线性变换在一组基下的矩阵

对于 $1 \leq i \leq n$, 向量 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i) \in V$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一地线性表示出来:

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\boldsymbol{\alpha}_j, \qquad \text{其中 } a_{ji} \in F. \tag{1}$$

形式上, 我们可以采用矩阵的写法, 将其写作

$$\begin{pmatrix} \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1) & \cdots & \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}}.$$

之前我们已经提到，我们以将抽象向量视为列向量的方式，即式 (1) 中所表达的方式，来理解上面的矩阵乘法. 其中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵. 更进一步地，我们将 $\begin{pmatrix} \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1) & \cdots & \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n) \end{pmatrix}$ 简记为 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，从而有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix} \boldsymbol{A}.$$

例 1

在之前的讨论中，我们已经知道 $1, x, x^2, \ldots, x^n$ 是 $\mathbb{R}_n[x]$ 的一组基，并且求导运算 $\mathscr{D}$ 是 $\mathbb{R}_n[x]$ 的一个线性变换. 下面，我们来求 $\mathscr{D}$ 在这组基下的矩阵.

注

1. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 V 的一组基, $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$ 是 V 中任意的一组向量, 则存在唯一一个 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$, 使得对任意的 $1 \leq i \leq n$ 有 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i) = \boldsymbol{\beta}_i$. 其证明比较简单. 教材习题 #6 只要求证明了它的存在性. 而唯一性可以借用接下来的定理说明.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 V 的一组基, 对于给定的 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$, 它在这组基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量是由 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1), \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2), \ldots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 在这组基下的坐标唯一确定; 反之, 若给定一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 作为线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵, 也就等价于给出了这组基在线性变换 $\mathscr{A}$ 下的像
$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1), \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2), \ldots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)$, 从而也就确定了线性变换 $\mathscr{A}$. 这说明在基给定的条件下, 线性变换 $\mathscr{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个一一对应的关系.

3. 若已知线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$, 以及 $\mathscr{A}$ 在 V 的某组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ (未知) 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$ (已知), 我们一般很难把这组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 再还原出来. 例如, V 上的恒等变换在任何基下的矩阵都是单位阵 $\boldsymbol{I}$, 零变换在任何基下的矩阵都是零矩阵 $\boldsymbol{O}$.

定理 2

设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换, 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$. 设 $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{y} = \mathscr{A}(\boldsymbol{x})$, 而 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标分别为 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$, 则 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

注 (比较两组基的过渡矩阵与线性变换在基下的矩阵)

1. 给定两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$. 则基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{T}$ 反映的是 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示的系数 (坐标).
2. 给定基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 和线性变换 $\mathscr{A}$, 则 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 反映的是 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1), \ldots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示的系数 (坐标).

注意: (1) 中过渡矩阵的计算中, 我们没有用到 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$ 是线性无关的这条性质. 类似地, (2) 中, 我们一般也没有 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1), \ldots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 线性无关. 关键仅仅为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是基. 所以上面 (1) 与 (2) 中的计算实质是一致的, 虽然反映的信息不尽相同.

例 3

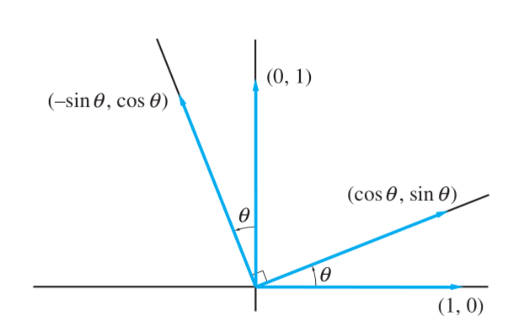
设 $V = F^n$, $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$, 而 $\mathscr{A} : V \to V$ 为线性变换. 证明以下几条:

1. 若 $\mathscr{A}$ 由法则 $\mathscr{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 给出, 则 $\mathscr{A}$ 在标准基 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 下的矩阵恰为 $\boldsymbol{A}$;
2. 若 $\mathscr{A}$ 在标准基 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则 $\mathscr{A}$ 由法则 $\mathscr{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 给出.

例 4

考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 上的逆时针旋转角度 θ 的线性变换 $\mathscr{A}$. 用几何的方法容易看出, 在 $\mathscr{A}$ 的作用下,

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0)^{\mathsf{T}} \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta))^{\mathsf{T}}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = (0,1)^{\mathsf{T}} \mapsto (-\sin(\theta), \cos(\theta))^{\mathsf{T}}.$$



这说明 $\mathscr{A}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的标准基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

并且, 对任意的向量 $\boldsymbol{x} = (a, b)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

接下来的讨论希望理解：例 3 中 $\mathscr{A}$ 在其它基下的矩阵是否仍然为 $\boldsymbol{A}$. 若否，则新的矩阵与原来的 $\boldsymbol{A}$ 有什么关系？

定理 5

设线性变换 $\mathscr{A}: V \to V$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$. 设基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{T}$, 即,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix} \boldsymbol{T},$$

则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$.

例 6

设线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1$ 下的矩阵 $\boldsymbol{B}$.

例 7

设 $\mathscr{A}: F^3 \to F^3$ 为线性变换, 满足

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_1 &= (2,3,5)^{\mathsf{T}} & \mapsto \quad \boldsymbol{\beta}_1 &= (1,2,0)^{\mathsf{T}},\\
\boldsymbol{\alpha}_2 &= (0,1,2)^{\mathsf{T}} & \mapsto \quad \boldsymbol{\beta}_2 &= (2,4,-1)^{\mathsf{T}},\\
\boldsymbol{\alpha}_3 &= (1,0,0)^{\mathsf{T}} & \mapsto \quad \boldsymbol{\beta}_3 &= (3,0,5)^{\mathsf{T}}.
\end{aligned}$$

求

1. $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$;
2. $\mathscr{A}$ 在标准基下的矩阵 $\boldsymbol{B}$.

习题

设 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 构成向量空间 V 的一组基，而 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$. 计算 $\mathscr{A}(3\boldsymbol{\beta}_1 - 4\boldsymbol{\beta}_2 + 5\boldsymbol{\beta}_3)$.

矩阵的相似

回忆

在定理 5 中, 设线性变换 $\mathscr{A}: V \to V$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$. 设基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{T}$, 即,

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \ldots & \boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \ldots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix} \boldsymbol{T},$$

则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$.

一般地, 考察 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$, 其中 $\boldsymbol{T}$ 可逆, 则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 本质上反映了同一个东西 (线性变换 $\mathscr{A}$).

定义 8

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为数域 F 上的两个 n 阶方阵. 若存在 F 上的同阶可逆方阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$, 则称 $\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 做相似变换得到的, 称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ (在 F 上) 相似 (*similar*), 记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$. 若 $F = \mathbb{R}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 实相似; 若 $F = \mathbb{C}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 复相似.

命题 9

同阶方阵的相似关系为等价关系, 即

- (反身性) $\boldsymbol{A}$ 与自身相似;
- (对称性) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则反过来 $\boldsymbol{B}$ 也与 $\boldsymbol{A}$ 相似;
- (传递性) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, 则 $\boldsymbol{A}$ 也与 $\boldsymbol{C}$ 相似.

推论 10

有限维线性空间 V 上的一个线性变换在 V 的不同基下的矩阵是相似的.

命题 11 (相似矩阵的基本性质)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}_i$ 都是 F 上的方阵.

1. 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}^m \sim \boldsymbol{B}^m$, 其中 m 为正整数.
2. 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 设 $f(x)$ 是一个一元多项式, 则矩阵多项式 $f(\boldsymbol{A}) \sim f(\boldsymbol{B})$.
3. 若 $\boldsymbol{A}_i \sim \boldsymbol{B}_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, 则 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_s) \sim \mathrm{diag}(\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \ldots, \boldsymbol{B}_s)$.
4. 对于任意的排列 $(i_1, i_2, \ldots, i_s) \in \mathcal{S}_s$, 我们有 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_s) \sim \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_{i_1}, \boldsymbol{A}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{A}_{i_s})$
5. 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 且 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{B}$ 也可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1} \sim \boldsymbol{B}^{-1}$.
6. 相似的矩阵有相同的行列式、迹和秩.