第3讲：多元函数微分学习题课(I)　2023.3.10.

例1. 设三元函数 $u=x^{y^z}+x^{x^z}+a^{y^z}$，$(x>0, y>0, a>0$ 常$)$

求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ 及全微分 du 及 $u'_x(1,1,1)$, $u'_y(1,2,1)$.

解(1°). $\because u=e^{y^z\ln x}+e^{x^z\ln x}+e^{y^z\ln a}$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=e^{y^z\ln x}\cdot\frac{y^z}{x}+e^{x^z\ln x}(zx^{z-1}\ln x+\frac{x^z}{x})+0$

$=x^{y^z-1}\cdot y^z+x^{x^z}(zx^{z-1}\ln x+x^{z-1})$

$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{y^z\ln x}(zy^{z-1}\ln x)+0+e^{y^z\ln a}(zy^{z-1}\ln a)=x^{y^z}zy^{z-1}\ln x+a^{y^z}zy^{z-1}\ln a.$

$\frac{\partial u}{\partial z}=e^{y^z\ln x}(y^z\ln y\ln x)+e^{x^z\ln x}(x^z(\ln x)^2)+e^{y^z\ln a}(y^z\ln y\ln a)$

$=x^{y^z}(y^z\ln y\ln x)+x^{x^z}(x^z(\ln x)^2)+a^{y^z}(y^z\ln y\ln a)$

(2°) $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

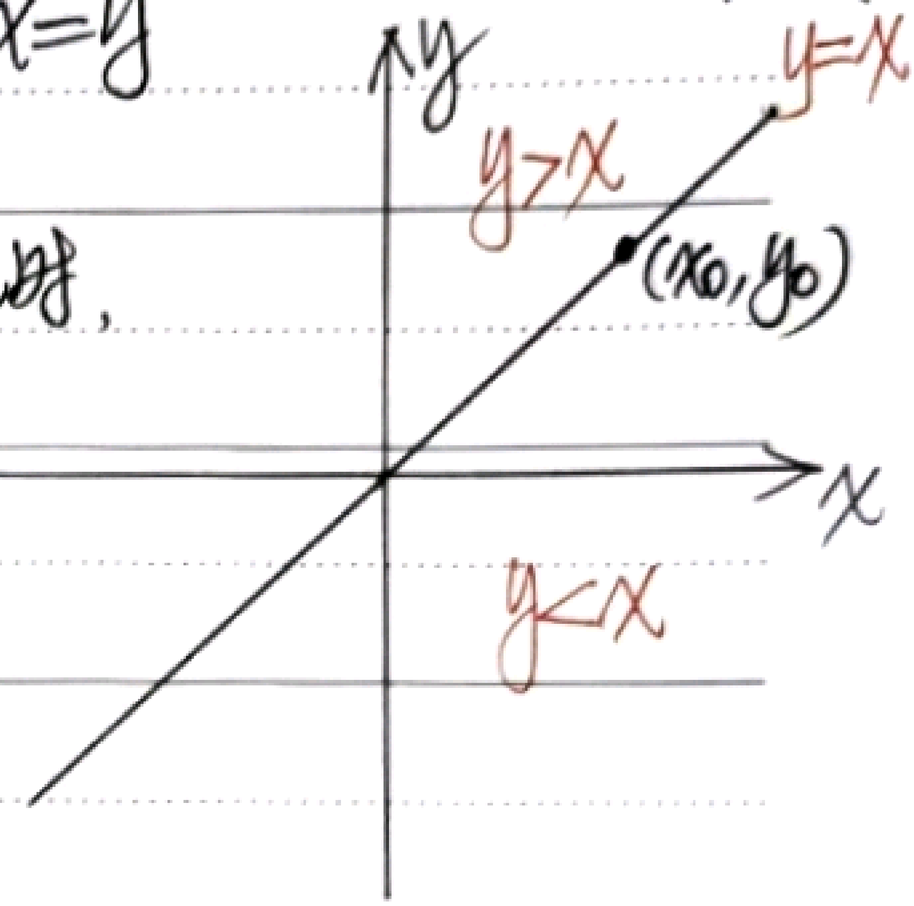
$=(y^zx^{y^z-1}+x^{x^z}(zx^{z-1}\ln x+x^{z-1}))dx+(x^{y^z}zy^{z-1}\ln x+a^{y^z}zy^{z-1}\ln a)dy+$

$(x^{y^z}y^z\ln y\ln x+x^{x^z}(x^z\ln x)^2+a^{y^z}(y^z\ln y\ln a))dz.$

(3°). $u'_x(1,1,1)=\frac{d(u(x,1,1))}{dx}\Big|_{x=1}=\frac{d(x+x^x+a)}{dx}\Big|_{x=1}=(1+x^x(\ln x+1))\Big|_{x=1}=2,$

$u'_y(1,2,1)=\frac{d(u(1,y,1))}{dy}\Big|_{y=2}=\frac{d(1+1+a^y)}{dy}\Big|_{y=2}=(0+a^y\ln a)\Big|_{y=2}=a^2\ln a.$

例2. 讨论 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x-y}, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$ 在 R^2 上的连续性.



1° 当 (x,y) 在区域 $y>x$ 或 $y<x$ 中变化时,

因 xy, $x-y$ 在 $y>x$, $y<x$ 中均C. 且 $x-y\neq 0$. 故 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x-y}$ 在区域 $y>x$ 及 $y<x$ 中均C。

2° 当 $y_0=x_0\neq 0$ 时. $\because \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{x-y}{xy}=\dfrac{x_0-y_0}{x_0y_0}=\dfrac{x_0-x_0}{x_0^2}=0$,

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{xy}{x-y}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=\infty\neq f(x_0,y_0)=f(x_0,x_0)=0$.

即 $f(x,y)$ 在 $M(x_0,y_0)$ 处不连续. $(x_0=y_0\neq 0)$;

3° 当 $y_0=x_0=0$ 时. $f(0,0)=f(x_0,x_0)=0$, 而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x-y}$

若取 $\dfrac{y=x-kx^2}{k\neq 0,\text{常数}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-kx^2)}{kx^2}=\dfrac{1}{k}$ 即 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

即 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)\neq f(0,0)=0$. $\therefore f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处也不连续.

即 $f(x,y)$ 在直线 $y=x$ 上处处间断, 在 $y>x$, $y<x$ 上连续。

例3. 多元函数 $z=f(x,y)$ 可微的条件：$(x,y)\in D$，$M_0(x_0,y_0)\in D$ 区域.

(1). $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微的必要条件(I)：$f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处连续；$f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微的必要条件(II)：$f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处可偏导：$f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$ 皆存在。

(2). $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微的充分条件：$f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处连续

(3). $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微的充要条件：

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-f'_x(M_0)\Delta x-f'_y(M_0)\Delta y}{\rho}=0,\quad \Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

证(2)：$\because \Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

$$=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]$$

$$\underline{\underline{\text{微分中值九}}}\; f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,\quad \begin{matrix}0<\theta_1<1\\0<\theta_2<1.\end{matrix}$$

$\because f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处 C.

$$\therefore \begin{cases} f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)=f'_x(x_0,y_0)+\varepsilon_1 & (\varepsilon_1\to 0\ (\Delta x\to 0,\Delta y\to 0)) \\ f'_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)=f'_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2 & (\varepsilon_2\to 0\ (\Delta x\to 0,\Delta y\to 0)) \end{cases}$$

从而：$\Delta z = (f'_x(M_0)+\varepsilon_1)\Delta x + (f'_y(M_0)+\varepsilon_2)\Delta y$

$$= (f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y) + (\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y)$$

且 $\lim\limits_{\rho\to 0}\left|\dfrac{\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y}{\rho}\right| \le |\varepsilon_1|\cdot 1 + |\varepsilon_2|\cdot 1 \longrightarrow 0,\ (\rho\to 0)$

即 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{(\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y)}{\rho} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y = o(\rho)$ 即

$\Delta z = (f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y) + o(\rho)$.

故 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微.

(注：$z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微时，未必有 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处连续．见 eg. 2 第17题。因此，偏导函数 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处连续仅是 $f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微的充分条件。)

证(3)：∵ $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微的充要条件是

$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + o(\rho)$，即

$\Delta z - (f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y) = o(\rho)$ 即

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z - (f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho} = 0.$$

例4、设 $f(x,y)$ 在区域 D 中有定义，若 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 在 D 中存在且有界，则 $f(x,y)$ 在 D 中必连续。

证：设 $M_0(x_0,y_0)$ 为 D 中任一点，且 $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in D$.

则 $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)] \xlongequal{\text{微分中值定理}} f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y$，$0<\theta_1,\theta_2<1$.

已知，$\exists M>0$ 使 $|f'_x(x,y)|\le M$，$|f'_y(x,y)|\le M$，$\forall (x,y)\in D$.

故有 $0\le|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\le|f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)||\Delta x|+|f'_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)||\Delta y|\le M(|\Delta x|+|\Delta y|)$ 且

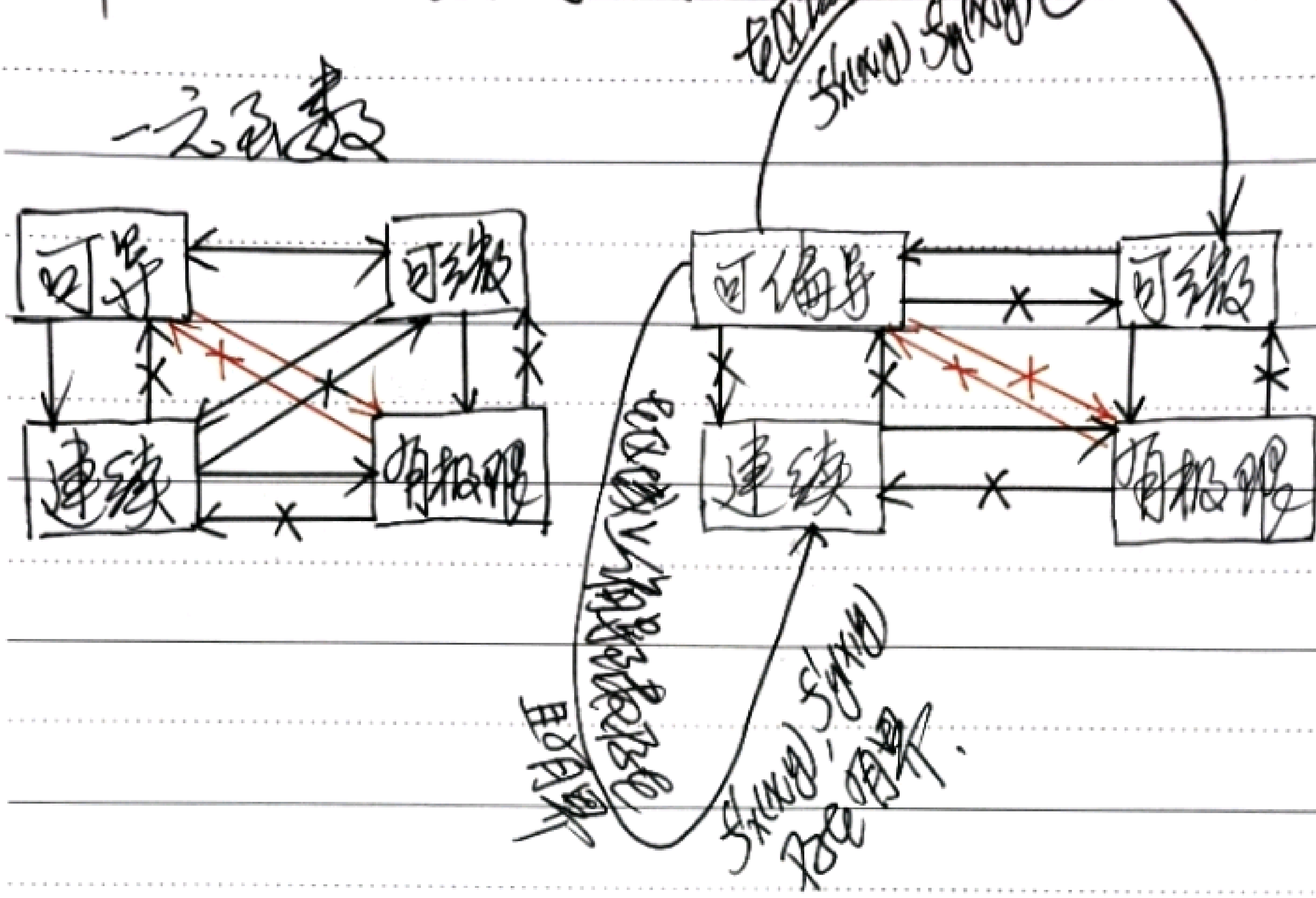
$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} 0=0=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} M(|\Delta x|+|\Delta y|)$，由夹逼准则，

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)$

即 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处 C，由 M_0 在 D 中的任意性知，

$f(x,y)$ 在 D 中连续。

例5. 多元微分学关系图:



例6. 称 $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y))$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y))$ 为 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的累次极限，而称 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 为 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的二重极限.

(1) 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$, $(x^2+y^2\neq 0)$ 则 $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))=0$

$\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))=0$，但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在；

(2). 设 $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$, $(xy\neq 0)$ 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$,

但 $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$, $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$ 都不存在。

证(1)/(1°)：当 $y\to 0$ 时，$y\neq 0$，此时 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\dfrac{0^2 y}{0^4+y^2}=0$

$\therefore \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim\limits_{y\to 0} 0=0$，

证(1)/(2°)：当 $x\to 0$ 时，$x\neq 0$，此时，$\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$

$=\dfrac{x^2\cdot 0}{x^4+0^2}=0$，$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim\limits_{x\to 0} 0=0$.

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}\xrightarrow[k\neq 0，常数]{取 y=kx^2}\dfrac{1}{1+k^2}$，$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在。

证(2)/(1°)：$\because\ 0\leq |f(x,y)|=\left|(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right|\leq |x+y|$

且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} 0=0=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}|x+y|$，$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

证(2)/(2°)：当 $y\to 0$ 时 $y\neq 0$，而 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$

$=\sin\dfrac{1}{y}\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}=\left(\sin\dfrac{1}{y}\right)(y\sin\infty)$ 不存在.

故 $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ 不存在，由对称性知，

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ 也不存在。

例6告诉我们：在通常情况下，累次极限与重极限之间无必然的关系。

例7. 设 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 是一列开集，则

(1). 开集的可列并 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$，有限交 $\bigcap_{i=1}^{m} E_i$，$m \in N^*$ 仍是开集；

(2) 闭集的可列交、有限并仍是闭集。

证(1)/(i). 令 $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$，设 $x_0 \in F$，则 $\exists i_0 \in N^*$，使 $x_0 \in E_{i_0}$

由 E_{i_0} 是开集知，$\exists \delta > 0$，使 $U(x_0, \delta) \subset E_{i_0} \Rightarrow U(x_0, \delta) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = F$.

$\therefore F$ 是开集.

证(1)/(ii). 令 $H = \bigcap_{i=1}^{m} E_i$，设 $x_0 \in H$，则 $x_0 \in E_i$, $i = 1, 2, 3, \cdots m$.

$\because E_i$ 是开集，$\therefore \exists \delta_i > 0$ 使 $U(x_0, \delta_i) \subset E_i$. $i = 1, 2, 3, \cdots, m$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m\}$，则 $U(x_0, \delta) \subset E_i$, $i = 1, 2, 3, \cdots, m \Rightarrow$

$U(x_0, \delta) \subset \bigcap_{i=1}^{m} E_i = H$. 即 H 是开集。

证(2)/(i) 由 De·Morgan 律：$F^c = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c$，$H^c = \left(\bigcap_{i=1}^{m} E_i\right)^c$

$= \bigcup_{i=1}^{m} E_i^c$ 及 E_i^c 是闭集列，知，闭集的可列交、有限并仍是闭集。

例8、德·摩根律 (De·Morgan Law):

(1). $\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{m} E_i^c$, $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c$, $\forall m \in N^*$

(2). $\left(\bigcap_{i=1}^{m} E_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{m} E_i^c$, $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c$, $\forall m \in N^*$.

证(1): 设 $x_0 \in \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c$, 则 $x_0 \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow x_0 \notin E_i, i=1,2,3,\cdots$
$\Rightarrow x_0 \in E_i^c, i=1,2,3,\cdots \Rightarrow x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c$, $\therefore \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c$, 逆推,即得 $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c \subset \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c$, 故 $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c$.

证(2): ~~设 $x_0 \notin \left(\bigcap_{i=1}^{m} E_i\right)^c$, 则 $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{m} E_i$, $\forall m \in N^* \Rightarrow x_0 \in E_i, i=1,2,3\cdots$~~

对 $\forall m \in N^*$, 设 $x_0 \in \bigcup_{i=1}^{m} E_i^c$ 则 $\exists n_0 \in N^*$, $1 \le n_0 \le m$, 使 $x_0 \in E_{n_0}^c \Rightarrow$
$x_0 \notin E_{n_0} \Rightarrow x_0 \notin \bigcap_{i=1}^{m} E_i \Rightarrow x_0 \in \left(\bigcap_{i=1}^{m} E_i\right)^c$, 逆推得 $\left(\bigcap_{i=1}^{m} E_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{m} E_i^c$.

同理可证: $\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{m} E_i^c$, $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c$. $\forall m \in N^*$.

三). 作业: ex9.1: 17/(2); ex9.2: 1/(3); 7/(1); 13/(2); 14; 15; 17.