接下来, 我们看一下 Gram–Schmidt 正交化的理论性的应用.

定理 7.2.25 (可逆矩阵的 QR 分解)**.** 对任意的 n 阶可逆实矩阵 $\boldsymbol{A}$, 都存在一个 n 阶的正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和一个 n 阶的主对角元素为正数的上三角矩阵 $\boldsymbol{R}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}$. 这称为 $\boldsymbol{A}$ **的 $\boldsymbol{QR}$ 分解**, 并且这样的分解是唯一的.

证明. 先证分解的存在性. 对于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 这组向量线性无关, 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. 对这组向量使用 Gram–Schmidt 正交化方法, 我们会得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1, \\ \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1, \\ \qquad \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\alpha}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_j)} \boldsymbol{\beta}_j. \end{cases}$$

上面的表达式换一种写法就是

$$\boldsymbol{\alpha}_s = \sum_{j=1}^{s-1} \frac{(\boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_j)} \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\beta}_s, \qquad s = 1, 2, \ldots, n.$$

将这些用矩阵表示, 于是有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & * & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

再做归一化, 对于每个 s, 令 $\boldsymbol{\varepsilon}_s = \frac{\boldsymbol{\beta}_s}{\|\boldsymbol{\beta}_s\|}$, 从而

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_2 & \cdots & \boldsymbol{\varepsilon}_n \end{pmatrix} \operatorname{diag}(\|\boldsymbol{\beta}_1\|, \|\boldsymbol{\beta}_2\|, \ldots, \|\boldsymbol{\beta}_n\|).$$

此时,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_2 & \cdots & \boldsymbol{\varepsilon}_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{Q}} \underbrace{\operatorname{diag}(\|\boldsymbol{\beta}_1\|, \|\boldsymbol{\beta}_2\|, \ldots, \|\boldsymbol{\beta}_n\|) \begin{pmatrix} 1 & & * & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{R}}.$$

可以直接验证, 上面定义的 $\boldsymbol{Q}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 满足要求.

接下来证明分解的唯一性. 若有正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2$ 和主对角线上为正数的上三角矩阵 $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2$ 满足

$$\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{R}_2,$$

那么

$$\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2^{-1}.$$

上式的左边是正交矩阵, 右边是主对角线上为正数的上三角矩阵. 由接下来的引理可知, 同时满足这两个条件的方阵仅为单位矩阵, 从而 $\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{Q}_2$ 以及 $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_2$. □

引理 7.2.26. *若一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 同时是主对角线上为正数的上三角矩阵, 那么它必定是一个单位阵.*

证明. 由于 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 它是可逆的, 且 $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^\mathsf{T}$. 由初等变换求逆的方法可知, 作为上三角矩阵的逆, $\boldsymbol{P}^{-1}$ 必为上三角阵. 另一方面, 作为上三角矩阵的转置, $\boldsymbol{P}^\mathsf{T}$ 是一个下三角阵. 综上可知, $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^\mathsf{T}$ 为对角阵, 从而 $\boldsymbol{P}$ 也是对角阵. 此时, 不难验证 $\boldsymbol{P}$ 恰为 $\boldsymbol{I}$. □

之后我们会看到关于矩阵的 QR 分解的应用.

引理 7.2.27. *设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是欧氏空间 V 的一组标准正交基, 而 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ 是 V 中的一组向量, 并且在这组基的坐标列向量依次为 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$. 假定 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, 那么 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ 的 Gram 矩阵 $\boldsymbol{G}$ 恰为 $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}$.*

证明. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times m}$, 那么 $\boldsymbol{x}_j = \sum_p \boldsymbol{\varepsilon}_p a_{pj}$. 设 $\boldsymbol{G} = (g_{ij})_{n\times n}$. 依定义,

$$\begin{aligned} g_{ij} = (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) &= \left(\sum_p \boldsymbol{\varepsilon}_p a_{pi}, \sum_q \boldsymbol{\varepsilon}_q a_{qj}\right) = \sum_p \sum_q a_{pi}a_{qj}(\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_q) \\ &\xlongequal[\text{为标准正交基}]{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\varepsilon}_n} \sum_p a_{pi}a_{pj} = (\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A})_{ij}. \end{aligned}$$

这说明 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}$. □

例 7.2.28. *在 n 维欧氏空间 V 中, 设线性无关的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 经过 Schmidt 正交化方法, 变成了与之等价的正交向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m$, 而这两组向量的 Gram 矩阵分别为 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{G}'$. 证明: $|\boldsymbol{G}| = |\boldsymbol{G}'| = \|\boldsymbol{\beta}_1\|^2 \cdots \|\boldsymbol{\beta}_m\|^2 \le \|\boldsymbol{\alpha}_1\|^2 \cdots \|\boldsymbol{\alpha}_m\|^2$.*

证明. 我们的证明分三步走.

(1) 不妨设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 中的一组标准正交基. 假定如下给出了 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的线性表示:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{P},$$

其中 $\boldsymbol{P}\in\mathbb{R}^{n\times m}$. 与此同时, 我们在定理 7.2.25 的证明中看到,

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m)=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m)\boldsymbol{Q},$$

其中 $\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 为上三角矩阵, 且对角线上的元素全为 1. 特别地, $|\boldsymbol{Q}|=1$. 此时,

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1}.$$

由引理 7.2.27 可知, $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{G}'=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1})^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1})$. 显然,

$$|\boldsymbol{G}'|=|(\boldsymbol{Q}^{-1})^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Q}^{-1}|=|\boldsymbol{Q}^{-1}|^2|\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{G}|.$$

(2) 由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m$ 为正交向量组, $\boldsymbol{G}'=\operatorname{diag}(\|\boldsymbol{\beta}_1\|^2,\dots,\|\boldsymbol{\beta}_m\|^2)$, 从而 $\boldsymbol{G}'$ 的行列式的值由公式给出.

(3) 只需注意到:

$$\boldsymbol{\alpha}_s=\sum_{j=1}^{s-1}\frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\beta}_j)}\boldsymbol{\beta}_j+\boldsymbol{\beta}_s,\qquad s=1,2,\dots,n,$$

而 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m$ 为正交向量组, 于是,

$$\|\boldsymbol{\alpha}_s\|^2=\sum_{j=1}^{s-1}\left\|\frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\beta}_j)}\boldsymbol{\beta}_j\right\|^2+\|\boldsymbol{\beta}_s\|^2\geq\|\boldsymbol{\beta}_s\|^2.$$

□

7.3 欧几里得空间中的线性变换

在这一节中, 我们将线性变换的讨论与欧氏空间的内积联系起来.

正交变换与正交矩阵

定义 7.3.1. 设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 上的线性变换. 若对于任意的 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$, 有 $(\mathscr{A}(\boldsymbol{a}),\mathscr{A}(\boldsymbol{b}))=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, 则称 $\mathscr{A}$ 为 V 上的**正交变换** (*orthogonal transformation*).

简言之, 正交变换是保持内积不变的线性变换.

例 7.3.2. (1) 恒等变换是 V 上的正交变换. 若线性空间 V 不是零空间, 则零变换不是正交变换.

(2) 在例 6.2.6 中我们已经见到, 对于具有标准内积的欧氏空间 $\mathbb{R}^2$, 以原点为中心, 逆时针旋转角度 θ 的变换 $\mathscr{A}_\theta$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换, 它在 $\mathbb{R}^2$ 的自然基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}_\theta=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

任取向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^\mathsf{T},\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)^\mathsf{T}\in\mathbb{R}^2$, 我们有

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}_\theta(\boldsymbol{x}),\mathscr{A}_\theta(\boldsymbol{y}))&=(\boldsymbol{A}_\theta\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}_\theta\boldsymbol{y})\\&=\left(\begin{pmatrix}\cos(\theta)x_1-\sin(\theta)x_2\\ \sin(\theta)x_1+\cos(\theta)x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos(\theta)y_1-\sin(\theta)y_2\\ \sin(\theta)y_1+\cos(\theta)y_2\end{pmatrix}\right)\\&=(\cos(\theta)x_1-\sin(\theta)x_2)(\cos(\theta)y_1-\sin(\theta)y_2)\\&\quad+(\sin(\theta)x_1+\cos(\theta)x_2)(\sin(\theta)y_1+\cos(\theta)y_2)\\&=x_1y_1+x_2y_2=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

这说明, 旋转变换 $\mathscr{A}_\theta$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上相对于标准内积的正交变换. 当然, 这一点用旋转的几何意义来解释也是很容易的.

注 7.3.3. 在欧氏空间中, 向量的长度和向量之间的夹角由空间的内积来决定:

- $\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$;
- 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角的余弦为 $\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\sqrt{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})}}$.

故正交变换保持向量的长度和向量之间的夹角不变, 即 $\|\mathscr{A}(\boldsymbol{a})\|=\|\boldsymbol{a}\|$, 且 $\mathscr{A}(\boldsymbol{a})$ 与 $\mathscr{A}(\boldsymbol{b})$ 之间的夹角与 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角一致. 特别地, 正交变换把正交的向量组变成正交的向量组, 把标准正交基变成标准正交基.

事实上, 我们有更多的刻划:

定理 7.3.4. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 上的一个线性变换, 则以下几个条件等价: 教材定理 7.3.1

(1) $\mathscr{A}$ 是正交变换;

(2) $\mathscr{A}$ 保持向量的模不变;

(3) $\mathscr{A}$ 将任意的标准正交基变为标准正交基;

(4) $\mathscr{A}$ 将给定的一组标准正交基变为标准正交基.

证明. 我们已经看到了 (1)⇒(2) 以及 (3)⇒(4). 关于 (2)⇒(3), 我们只需注意到之前提到的事实: $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 当且仅当 $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2$. 接下来, 我们证明 (4)⇒(1):

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是欧氏空间 V 上给定的一组标准正交基. 对于任意的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$, 设 $(a_1, \dots, a_n)^\mathsf{T}$ 与 $(b_1, \dots, b_n)^\mathsf{T}$ 是它们在这组基下的坐标. 此时

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{a}), \mathscr{A}(\boldsymbol{b})) = \left(\mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{\varepsilon}_i\right), \mathscr{A}\left(\sum_{j=1}^n b_j \boldsymbol{\varepsilon}_j\right)\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j (\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i), \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_j))$$

请回忆
注 7.2.18中
的讨论

$$\xlongequal[\text{为标准正交基}]{\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1), \dots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i b_i \xlongequal[\text{为标准正交基}]{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

故 $\mathscr{A}$ 是一个正交变换. □

例 7.3.5. 设 $\mathscr{A}$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变化, 将 $(1,0)^\mathsf{T}$ 变成了 $(1,0)^\mathsf{T}$ 自身, 将 $(0,1)^\mathsf{T}$ 变成了 $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^\mathsf{T}$. $\mathscr{A}$ 虽然将 $\mathbb{R}^2$ 的一组由单位向量构成的基变成了另外一组由单位向量构成的基, 但是 $\mathscr{A}$ 不是正交变换.

定理 7.3.6. 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维欧氏空间 V 上的线性变换, 在 V 的一组标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$. 那么, $\mathscr{A}$ 为正交变换的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

教材定理
7.3.2

证明. 由定理 7.3.4, $\mathscr{A}$ 为正交变换当仅当 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1), \dots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 为标准正交基. 而由注 7.2.16 可知, 这又当且仅当 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1), \dots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 的 Gram 矩阵为 $\boldsymbol{I}_n$. 另一方面, 由定义, $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个列向量是 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$ 在标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标. 故由引理 7.2.27 可知, $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1), \dots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 的 Gram 矩阵为 $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}$. 综上可知, 定理的结论成立. □

例 7.3.7. *在例 7.3.2 (2) 中的旋转变换 $\mathscr{A}_\theta$ 为正交变换, 从而 $\mathscr{A}_\theta$ 在自然基下的矩阵 $\boldsymbol{A}_\theta$ 为正交矩阵. 当然, 我们可以很轻松地利用定义 (旋转变换保持内积) 来直接验证这一点.*

注 7.3.8. *在定理 7.3.6 中的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 为标准正交基这一条件非常重要, 因为一般而言, 正交变换在非标准正交基的基下的矩阵不为正交矩阵, 即, 正交矩阵在相似变换下一般不再是正交矩阵了. 例如, 考虑正交矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ 和可逆矩阵 $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 其中 $\theta, a \in \mathbb{R}$. 此时,*

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) - a\sin(\theta) & -a\,(a\sin(\theta) + \cos(\theta)) - \sin(\theta) + a\cos(\theta) \\ \sin(\theta) & a\sin(\theta) + \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

若其为正交矩阵, 其第一个列向量必为单位向量. 可是并不是所有的 $a, \theta \in \mathbb{R}$ 都使得

$$(\cos(\theta) - a\sin(\theta))^2 + \sin^2(\theta) = 1.$$

故 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 一般而言不再是正交矩阵了.

与定理 7.3.6 相关的是下面的一个命题, 它告诉我们, 在有限维欧氏空间 V 中, 给定了一组标准正交基, 则 V 的所有标准正交基与正交矩阵一一对应.

命题 7.3.9. 若欧氏空间 V 的一组标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到另外一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 仍然是 V 的标准正交基的充要条件是 $\boldsymbol{P}$ 为正交方阵. (注意, 若 V 是数组空间 $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是它的自然基, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{P}$ 的列向量)

证明. **(证法一)** 由注 7.2.16 可知, $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 仍然是 V 的标准正交基的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的 Gram 矩阵 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{I}_n$. 而由引理 7.2.27 可知, $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{P}^\mathsf{T}\boldsymbol{P}$. 综上可知, 命题的结论成立.

(证法二) 对于 V 的另外一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 存在唯一的 V 上的线性映射 $\mathscr{A}$, 使得 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = \boldsymbol{\alpha}_i$ $(1 \le i \le n)$. 此时, $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵 (记作 $\boldsymbol{A}$) 就是 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的过渡矩阵 (记作 $\boldsymbol{P}$). 于是, $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组标准正交基, 当且仅当线性变换 $\mathscr{A}$ 把已知的标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 变为标准正交基, 当且仅当 $\mathscr{A}$ 为正交变换, 当且仅当线性变换 $\mathscr{A}$ 在已知的标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 即过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵. □

注 7.3.10. 我们再小结一下正交矩阵的常见性质.

(1) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为两个同阶的正交矩阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是正交矩阵:

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^\mathsf{T}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^\mathsf{T}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^\mathsf{T}$ 也是正交矩阵:

$$(\boldsymbol{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T}\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}.$$

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 则 $\det(\boldsymbol{A}) = \pm 1$. 这是由于 $1 = \|\boldsymbol{I}\| = \left\|\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\right\| = \left\|\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\right\| \cdot \|\boldsymbol{A}\| = \|\boldsymbol{A}\|^2$, 而 $\|\boldsymbol{A}\| \in \mathbb{R}$.

由此, 若 $|\boldsymbol{A}| = 1$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**第一类正交阵**, 否则, 则称之为**第二类正交阵**. 注意, 线性变换的行列式不依赖于具体基的选取, 故我们有如下的定义.

- 若正交变换 $\mathscr{A}$ 的行列式为 1, 则称 $\mathscr{A}$ 为**第一类变换**. 典型的例子是平面的关于原点的旋转变换.
- 若正交变换 $\mathscr{A}$ 的行列式为 -1, 则称 $\mathscr{A}$ 为**第二类变换**. 典型的例子是平面的关于任何一条指定的过原点的直线的镜面反射.

可以证明, 上面指出的旋转变换与镜面反射是平面 $\mathbb{R}^2$ 上所有的正交变换 (教材作业 *P221#14*).

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 则伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵. 这是因为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I} = \pm\boldsymbol{I},$$

从而 $\boldsymbol{A}^* = \pm\boldsymbol{A}^{-1}$.

(5) 我们再复习一下正交矩阵的常见判定准则. 对于 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$, 假定它的行向量组为 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$, 它的列向量组为 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_n$. 那么, 以下几条等价:

(a) $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵;

(b) 对任意的 i, j 有 $\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_j^{\mathsf{T}} = \delta_{ij}$;

(c) 对任意的 i, j 有 $\boldsymbol{y}_i^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y}_j = \delta_{ij}$;

(d) $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 在标准内积下的一组标准正交基;

(e) $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 在标准内积下的一组标准正交基.