

第26讲: Green公式及其应用 (2023.5.8)

(一) 复习: 设 D 是 xy 平面中由分段光滑的曲线 L 围成的区域, $P(x,y), Q(x,y) \in C^1(D)$ 且 $L = \partial D$ 为正向, 则

$$\oint_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (*)$$

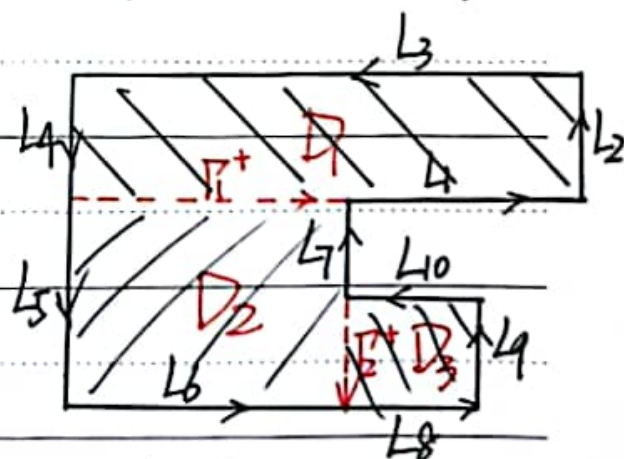
(10) 已经证得 D 既是上、下型又是左右型区域 (将这种区域称为曲边矩形域) 时, (*) 成立。

(20) 若 D 可分解成有限个曲边矩形域时, (*) 仍成立。

例如, 右图区域 D 可分解为三个曲边矩形域 (首先作辅助

线 Γ_1^+, Γ_2^+ , 设 $D = D_1 + D_2 + D_3$), 则

$$\begin{cases} \oint_{L_1+L_2+L_3+L_4+\Gamma_1^+} Pdx+Qdy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ \oint_{L_5+L_6+\Gamma_2^++L_7+\Gamma_1^-} Pdx+Qdy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ \oint_{L_8+L_9+L_{10}+\Gamma_2^-} Pdx+Qdy = \iint_{D_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{cases}$$



$$\begin{aligned} D &= D_1 + D_2 + D_3 \\ L_1+L_2+L_3+L_4+L_5+L_6+L_7+L_8+L_9+L_{10}+L_7 &= \partial D \end{aligned}$$



假若分片光滑区域则可加性, 有

$$\oint_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5+L_6+L_7+L_8+L_9+L_{10}} p dx + q dy = \iint_{D_1+D_2+D_3} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy, \text{ 即}$$

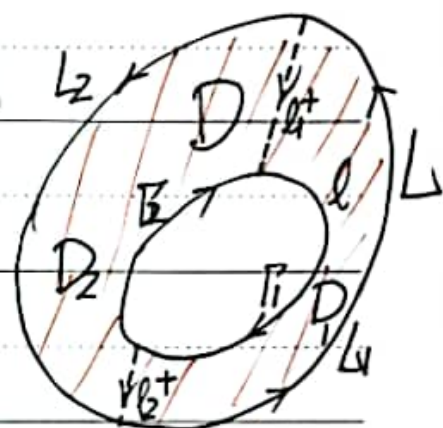
$$\oint_{\partial D} p dx + q dy = \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy$$

(3) 若 D 是“有洞”区域即为连通区域时, (4) 仍成立。

如图 D 是连通域, 作两条有向闭辅助

曲线 l_1^+, l_2^+ , 设 $\partial D_1 = l_1^+ + l_2^+ + l_1^- + l_2^-$,

$\partial D_2 = l_1^- + l_2^- + l_1^+ + l_2^+$, 分别在单连通域



D_1, D_2 上应用 Green 公式:

$$\oint_{\partial D_1} p dx + q dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\oint_{\partial D_2} p dx + q dy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy \quad \Rightarrow \quad \oint_{\partial D} p dx + q dy = \iint_{D_1+D_2} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\text{即 } \oint_{(L+l_1+l_2)+(l_1+l_2)} p dx + q dy = \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} p dx + q dy$$

(二) 例题:

例 1. 计算 $I = \oint_L \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$, L 是正向圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$), (2)



- (2) 设 Γ 是任意一条绕 $O(0,0)$ 一周的正向光滑曲线.
证明 $\oint_{\Gamma} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \oint_{x^2 + y^2 = a^2} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 2\pi$, (与半径 a 无关)

(3). 设 D 是 xy 平面中任一点不包含 $O(0,0)$ 的区域 (有界或无界皆可). 证明线积分 $\int_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ 在 D 中与路径无关.

- 即设 A, B 是 D 中任意两点, L_1^+, L_2^+ 是 D 中从 A 点到 B 点的任意两条光滑路径, 则恒有 $\int_{L_1^+} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int_{L_2^+} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$.

例2. 计算 $I = \int_{L_1} (x^2 + y^2)dx + 4xydy$

(1) L_1 是上半圆 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0, y \geq 0$) 从 $O(0,0)$ 到 $(a,0)$; $(\frac{a^3}{6})$

- (2) L_2 是线段 $y=0, (0 \leq x \leq a)$ 从 $O(0,0)$ 到 $(a,0)$. $(\frac{a^3}{3})$

注意: 例2中的线积分与路径有关! 若设 $\begin{cases} P(x,y) = x^2 + y^2 \\ Q(x,y) = 4xy \end{cases}$

则 $P(x,y), Q(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ 但 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 4y \neq \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$, 对 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

例3. 线积分 $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 在 D 中与路径无关的充要

- 条件为: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \forall (x,y) \in D$, D 是单连通域, $L \subset D$.

(3).



证例3: " \Leftarrow " 已知 $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \forall (x,y) \in D$, 设 A, B 为 D

中任两点, L_1^+, L_2^+ 是从 A 到 B 的任意两条路径, D_0 是

$L_1^+ + L_2^-$ 围成的区域, 由 Green 定理:

$$\oint_{L_1^+ + L_2^-} p dx + q dy = \iint_{D_0} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{D_0} 0 dx dy = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{L_1^+} p dx + q dy = \int_{L_2^+} p dx + q dy \text{ 即曲线积分 } \int_L p dx + q dy \text{ 与路径}$$

无关, 充分性得证。

" \Rightarrow " 已知 $\int_L p dx + q dy$ 与路径无关, 要证 $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \forall (x,y) \in D$.

用反证法: 若 $\exists M_0(x_0, y_0) \in D$, 使 $\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} \right) \Big|_{M_0} > 0$, 则从 $P, Q \in D$

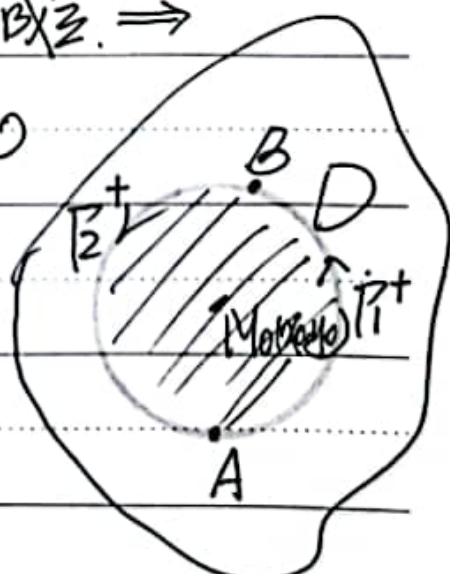
知: $\exists \delta > 0$ 使 $|MM_0| \leq \delta$ 时, $\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} > 0$ 恒成立. \Rightarrow

$$\oint_{x^2+y^2=\delta^2} p dx + q dy = \iint_{D_0} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx dy > 0$$

设 A, B 是正向圆周 $x^2+y^2=\delta^2$ 上任意两点,

$$\text{则 } \oint_{\Gamma_1^+ + \Gamma_2^+} p dx + q dy > 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_1^+} p dx + q dy >$$

$$-\int_{\Gamma_2^+} p dx + q dy = \int_{\Gamma_2^-} p dx + q dy, \text{ 即 } \int_L p dx + q dy \text{ 与路径}$$



- L 有关. 矛盾! 故 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\forall (x,y) \in D$. 必要条件是.

当线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 与路径无关时, 称对应的向量场

$\vec{A}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ 是 D 中的保守场.

由例1可知, $\vec{A}(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ 在右半平面 $D_1: x > 0$,

- 上半平面 $D_2: y > 0$; 第一象限 $D_3: x > 0, y > 0$, D_4 : 不含 $(0,0)$ 的

任何单连通域中都是保守场. ($\because P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

$\in C^1(D_i), i=1,2,3,4$, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \forall (x,y) \in D_i$. D_i 是单连通域)

由例2可知, $\vec{A}(x,y) = (x^2y^2, 4xy)$ 在任何单连通域中都是

- 不是保守场 ($\because \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ 在任何区域中都不成立)

由例1也可知, 对任意连续函数 $g(x), h(y)$, 若令 $P = \frac{-y}{x^2+y^2} g(x)$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2} h(y)$

则 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \vec{A}(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2} g(x), \frac{x}{x^2+y^2} h(y))$

\vec{A} 是上述 D_1, D_2, D_3, D_4 中的保守场.

- 作业: 5/11.3: 1/2, 1/5; 4/3, 4/4, 1/5, 1/6; 6; 9.
10/11.7: 5/1; 6/3.

(5)



附: 关于 Green 公式的进一步讨论

(一) 设 D 是 xOy 平面中的单连通域, $L = \partial D$ 为逆时针方向的正向边界曲线, $A(x, y) = (p(x, y), q(x, y)) \in C^1(D)$, 则

以下四个命题等价: (记为 Th 11.7 及其推广)

Ⅰ. $A(x, y)$ 是 D 中的无旋场, 即 $\nabla \times A(x, y) \equiv 0$, 即

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Ⅱ. $A(x, y)$ 是 D 中的保守场, 即对 D 中的任意闭路 Γ ,

$$\oint_{\Gamma} p(x, y)dx + q(x, y)dy \equiv 0, \quad \text{即线积分} \int_{LAB} p(x, y)dx + q(x, y)dy \text{ 在 } D \text{ 中与路径无关.}$$

从而 $\int_{LAB} p(x, y)dx + q(x, y)dy$ 可以写成 $\int_A^B p(x, y)dx + q(x, y)dy$.

Ⅲ. $A(x, y)$ 是 D 中的有势场 (保守场), 即存在 $g(x, y) \in C^1(D)$

$$\text{使 } dg(x, y) = p(x, y)dx + q(x, y)dy \quad \text{即 } \nabla g(x, y) = (p(x, y), q(x, y)) = A(x, y)$$

此时, 称标量函数 $g(x, y)$ 为 $A(x, y)$ 的势函数且

$$g(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} p(x, y)dx + q(x, y)dy = \int_{x_0}^x p(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y q(x_0, y)dy \quad (\star) \quad (B)$$



对于 D 中两点任意两点 Q_2, Q_1 , 有 $M_0(x,y) \in D$. 使

$$\int_{Q_1}^{Q_2} p(x,y)dx + q(x,y)dy = \int_{Q_1}^{M_0} p(x,y)dx + q(x,y)dy + \int_{M_0}^{Q_2} p(x,y)dx + q(x,y)dy$$

$$= \int_{M_0}^{Q_2} p(x,y)dx + q(x,y)dy - \int_{M_0}^{Q_1} p(x,y)dx + q(x,y)dy = g(Q_2) - g(Q_1) = \int_{Q_1}^{Q_2} dg(x,y) \quad (*)$$

这是 Newton-Leibniz 公式在平面区域中的推广。

(II) 微分方程 (ODE): $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$ 是恰当微分方程

(即恰当方程), 即存在微分函数 $g(x,y)$ 使

$$dg(x,y) = p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0 \Rightarrow g(x,y) = C \text{ 为所求通解. } (*)$$

证明思路: (I) \Rightarrow (II) \Rightarrow (III) \Rightarrow (IV) \Rightarrow (I)

(三) 定理 = Green 公式及其证明 (ex 11.3/7)

(1). 设 $u(x,y), v(x,y) \in C^2(D)$, D 是 xy 平面中由简单闭曲线 L 围成的区域, \vec{n} 是 L 的外法向量, $\vec{V} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$, $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

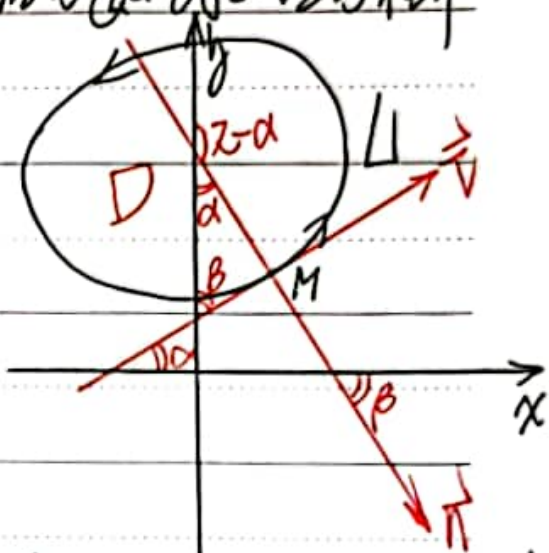
$$\oint_L u \frac{\partial v}{\partial n} ds = \iint_D (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v) dx dy \quad (*)$$

$$(2) \oint_L (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) ds = \iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy \quad (*)$$

(2)



这里的(4.5)即为格林公式, 今后在数学物理方程中要应用到。



证(1): 设 $\vec{T} = (\cos \alpha, \cos \beta)$ 是 L 上点 M

的切向量, 则 L 上点 M 处的单位

外法向量 $\vec{n} = (\sin \beta, \sin \alpha) = (\sin \beta, -\cos \alpha)$ $L: \vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \in C^1$

$$\text{且从 } \vec{T} = (\cos \alpha, \cos \beta) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{\vec{r}'(t) dt}{|\vec{r}'(t)| dt} = \frac{(dx, dy)}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) \Rightarrow$$

$$\cos \alpha ds = dx, \cos \beta ds = dy.$$

$$\text{而 } \oint_L u \frac{\partial v}{\partial n} ds = \oint_L u \nabla v \cdot \vec{n} ds = \oint_L u \nabla v \cdot (\sin \beta, -\cos \alpha) ds$$

$$= \oint_L u (v'_x, v'_y) \cdot (dy, -dx) = \oint_L (u v'_y) dx + (u v'_x) dy \quad \text{Green}$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial(u v'_x)}{\partial x} - \frac{\partial(-u v'_y)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D [u'_x v'_x + u'_y v'_y + u(\Delta v)] dx dy$$

$$= \iint_D [(u'_x, u'_y) \cdot (v'_x, v'_y) + u \Delta v] dx dy = \iint_D (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v) dx dy \quad (*)$$

$$\text{证(2): 同理有 } \oint_L v \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_D (v \nabla \cdot \nabla u + v \Delta u) dx dy \quad (**)$$

$$(*) - (**): \oint_L (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) ds = \iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy$$

(3).



注(1): 在(1)中, 因为 $\vec{A}(x,y) = (p(x,y), q(x,y))$ 的旋度为 $\nabla \times \vec{A}(x,y) =$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p(x,y) & q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + (\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y})\vec{k} \equiv 0 = (0,0,0) \Leftrightarrow \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$$

因此, $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$, 即表示 $\vec{A}(x,y)$ 为 D 中的无旋场。

注(2) 在 ODE: $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$ 中, 若 $p(x,y), q(x,y)$ 在单连通域 D

中满足 $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$, 则 $\exists g(x,y) \equiv \int_{x_0}^x p(x,y_0)dx + \int_{y_0}^y q(x,y_0)dy$ 为

该无向量场 $\vec{A}(x,y) = (p(x,y), q(x,y))$ 的势函数, 则 ODE 的通解为

$$g(x,y) = C \quad (C \text{ 是任意常数})$$

注(3) 若线积分 $\int_{LAB} pdx + qdy$ 中的 p, q 在单连通域 D 中满足

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}, \text{ 则 } \exists g(x,y) \in C^1, \text{ 使 } \int_{LAB} pdx + qdy = \int_A^B dg(x,y)$$

$$= g(B) - g(A), \text{ 其中 } g(x,y) = \int_{x_0}^x p(x,y_0)dx + \int_{y_0}^y q(x,y_0)dy$$

x_0, y_0 愈简单愈好, 最好是 $x_0 = 0 = y_0$, 尽量选 $x_0 = y_0 = 0$.

作业: 例 11.7 / 3/0, 5/0; 6/12, 0; 9; 12; 14.

例题: 计算 $\int_{(1,1)}^{(2,3)} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ (答案: $\frac{\pi}{4} - \arctan 2 + \arctan \frac{3}{2} - \arctan \frac{1}{2}$)

(4)

