\boldsymbol{A}}(1)f'(1)+p_{\boldsymbol{A}}(1)f''(1)+r''(1)=r''(1)=6a+2b. \end{cases}$$

可以解得 $a=4851$, $b=-9603$, $c=4753$, $d=0$, 从而

$$r(\lambda)=4851\lambda^3-9603\lambda^2+4753\lambda.$$

再由 Caylay–Hamilton 定理, 我们知 $p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$, 从而

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{100} =& p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) f(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{A}) \\
=& \boldsymbol{O} f(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}) \\
=& 4851\boldsymbol{A}^3 - 9603\boldsymbol{A}^2 + 4753\boldsymbol{A} \\
=& 4851 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 9603 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 4753 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 100 & 5050 \\ 0 & 1 & 100 & 5050 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

若尔当标准形简介（※）

感兴趣的同学需要认真阅读教材上的相关内容