8.2 二次型的标准形

定义 8.2.1. 假定二次型 $Q(x_1,\dots,x_n)=\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 通过某个坐标的可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 化为不含混合项 (交叉项) 的形式:

$$Q(x_1,\dots,x_n)|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}}\coloneqq\boldsymbol{Y}^\top(\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Y}=\mu_1y_1^2+\mu_2y_2^2+\cdots+\mu_ny_n^2,$$

即

$$\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n).$$

我们称该形式为二次型 Q 的**标准形** (*canonical form*).

注 8.2.2. 标准形显然不唯一. 例如

$$Q(x_1,x_2)=2x_1^2+3x_2^2=y_1^2+y_2^2,$$

其中 $y_1=\sqrt{2}x_1$, $y_2=\sqrt{3}x_2$.

本节的主题就是讨论如何将二次型化为标准形.

主轴化方法 很显然, 将二次型化简成标准形的过程, 就是寻找可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵的过程. 由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵, 我们可以找到正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 将其相似对角化. 由于 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵, 对角阵 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 且其主对角线上的元素为 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值. 借此, 我们证明了

定理 8.2.3 (主轴定理)**.** 任何实二次型都可以通过坐标的正交变换化为标准形

$$Q(x_1,\dots,x_n)|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

这儿的 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值.

例 8.2.4. 考虑二次型 $Q(\boldsymbol{\gamma})=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3=\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}.$$

在例 *7.3.30* 中, 我们已经找到了正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

满足

$$\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \operatorname{diag}(5, -1, -1).$$

这说明

$$Q(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^{\mathsf{T}}\operatorname{diag}(5, -1, -1)\boldsymbol{Y} = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2,$$

从而得到 Q 的一个标准形.

例 8.2.5. 设二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1x_2 + 2\beta x_2x_3 + 2x_1x_3$ 经过正交变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 化为 $Q = y_2^2 + 2y_3^2$, 其中 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{Y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{P}$ 是正交阵. 试求 α, β 的值.

解. 变换前后二次型的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{和} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

且有 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$. 因为 $\boldsymbol{P}$ 是正交阵, 从而有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$, 于是有特征多项式 $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = p_{\boldsymbol{B}}(\lambda)$, 即

这儿若只是比较两个方阵的迹与行列式, 显然是不够的

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + (2 - \alpha^2 - \beta^2)\lambda + (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda.$$

比较系数, 我们有 $2 - \alpha^2 - \beta^2 = 2$, 且 $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0$. 该方程组的解为 $\alpha = \beta = 0$.

可能需要补充说明一点的是, 这儿 $\alpha = \beta = 0$ 是作为两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的必要条件推出来的. 但是反过来, 若 $\alpha = \beta = 0$, 则上面的推导表明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值. 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是实对称阵, 它们都正交相似于由其公有的特征值所决定的对角阵, 从而相互也是正交相似的. □

例 8.2.6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称阵, 特征值为 $1, 1, 2$, 且有特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 1)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1, 1)^{\mathsf{T}}$. 求正交变换将此实对称阵对应的二次型 $Q = \boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 化为标准形.

解. 注意到题目中的两个特征向量不正交, 故它们同属于特征值 1. 此时, 设 $(u, v, w)^{\mathsf{T}}$ 是属于 2 的一个特征向量, 由正交性可知, $u + w = 0$, $v + w = 0$. 于是不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 1, -1)^{\mathsf{T}}$. 对 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 用 Gram–Schmidt 正交化, 可以得到标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})^{\mathsf{T}}$. 于是所用的正交变换为 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$, 其中 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, 而在正交变换后得到的二次型为 $Q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2$. □

这样的 P 并不唯一

例 8.2.7 (Rayleigh 原理)**.** *设 n 元二次型 $Q(x_1,\dots,x_n)=\boldsymbol{X}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,\dots,x_n)^\mathsf{T}$, 而实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值满足 $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$. 证明: 在条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 的条件下, $Q(x_1,\dots,x_n)$ 的最小值为 λ_1, 最大值为 λ_n.*

证明. 对于二次型 Q, 必有正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 使得

$$Q|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

由特征值之间的大小关系, 知

$$\lambda_1(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)\le Q\le\lambda_n(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2).$$

由于 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 我们有

$$\boldsymbol{X}^\mathsf{T}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})^\mathsf{T}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y}^\mathsf{T}\boldsymbol{P}^\mathsf{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^\mathsf{T}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^\mathsf{T}\boldsymbol{Y},$$

请牢记坐标的正交变换的这一性质

这说明, $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 当且仅当 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1$, 从而在该条件下, 我们有

$$\lambda_1\le Q(x_1,\dots,x_n)\le\lambda_n.$$

显然, 上界 λ_n 在 $\boldsymbol{Y}=(0,0,\dots,0,1)^\mathsf{T}$ 时可以取到, 下界 λ_1 在 $\boldsymbol{Y}=(1,0,0,\dots,0)^\mathsf{T}$ 时可以取到. □

例 8.2.8. *设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶实对称阵, 它的 n 个特征值为 $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$. 证明: $\lambda_1\le a_{ii}\le\lambda_n$, 其中 $i=1,2,\dots,n$.*

证明. 设 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的自然基, 则 $a_{ii}=\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i$. 接下来, 我们只需要利用上题的结果. □

配方法　由于正交阵 $\boldsymbol{P}$ 的计算比较复杂, 在将二次型化为标准形时, 若没有特别要求, 我们有时仅仅通过配方的方法, 消除掉二次型中的交叉项. 这样的好处是计算简便, 不利之处在于由于做了不同方向的不同比例的拉伸, 画出的 (可能是高维的) 几何图形的形状会和原来的形状不一致.

注 8.2.9 (配方中的两种基本情形)**.** 设

$$Q(x_1,x_2,\dots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+(\text{与 } x_1 \text{ 无关的项}).$$

(1) 假设 $a_{11}\ne0$. 此时,

$$Q(x_1,x_2,\dots,x_n)=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2+(\text{配方后新的项})$$

$$
\begin{aligned}
&+(\text{之前与 } x_1 \text{ 无关的项}) \\
&= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + (\text{与 } x_1 \text{ 无关的项}).
\end{aligned}
$$

在这种情况下，我们会设

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n, \quad y_2 = x_2, \quad \ldots, \quad y_n = x_n,$$

从而

$$x_1 = y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}}y_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}y_n, \quad x_2 = y_2, \quad \ldots, \quad x_n = y_n.$$

相应的坐标变换的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

(2) 假设 $a_{12} \neq 0$，而 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 0$. 我们利用等式

$$x_1x_2 = \frac{1}{4}\left[(x_1+x_2)^2 - (x_1-x_2)^2\right] = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2,$$

令

$$y_1 = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y_2 = \frac{x_1-x_2}{2}, \quad y_3 = x_3, \quad \ldots, \quad y_n = x_n,$$

从而

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2, \quad x_3 = y_3, \quad \ldots, \quad x_n = y_n.$$

这种情形下的坐标的基本变换的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & & & \\ 1 & -1 & & & \\ \hline & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

在此之后，我们可以化归为第一种情形，其中 y_1^2 前的系数为原式

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = (a_{11} + 2a_{12} + a_{22})y_1^2 + \cdots$$

中 y_1^2 的系数，即 $2a_{12}$，不为零. 注意，这里仅仅 $a_{11} = 0$, $a_{12} \neq 0$，是不够的.

例 8.2.10. 考察 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_3^2+x_1x_2$.

解. 直接配方, 有

$$\begin{aligned}Q(x_1,x_2,x_3)=&\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2-\frac{1}{4}x_2^2+2x_3^2\\=&y_1^2-\frac{1}{4}y_2^2+2y_3^2,\qquad\text{(二次型的标准形)}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases}y_1=x_1+\frac{1}{2}x_2,\\y_2=x_2,\\y_3=x_3,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x_1=y_1-\frac{1}{2}y_2,\\x_2=y_2,\\x_3=y_3,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}.$$

二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1/2&0\\1/2&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若我们记坐标变换矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(1,-1/4,2)$, 与我们上面计算得到的二次型的标准形相对应. □

例 8.2.11. 考察 $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$.

解. 直接配方, 有

$$Q(x_1,x_2,x_3)=2\left(\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2\right)+4x_1x_3.$$

若令

$$\begin{cases}y_1=\frac{x_1+x_2}{2}\\y_2=\frac{x_1-x_2}{2}\\y_3=x_3\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned}Q=&2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+4(y_1+y_2)y_3\\=&2y_1^2+4y_1y_3-2y_2^2+4y_2y_3\\=&2(y_1+y_3)^2-2y_2^2+4y_2y_3-2y_3^2\\=&2(y_1+y_3)^2-2(y_2-y_3)^2\\=&2z_1^2-2z_2^2.\qquad\text{(二次型的标准形)}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3, \\ z_2 = y_2 - y_3, \\ z_3 = y_3. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3, \\ y_2 = z_2 + z_3, \\ y_3 = z_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

此时

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 若令 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \operatorname{diag}(2, -2, 0)$, 与我们上面计算得到的二次型的标准形相对应. □

矩阵的初等变换法 在主轴化定理 8.2.3 中我们已经见到, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 将二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相合对角化. 由于 $\boldsymbol{P}$ 可以表示成一系列初等矩阵的乘积, 于是我们有

定理 8.2.12. *对每个实对称阵 $\boldsymbol{A}$, 存在同阶的初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_s$ 使得*

$$\boldsymbol{P}_S^\mathsf{T} \cdots \boldsymbol{P}_2^\mathsf{T} \boldsymbol{P}_1^\mathsf{T} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \cdots \boldsymbol{P}_s$$

为对角阵.

由此出发, 为了计算二次型的标准形, 我们将对实矩阵采取如下的操作 (其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{P} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{P} \end{pmatrix},$$

即, 我们先对整个矩阵作列变换 (右乘 $\boldsymbol{P}$), 再对分块矩阵中上面的方阵做相应的行变换 (左乘 $\boldsymbol{P}^\mathsf{T}$).

注 8.2.13. (1) *若 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S}_{ij} : c_i \leftrightarrow c_j$, 则 $\boldsymbol{P}^\mathsf{T} = \boldsymbol{S}_{ij} : r_i \leftrightarrow r_j$.*

(2) *若 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}_i(\lambda) : \lambda c_i$, 则 $\boldsymbol{P}^\mathsf{T} = \boldsymbol{D}_i(\lambda) : \lambda r_i$.*

(3) *若 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T}_{ij}(\lambda) : \lambda c_i \to c_j$, 则 $\boldsymbol{P}^\mathsf{T} = \boldsymbol{T}_{ji}(\lambda) : \lambda r_i \to r_j$.*

若最开始 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$, 而经过一系列这样的操作后, $\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵, 则分块矩阵中下面的矩阵 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}$ 为所求.

例 8.2.14. 用初等变换的方法把二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_3-x_2^2+2x_2x_3+x_3^2$ 化为标准形.

解. 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$. 于是,

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\boxed{2}\\0&-1&1\\2&1&1\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-2c_1\to c_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\2&1&-3\\\hline 1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-2r_1\to r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&\boxed{1}\\0&1&-3\\\hline 1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2\to c_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&1&-2\\\hline 1&0&-2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\\\hline 1&0&-2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

最后的分块矩阵中, 上面的方阵为对角阵, 故下面的矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 为所求, 满足 $\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(1,-1,-2)$. 此时的坐标变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

而二次型为

$$Q(x_1,x_2,x_3)|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}}=y_1^2-y_2^2-2y_3^2.$$ □

例 8.2.15. 用初等变换的方法把二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=4x_1x_2+2x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2$ 化为标准形.

解. 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. 与例 8.2.14 中的情形略有不同, 这儿的 $\boldsymbol{A}$ 的 $(1,1)$ 元素为零, 但是我们注意到其 $(2,2)$ 位置的元素非零. 于是,

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc}0&2&1\\\boxed{2}&1&\boxed{1}\\1&1&1\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[-c_2\to c_3]{-2c_2\to c_1}\left(\begin{array}{ccc}-4&2&-1\\0&1&0\\-1&1&0\\\hline 1&0&0\\-2&1&-1\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[-r_2\to r_3]{-2r_2\to r_1}\left(\begin{array}{ccc}-4&0&\boxed{\text{-1}}\\0&1&0\\-1&0&0\\\hline 1&0&0\\-2&1&-1\\0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}c_1\to c_3}\left(\begin{array}{ccc}-4&0&0\\0&1&0\\-1&0&\frac{1}{4}\\\hline 1&0&-\frac{1}{4}\\-2&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{4}r_1\to r_3}\left(\begin{array}{ccc}-4&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{4}\\\hline 1&0&-\frac{1}{4}\\-2&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{array}\right).$$

最后的分块矩阵中, 上面的方阵为对角阵, 故下面的矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{4}\\-2&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$ 为所求, 满足 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(-4,1,\frac{1}{4})$. 此时的坐标变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{4}\\-2&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

而二次型为

$$Q(x_1,x_2,x_3)|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}}=-4y_1^2+y_2^2+\frac{1}{4}y_3^2.$$

□