第九次作业参考

贺维易，王睿，胡铁宁

2023 年 5 月 23 日

目录

一点说明

(i) 作业讲义部分题过程可能有省略。如对作业仍有疑问可以在群里或答疑课上讨论。

(ii) **作业讲义会随时间更新。**

(iii) 请及时核对自己在 BB 系统里的分数，如有问题请向对应的助教反馈。

(iv) 附录里的内容仅供有兴趣的同学参考，有可能涉及之后才会学习或课外的知识，不要求在现阶段掌握。

(v) 讲义最好用电脑打开，文档内置了链接功能，复习或查看指定的作业很方便。

成绩说明：成绩公式为

$$\text{score} = \begin{cases} 10 - k \cdot \max\{n - n_0, 0\} & \text{未迟交} \\ 5 & \text{迟交} \end{cases}$$

其中 n 为错题数，n_0 为容忍度；k 为系数，取决于当周作业的题量。第九周不考虑补充题共 18 题，$n = 18$，考虑到一些同学出现了计算失误、笔误、抄错题目等等情况，$n_0 = 2$；$k = 0.5$。对于一些不严格的证明，助教也会酌情给分。也意味着作业得到满分不代表作业没有问题，请认真查看自己的作业。

上述评分标准对每个助教都成立。

1　5 月 9 日布置的作业

1.1　教材习题 P191:12,13,14,15,17

习题 1 (教材习题 12). 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵. 证明:
(1)$\boldsymbol{A}$ 的特征值一定不为 0;
(2) 若 $\lambda(\lambda \neq 0)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 则 λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值, 且对应的特征向量相同.

证明. (1) 反证,假设 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 0,因为矩阵的行列式为其所有特征值的积,则 $\det \boldsymbol{A} = 0$,矩阵不可逆，矛盾。即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值一定不为 0.
(2)$\lambda(\lambda \neq 0)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$，等式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}\lambda^{-1}$ 得到 $\boldsymbol{A^{-1}x} = \lambda^{-1}\boldsymbol{x}$，即 λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，且 $\boldsymbol{A}$ 特征值为 λ 对应的特征向量 $\boldsymbol{x}$ 也是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 特征值为 λ^{-1} 的特征向量。

由于 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是可逆矩阵，特征值也均不为 0，可以写为 λ^{-1} 的形式。取 $\boldsymbol{A^{-1}x} = \lambda^{-1}\boldsymbol{x}$ 左乘 $\boldsymbol{A}\lambda$，可知 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 特征值为 λ^{-1} 对应的特征向量 $\boldsymbol{x}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 特征值为 λ 的特征向量，因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量组一一对应。

我认为到这里才算证明完成,因为如果同一特征值有多个特征向量,$\boldsymbol{A}, \lambda$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}, \lambda^{-1}$"对应的"特征向量未必相同,但特征向量组成的空间相同。证明的前半部分说明 $V_{\boldsymbol{A},\lambda} \subset V_{\boldsymbol{A}^{-1},\lambda^{-1}}$，还需 $V_{\boldsymbol{A},\lambda} \supset V_{\boldsymbol{A}^{-1},\lambda^{-1}}$ 来推出 $V_{\boldsymbol{A},\lambda} = V_{\boldsymbol{A}^{-1},\lambda^{-1}}$。 □

习题 2 (教材习题 13). *(1) 若 $\boldsymbol{A^2} = \boldsymbol{I}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 ±1.*
(2) 设 n 阶实方阵满足 $\boldsymbol{A^T} = -\boldsymbol{A}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为零或纯虚数.

证明. (1) 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，对应非零特征向量 $\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{I}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x} \Rightarrow \lambda = \pm 1$. 即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 ±1.
(2) 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，对应非零特征向量 $\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. 两边同时取共轭转置得到 $\boldsymbol{\bar{x}^T}\boldsymbol{\bar{A}^T} = \boldsymbol{\bar{x}^T}\boldsymbol{A^T} = \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{x}}^T \Rightarrow -\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{x} = -\bar{\boldsymbol{x}}^T\lambda\boldsymbol{x} \Rightarrow \lambda + \bar{\lambda} = 0$. 设 $\lambda = a + b\mathrm{i}, \bar{\lambda} = a - b\mathrm{i} \Rightarrow a = 0$. 即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为零或纯虚数。 □

习题 3 (教材习题 14). 设 λ_1, λ_2 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值, $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量。证明: $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。

证明. 由题意，$\lambda_1 \neq \lambda_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x_1} = \lambda_1\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x_2} = \lambda_2\boldsymbol{x_2}$. 假设 $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应特征值为 λ 的特征向量，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}) = \lambda(\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}) = \lambda_1\boldsymbol{x_1} + \lambda_2\boldsymbol{x_2} \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda)\boldsymbol{x_1} = (\lambda - \lambda_2)\boldsymbol{x_2}$，因为属于不同特征值的特征向量线性无关，所以 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$，矛盾，即 $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量. □

习题 4 (教材习题 15). 求下列矩阵的全部特征值和特征向量

$$(1)\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix};(2)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in (0,\pi)(3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};(4)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

解. (1) 特征多项式 $p(\lambda) = (\lambda + a\mathrm{i})(\lambda - a\mathrm{i})$. 特征值 $\lambda_1 = a\mathrm{i}, \lambda_2 = -a\mathrm{i}$.$\lambda_1$ 对应特征向量为 $c_1(1, \mathrm{i})^T, (c_1 \neq 0)$,$\lambda_2$ 对应特征向量为 $c_2(-1, \mathrm{i}), c_2 \neq 0$
(2) 特征多项式 $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$. 特征值 $\lambda = \cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta$. 特征值 $\lambda = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 对应的特征向量 $c_1(1, -\mathrm{i})^T, c_1 \neq 0$，$\lambda = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta$ 对应的特征向量 $c_2(1, \mathrm{i})^T, c_2 \neq 0$.
(3) 特征多项式 $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$. 特征值 $\lambda = 1$(两重),$\lambda = -1$.$\lambda = 1$ 对应的特征向量 $c_1(0, 1, 0)^T + c_2(1, 0, 1)^T$，$c_1, c_2$ 不全为 0，$\lambda = -1$ 对应的特征向量 $c_3(-1, 0, 1)^T(c_3 \neq 0)$.
(4) 特征多项式 $p(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda + 2)$. 特征值 $\lambda = 2$(三重),$\lambda = -2$.$\lambda = 2$ 对应的特征向量 $c_1(1, 1, 0, 0)^T + c_2(1, 0, 1, 0)^T + c_3(1, 0, 0, 1)^T$，$c_1, c_2, c_3$ 不全为 0，$\lambda = -2$ 对应的特征向量 $c_4(-1, 1, 1, 1)^T(c_4 \neq 0)$. □

习题 5 (教材习题 17). 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的全部特征值为 $\lambda_i(i = 1, 2, \cdots, n)$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}a_{ji}.$$

证明. $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的全部特征值为 $\lambda_i(i = 1, 2, \cdots, n)$，则 $\boldsymbol{A}^2$ 的全部特征值为 $\lambda_i^2(i = 1, 2, \cdots, n)$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji}$. □

1.2 补充习题 1

习题 6 (补充习题 1). 设 $\boldsymbol{u} = (3, 1)^T, \boldsymbol{v} = (1, 2)^T$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的向量，并设 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是一个 2 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 分别相应于特征值 2 和 3 的特征向量，设 $\mathscr{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是线性变换，由 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 给出。记 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$，画出 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \mathscr{A}(\boldsymbol{u}), \mathscr{A}(\boldsymbol{v}), \mathscr{A}(\boldsymbol{w})$

解. 我用 GeoGebra 写了可编辑的图https://www.geogebra.org/m/qsyab5mq，大家可以用电脑玩一玩。 □

2　5 月 11 日布置的作业

2.1　教材习题 P191-192:16,18,19,20

习题 7 (教材习题 16). 设 V 为次数不超过 2 的多项式构成的线性空间，线性变换 $\mathscr{A}: V \to V$ 满足:

$$\mathscr{A}(1) = x^2 + x + 3, \quad \mathscr{A}(x) = 2x + 1, \quad \mathscr{A}(x^2) = 2x^2 + 3.$$

求 $\mathscr{A}$ 的特征值和特征向量.

解. 取 V 的一组基 $1, x, x^2$，线性变换在这组基下的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 2)$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}, \lambda_3 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$.
对于 $\lambda = 2$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为 $c_1(0, 3, -1)^T, (c_1 \neq 0)$，对应于线性变换的特征向量在基下的坐标。则线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 3x - x^2$.
对于 $\lambda = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为 $c_2(1 + \sqrt{17}, 2, 2)^T, (c_2 \neq 0)$，对应线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征向量为 $1 + \sqrt{17} + 2x + 2x^2$.
对于 $\lambda = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为 $c_3(1 - \sqrt{17}, 2, 2)^T, (c_3 \neq 0)$，对应线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征向量为 $1 - \sqrt{17} + 2x + 2x^2$.

对上述过程的解释：$\mathscr{A}\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathscr{A}(1) & \mathscr{A}(x) & \mathscr{A}(x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{A}$。若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$，则有 $\mathscr{A}\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}$。因此我们知道 $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}$ 是线性变换 $\mathscr{A}$ 特征值为 λ 的特征向量。 □

习题 8 (教材习题 18). 判断下列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化？若可以，试求变换矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵.

$$(1)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}; (2)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix} (3)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -8 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}; (4)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

解. 由定理 6.4.2，判断矩阵是否可对角化只需验证矩阵每个特征值的几何重数与代数重数是否相等. 下面省略计算过程，只给出最终答案。

(1) 取 $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2) 取 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}, \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$

(3) 不能对角化

(4) 取 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

□

习题 9 (教材习题 19). 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ x & 1 & y\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求 x 和 y 应满足的条件。

解. 矩阵有三个线性无关特征向量，则可以相似对角化，即所有特征值的几何重数和代数重数相同。考察矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$.

对特征值 $\lambda=1$，此时要求几何重数与代数重数均为 2，只需 $x+y=0$. □

习题 10 (教材习题 20). 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & x & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}.$$

(1) 求 x 和 y 的值；*(2)* 求可逆方阵 $\boldsymbol{T}$，使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{B}$.

解. (1) 相似的方阵有相同的特征多项式，所以 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})$，即

$$(\lambda+2)[(\lambda-1)(\lambda-x)-2]=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y)$$

比较系数可得 $x=0, y=-2$.

(2)$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=2, \lambda_3=-2$. 对应的特征向量分别为 $(0,-2,1)^T, (0,1,1)^T, (-1,0,1)^T$，所以取可逆方阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

可以使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{B}$. □

2.2 补充习题 2,3,4,5,6

习题 11 (补充习题 2). 证明*:* 若 $\boldsymbol{A}^{2023}=\boldsymbol{O}$，则 $\det(\boldsymbol{I}-1958\boldsymbol{A})=1$

证明. 满足 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$ 的方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为幂零方阵，其中 k 是正整数。可以证明：方阵 $\boldsymbol{A}$ 为幂零方阵的充分必要条件为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全部为零。

与本题有关的只证明必要性。不妨假设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值不全为零，有 $\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0, \lambda \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rank}(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})<n \Rightarrow \exists \boldsymbol{x} \neq 0,(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \boldsymbol{x}=\mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}=\lambda \boldsymbol{x} \Rightarrow \exists \boldsymbol{x} \neq 0, \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x}=\lambda^k \boldsymbol{x}, \lambda^k \neq 0$。然而若 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O} \Rightarrow \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x}=\boldsymbol{O} \boldsymbol{x}=0 \boldsymbol{x}$。从而得到矛盾。因此 $\boldsymbol{A}$ 为幂零方阵的必要条件为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全部为零。充分性可以利用 Jordan 标准形证明。

考虑 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，由于 $\boldsymbol{A}^{2023}=\boldsymbol{O}$，我们知道 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全部为零。因此 $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-0)^n=\lambda^n$，其中 n 为矩阵的阶数。当 $\lambda \neq 0$，有 $\det(\boldsymbol{I}-\frac{1}{\lambda} \boldsymbol{A})=\frac{1}{\lambda^n} \lambda^n=1$。因此 $\det(\boldsymbol{I}-1958 \boldsymbol{A})=1$。 □

习题 12 (补充习题 3). *设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3 \times 3}$，若 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $|\lambda \boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A}|=\lambda^3+\sigma_1 \lambda^2+\sigma_2 \lambda+\sigma_3$，验证 σ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有 2 阶主子式的和.*

证明. 在第六次作业参考补充习题 1 与老师教案 0509 注 6.3.19 中均有提及，证明方法都是类似的，请参考。 □

习题 13 (补充习题 4). *考虑 $\mathbb{C}$ 上的***循环矩阵***$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$:*

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 将 $\boldsymbol{A}$ 表示成 $\boldsymbol{C}$ 的矩阵多项式.
(2) 证明 $\boldsymbol{C}$ 有 n 个不同的特征值, 从而可以相似对角化.
(3) 证明 $\boldsymbol{A}$ 也可以相似对角化.

解. (1) 首先观察 $\boldsymbol{C}^2, \boldsymbol{C}^k$，有

$$(\boldsymbol{C}^2)_{ij}=\begin{cases} \boldsymbol{C}_{i,i+1} \boldsymbol{C}_{i+1,j}=\delta_{j=i+2} & i=1,2,\cdots,n-2 \\ \boldsymbol{C}_{n-1,n} \boldsymbol{C}_{n,j}=\delta_{j=1} & i=n-1 \\ \boldsymbol{C}_{n,1} \boldsymbol{C}_{1,j}=\delta_{j=2} & i=n \end{cases}$$

以此类推，可归纳地证明

$$\left(\boldsymbol{C}^k\right)_{ij}=\begin{cases} \delta_{j=i+k+1} & i=1,2,\cdots,n-k-1 \\ \delta_{j=i+k+1-n} & i=n-k,\cdots,n \end{cases}$$

因此 $\boldsymbol{A}=\sum_{k=0}^{n-1} a_k \boldsymbol{C}^k$

(2) 用逆序数的方式容易看到 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ -1 & & & & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n+(-1)^n(-1)^{n-1} = \lambda^n-1$，其中 $(-1)^{n-1}$ 是 $23\cdots n1$ 的逆序数。$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}| = \lambda^n-1=0$ 有 n 个互不相同的复根，因此可以相似对角化。

(3) 不妨设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵，则 $\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{T}$ 可按相同的方式相似对角化，同理可推广到 $\boldsymbol{C}^k, \boldsymbol{A}=\sum_{k=0}^{n-1} a_k\boldsymbol{C}^k$ 也可按相同的方式相似对角化。 □

习题 14 (补充习题 5). *求矩阵* $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & h & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *中的* h*, 使得* $\lambda=4$ *的特征子空间的维数为 2.*

证明. 显然 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=(\lambda-4)^2(\lambda-2)^2$。$\lambda=4$ 的代数重数为 2，特征子空间的维数为 2 可等价于 $(4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关的非零解，等价于 $\operatorname{rank}(4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = 4-2=2$。因此只需解

$$4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & h & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & h+3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

秩为 2，可知 $h+3=0 \Leftrightarrow h=-3$. □

习题 15 (补充习题 6). *在以下题目中, 设* $\boldsymbol{A}$ *是线性变换* $\mathscr{A}$ *在自然基下的矩阵. 不写出* $\boldsymbol{A}$*, 直接描述（求出）*$\boldsymbol{A}$ *的特征值与特征子空间.*

(1)$\mathscr{A}$ *是* $\mathbb{R}^2$ *的相对于某条过原点的直线的反射变换（镜像映射）.*

(2)$\mathscr{A}$ *是* $\mathbb{R}^3$ *的相对于某条过原点的直线的旋转变换.*

证明. (1) 对于 $\mathbb{R}^2$ 中任意的向量。镜像变换总是可以理解为 $\boldsymbol{w}=w_\perp\boldsymbol{n}_\perp+w_\parallel\boldsymbol{n}_\parallel$ 两者分别的变换，并且满足 $\mathscr{A}(\boldsymbol{n}_\perp)=-\boldsymbol{n}_\perp, \mathscr{A}(\boldsymbol{n}_\parallel)=\boldsymbol{n}_\parallel$

(2)$\mathbb{R}^3$ 中的向量，旋转变换总是可以分为 $\boldsymbol{w}=w_\perp\boldsymbol{n}_\perp+w_\parallel\boldsymbol{n}_\parallel$ 两者分别的变换，分别满足 $\mathscr{A}(\boldsymbol{n}_\parallel)=\boldsymbol{n}_\parallel$,将 $w_\perp\boldsymbol{n}_\perp$ 拆为两个相互正交的基向量 $w_\perp\boldsymbol{n}_\perp = w_{\perp1}\boldsymbol{n}_{\perp1}+w_{\perp2}\boldsymbol{n}_{\perp2}, \mathscr{A}(\boldsymbol{n}_{\perp1}) = \boldsymbol{n}_{\perp1}\cos\theta-\boldsymbol{n}_{\perp2}\sin\theta, \mathscr{A}(\boldsymbol{n}_{\perp2})=\boldsymbol{n}_{\perp1}\sin\theta+\boldsymbol{n}_{\perp2}\cos\theta$，特征值和特征向量为

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{n}_{\perp1}+i\boldsymbol{n}_{\perp2})=e^{i\theta}(\boldsymbol{n}_{\perp1}+i\boldsymbol{n}_{\perp2}), \mathscr{A}(\boldsymbol{n}_{\perp1}-i\boldsymbol{n}_{\perp2})=e^{-i\theta}(\boldsymbol{n}_{\perp1}-i\boldsymbol{n}_{\perp2})$$

□

致谢

感谢各助教对本文档的校对工作和内容补充，感谢申伊塃老师以及同学对助教工作的支持。