5.8

ex11.3: 1(2)(5);4(3)(4)(5)(6);6

1.计算下列第二型曲线积分。

(2) $\int_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$，$L$是沿顶点为$A(1,0),B(0,1),C(-1,0),D(0,-1)$的正方形逆时针一周的路径。

正方形上$|x|+|y|=1$，因此$\int_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|}=\int_L(dx+dy)=\underline{0}$

(5)$\int_L e^{x+y+z}dx+e^{x+y+z}dy+e^{x+y+z}dz$，$L$是$x=\cos\varphi,y=\sin\varphi,z=\frac{\varphi}{\pi}$，从点$A(1,0,0)$，到点$B(0,1,\frac{1}{2})$

$dx=-\sin\varphi d\varphi,dy=\cos\varphi d\varphi,dz=\frac{1}{\pi}d\varphi$

$LHS=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos\varphi+\sin\varphi+\frac{\varphi}{\pi}}(-\sin\varphi+\cos\varphi+\frac{1}{\pi})d\varphi=e^{\cos\varphi+\sin\varphi+\frac{\varphi}{\pi}}|_0^{\frac{\pi}{2}}=\underline{e^{\frac{3}{2}}-e}$

4.利用$Green$公式，计算下列曲线积分。

(3)$\oint_L(yx^3+e^y)dx+(xy^3+xe^y-2y)dy$，$L$是关于两坐标轴对称的闭曲线。

由格林公式有$LHS=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D(y^3+e^y-x^3-e^y)dxdy=\underline{0}$

(4)$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$，$L$是$y^2=x-1$与$x=2$围成的封闭曲线，沿逆时针方向。

$LHS=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D(y^2+\frac{y(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})}{x+\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})=\iint_D y^2dxdy=\int_{-1}^1 dy\int_{y^2+1}^2 y^2dx$

$=\int_{-1}^1 y^2(1-y^2)dy=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\underline{\frac{4}{15}}$

(5)$\int_{AMB}(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy+y^2)dy$，$L$是从点$A(0,-1)$沿直线$y=x-1$到点$M(1,0)$，再从$M$沿圆周$x^2+y^2=1$到点$B(0,1)$。

$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2y-(2x-2y)=0$

因此$LHS=\int_{AB}(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy+y^2)dy=\int_{AB}y^2dy=\underline{\frac{2}{3}}$

(6)$\int_{AMO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$，其中$AMO$为由点$A(a,0)$到点$O(0,0)$的上半圆周$x^2+y^2=ax(a>0)$

$\int_{AMOA}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=\iint_D(e^x\cos y-e^x\cos y+m)dxdy=\frac{m}{8}\pi a^2$

因此$LHS=\frac{1}{8}\pi a^2-\int_{OA}(e^x-m)dy=\underline{\frac{1}{8}\pi a^2}$

6.计算曲线积分$\int_L\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$

(1)L为从点$A(-a,0)$沿圆周$y=\sqrt{a^2-x^2}$到点$B(a,0),a>0$

$x^2+y^2=a^2$

$x=-a\cos\theta,y=a\sin\theta,dx=a\sin\theta d\theta,dy=a\cos\theta d\theta$

$\int_L\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\int_0^\pi\frac{-a^2d\theta}{a^2}=\underline{-\pi}$

(2)L为从点$A(-1,0)$沿抛物线$y=4-(x-1)^2$到点$B(3,0)$

$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(x^2+y^2-2x^2)}{(x^2+y^2)^2}-\frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}=0$

取另一条路径为$x=-1,y=4,x=3$

$\int_L\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\int_0^4\frac{-1}{1+y^2}dy+\int_{-1}^3\frac{-4}{x^2+16}dx+\int_4^0\frac{3}{9+y^2}dy=\underline{-\pi}$

ex11.7: 5(1);6(3)

5.求下列全微分的原函数u

(1)$du=(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y-4y^3)dy$

$f(x_0,y_0)-f(0,0)=\int_0^{x_0}3x^2dx+\int_0^{y_0}(6x_0^2y-4y^3)dy=x_0^3+3x_0^2y_0^2-y_0^4$

因此$u=x^3+3x^2y^2-y^4+C$

6.验证下列积分与路径无关，并求出它们的值。

(3)$\int_{(1,0)}^{(6.3)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\nabla r=(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$

因此是保守场，积分与路径无关，且$LHS=\sqrt{x^2+y^2}|_{(1,0)}^{(6.3)}=3\sqrt{5}-1$

5.10

ex11.4: 1(1)(2)(4)(5)(6)(7);2

1.计算下列第二型曲面积分

(1)$\iint_S (x+y^2+z)dxdy$，S为椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的外侧。

$x=a\sin\theta\cos\varphi, y=b\sin\theta\sin\varphi, z=c\cos\theta$

$LHS=\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}(a\sin\theta\cos\varphi+b^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+c\cos\theta)ab\cos\theta\sin\theta d\varphi=2\pi abc\int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta d\theta$

$=2\pi abc-\frac{1}{3}\cos^3\theta|_0^\pi=\frac{4}{3}\pi abc$

(2)$\iint_S xyzdxdy$，S是柱面$x^2+z^2=R^2$在$x\geq 0, y\geq 0$两卦限内被平面$y=0$及$y=h$所截下部分的外侧。

$x=R\cos\theta, y=y, z=R\sin\theta, (y,\theta)$是正向参数。

$LHS=\iint_D R^2y\sin\theta\cos\theta R\sin\theta dyd\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta d\theta\int_0^h R^3ydy=\frac{1}{3}R^3h^2$

(4)$\iint_S yzdzdx$，S为球面$x^2+y^2+z^2=1$的上半部分$(z\geq 0)$并取外侧。

$x=\sin\theta\cos\varphi, y=\sin\theta\sin\varphi, z=\cos\theta, (\theta,\varphi)$是正向参数。

$LHS=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\sin\varphi\cos\theta\sin^2\theta\sin\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta=\frac{\pi}{4}$

(5)$\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，$S$为平面$x+y+z=1$在第一卦限的部分，远离原点的一侧。

$z=1-x-y, (x,y)$是正向参数。

$LHS=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[x^2+y^2+(1-x-y)^2]dy=\frac{1}{4}$

(6)$\iint_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$，$S$是圆锥面$x^2+y^2=z^2(0\leq z\leq 1)$的下侧。

$x=z\cos\theta, y=z\sin\theta, z=z, (\theta,z)$是正向参数。

$LHS=\iint_D[(z\sin\theta-z)z\cos\theta+(z-z\cos\theta)z\sin\theta-(z\cos\theta-z\sin\theta)z]d\theta dz$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1-2z^2\cos\theta+2z^2\sin\theta dz=0$

(7)$\iint_S xz^2dydz+x^2ydzdx+y^2zdxdy$，$S$是上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧。

$x = a\sin\theta\cos\varphi, y = a\sin\theta\sin\varphi, z = a\cos\theta, (\theta,\varphi)$是正向参数。

$LHS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^5(\sin^3\theta\cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^5\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \sin^3\theta\sin^2\varphi\cos^2\theta)d\theta = \frac{2}{5}\pi a^5$

2.求场$v = (x^3 - yz)i - 2x^2yj + zk$通过长方体$0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c$的外侧表面$S$ 的通量。

$\oiint_S v \cdot ds = \int_0^b dy \int_0^c yzdz + \int_0^b dy \int_0^c (a^3 - yz)dz - \int_0^a dx \int_0^c 2x^2bdz + \int_0^a dx \int_0^b cdy$

$= a^3bc - \frac{2}{3}a^3bc + abc = \frac{1}{3}a^3bc + abc$

5.12

ex11.5: 1(1)(2)(3)(4)(5)(6);4

1.计算下列曲面积分

(1)$\iint_S (x+1)dydz + ydzdx + (xy+z)dxdy$，$S$是以$O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$为顶点的四面体的外侧表面。

$Gauss$公式:

$LHS = \iiint_V 3dxdydz = \frac{1}{2}$

(2)$\iint_S xydydz + yzdzdx + zxdxdy$，$S$是由$x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$所围成的四面体的外侧表面。

$Gauss$公式:

$LHS = \iiint_V (x+y+z)dxdydz = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} (x+y+z)dx = \frac{1}{8}$

(3)$\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$，$S$是球面$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$的外侧。

$Gauss$公式:

$LHS = \iiint_V (2x + 2y + 2z)dxdydz$

$= 2\iiint_V (x-a) + (y-b) + (z-c)dxdydz + 2\iiint_V (a+b+c)dxdydz$

$= 2(a+b+c)\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3$

(4)$\iint_S xy^2dydz+yz^2dzdx+zx^2dxdy$，$S$是球面$x^2+y^2+z^2=z$的外侧。

$Gauss$公式:

$LHS=\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\iiint_V(x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2+z-\frac{1}{4})dxdydz$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}r^4\sin\varphi drd\varphi d\theta+\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\frac{4}{3}\pi(\frac{1}{2})^3=\frac{\pi}{15}$

(5)$\iint_S(x-z)dydz+(y-x)dzdx+(z-y)dxdy$，$S$是旋转抛物面$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$的下侧。

$Gauss$公式:

$LHS=\iiint_V 3dxdydz-\iint_{S'}(1-y)dxdy=\frac{3}{2}\pi-\pi=\frac{1}{2}\pi$

(6)$\iint_S(y^2+z^2)dydz+(z^2+x^2)dzdx+(x^2+y^2)dxdy$，$S$是上半球面$x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0)$的上侧。

$Gauss$公式:

$LHS=\iiint_V 0dxdydz-\iint_S(x^2+y^2)dxdy=\int_0^a dr\int_0^{2\pi}r^3d\theta=\frac{1}{2}\pi a^4$

4.设对于半空间$x>0$内任意的光滑有向封闭曲面S，都有:

$\oiint_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=0$

其中函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内具有连续的一阶导数，且$\lim_{x\to 0+}f(x)=1$，求$f(x)$

$Gauss$公式:

$\iiint_V xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}dxdydz=0$

$xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}=0$

$(\frac{xf(x)}{e^x})'=(e^x)'$

$\frac{xf(x)}{e^x}=e^x+C$

$f(x)=\frac{e^x(e^x+C)}{x}$

再有$\lim_{x\to 0+}f(x)=1$，所以$C=-1$

$f(x)=\frac{e^x(e^x-1)}{x}$