41

第38讲：函数列均方收敛与Parseval等式 (2023.6.12)

(一) 可积函数线性空间——$L^2[a,b]$与均方收敛：

令$L^2[a,b]=\{f(x) \mid f$及f^2都在$[a,b]$上可积$\}$，则$L^2[a,b]$是实数域R上的一个线性空间。对$\forall f(x), g(x)\in L^2[a,b]$，定义$f$与$g$的内积为：$(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)g(x)dx$，则$\|f(x)\|^2=(f(x),f(x))=\int_a^b f^2(x)dx$，$\|f(x)-g(x)\|^2=\int_a^b (f(x)-g(x))^2dx$。设$\{f_n(x)\}\in L^2[a,b]$，$f(x)\in L^2[a,b]$。若$\|f_n(x)-f(x)\|^2=\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$。则称函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上平方平均（即均方）收敛于$f(x)$。记作$f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{均方} f(x)$，$x\in[a,b]$。

注意：$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$中均方收敛于$f(x)$，并不表示在$[a,b]$中的每一点，$\{f_n(x)\}$都收敛于$f(x)$，而只能说$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$中"大体上"都收敛于$f(x)$。因此，$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上的"均方收敛于$f(x)$"与$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上"逐点收敛于$f(x)$"有着本质的区别。

例1. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上逐点相等，则必有 $\int_a^b (f(x)-g(x))^2dx=0$，但从 $\int_a^b (f(x)-g(x))^2dx=0 \not\Rightarrow f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上逐点相等.

设 $f(x)=\sin x,\ x\in[0,\pi]$，$g(x)=\begin{cases}5 & x=0\\ \sin x & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 2 & x=\frac{\pi}{2}\\ \sin x & \frac{\pi}{2}<x<\pi\\ 3 & x=\pi\end{cases}$，

则 $\int_0^\pi (f(x)-g(x))^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x)-g(x))^2dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(f(x)-g(x))^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}0dx=0$

但 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上并不是逐点相等的，而是在有限个点处不相等.

(三) Bessel 不等式与 Parseval 等式：

设 $f\in L^2[-\pi,\pi]$，且 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n\geq 0)$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n\geq 1)$.

令 $\begin{cases}S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)\\ g_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(\alpha_m\cos mx+\beta_m\sin mx)\end{cases}$

称 $S_n(x)$ 为 f 的傅里叶级数的第 n 个部分和，而 $g_n(x)$ 为任一个 n 阶的三角多项式. 则：

Th1：$\|f(x)-g_n(x)\|^2\geq\|f(x)-S_n(x)\|^2$，$\forall x\in[-\pi,\pi]$.

Th2: $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$ （Bessel不等式）

Th3: $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$ （parseval等式）.

证Th1: $\because \|f(x)-g_n(x)\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g_n(x))^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g_n(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}g_n^2(x)dx=\left[\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)\right)\right]+\pi\left[\frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2}+\sum_{m=1}^{n}\left((a_m-\alpha_m)^2+(b_m-\beta_m)^2\right)\right]$

当且仅当，$g_n(x)=S_n(x)$时，$\|f(x)-g_n(x)\|^2$取最小值$\|f(x)-S_n(x)\|^2$.

即$\|f(x)-g_n(x)\|^2\ge\|f(x)-S_n(x)\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)\right)$ (※1)

证Th2: 由$\|f(x)-S_n(x)\|^2\ge0\Rightarrow\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m^2+b_m^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$

此即Bessel不等式的基础. 正项级数部分和单调增且有上界 $M=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$. 故$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2+b_m^2)$收敛，且有 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$，Bessel不等式得证。

证Th3: 当$\lim_{n\to\infty}\|f(x)-S_n(x)\|^2=0$时 即 $S_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{均匀}f(x)$时.

由(※1)有: $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$.

$L^2[-\pi,\pi]$中的函数$f(x)$的傅氏级数的第n个部分和

$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)$，在$[-\pi,\pi]$中必平方收敛

于$f(x)$的严格证明见§12.3.2，属于选学内容。(Th12.7)

下面利用ch12练习7，证明连续的2π周期函数$f(x)$

的parseval等式：$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$.

若是$2l$周期函数$f(x)$，其parseval等式为：

$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx$， $\begin{cases} a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx & (n\geq 0) \\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx & (n\geq 1)\end{cases}$

若$f(x)$是$2l$周期的奇(偶)函数，且$f\in L^2[-l,l]$，则

f的parseval等式分别为：$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx$ 或

$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx$.

证ch12练习7：已知$f(x+2\pi)\equiv f(x)$，$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt$

则$F(x+2\pi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+2\pi+t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt=F(x)$

$\therefore F(x)$仍为2π周期函数。另外，$F(-x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(-x+t)dt$

$\xrightarrow[\text{则 } dt=du]{\text{令 } -x+t=u} \frac{1}{\pi}\int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(u+x)f(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)f(x+u)\,du = F(x)$

$\therefore F(x)$ 是 R 上以 2π 为周期的偶函数，且 $F(x)$ 在 R 上 C，

$\Rightarrow B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,dx = 0$，$(n\geq 1)$，$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,dt\right)dx \xrightarrow{\text{换序}} \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,dx\right)dt$

$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(u)\,du\,)dt = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du\right)dt = a_0^2$

$n\geq 1$ 时，$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,dt\cos nx\,dx$

$\xrightarrow{\text{换序}} \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\cos nx\,dx\right)dt$

$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nx\,dx\right)dt \xrightarrow[x=u-t]{\text{令 } x+t=u}$

$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(u)(\cos(nu-nt))\,du\right)dt$

$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\cos nu\cos nt + \sin nu\sin nt)\,du\right)dt$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(a_n\cos nt + b_n\sin nt)\,dt = a_n^2 + b_n^2$

$\because F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos nx \xrightarrow[\text{一致，绝对}]{\text{收敛}} F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,dt$

即 $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,dt$，$x\in[-\pi,\pi]$。

令 $x=0$，有：$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt$

Parseval等式的第三种证法：(设f为2π周期函数)

已知：$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\xrightarrow{均方}f(x)\Rightarrow$

$\frac{a_0}{2\sqrt{\pi}}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}+b_n\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}})=\frac{f(x)}{\sqrt{\pi}}$, $x\in[-\pi,\pi]\Rightarrow$

$\frac{a_0}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}+b_n\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}})=\frac{f(x)}{\sqrt{\pi}}$.

而 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos 1x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 1x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\cdots$

是$\frac{f(x)}{\sqrt{\pi}}$所在的函数线性空间$L^2[-\pi,\pi]$中的标准正交基.

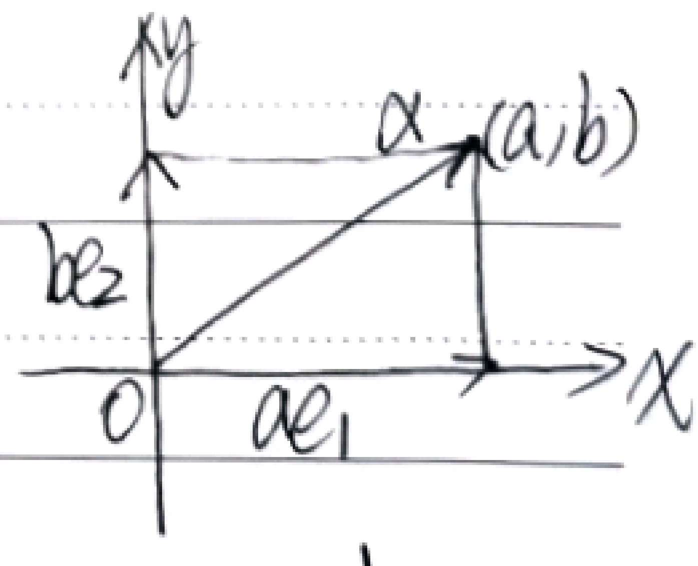
$\therefore\left\|\frac{f(x)}{\sqrt{\pi}}\right\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(x)}{\sqrt{\pi}}\right)^2dx=\left(\frac{a_0}{\sqrt{2}}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 即有parseval等式：

$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$.

在有限维空间中．例如，在R^2中．令$e_1=(1,0),e_2=(0,1)$

且e_1,e_2是二维数组空间R^2中的标准正交基．对$\forall\alpha=(a,b)\in R^2$

有$\alpha=ae_1+be_2\Rightarrow\|\alpha\|^2=a^2+b^2$



这是R^2中的勾股定理，在R^3中，令

$e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$，$\alpha=(a,b,c)$，则

$\alpha=ae_1+be_2+ce_3$ 是 e_1,e_2,e_3是R^3的一个标准正交基.

$\|\alpha\|^2=a^2+b^2+c^2$，这是R^3中的勾股定理，在R^n中，令

$e_1=(1,0,0,\cdots 0)$，$e_2=(0,1,0,\cdots 0)$，$\cdots$，$e_n=(0,0,\cdots 0,1)$，

$\alpha=(a_1,a_2,\cdots a_n)$，则$e_1,e_2,\cdots e_n$是$R^n$的一个标准正交基，

$\alpha=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n \Rightarrow \|\alpha\|^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，这是$R^n$中

的勾股定理，而Parseval等式表示的是无穷维线性空间$L^2[-\pi,\pi]$或$L^2[-l,l]$中的勾股定理。

例2，设$f(x),g(x)\in L^2[-\pi,\pi]$，且$\begin{cases} f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \\ g(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx) \end{cases}$，则

$\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$.

证：$\because \begin{cases} f(x)+g(x)=\frac{a_0+\alpha_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+\alpha_n)\cos nx+(b_n+\beta_n)\sin nx \\ f(x)-g(x)=\frac{a_0-\alpha_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-\alpha_n)\cos nx+(b_n-\beta_n)\sin nx \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} \frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}((a_n+\alpha_n)^2+(b_n+\beta_n)^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)+g(x))^2dx & (*1) \\ \frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}((a_n-\alpha_n)^2+(b_n-\beta_n)^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2dx & (*2) \end{cases}$

$(*1)-(*2)$ 即得 $\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$.

(三)作业：

ex12.2/1；2；3；4(1)(2)；ex12.3/8；9.