第十二周作业参考

胡铁宁

2023 年 6 月 12 日

目录

一点说明

(i) 作业讲义部分题过程可能有省略。如对作业仍有疑问可以在群里或答疑课上讨论。

(ii) **作业讲义会随时间更新。**

(iii) 请及时核对自己在 BB 系统里的分数，如有问题请向对应的助教反馈。

(iv) 附录里的内容仅供有兴趣的同学参考，有可能涉及之后才会学习或课外的知识，不要求在现阶段掌握。

(v) 讲义最好用电脑打开，文档内置了链接功能，复习或查看指定的作业很方便。

成绩说明：成绩公式为

$$\text{score} = \begin{cases} 10 - k \cdot \max\{n - n_0, 0\} & \text{未迟交} \\ 5 & \text{迟交} \end{cases}$$

其中 n 为错题数，n_0 为容忍度；k 为系数，取决于当周作业的题量。本周不考虑补充题 (一道小题算作一题) 共 11 题，$n = 11$，考虑到一些同学出现了计算失误、笔误、抄错题目等等情况，$n_0 = 1$；$k = 0.5$。对于一些不严格的证明，助教也会酌情给分。也意味着作业得到满分不代表作业没有问题，请认真查看自己的作业。

上述评分标准对每个助教都成立。

1 第十二次作业

1.1 5 月 30 日布置的作业

1.1.1 教材习题 P221: 16

习题 1 (教材习题 P221: 16)**.** *证明: 下面三个条件中只要有两个成立, 另一个也必成立.*

(i) $\boldsymbol{A}$ *是对称的;* (ii) $\boldsymbol{A}$ *是正交的;* (iii) $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$.

证明. (i)(ii)⇒(iii): $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

(ii)(iii)⇒(i): 由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{A}^2\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是对称的.

(iii)(i)⇒(ii): 由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是正交的. □

1.1.2 补充习题 1, 2, 3

习题 2 (补充习题 1)**.** *若 $\mathscr{A}$ 是有限维欧氏空间 V 上的正交变换, 证明 V 中的任何元素在 $\mathscr{A}$ 下都存在唯一一个原像.*

证明. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组标准正交基, $\boldsymbol{\varepsilon}'_1 = \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}'_n = \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$. 由于 $\mathscr{A}$ 是正交变换, 故 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}'_n$ 也是 V 的一组标准正交基. 从而对于 V 中的任意元素 $\boldsymbol{\alpha} = \sum_{k=1}^n a_k\boldsymbol{\varepsilon}'_k$, 可以发现 $\mathscr{A}\left(\sum_{k=1}^n a_k\boldsymbol{\varepsilon}_k\right) = \sum_{k=1}^n a_k\boldsymbol{\varepsilon}'_k = \boldsymbol{\alpha}$. 这说明 $\boldsymbol{\alpha}$ 的原像存在. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 还有一个原像 $\boldsymbol{\beta} = \sum_{k=1}^n b_k\boldsymbol{\varepsilon}_k$, 则 $\sum_{k=1}^n a_k\boldsymbol{\varepsilon}'_k = \boldsymbol{\alpha} = \mathscr{A}\left(\sum_{k=1}^n b_k\boldsymbol{\varepsilon}_k\right) = \sum_{k=1}^n b_k\boldsymbol{\varepsilon}'_k$. 于是 $a_k = b_k, k = 1, \cdots, n$. 因此 $\boldsymbol{\alpha}$ 的原像也是唯一的. □

习题 3 (补充习题 2)**.** *设 $\mathscr{A}$ 为 n 维欧氏空间 V 上的线性变换, 有 n 个实特征值 (不要求互不相同). 证明: 存在 V 的一组标准正交基, 使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为上三角阵.*

证明. 由 Shur 定理, 存在 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为一个实上三角阵 $\boldsymbol{A}$. 我们将这组基进行 Gram–Schmidt 正交化: 对 $k = 1, \cdots, n$, 令

$$\boldsymbol{\beta}_k = \boldsymbol{\alpha}_k - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{(\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_j)}\boldsymbol{\beta}_j, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_k = \frac{\boldsymbol{\beta}_k}{\|\boldsymbol{\beta}_k\|},$$

则不难看出 $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ 可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 线性表示. 也就是说, 存在上三角形方阵 $\boldsymbol{B}$ (它的主对角元均大于 0, 从而 $\boldsymbol{B}$ 可逆), 使得 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B}$. 于是

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n) = \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}.$$

因此, $\mathscr{A}$ 在 V 的标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$, 是一个上三角矩阵. □

习题 4 (补充习题 3)**.** *设 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 与 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ 是 n 维欧氏空间的两组基. 证明: 存在 V 上的正交变换 $\mathscr{A}$ 使得 $\mathscr{A}(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{b}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的充要条件是内积在这两组基下的度量矩阵相等.*

证明. 先证必要性. 设有 V 上的一个正交变换 $\mathscr{A}$ 使得 $\mathscr{A}(\boldsymbol{a}_i)=\boldsymbol{b}_i(i=1,2,\cdots,n)$. 则

$$(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{b}_j)=(\mathscr{A}\boldsymbol{a}_i,\mathscr{A}\boldsymbol{a}_j)=(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j),\quad i,j=1,\cdots,n.$$

故内积在这两组基下的度量矩阵相等.

再证充分性. 设内积在这两组基下的度量矩阵相等. 构造映射

$$\mathscr{A}:V\to V,\quad \sum_{k=1}^n\lambda_k\boldsymbol{a}_k\mapsto\sum_{k=1}^n\lambda_k\boldsymbol{b}_k.$$

不难验证 $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换, 且满足 $\mathscr{A}(\boldsymbol{a}_i)=\boldsymbol{b}_i(i=1,2,\cdots,n)$. 进一步地, 对 V 中的任何两个向量 $\boldsymbol{\xi}=\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{\eta}=\sum_{j=1}^n y_i\boldsymbol{a}_i$, 有

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}\boldsymbol{\xi},\mathscr{A}\boldsymbol{\eta})&=\left(\mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{a}_i\right),\mathscr{A}\left(\sum_{j=1}^n y_j\boldsymbol{a}_j\right)\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{b}_i,\sum_{j=1}^n y_j\boldsymbol{b}_j\right)\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{b}_j)\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)\\&=(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}).\end{aligned}$$

故 $\mathscr{A}$ 是正交变换. 习题得证. □

1.2 6 月 1 日布置的作业

1.2.1 教材习题 P221-222: 15, 18(3)(4), P244: 1, 2

习题 5 (教材习题 P221: 15)**.** 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}.$$

求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵. 由此求 $\boldsymbol{A}^k,k$ 是正整数.

解. 首先计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式: $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-5)(\lambda-2)(\lambda+1)$. 可以求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $5,2,-1$. 再分别解线性方程组 $(5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 它们的一个解分别为 $\boldsymbol{x}_1=(1,-2,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_2=(2,-1,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_3=(2,2,1)^{\mathrm{T}}$. 再进行归一化:

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}=\frac{1}{3}(1,-2,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|}=\frac{1}{3}(2,-1,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{x}_3}{\|\boldsymbol{x}_3\|}=\frac{1}{3}\boldsymbol{x}_3=(2,2,1)^{\mathrm{T}}.$$

只要我们令正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

就可以得到 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(5,2,-1)$. 从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k&=\left(\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(5,2,-1)\boldsymbol{P}^{-1}\right)^k\\&=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(5^k,2^k,(-1)^k)\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}5^k+4\cdot2^k+4\cdot(-1)^k&-2\cdot5^k-2\cdot2^k+4\cdot(-1)^k&2\cdot5^k-4\cdot2^k+2\cdot(-1)^k\\-2\cdot5^k-2\cdot2^k+4\cdot(-1)^k&4\cdot5^k+2^k+4\cdot(-1)^k&-4\cdot5^k+2\cdot2^k+2\cdot(-1)^k\\2\cdot5^k-4\cdot2^k+2\cdot(-1)^k&-4\cdot5^k+2\cdot2^k+2\cdot(-1)^k&4\cdot5^k+4\cdot2^k+(-1)^k\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

习题 6 (教材习题 P221: 18(3)(4)). *求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵.*

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&-2&2\\4&2&1\end{pmatrix}$; (4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}$.

解. (3) 特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-6)(\lambda+3)^2$. 特征值为 $\lambda_1=6$(一重), $\lambda_2=-3$(二重). 特征值 $\lambda_1=6$ 对应线性无关的特征向量 $\boldsymbol{x}_1=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$, 特征值 $\lambda_2=-3$ 对应线性无关的特征向量 $\boldsymbol{x}_2=(1,-2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_3=(0,-2,1)^{\mathrm{T}}$. 由 Gram–Schmidt 正交化可得到

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}=\frac{1}{3}(2,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{x}_3-\frac{(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)}{(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_3)}\boldsymbol{x}_2=\frac{1}{5}(-4,-2,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}=\frac{1}{3\sqrt{5}}(-4,-2,5)^{\mathrm{T}}.$$

令正交矩阵

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{4}{3\sqrt{5}}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{3\sqrt{5}}\\\frac{2}{3}&0&\frac{5}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\operatorname{diag}(6,-3,-3)$.

(4) 特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-5)(\lambda-2)(\lambda+1)$. 特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$. 分别对应特征向量 $\boldsymbol{x}_1=(2,-2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_2=(2,1,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_3=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$. 归一化得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{3}\boldsymbol{x}_1=(2,-2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{3}(2,1,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{3}(1,2,2)^{\mathrm{T}}.$$

令正交矩阵

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \mathrm{diag}(5, 2, -1)$.

□

习题 7 (教材习题 P244: 1)**.** 将下列二次型表示成矩阵形式:

(i) $Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3$;

(ii) $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3$;

(iii) $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + 3x_1x_3 + 5x_1x_4 + 6x_2x_3 + 7x_2x_4 + 10x_3x_4$;

(iv) $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-2}(x_i - x_{i+2})^2$.

解. (i) $Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

(ii) $Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

(iii) $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 & 5 \\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$;

(iv) 当 $n > 3$ 时,

$$Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & 2 & \ddots & \ddots & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & 2 & 0 & -1 \\ & & & -1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};$$

当 $n = 3$ 时,

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

□

习题 8 (教材习题 P244: 2)**.** 写出下列对称矩阵对应的二次型:

(i) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; (ii) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$;

(iii) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

解. (i) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + 12x_2x_3$;

(ii) $Q(x_1,x_2,x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 2bx_1x_2 + 2bx_2x_3$;

(iii) $Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = -2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 + 6x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$.

□

1.2.2 补充习题 4, 5, 6

习题 9 (补充习题 4)**.** 设 $W = \langle \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_p \rangle$ 是欧氏空间 V 的一个子空间.

(i) 证明向量 $\boldsymbol{z} \in V$ 属于 $W^\perp$ 的充要条件是 $\boldsymbol{z}$ 与生成 W 的任一向量 $\boldsymbol{w}_i$ 都正交.

(ii) 证明 $W^\perp$ 是 V 的一个子空间.

(iii) 证明 $V = W \oplus W^\perp$, 即, $W \cap W^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$, 且对任意的 $\boldsymbol{z} \in V$, 都存在 $\boldsymbol{z}_1 \in W$ 以及 $\boldsymbol{z}_2 \in W^\perp$ 使得 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2$.

证明. [1]

(i) 根据定义, 我们可以知道 $W^\perp = \{\boldsymbol{z} \in V : \boldsymbol{z} \perp \boldsymbol{w}, \forall \boldsymbol{w} \in W\}$. 必要性显然, 下面仅证明充分性. 设 $\boldsymbol{z}$ 与生成 W 的任一向量 $\boldsymbol{w}_i$ 都正交. 则对任意 $\boldsymbol{w} \in W$, $\boldsymbol{w}$ 可以被 $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_p$ 线性表示: $\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \boldsymbol{w}_i$. 所以由 $\boldsymbol{z}$ 与任一 $\boldsymbol{w}_i$ 正交可得 $\boldsymbol{z}$ 与 $\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \boldsymbol{w}_i$ 正交. 因此, $\boldsymbol{z} \in W^\perp$.

(ii) 任取 $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in W^\perp, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. 于是对每一个 $\boldsymbol{w} \in W$, 都有 $\boldsymbol{z}_1 \perp \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}_2 \perp \boldsymbol{w}$, 从而 $(\lambda_1 \boldsymbol{z}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{z}_2) \perp \boldsymbol{w}$. 故 $\lambda_1 \boldsymbol{z}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{z}_2 \in W^\perp$. 因此, $W^\perp$ 是 V 的一个子空间.

(iii) 显然 $\boldsymbol{0} \in W \cap W^\perp$. 此外, 任取 $\boldsymbol{x} \in W \cap W^\perp$, 则 $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{x}$, 即 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$, 故必有 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 因此 $W \cap W^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$. 现在考虑任意的 $\boldsymbol{z} \in V$. 我们取 W 的一组标准正交基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r$. 令

$$\boldsymbol{z}_1 = \sum_{i=1}^r (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i \in W, \quad \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_1.$$

[1] 设 W 是欧氏空间 V 的一个子空间. 如果向量 $\boldsymbol{z} \in V$ 与 W 中的任意向量都正交, 则称 $\boldsymbol{z}$ 正交于 W. V 中与 W 正交的向量的全体称为 W 的正交补, 并记作 $W^\perp$.

于是对 $j=1,\cdots,r$, 有

$$(z_2,e_j)=\left(z-\sum_{i=1}^{r}(z,e_i)e_i,e_j\right)=(z,e_j)-\sum_{i=1}^{r}(z,e_i)(e_i,e_j)=(z,e_j)-(z,e_j)=0.$$

这说明 z_2 与 W 的这组标准正交基正交. 由 (i) 可得 $z_2\in W^{\perp}$. 于是上面构造的 z_1,z_2 即为所求.

$\square$

习题 10 (补充习题 5)**.** *设 A 是 $m\times n$ 的实矩阵, 在标准内积下, 验证 A 的行空间的正交补是 A 的零空间 (即 $\{x\in\mathbb{R}^n: Ax=0\}$).*

证明. 设 A 的所有行向量为 $\alpha_1^{\mathrm{T}},\cdots,\alpha_m^{\mathrm{T}}$. 于是

$$\begin{aligned}\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_m\rangle^{\perp}&=\left\{x\in\mathbb{R}^{n\times1}:\alpha_1^{\mathrm{T}}x=0,\cdots,\alpha_m^{\mathrm{T}}x=0\right\}\\&=\left\{x\in\mathbb{R}^{n\times1}:\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \alpha_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}x=\mathbf{0}\right\}\\&=\left\{x\in\mathbb{R}^{n\times1}:Ax=\mathbf{0}\right\}.\end{aligned}$$

这就说明 A 的行空间的正交补是 A 的零空间. $\square$

习题 11 (补充习题 6)**.** *若 W 是有限维欧氏空间 V 的一个子空间, 证明 V 中的任意一个向量 y 都可以唯一地表示为 $y=\hat{y}+z$, 其中 $\hat{y}$ 属于 W, 而 z 属于 $W^{\perp}$. 事实上, 如果 $\{w_1,\cdots,w_p\}$ 是 W 的一组正交的基, 那么*

$$\hat{y}=\sum_{i=1}^{p}\frac{(y,w_i)}{(w_i,w_i)}w_i,$$

而 $z=y-\hat{y}$.

证明. 由习题 9, 我们知道 $V=W\oplus W^{\perp}$. 参考教材章节 5.7.3 子空间的直和, V 中的任意一个向量 y 都可以唯一地表示为 $y=\hat{y}+z$, 其中 $\hat{y}\in W$, 而 $z\in W^{\perp}$. 本题中的 $\hat{y},z$ 与习题 9 中的 z_1,z_2 本质上是一样的, 此处不再赘述. $\square$