内容回顾

线性相关与线性无关

定义

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$. 若存在不全为零的标量 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$, 使得 $\sum_{i=1}^m \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}$, 则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关; 否则, 称它们线性无关.

注

1. 若 $m = 1$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$.
2. 若 $m \geq 2$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$ 线性相关的充要条件是向量组中某个向量可以被剩下的向量组线性表示.
3. 包含零向量的向量组一定线性相关.

定义

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中的每一个向量都可以用向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell$ 线性表示, 则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell$ 线性表示.

定理 1

1. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell$ 线性表示的充要条件是

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle \quad \subseteq \quad \langle \boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell \rangle .$$

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\ell$ 线性表示, 并且 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\ell$ 可以由 $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ 线性表示, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ 线性表示, 即, 向量组的线性表示具有传递性.

定理 2

设 $m \geq 2$. 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$ 线性相关的充要条件是存在 $i_0 \in \{1, 2, \ldots, m\}$, 使得

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_0-1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_0+1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle,$$

即向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_0}$ 对于生成子空间 $\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle$ 是多余的.

定理 3

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n \times m$ 矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量. 则以下三条等价:

1. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关;
2. (关于 λ 的) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ 有非零解;
3. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不是列满秩的, 即, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) < m$.

2023 年 4 月 18 日

例 4

已知列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, -1, 4)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, -1, a, 3)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (2, 5, 3, 5)^{\mathsf{T}}$ 线性无关，求参数 a.

学生自习教材 P124 定理 5.2.5.

极大无关组与秩

给定一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$. 若这组向量线性相关, 则用它们来生成子空间 $\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle$ 时, 就存在冗余的向量. 这节的一个目标是: 通过反复移去多余的向量, 使得剩下的向量组不再存在冗余, 从而线性无关.

定义

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$ 为一组向量. 若有

1. 存在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关, 并且
2. 任意添加一个其它的向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_{r+1}}$ 后, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}, \boldsymbol{\alpha}_{i_{r+1}}$ 线性相关,

则称 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 构成了向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 的一个极大无关组. 简言之, 它是原向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性无关的子向量组, 并且无法扩充为更大的线性无关的子向量组.

注

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$ 为一组向量，不全为零向量. 考虑它的所有线性无关的子向量组中长度最大的任意一组，那么这样选出来的子向量组显然是原向量组的一个极大无关组. 特别地，极大无关组存在.

注 (向量组与它的极大无关组等价)

在上面的定义中，$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r} \rangle$.

例 5

讨论 $\boldsymbol{a}_1 = (2, -1, 3, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (4, -2, 5, 4)$, $\boldsymbol{a}_3 = (2, -1, 4, -1)$ 的极大无关组.

引理

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵. 证明: 列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$ 是线性无关的当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_m$ 是线性无关的.

定理 6

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$ 为一组列向量, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 是相应的 $n \times m$ 矩阵. 假定 $\boldsymbol{A}$ 经过一系列的初等行变换后得到矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m)$, 则

1. $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性相关 (线性无关) $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 线性相关 (线性无关);
2. $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 为向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的极大无关组.

例 7

讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1, 5, 3, -2)^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (4, 1, -2, 9)^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (2, 0, -1, 4)^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (1, 15, 7, 2)^\mathsf{T}$ 的极大无关组.

注

1. 用约化标准形可以相对比较容易地找出所有的极大无关组. 不过一般情形下, 也没有必要找出所有的极大无关组.
2. 在定理 6 中, 设矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times m}$ 用初等行变换可以得到阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m)$. 设主元依次在 $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ 列上, 则我们断言 $\boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m$ 的一个极大无关组, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大无关组.

例 8

求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, 2, 0)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 4, 4, 0)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 0, 3, 1)^{\mathsf{T}}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_4 = (0, 4, -2, -2)^{\mathsf{T}}$ 的一个极大无关组, 并求出其余向量相对于该极大无关组的线性表示式.

现在有一个很自然的问题: 一个向量组的不同的极大无关组的长度是否相等?

定义

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell$ 可以相互线性表示, 则称它们等价, 并记作

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\} \quad \sim \quad \{\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell\}.$$

由定理 *1* 不难看出, 这等价于说

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle = \langle \boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell \rangle .$$

进一步地, 不难看出, “$\sim$” 满足等价关系的三条公理 (反身性, 对称性, 传递性).

定理 9

一个向量组与它的任何一个极大无关组等价.

推论 10

向量组的任何两个极大无关组彼此等价.

定理 11 (极大无关组就是线性无关的张成组)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$. 则子向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大无关组当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关且

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle .$$

该定理把极大无关组中的线性无关和张成两个性质结合在一起了. 那么, 对于一般的向量组, 这两个性质之间有怎样的关系呢?

定理 12 (线性无关组的长度 $\leq$ 张成组的长度)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 并且可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示, 即, $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_s$ 所张成的线性子空间中的一组线性无关的向量. 那么, 我们有 $r \leq s$.

推论 13

若两个线性无关的向量组 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ 和 $\{\beta_1, \dots, \beta_s\}$ 等价, 则 $r = s$.

推论 14

一个向量组的任何两个极大无关组的长度相等.

定义

一个向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 的极大无关组的长度称为该向量组的秩, 记为 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 或 $\text{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)$. 我们约定: 只含零向量的向量组以及空的向量组 (即此处 $m = 0$ 的情形, 可类比于空集) 的秩为 0.

注

在上面的定义中, 若将这些向量视为列向量, 并按行依次排列得到矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix},$$

则向量组的秩 $\text{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 等于矩阵的秩 $\text{rank}(\boldsymbol{A})$. 这是因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 有一个极大无关组, 其长度就是 $\boldsymbol{A}$ 的阶梯标准形的非零行数, 即 $\text{rank}(\boldsymbol{A})$.

定义

给定 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 则

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_n \end{pmatrix}$$

将 $\boldsymbol{A}$ 写成了行向量按列排列以及列向量按行排列的形式. 行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 组成的 F^n 中的向量组的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩, 列向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$ 组成的 F^m 中的向量组的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列秩.

与之相关地, 行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的 F^n 的子空间称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行空间 (记作 $\mathrm{Row}(\boldsymbol{A})$), 列向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$ 生成的 F^m 的子空间称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间 (记作 $\mathrm{Col}(\boldsymbol{A})$).

定理 15

任何矩阵的秩等于它的行秩和列秩.

推论 16

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 以下几条等价:

1. $\boldsymbol{A}$ 可逆;
2. $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n$;
3. $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关;
4. $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性无关;
5. $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$.

定理 17

设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_s \in F^n$, 则有:

1. $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关当且仅当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r) = r$;
2. $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关当且仅当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r) < r$;
3. 若 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_s\}$ 可以由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ 线性表示, 则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_s) \leq \mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r)$;
4. 若 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_s\}$ 与 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ 等价, 则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_s) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r)$;
5. 向量 $\boldsymbol{b} \in F^n$ 可以表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 的线性组合当且仅当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{b})$.

推论 18

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的不等于零的 r 阶子式所在的行 (列) 构成 $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组的极大无关组.

例 19

在 F^n 中，如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，而且 $s > t$，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

例 20

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n \in F^n$ 为 n 个线性无关的向量. 证明: 矩阵的秩 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ 等于向量组的秩 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n)$. 特别地, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = n$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

例 21

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 是两个向量组，满足 $r \geq 2$, $\boldsymbol{\beta}_i = \sum\limits_{j \neq i} \boldsymbol{\alpha}_j$. 试证明向量组的秩 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r)$.