Ex13.4 1(1); 2(1)(3); 6; 7(1); 8(1)

1.确定下列含参变量反常积分的收敛域：

(1)$\int_0^{+\infty} x^u dx$

$u \geq 0$时显然**div**

$\int_0^{+\infty} x^u dx = \int_0^1 x^u dx + \int_1^{+\infty} x^u dx$

$u \leq -1$，$u \geq -1$时，均**div**

因此收敛域为$\emptyset$

2.研究下列积分在指定区间上的一致收敛性：

(1)$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ux}{1+x^2} dx(-\infty < u < +\infty)$

考虑$+\infty$侧，$\int_{A'}^{A''} \frac{\cos ux}{1+x^2} dx \leq \int_{A'}^{A''} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x|_{A'}^{A''}$

$\forall \epsilon > 0$,取$X = \tan(\frac{\pi}{2} - \epsilon)$，则$\int_{A'}^{A''} \frac{\cos ux}{1+x^2} dx < \epsilon$

因此一致收敛。

(3)$\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx(0 \leq \alpha < +\infty)$

$\alpha > 0$时，$\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\int_0^A \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx \leq A\sqrt{\alpha}$

$\int_A^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2} - A\sqrt{a}$

因此$\sup_{\alpha \geq 0} |\int_A^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx| = \frac{\pi}{2}$

因此不一致收敛。

6.证明：$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} dx$在$0 \leq \alpha < +\infty$上是连续且可微的函数.

$p(x) = \frac{1}{1+x^2}$，则$\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} \leq p(x)$，$p(x)$在$[0, +\infty)$上可积，因此$F(\alpha)$一致收敛，因此在$0 \leq \alpha < +\infty$上连续。## 连续型证毕

记$f(x, \alpha) = \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}$

$|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}| = |\frac{-2(x+\alpha)\cos x}{(1+(x+\alpha)^2)^2}| \leq \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}$

因此$\int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} dx$一致收敛，因此$F(\alpha)$可微。

7.计算下列积分：

(1)$\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} dx(\alpha, \beta > -1)$

被积函数可以表达为积分：$\frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} = \int_\alpha^\beta x^u du$

因此$LHS = \int_0^1 dx \int_\alpha^\beta x^u du = \int_\alpha^\beta du \int_0^1 x^u dx = \int_\alpha^\beta du \frac{1}{u+1} x^{u+1}|_0^1 = \int_\alpha^\beta \frac{1}{u+1} du = \ln \frac{\beta+1}{\alpha+1}$

8.利用$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$及$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，计算:

(1)$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2}dx(\sigma>0)$

$u=\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}$，则$dx=\sqrt{2}\sigma du$

$LHS=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{2}\sigma u+a}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-u^2}\sqrt{2}\sigma du=\frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sqrt{2}\sigma\frac{\sqrt{\pi}}{2}2=a$

Ex13.2 1(2)(3); Ex13.4 6; 8(2)(4)(6)

1.计算反常积分:

(2)$\iint_D\frac{dxdy}{(1+x+y)^\alpha}$，其中$D$是第一象限，$\alpha>2$为常数

(3)$\iint_D\max\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$，其中$D$是第一象限

6.证明: $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}dx$在$0\le\alpha<+\infty$上是连续且可微的函数.

8.利用$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$及$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，计算:

(2)$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-a)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-a}{\sigma})^2}dx(\sigma>0)$

$u=\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}$，则$dx=\sqrt{2}\sigma du$

$LHS=\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\sqrt{2}e^{-u^2}\sqrt{2}\sigma du=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2e^{-u^2}du=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}[-\frac{1}{2}ue^{-u^2}|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-u^2}du]=\sigma^2$

(4)$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}dx$

$LHS=-\frac{\sin^2x}{x}|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{2\sin u}{u}\frac{1}{2}du=\frac{\pi}{2}$

(6)$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4x}{x^2}dx$

$LHS=-\frac{\sin^4x}{x}|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{4\sin^3x\cos x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x(1-\cos 2x)}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx-\int_0^{+\infty}\frac{\sin 4x}{2x}dx=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

Ex13.5 1; 2; 3(2)(4)(6); 4; 5

1.证明:

(1)$\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}x^{2s-1}e^{-x^2}dx(s>0)$

$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt$

$t=x^2$，则$dt=2xdx$

$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}(x^2)^{s-1}e^{-x^2}2xdx=2\int_0^{+\infty}x^{2s-1}e^{-x^2}dx$

(2)$\Gamma(s)=a^s\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-ax}dx(s>0,a>0)$

$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt$

$t=ax$，则$dt=adx$

$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}(ax)^{s-1}e^{-ax}adx=a^s\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-ax}dx$

2.证明：

$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}t\cos^{2q-1}tdt(p>0,q>0)$

$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

$x=\sin^2 t$，则$dx=2\sin t\cos tdt$

$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-2}t\cos^{2q-2}t2\sin t\cos tdt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}t\cos^{2q-1}tdt$

3.利用$Euler$积分计算：

(2)$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$

$x=a\sqrt{t}$，则$dx=\frac{1}{2}at^{-\frac{1}{2}}dt$

$LHS=\int_0^1 a^2ta\sqrt{1-t}\frac{1}{2}at^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}a^4\mathrm{B}(\frac{3}{2},\frac{3}{2})=\frac{1}{2}a^4\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)}=\frac{1}{2}a^4\frac{\frac{1}{4}\pi}{2!}=\frac{1}{16}\pi a^4$

(4)$\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{q-1}dx(n,m,q>0)$

$x=t^{\frac{1}{m}},dx=\frac{1}{m}t^{\frac{1}{m}-1}dt$

$LHS=\int_0^1 t^{\frac{n-1}{m}}(1-t)^{q-1}\frac{1}{m}t^{\frac{1}{m}-1}dt=\frac{1}{m}\mathrm{B}(\frac{n}{m},q)$

(6)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^\alpha xdx(|\alpha|<1)$

$\sin x=\sqrt{t},\cos x=\sqrt{1-t},x=\arcsin\sqrt{t},dx=\frac{1}{\sqrt{1-t}}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$

$LHS=\int_0^1(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}})^\alpha\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\mathrm{B}(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2})$

4.计算极限：

$\lim_{\alpha\to+\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^1 x^{3/2}(1-x^5)^\alpha dx$

$x=t^{\frac{1}{5}},dx=\frac{1}{5}t^{-\frac{4}{5}}dt$

$LHS=\lim\sqrt{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{3}{10}}(1-t)^\alpha\frac{1}{5}t^{-\frac{4}{5}}dt=\lim\frac{1}{5}\sqrt{\alpha}\mathrm{B}(\frac{1}{2},\alpha+1)=\lim\frac{1}{5}\sqrt{\alpha}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})}$

设$\lim\sqrt{\alpha}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})}=\lim\sqrt{\alpha}\frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+1)}=k$,则$\lim\alpha\frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})}=k^2=1,k=1$

于是$LHS=\frac{1}{5}\sqrt{\pi}$

5.设$a>0$，试求由曲线$x^n+y^n=a^n$和两坐标轴所围成的平面图形在第一象限的面积。

$S=\int_0^a dx\int_0^{\sqrt[n]{a^n-x^n}}1dy=\int_0^a\sqrt[n]{a^n-x^n}dx$

$x=at^{\frac{1}{n}},dx=\frac{a}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$

$S=\int_0^1 a\sqrt[n]{1-t}\frac{a}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt=\frac{a^2}{n}\mathrm{B}(\frac{1}{n},\frac{1}{n}+1)$

证明本讲中的例1、例3、例5、例6

见49讲讲义