线性代数 (B1) 第十五次作业

(1) 这是本学期最后一次书面作业.

(2) 请于 2023 年 6 月 27 日周二上习题课前在教室 (二教 2106) 里交, 并于 2023 年 7 月 4 日周二上习题课后从教室 (二教 2106) 里取回; 或者在学校 Blackborad 系统里提交.

(3) 第一道补充习题可视作思考题, 学有余力的同学强烈建议认真完成, 参考答案在本文档最后一页. 其余的补充习题是必做题.

2023 年 6 月 20 日布置的作业

教材习题. P247: #22.

补充习题 1. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶半正定实对称方阵. 证明: $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可以同时相合于对角阵, 即存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 都是对角方阵.

补充习题 2 (2023, 数学二、三). 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, $\boldsymbol{M}^*$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的伴随矩阵. 则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^* = (\quad)$.

(A) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$

补充习题 3 (2023, 数学二、三). 二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$ 的规范形为 ( )

(A) $y_1^2+y_2^2$ (B) $y_1^2-y_2^2$ (C) $y_1^2+y_2^2-4y_3^2$ (D) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

补充习题 4 (2023, 数学一). 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3$. 若 $\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, 则 $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 =$ ________.

补充习题 5 (2023, 数学二、三). 方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 = 2 \end{cases}$ 有解, 其中 a, b 为常数. 若 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 4$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} =$ ______.

补充习题 6 (2023, 数学一). 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3,$$
$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_2y_3.$$

(1) 求可逆变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成 $g(y_1, y_2, y_3)$.

(2) 是否存在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成 $g(y_1, y_2, y_3)$?

补充习题 7 (2023, 数学二、三). 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足: 对任意 x_1, x_2, x_3 均有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$.

补充习题 1 的证明. 对任意的 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\geq 0+0=0$, 故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 仍然是半正定矩阵, 从而存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$ 使得 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}_1=\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O})$. 写成分块矩阵的形式:

$$\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1=(b_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}\\\boldsymbol{B}_{12}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}$ 与 $\boldsymbol{B}_{11}$ 都是 r 阶实对称方阵.

由于 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1$ 半正定, 对于 $r<i\leq n$, $a_{ii},b_{ii}\geq 0$. 另一方面, $a_{ii}+b_{ii}=0$, 故迫使 $a_{ii}=b_{ii}=0$.

对于 $r<i<j\leq n$, 由半正定性, 主子式

$$\begin{vmatrix}a_{ii}=0&a_{ij}\\a_{ij}&a_{jj}=0\end{vmatrix}\geq 0,$$

故 $a_{ij}=0$. 类似地, 有 $b_{ij}=0$. 从而 $\boldsymbol{A}_{22}=\boldsymbol{B}_{22}=\boldsymbol{O}$.

对于 $1\leq i\leq r<j\leq n$, 同样由半正定性, 主子式

$$\begin{vmatrix}a_{ii}&a_{ij}\\a_{ij}&a_{jj}=0\end{vmatrix}\geq 0.$$

这迫使 $a_{ij}=0$. 从而 $\boldsymbol{A}_{12}=\boldsymbol{O}$. 类似地, $\boldsymbol{B}_{12}=\boldsymbol{O}$. 故, $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{O})$, $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1=\operatorname{diag}(\boldsymbol{B}_{11},\boldsymbol{O})$.

对于实对称阵 $\boldsymbol{A}_{11}$, 存在 r 阶正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_2$ 使得 $\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{D}_1$ 为对角阵. 此时,

$$\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11})\boldsymbol{Q}_2-\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_r\boldsymbol{Q}_2-\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{I}_r-\boldsymbol{D}_1$$

为 r 阶对角矩阵. 故, 我们取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}_1\operatorname{diag}(\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{I}_{n-r})$ 即可. □