例 1

置换矩阵 (*permutation matrix*) 是将单位矩阵的各列重新排列得到的矩阵, 即形如 $(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n})$ 的矩阵, 其中列向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的自然基, 而 $\sigma = (i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_n) \in \mathcal{S}_n$ 是一个置换 (也称作排列).

1. 置换矩阵的列向量组仍然构成标准正交基, 从而该矩阵是正交矩阵.
2. 这样的矩阵是一个第一类正交矩阵的充要条件是其对应的置换 σ 为一个偶置换.
3. 置换矩阵也可以视为由单位矩阵的各行重新排列得到的矩阵.

例 2

设 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 是有限维线性空间 V 上的线性变换, 在基 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$. 不难验证, 映射的复合 $\mathscr{A} \circ \mathscr{B}$ 仍然是 V 上的线性变换, 并且相应的矩阵为 $\boldsymbol{AB}$.

事实上, 若 $V = F^n$ 是数组空间, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 是自然基, $\boldsymbol{x} \in V$ 写成列向量形式, 则 $\mathscr{A} : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{Ax}$, $\mathscr{B} : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{Bx}$. 通过直接验证, 我们看到 $\mathscr{A} \circ \mathscr{B} : \boldsymbol{x} \rightsquigarrow \boldsymbol{Bx} \rightsquigarrow \boldsymbol{ABx}$. 这间接表明了 $\mathscr{A} \circ \mathscr{B}$ 对应的矩阵应当为 $\boldsymbol{AB}$.

进一步地, 若 V 是欧氏空间, $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 都是正交变换, 则对于任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$,

$$(\mathscr{A}(\mathscr{B}(\boldsymbol{x})), \mathscr{A}(\mathscr{B}(\boldsymbol{y}))) = (\mathscr{B}(\boldsymbol{x}), \mathscr{B}(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

这说明正交变换的复合仍然是正交变换. 这对应于前面提到的事实: 同阶正交矩阵的乘积仍然是正交矩阵.

例 3

设线性变换 $\mathscr{A}$ 是有限维线性空间 V 上的一一的满射 (也称为自同构), 即, V 中的任何元素在 $\mathscr{A}$ 下都存在唯一一个原像. 此时, 不难看出, $\mathscr{A}$ 存在逆映射 $\mathscr{A}^{-1}: V \to V$, 将 V 中的元素映射成为其在 $\mathscr{A}$ 下的原像. $\mathscr{A}^{-1}$ 仍然是线性映射, 从而是 V 上的线性变换, 称为 $\mathscr{A}$ 的逆变换. 进一步地, $\mathscr{A}^{-1}$ 仍然是一一的满射, 满足 $(\mathscr{A}^{-1})^{-1} = \mathscr{A}$.

设 V 是有限维的, 而 $\mathscr{A}^{-1}$ 与 $\mathscr{A}$ 在 V 的基 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$. 由于 $\mathscr{A}^{-1} \circ \mathscr{A} = \mathrm{id}_V$, 这说明 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n$, 从而 $\mathscr{A}^{-1}$ 对应的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 恰为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

设 $\mathscr{A}$ 是有限维欧氏空间 V 上的正交变换, 不难验证 $\mathscr{A}$ 存在逆变换 (留作习题). 对于任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, 由于 $\mathscr{A}^{-1} \circ \mathscr{A} = \mathrm{id}_V = \mathscr{A} \circ \mathscr{A}^{-1}$,

$$(\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{x}), \mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{y})) \xlongequal{\mathscr{A}\text{ 为正交变换}} (\mathscr{A}(\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{x})), \mathscr{A}(\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{y}))) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

这说明 $\mathscr{A}^{-1}$ 仍然是正交变换. 这对应于前面提到的事实: 正交方阵的逆仍然是正交方阵.

由于我们现在是在实数域上考虑, 线性变换一般不一定有 (实) 特征值.

命题 4

设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 上的正交变换.

1. 若 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是 $\mathscr{A}$ 的特征值, 则 $\lambda = \pm 1$.
2. 若 V 是 n 维欧氏空间, 其中 n 为奇数, 而 $\mathscr{A}$ 为第一类正交变换, 则 $\mathscr{A}$ 一定存在值为 1 的特征值.
3. 若 V 是 n 维欧氏空间, 而 $\mathscr{A}$ 为第二类正交变换, 则 $\mathscr{A}$ 一定存在值为 -1 的特征值.

注 5

设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 上的正交变换, 那么 V 中存在一个标准正交基, 使得 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵为正交矩阵. 而我们之前的讨论说明了正交矩阵的特征值 λ 的模长必为 1, 这意味着 $|\mathrm{tr}(\mathscr{A})| \leq n$.

注 6

如果欧氏空间 V 上的正交变换 $\mathscr{A}$ 有两个不同的 (实) 特征值, 那么 $\mathscr{A}$ 的属于不同特征值的特征向量一定正交. 这是因为这两个特征值只能为 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = -1$. 若假定 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 分别是它们的特征向量, 那么

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (\mathscr{A}\boldsymbol{x}_1, \mathscr{A}\boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, -\boldsymbol{x}_2) = -(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2).$$

因此, 只能有 $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$, 即 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 正交.

注 7

上周的作业里我们 (本质上) 证明了任何二阶正交矩阵必取下面两种形式之一:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \theta < 2\pi,$$

其中第一个是旋转变换 $\mathscr{A}_\theta$ 在自然基下的矩阵.

注 8

上面命题的一个几何意义: 三维欧氏空间的第一类正交变换, 其必保持一个对称轴不变; 进一步的讨论可以表明, 它是绕该对称轴的旋转变换.

设 $\mathscr{A}$ 是这样的一个第一类正交变换, 则 $\lambda = 1$ 是它的一个特征值. 设单位向量 ε_1 是 $\lambda = 1$ 的一个特征向量, 则对任意 $k \in \mathbb{R}$, $\mathscr{A}(k\varepsilon_1) = k\mathscr{A}(\varepsilon_1) = k\varepsilon_1$. 这说明 $\mathscr{A}$ 保持直线 $\mathbb{R}\varepsilon_1 = \{k\varepsilon_1 \mid k \in \mathbb{R}\}$ 上的向量不变. 利用正交化的方法, 我们可以找到 $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^3$ 使得 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 为一组标准正交基.

任取 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$, 假设它在这组基下的坐标为 $(x, y, z)^\mathsf{T}$, 它在 $\varepsilon_2\varepsilon_3$ 平面上的投影 $\boldsymbol{\alpha}' = y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3$ 与 ε_1 垂直, 从而 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}')$ 与 $\mathscr{A}(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$ 垂直. 这说明 $\mathscr{A}$ 将 $\varepsilon_2\varepsilon_3$ 平面上的点仍然映射到该平面上, 从而 $\mathscr{A}$ 局限在该平面上后成为该平面的线性变换, 记作 $\mathscr{A}|_{\varepsilon_2\varepsilon_3}$.

另外需要指出的是, $\mathbb{R}^3$ 的标准内积局限在 $\varepsilon_2\varepsilon_3$ 平面后成为该平面的一个内积, 而 $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 在该内积下是一组标准正交基.

设 $\mathscr{A}|_{\varepsilon_2\varepsilon_3}$ 在基 $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}'$, 则 $\mathscr{A}$ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boldsymbol{A}' \end{pmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 是行列式为 1 的正交矩阵, 这迫使 $\boldsymbol{A}'$ 是行列式为 1 的正交矩阵, 从而 $\mathscr{A}|_{\varepsilon_2\varepsilon_3}$ 是 $\varepsilon_2\varepsilon_3$ 平面上的第一类正交变换, 即旋转变换. 因此, $\mathscr{A}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的绕 ε_1 轴的旋转.

例 9

设 $\mathscr{A}$ 是二维欧氏空间 V 上的正交变换.

1. 如果 $\mathscr{A}$ 是第一类正交变换, 那么 V 中存在一个标准正交基, 使得 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵为
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$
2. 如果 $\mathscr{A}$ 是第二类正交变换, 那么 V 中存在一个标准正交基, 使得 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵为
$$\begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

注 10

更一般地, 我们有如下的结果.

1. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 上的正交变换, 那么 V 中存在一个标准正交基, 使得 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵为
$$\operatorname{diag}\left\{\lambda_1,\ldots,\lambda_r,\begin{pmatrix}\cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1)\\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1)\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\cos(\theta_m) & -\sin(\theta_m)\\ \sin(\theta_m) & \cos(\theta_m)\end{pmatrix}\right\},\tag{1}$$
其中 $\lambda_i=\pm1$ $(1\le i\le r, 0\le r\le n)$, $0<\theta_j<\pi$ $(1\le j\le m, 0\le m\le \frac{n}{2})$.
2. n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定正交相似于形如 (1) 的分块对角矩阵. (正交相似是指存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 形如给定的矩阵)

对称变换与对称矩阵

定义 11

设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 上的线性变换. 若对于任意的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ 有 $(\mathscr{A}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \mathscr{A}(\boldsymbol{b}))$, 则称 $\mathscr{A}$ 是 V 上的对称变换 (*symmetric transformation*).

例 12

1. 零变换和恒等变换都是对称变换.
2. 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上的旋转变换 $\mathscr{A}_\theta$ 一般不为对称变换.

下面我们讨论对称变换与对称矩阵的关系.

定理 13

设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 上的线性变换, 则以下几条等价:

1. $\mathscr{A}$ 是 V 上的对称变换;
2. $\mathscr{A}$ 在任何一组标准正交基下的矩阵都是实对称方阵;
3. $\mathscr{A}$ 在给定的一组标准正交基下的矩阵是实对称方阵.

注 14

接着上面的定理的证明, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的另外一组基, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$, 则 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$. 在一般情形下, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 不再是对称方阵. 另一方面, 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 仍然是 V 的一组标准正交基, 则由定理 13 知 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 必为对称方阵. 事实上, 我们知此时的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为实正交方阵, 故由 $\boldsymbol{A}$ 为对称方阵, 我们可以直接验证 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对称方阵.

实对称阵的对角化

一般而言，实方阵的特征多项式可能有虚根，从而不能实相似对角化。但是实对称的矩阵的特征值都是实数。

命题 15

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称方阵，则 $\boldsymbol{A}$ 所有的复特征值其实都是实数，而 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的实特征向量在 $\mathbb{R}^n$ 的标准内积下必然正交。

对称变换也有相应的性质。

定理 16

设 $\mathscr{A}$ 是有限维欧氏空间 V 上的对称变换，则 $\mathscr{A}$ 的特征值都是实数，且 $\mathscr{A}$ 在不同特征值下的特征向量相互正交。

引理 17

如果 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的复根都是实数，那么 $\boldsymbol{A}$ 一定可以正交相似上三角化，即存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为上三角阵.