第二次习题课

胡铁宁

2023 年 4 月 10 日

目录

1 作业与补充题

作业解答可见群文件, 此讲义仅展示部分与参考解答不同的解答.

习题 1 (第三周习题 1(3))**.** *在这道题中, 我们得到了方程组* $\begin{cases} a^3+2abc+bcd=1, \\ b\left(a^2+ad+bc+d^2\right)=0, \\ c\left(a^2+ad+bc+d^2\right)=0, \\ abc+2bcd+d^3=1. \end{cases}$ *我们在这里把详细的过程写出来.*

解. 若 $a^2+ad+bc+d^2\neq 0$, 则容易解得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$.

若 $a^2+ad+bc+d^2=0$, 则我们把方程组化简为 $\begin{cases} a^2+ad+bc+d^2=0, \\ a^3+2abc+bcd=1, \\ abc+2bcd+d^3=1. \end{cases}$ 将上式的后两项相减, 则不难将方程组等价地化为 $\begin{cases} a^2+ad+bc+d^2=0, \\ a^3+2abc+bcd=1, \\ (a-d)(a^2+d^2+ad+bc)=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a^2+ad+bc+d^2=0, \\ a^3+2abc+bcd=1, \end{cases}$ 上式中由第一行反解出 bc, 再代入第二行, 则可继续化简为

$\begin{cases} a^2+ad+bc+d^2=0, \\ (a+d)^3=-1. \end{cases}$ 注意到上面的转化均等价, 从而容易得到 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2+a+1}{b} & -1-a \end{pmatrix}$. $\square$

习题 2 (第三周习题 2)**.** *计算方阵* $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *的 k 次方幂 $(k \geqslant 1)$.*

解. 这个方阵的元素含有比较多的 0, 所以我们可以尝试算几项找规律, 猜出答案再进行归纳证明. 我们不难计算得到

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 1 & 2a & 2 & 2a \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix} 1 & 3a & 3 & 6a \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

至此, 我们可以猜测

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix} 1 & ka & k & k(k-1)a \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & ka \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

下面用数学归纳法证明这个结论. 当 $k=1$ 时, 结论平凡. 下面设 k 时结论成立, 考虑 $k+1$ 时的情形. 我们可以直接计算得

$$\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & ka & k & k(k-1)a \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & ka \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2a & 2 & 2a \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & (k+1)a & k+1 & k(k+1)a \\ 0 & 1 & 0 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 & (k+1)a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故结论成立, 即 $\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix} 1 & ka & k & k(k-1)a \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & ka \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\square$

习题 3 (第三周习题 5)**.** *设* $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in F^{n\times n}$, *找出与 $\boldsymbol{J}$ 乘法可交换的所有矩阵.*

解. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 与 $\boldsymbol{J}$ 乘法可交换, 则我们不难计算得到

$$\boldsymbol{JA}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{AJ}=\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{AJ}=\boldsymbol{JA}$ 等价于

$$a_{21}=a_{31}=\cdots=a_{n1}=0,\quad a_{n1}=a_{n2}=\cdots=a_{n,n-1}=0,$$
$$a_{ij}=a_{i+1,j+1},\quad i,j=1,2,\cdots,n-1.$$

由此, 不难得到[1]与 $\boldsymbol{J}$ 乘法可交换的所有矩阵为 $\sum_{k=0}^{n-1}c_k\boldsymbol{J}^k, c_k\in F$. □

习题 4 (第四周习题 1). *证明: 与任意 n 阶方阵都乘法可交换的方阵一定是数量矩阵.*

证明. 设方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 与任意 n 阶方阵都乘法可交换. 我们只需取一些特殊的方阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$, 利用 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 乘法可交换就可以得出结论. 具体地, 我们取 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 为 (i,j) 元为 1, 其余元素均为 0 的 n 阶方阵, 即

$$\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{array}{c c}& \text{第 } j \text{ 列} \\ \text{第 } i \text{ 行} & \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}\end{array},\quad i,j=1,\cdots,n.$$

于是我们不难计算得

$$\boldsymbol{AE}_{ij}=\begin{array}{c}\text{第 } j \text{ 列} \\ \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}\end{array},\quad \boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} a_{1j} & \cdots & a_{nj} \end{pmatrix} & \text{第 } i \text{ 行}\end{array}.$$

于是我们可以由 $\boldsymbol{AE}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$ 得到 $a_{ik}=a_{mj}=0, a_{ii}=a_{jj}, i,j,k,m=1,\cdots,n, i\neq k, j\neq m$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵. □

事实上, 当我们后面学习线性空间时, 我们就会意识到, 所有的 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 就是 $F^{n\times n}$ 的一组基. 我们只取 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 就能得证, 这并非巧合. 后面的一道补充题也是如此.

[1] "不难得到" 究竟难不难, 还须亲自动手实践方知.

习题 5 (第四周习题 2(4)(7)). 计算行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_n & & & \end{vmatrix}, \quad |\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix}.$$

解. 这两道题我们都可以使用 Laplace 展开的方法.

设 $\boldsymbol{A}_k$ 的阶数为 m_k. 在计算 $|\boldsymbol{A}|$ 之前, 我们先来看看 $n=2$ 的情形. 对于行列式 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}$, 按照前 m_1 行展开[2]可得

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{[1+2+\cdots+m_1]+[(m_2+1)+(m_2+2)+\cdots+(m_2+m_1)]}|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2| = (-1)^{n_1 n_2}|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|.$$

这样, 我们就能计算 $\boldsymbol{A}$ 的行列式了. 我们把 $\boldsymbol{A}$ 看成 2×2 的分块, 即把最后的 $\boldsymbol{A}_n$ 单独看成一块, 并依次这样进行下去, 就能计算出

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}| &= (-1)^{(m_1+\cdots+m_{n-1})m_n}|\boldsymbol{A}_n| \begin{vmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_{n-1} & & & \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{(m_1+\cdots+m_{n-1})m_n+(m_1+\cdots+m_{n-2})m_{n-1}}|\boldsymbol{A}_n||\boldsymbol{A}_{n-1}| \begin{vmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_{n-2} & & & \end{vmatrix} \\ &= \cdots \\ &= (-1)^{\sum_{i<j} m_i m_j}|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_n|. \end{aligned}$$

[2]由于前面的 m_1 行所包含的 m_1 阶子式中仅有 $|\boldsymbol{A}_1|$ 可能非零, 所以在众多求和中我们只写出了一项.

计算 $|\boldsymbol{B}|$ 时, 我们可以直接按第 $n,n+1$ 行展开并依次按中间两行展开下去:

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
a_1 & & & & & b_1\\
& \ddots & & & \iddots & \\
& & a_n & b_n & & \\
& & c_n & d_n & & \\
& \iddots & & & \ddots & \\
c_1 & & & & & d_1
\end{vmatrix}\\
=&(-1)^{[n+(n+1)]+[n+(n+1)]}\begin{vmatrix} a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
a_1 & & & & & b_1\\
& \ddots & & & \iddots & \\
& & a_{n-1} & b_{n-1} & & \\
& & c_{n-1} & d_{n-1} & & \\
& \iddots & & & \ddots & \\
c_1 & & & & & d_1
\end{vmatrix}\\
=&\begin{vmatrix} a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
a_1 & & & & & b_1\\
& \ddots & & & \iddots & \\
& & a_{n-1} & b_{n-1} & & \\
& & c_{n-1} & d_{n-1} & & \\
& \iddots & & & \ddots & \\
c_1 & & & & & d_1
\end{vmatrix}\\
=&\cdots\\
=&\begin{vmatrix} a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{vmatrix}\cdots\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{vmatrix}\\
=&\prod_{j=1}^{n}(a_jd_j-c_jb_j).
\end{aligned}
$$

$\square$

习题 6 (第四周习题 3)**.** *对于 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$, 我们可以定义函数 $\psi_{\boldsymbol{A}}:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R},\boldsymbol{X}\mapsto\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})$. 若 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\psi_{\boldsymbol{A}}=\psi_{\boldsymbol{B}}$, 证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.*

证明. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\boldsymbol{B}=(b_{ij})$, 记号 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 同本讲义习题4. 经计算可得

$$\psi_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{E}_{ij})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{E_{ij}})=a_{ij},\quad \psi_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{E}_{ij})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{E_{ij}})=b_{ij}.$$

因此若 $\psi_{\boldsymbol{A}}=\psi_{\boldsymbol{B}}$, 则 $a_{ij}=b_{ij},i,j=1,\cdots,n$, 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. $\square$

在本节的最后, 我们对一些习题作评注.

当时大家做作业的时候, 我们并没有学习行列式、初等矩阵等内容. 现在, 我们完全可以以更高的视角去审视部分习题. 在证明分块对角矩阵的逆矩阵仍然是分块

对角矩阵时, 我们可以直接利用行列式证明每个对角块可逆, 从而直接写出答案, 即 $\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_n)^{-1} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1^{-1}, \cdots, \boldsymbol{A}_n^{-1})$. 但是, 作业答案中的证法还是具有启发意义的, 同学们可以思考准上三角矩阵的逆是否仍为准上三角形. 此外, 对于可逆上三角形方阵, 我们可以写成一系列上三角形初等方阵的乘积 (想想为什么), 可以从这个角度对一些关于上三角形矩阵的题目进行一些思考.

再简要谈一下微扰法. 事实上, 我们所遇到的习题中, 大部分行列式都关于参数连续, 所以有时我们计算出参数不为零时的行列式, 就可以直接利用行列式的连续性补全 bug. 另外, 数学分析也可以在线性代数中有其他奇妙的应用, 具体可以参考丘维声编著的《高等代数 (上册) 第一版》第 76 页, 然后看看第四周最后一道补充习题的第二小问能不能有全新的做法.

2 预备知识——复数、映射、多项式

定义 1 (复数)**.** *定义复数的全体* $\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} : a, b \in \mathbb{R}\}$*, 其中* i *为虚数单位, 满足* $\mathrm{i}^2 = -1$.

关于复数的四则运算、共轭及模长的定义不在此赘述. 复数也满足三角不等式.

定义 2. *定义复数* z *的实部为* $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(z) \coloneqq \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$*, 虚部为* $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(z) \coloneqq \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

命题 3. *设* z *和* w *是两个复数, 则*

(i) $z\overline{z} = |z|^2$;

(ii) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$;

(iii) $|zw| = |z||w|, \left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}(w \neq 0)$;

(iv) $|z| = |\overline{z}|$.

下面, 我们介绍复数的几何表示. 对于复数 $z = a + b\mathrm{i}, a, b \in \mathbb{R}$, 令 $r = |z|$ 则可设 $a = r\cos\theta, b = \sin\theta$. 我们称 θ 为 z 的辐角, 这时, $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ 也可以形式地定义 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 若设两个复数有几何表示 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$, 则容易证明 $z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2))$, 即 $(r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1})(r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}) = (r_1r_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$. 对应到复平面上的几何直观就是, 直角坐标 (a, b) 与极坐标 (r, θ) 的转化, 加法对应向量加法, 乘法对应伸缩 r 倍及旋转 θ 角度. 下面, 我们通过一个例子来熟悉它们.

例 4. *我们尝试推导正、余弦函数的* k *倍角公式. 注意到* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^k$*, 所以我们可以得到* $\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k$*. 使用二项式定理展开并对比实部和虚部就能得到正、余弦函数的* k *倍角公式.*

下面, 我们介绍映射的概念.

定义 5. 设 A, B 为两个集合, 如果对 A 中每个元素 a, 均有唯一元素 $b \in B$ 与之对应, 我们称此对应为 A 到 B 的映射, 记之为[3]

$$f : A \to B, \quad a \mapsto b.$$

其中, $b = f(a)$. 有时, 我们也记之为 $A \xrightarrow{f} B$. 集合 A 称为 f 的定义域[4], $f(A) \coloneqq \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$ 称为 f 的值域或像集, b 称为 a 在 f 下的像, a 是 b 在 f 下的原像. 记 b 的原像集 $f^{-1}(b) \coloneqq \{c : f(c) = b\}$. 类似地, 对 $A_0 \subseteq A, B_0 \subseteq B$, 我们可以定义 A_0 的像和 B_0 的原像: $f(A_0) \coloneqq \{f(a) : a \in A_0\}, f^{-1}(B_0) \coloneqq \{c : f(c) \in B_0\}$.

回顾一下, 我们定义两个矩阵相等, 是指行数、列数对应相等且元素对应相等. 当然, 我们也可以定义两个映射相等, 这个定义同矩阵相等的定义一样自然.

定义 6. 设 $f, g : A \to B$ 是两个映射, 我们称 $f = g$, 是指, 对任意 $a \in A$, 都有 $f(a) = g(a)$.

矩阵的乘法要求"衔接维数"相等, 这也可以类比于映射的复合:

定义 7. 设 $f : A \to B, g : B \to C$, 则可以定义二者的复合 $gf : A \to C, a \mapsto g(f(a))$.

映射的复合也可以视为一种"乘法", 因为我们不难验证其结合律成立. 类比于矩阵, 我们还可以定义映射的"单位元"和"逆":

定义 8. 在上面, 我们取 $B = A$, 则称映射 $f : A \to A$ 是一个集合 A 上的一个变换. 我们可以定义单位元 (恒等映射) 为 $\mathbb{1}_A : A \to A, a \mapsto a, \forall a \in A$.

不难验证, 对任意的变换 $f : A \to A$, 都有 $\mathbb{1}_A f = f \mathbb{1}_A = f$. 大家应该可以体会到, 在这些部分, 我们研究的对象不是集合 A, B, 而是函数本身. 下面再介绍变换的逆, 这与矩阵可逆的定义如出一辙.

定义 9. 考虑变换 $f : A \to A$, 如果存在变换 $g : A \to A$, 使得 $fg = gf = \mathbb{1}_A$, 则称 f 是 A 上的可逆映射, g 为 f 的逆映射.

我们可以验证若 f 可逆, 则逆唯一, 记作 f^{-1}. 下面, 我们给出一个判定变换可逆的方法, 在此之前, 还需要补充一些定义.

定义 10. 映射 $f : A \to B$ 称为一个满射, 若对 B 中的任意元素, 原像均非空, 亦即 $f(A) = B$. 映射 $f : A \to B$ 称为一个单射, 若对 B 中的任意元素, 原像至多含有一个元素, 直观地说就是不存在"一对多". 若变换 $f : A \to B$ 既单又满, 则称 f 是一个一一映射或双射.

---

[3]注意这两个箭头是有区别的, 一个是集合间的, 另一个是元素之间的对应法则.

[4]在有些教材, B 称为陪域, 我们目前所考虑的映射更关心的是像集, 故不正式提及这个概念.

我们可以证明, 变换 $f: A \to A$ 可逆当且仅当 f 为双射.

在这一节的最后, 我们叙述一下多项式的定义, 大家可以自行思考“把一个数或方阵代入一个多项式”是什么意思, 不在本讲义中深究.

定义 11. *数域 F(如 $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ 等) 上的一元多项式是指形如下述的表达式:*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

其中 x 是一个符号 (它不属于 F), n 是非负整数, $a_i \in F$ 称为系数.

虽然上面的一系列内容几乎没有证明, 但是很多结论实际上都需要严格的证明, 学有余力的同学可以自行研究.

3 有关行列式与迹的注记

在丘维声编著的《高等代数 (上册) 第一版》第 53 页中归纳了行列式计算的一些技巧:(1) 化成上三角形行列式;(2) 拆成若干个行列式的和;(3) 把第 $2, 3, \cdots, n$ 列都加到第一列上 (适用于各行的元素和相同);(4) 按一行或一列展开;(5) 归纳法;(6) 递推关系法;(7) 加边法;(8) 利用范德蒙德行列式. 当然, 还有两个方法可以列出来, 即利用分析的手段和多项式性质计算行列式.

举一个例子. 不严谨地说, 一个范德蒙德行列式可以视为一个关于 $x_1, \cdots, x_n$ 的 n 元多项式. 不难发现 $x_i - x_j, \forall i \neq j$ 均为它的因式[5], 又注意到这个多项式至多 $n(n-1)/2$ 次, 最高次系数容易确定, 所以我们很容易直接写出结果.

笔者认为, 在许多行列式的计算中, 核心就是“打洞”, 即通过初等行列变换让矩阵产生尽可能多的 0, 然后再进行计算. 事实上, 我们在本课程中所接触的各类“标准形”对应的核心技巧也可以视为“打洞”, 大家将会在后续的学习中对此逐渐地建立起感觉.

再讲讲行列式展开的相关内容. 事实上, 完全展开式就是对所有“不在同一行、同一列的元素乘积”求和, 只不过在每一项都加了一个由逆序数决定的正负号. 而 Laplace 展开的本质就是对完全展开式进行了合并同类项. 为什么我们非得加上逆序数呢? 其实我们可以从 n 维平行多面体的有向体积受到启发: 互换两个向量的位置使有向体积变号 (如三维正方体的有向体积的正负号完全由手性所决定), 这才迫使我们引入逆序数的概念. 更多关于 Laplace 定理和 Binet-Cauchy 公式的叙述和例子可以参考丘维声编著的《高等代数 (上册) 第一版》的章节 2.6 和 4.3.

在本节的标题中, 我们甚至把行列式与迹放在并列的位置, 这是为了突出迹这个看似不起眼的概念的重要性. 迹的定义远比行列式简单, 但它所反映的信息不见得比行列式少 (从一个补充习题中也能看出), 甚至极其神秘. 在一个习题中, 我们使用了对方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, 成立 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$ 的结论. 但是值得注意的是, 在我们教材的定理 4.2.5 中, 并没有要求 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为方阵 (但是对于行列式, 这个结论就不成立了!). 事实上, 迹满足循环

[5]如在范德蒙德行列式中我们令 $x_2 = x_1$, 可以发现这是一个“根”, 故行列式有因式 $x_1 - x_2$. 当然, 这很不严谨.

不变性: $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{A}_1\cdots\boldsymbol{A}_{n-1})$, 只要这个式子有意义. 但是乘积的顺序又不能随意交换, 可以尝试举反例使得 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{ABC}) \neq \mathrm{tr}(\boldsymbol{ACB})$.