例 8.2.16. 用初等变换的方法把二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$ 化为标准形.

解. 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}$. 与例 8.2.15 中的情形不同, 这儿的 $\boldsymbol{A}$ 的对角线上的元素全为零. 我们的策略是用 $\boldsymbol{A}$ 的非零的 $(1,2)$ 与 $(2,1)$ 元素造出一个对角线上的非零元. 于是

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\boxed{1}&2\\\boxed{1}&0&0\\2&0&0\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2\to c_1}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&0\\2&0&0\\\hline 1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_1}\begin{pmatrix}2&\boxed{1}&\boxed{2}\\1&0&0\\2&0&0\\\hline 1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-c_1\to c_3]{-\frac{1}{2}c_1\to c_2}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\1&-\frac{1}{2}&-1\\2&-1&-2\\\hline 1&-\frac{1}{2}&-1\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_1\to r_3]{-\frac{1}{2}r_1\to r_2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\boxed{-1}\\0&-1&-2\\\hline 1&-\frac{1}{2}&-1\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-2c_2\to c_3}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&-1&0\\\hline 1&-\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{2}&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-2r_2\to r_3}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0\\\hline 1&-\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{2}&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

最后的分块矩阵中, 上面的方阵为对角阵, 故下面的矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{2}&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$ 为所求, 满足 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(2,-1/2,0)$. 此时的坐标变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\1&\frac{1}{2}&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

而二次型为

$$Q(x_1,x_2,x_3)|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}}=2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2.$$ □

注 8.2.17. (1) 由于初等变换的选取的不同, 最终结果中的标准形可能不同.

(2) 我们也可以把矩阵写成 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})$ 的形式, 先同时对 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}$ 做行变换, 然后只对 $\boldsymbol{A}$ 做相应列变换. 变换的最终目标是得到 $(\boldsymbol{D},\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}})$,* 其中 $\boldsymbol{D}$ 为对角阵. 做法与我们上面的操作是等价的. 学生只需要熟悉一种方法即可.

*注意这儿是 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}$, 而不再是 $\boldsymbol{P}$

注 8.2.18. 设 $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ 是欧氏空间 V 的一组基，它的 *Gram* 矩阵为 $\boldsymbol{G}$. 若 $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n$ 为 V 的另外一组基，使得 $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ 到 $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$. 此时，不难验证 $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n$ 的 *Gram* 矩阵必为 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{P}$. 若进一步地，有 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$, 则 $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n$ 为 V 的一组标准正交基.

例 8.2.19. 设 V 是次数不超过 2 的实系数多项式构成的 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，配有内积 $(f,g):=\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. 求 V 的一组标准正交基.

解. **(思路一)** 对于基 $1,x,x^2$ 作 Schmidt 正交化, 我们可以得到

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=1,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2=\sqrt{12}\left(x-\frac{1}{2}\right),\quad \boldsymbol{\varepsilon}_3=\sqrt{180}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right).$$

(思路二) 对基 $1,x,x^2$ 的度量矩阵 $\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac13\\ \frac12&\frac13&\frac14\\ \frac13&\frac14&\frac15\end{pmatrix}$ 作相合变换:

一般而言，这一方法并不能保证得到与Schmidt正交化相同的计算结果，除非操作时遵从指定的顺序

$$\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac13&1&0&0\\ \frac12&\frac13&\frac14&0&1&0\\ \frac13&\frac14&\frac15&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-\frac12 c_1\to c_2\\ -\frac13 c_1\to c_3}]{\substack{-\frac12 r_1\to r_2\\ -\frac13 r_1\to r_3}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\ 0&\frac1{12}&\frac1{12}&-\frac12&1&0\\ 0&\frac1{12}&\frac4{45}&-\frac13&0&1\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[-c_2\to c_3]{-r_2\to r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\ 0&\frac1{12}&0&-\frac12&1&0\\ 0&0&\frac1{180}&\frac16&-1&1\end{pmatrix}.$$

这说明向量组 $(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1&0&0\\ -\frac12&1&0\\ \frac16&-1&1\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}=(1,x-\frac12,x^2-x+\frac16)$ 的 Gram 矩阵为 $\operatorname{diag}(1,\frac1{12},\frac1{180})$. 由此，我们仍然可以得到标准正交基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=1,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2=\sqrt{12}\left(x-\frac{1}{2}\right),\quad \boldsymbol{\varepsilon}_3=\sqrt{180}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right).\qquad\square$$

注 8.2.20. 本节介绍了三种方法用于将二次型化为标准形. 其中的主轴化的方法 (坐标的正交变换) 是最重要的，要求大家熟练掌握. 另一方面，在下一节中，我们会谈到二次型的正负惯性指数，利用配方法容易帮助大家快速找到这些重要的指标.

8.3 相合不变量与分类

之前我们已经证明了任意实二次型都可以化成标准形, 但是标准形不唯一. 例如, 二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2-3x_2^2$ 已是 Q 的标准形. 但是若采用坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1, \\ y_2 = \sqrt{3}x_2, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

则 $Q(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-y_2^2$ 是 Q 的另外一个标准形. 那么, 什么是二次型 "最终极" 的标准形呢? 等价地, 实对称阵可以通过相合变换得到一个什么形式的最简单的对角阵呢?

定理 8.3.1 (惯性定理)**.** *设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶实对称矩阵, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得*

$$\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & & \\ & -\boldsymbol{I}_s & \\ & & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}. \tag{8.1}$$

并且这里的 r 与 s 是由 $\boldsymbol{A}$ 唯一决定的.

显然, 在等式 (8.1) 中, $r+s=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$. 我们将把等式右边的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**规范形** (normal form), 而相应的二次型称为对应于 $\boldsymbol{A}$ 的**规范二次型**. 上面的定理说明 $\boldsymbol{A}$ 的规范形是存在且唯一的.

证明. **(存在性的证明)** 在前面一节中, 我们已经见到, 对于实对称阵 $\boldsymbol{A}$, 存在实矩阵 $\boldsymbol{P}_0$, 使得 $\boldsymbol{P}_0^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_0=\operatorname{diag}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ 为对角阵. 通过交换 $\boldsymbol{P}_0$ 的列向量组的排列顺序, 我们不妨假设这些对角线上的元素满足

$$\mu_1,\ldots,\mu_r>0, \quad \mu_{r+1},\ldots,\mu_{r+s}<0, \quad \mu_{r+s+1}=\cdots=\mu_n=0.$$

若令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{\mu_r}},\frac{1}{\sqrt{-\mu_{r+1}}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{-\mu_{r+s}}},1,\ldots,1\right),$$

则有 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & & \\ & -\boldsymbol{I}_s & \\ & & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$

(唯一性的证明) 假设 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & & \\ & -\boldsymbol{I}_s & \\ & & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_p & & \\ & -\boldsymbol{I}_q & \\ & & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的规范形, 则 $r+s=$ $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=p+q$. 考虑二次型 $Q(x_1,\ldots,x_n)\coloneqq \boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$. 此时, 存在两个不同的坐标的可逆变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{Z}$ 分别使得

$$
\begin{aligned}
Q(\boldsymbol{X})|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Y}} &= y_1^2+\cdots+y_r^2-y_{r+1}^2-\cdots-y_{r+s}^2,\\
Q(\boldsymbol{X})|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{Z}} &= z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_{p+q}^2.
\end{aligned}
$$

若 $r\neq p$, 不妨假设 $r<p$. 此时, $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{X}$. 不妨设 $\boldsymbol{P}_1^{-1}$ 的行向量依次为 $\boldsymbol{B}_1,\ldots,\boldsymbol{B}_n$, 而 $\boldsymbol{P}_2^{-1}$ 的行向量依次为 $\boldsymbol{C}_1,\ldots,\boldsymbol{C}_n$. 则对任意 i, 我们有 $y_i=\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{X}$, $z_i=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{X}$. 接下来, 我们来考察如下特别挑选的齐次线性方程组

$$
\begin{cases}
y_1=0,\\
\quad\vdots\\
y_r=0,\\
z_{p+1}=0,\\
\quad\vdots\\
z_n=0,
\end{cases}
\qquad\Leftrightarrow\qquad
\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{B}_r\\ \boldsymbol{C}_{p+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}_n \end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0},
$$

其中系数矩阵为 $(r+(n-p))\times n$ 维的. 由于 $r<p$, 这导致 $r+(n-p)<n$. 这意味着上面的齐次线性方程组的系数矩阵不是列满秩的, 从而存在非零解 $\boldsymbol{X}_0$. 此时,

$$
\boldsymbol{Y}_0=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{X}_0=\begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ y_{r+1}\\ \vdots\\ y_n \end{pmatrix}\neq\boldsymbol{0},\qquad
\boldsymbol{Z}_0=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{X}_0=\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_p\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}\neq\boldsymbol{0}.
$$

则我们同时有

$$
\begin{aligned}
Q(\boldsymbol{X}_0) &= Q|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{Y}_0)=-y_{r+1}^2-\cdots-y_{r+s}^2\leq 0, \quad (r+s \text{ 可能严格小于 } n, \text{从而 } Q \text{ 可能为 } 0)\\
Q(\boldsymbol{X}_0) &= Q|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{Z}_0)=z_1^2+\cdots+z_p^2>0, \quad (p>r\geq 0, \text{从而 } Q \text{ 严格大于 } 0)
\end{aligned}
$$

矛盾. 故 $r=p$, $s=q$, 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定. $\square$

定义 8.3.2. 惯性定理 *8.3.1* 中的 r 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**正惯性指数** (*positive index of inertia*), s 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**负惯性指数** (*negative index of inertia*)*. 由上面定理的证明可知, 这两个指数分别是 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个标准形中正项的项数与负项的项数, 从而由主轴定理 (定理 *8.2.3*) 可知, 它们也分别是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的正项与负项的个数. 相应地, $r-s$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**符号差** (*signature*). 这儿的 r, s 和 $r-s$ 也分别被称为 $\boldsymbol{A}$ 所对应的二次型 Q 的**正惯性指数、负惯性指数和符号差**. 请想清楚原因

综合前面的结果, 我们不难得到如下的定理.

定理 8.3.3. 任何实对称阵都可以 (实) 相合等价于一个实对角阵, 并且两个相同维数的实对称阵相合等价, 当且仅当它们的正、负惯性指数相等, 当且仅当它们的秩和符号差相等. 请想清楚原因

例 8.3.4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实可逆矩阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $-\boldsymbol{A}$ 相合, 则 n 为偶数. 进一步地, 若 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 $\frac{n}{2}$.

证明. 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $-\boldsymbol{A}$ 相合, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 故 $|-\boldsymbol{A}|=\left|\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right|$, 即 $(-1)^n\,|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{P}|^2$. 又 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 故 $(-1)^n=|\boldsymbol{P}|^2>0$, 从而 n 为偶数.

若进一步地, $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵, 关于惯性指数, 我们显然有 $r_{\boldsymbol{A}}=s_{-\boldsymbol{A}}$, $s_{\boldsymbol{A}}=r_{-\boldsymbol{A}}$. 而若 $\boldsymbol{A}$ 与 $-\boldsymbol{A}$ 相合, 则 $r_{\boldsymbol{A}}=r_{-\boldsymbol{A}}$, $s_{\boldsymbol{A}}=s_{-\boldsymbol{A}}$, 从而皆等于 $\frac{n}{2}$. □

例 8.3.5. 求 n 元实二次型 $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_jx_ix_j$ 的规范形, 其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 不全为零.

解. 记 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_n)^{\mathsf{T}}$, 于是,

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_jx_ix_j=\left(\sum_i a_ix_i\right)\left(\sum_j a_jx_j\right)=\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}.$$

(解法一) 不妨设 $a_1\neq 0$. 此时, 可以考虑坐标变换如下: 令 $y_1=\sum_i a_ix_i$, 而对 $j=2,3,\ldots,n$, 令 $y_j=x_j$. 那么二次型就写成了 y_1^2, 这显然为相应二次型的规范形.

(解法二) 于是, 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathsf{T}}$. 由于 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=1$, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathsf{T}})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{a}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{a})=\sum_i a_i^2$ (1 重), 和 0 ($n-1$ 重). 从而, 二次型的规范形为 z_1^2. □

例 8.3.6. 求如下 n 元实二次型的规范形, 其中 $n\geq 2$.

(1) $\sum_{i=1}^n x_i^2+\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j$.

(2) $\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j$.

*因此, 有些教材里分别选用 p 和 n 来表示实对称阵的正、负惯性指数

解. 设 $\boldsymbol{J}$ 是 n 阶的元素全为 1 的矩阵.

(1) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{J})$. 由于 $\boldsymbol{J}$ 的特征值为 n (1 重) 和 0 ($n-1$ 重), $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{n+1}{2}$ (1 重) 和 $\frac{1}{2}$ ($n-1$ 重). 由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是正的, 相应二次型有规范形 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$.

(2) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})$. 类似可以看出, $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\frac{n-1}{2}$ (1 重) 和 $\frac{-1}{2}$ ($n-1$ 重), 从而 $\boldsymbol{B}$ 的正负惯性指数分别为 1 和 $n-1$, 从而相应二次型有规范形 $z_1^2-z_2^2-\cdots-z_n^2$. □

例 8.3.7. 设 n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的正惯性指数分别为 $r_{\boldsymbol{A}}$, $r_{\boldsymbol{B}}$ 和 $r_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$. 证明: $r_{\boldsymbol{A}}+r_{\boldsymbol{B}}\geq r_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$.

证明. 记 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的正惯性指数分别为 $r_{\boldsymbol{A}}$, $r_{\boldsymbol{B}}$ 和 $r_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$, 负惯性指数分别为 $s_{\boldsymbol{A}}$, $s_{\boldsymbol{B}}$ 和 $s_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$. 于是, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ 和 $\boldsymbol{P}_3$ 使得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Y}} =& y_1^2+\cdots+y_{r_{\boldsymbol{A}}}^2-y_{r_{\boldsymbol{A}}+1}^2-\cdots-y_{r_{\boldsymbol{A}}+s_{\boldsymbol{A}}}^2,\\
\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{Z}} =& z_1^2+\cdots+z_{r_{\boldsymbol{B}}}^2-z_{r_{\boldsymbol{B}}+1}^2-\cdots-z_{r_{\boldsymbol{B}}+s_{\boldsymbol{B}}}^2,\\
\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{W}} =& w_1^2+\cdots+w_{r_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}}^2-w_{r_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}+1}^2-\cdots-w_{r_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}+s_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}}^2.
\end{aligned}$$

用反证法, 假设 $r_{\boldsymbol{A}}+r_{\boldsymbol{B}}<r_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$. 类似于惯性定理的证明中的处理手法, 我们解关于 $\boldsymbol{X}$ 的如下方程组:

$$\begin{cases}
y_i=0, & \text{若 } 1\leq i\leq r_{\boldsymbol{A}},\\
z_j=0, & \text{若 } 1\leq j\leq r_{\boldsymbol{B}},\\
w_k=0, & \text{若 } r_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}+1\leq k\leq n.
\end{cases}$$

由于此时 $r_{\boldsymbol{A}}+r_{\boldsymbol{B}}+(n-r_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}})<n$, 该齐次方程组存在非零解 $\boldsymbol{X}_0$. 对于它, 我们同时有

$$\boldsymbol{X}_0^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0\leq 0,\quad \boldsymbol{X}_0^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_0\leq 0\quad \text{以及}\quad \boldsymbol{X}_0^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}_0>0.$$

这显然有矛盾. □