习题课（4月3日）

作业题：

T1（习题9.2的题25）

设 $u=f(t)$，$t=\varphi(xy,\ x+y)$，其中 f，φ 分别具有连续的二阶导数及偏导数，

求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

解：
$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(t)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}=f'(t)\cdot(\varphi_1'\cdot y+\varphi_2')=f'(\underbrace{\varphi(xy,x+y)}_{\text{可写可不写}})(\varphi_1'y+\varphi_2')$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'(t)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}=f'(t)\cdot(\varphi_1'\cdot x+\varphi_2')=f'(\underbrace{\varphi(xy,x+y)}_{})(\varphi_1'x+\varphi_2')$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f''\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot(\varphi_1'y+\varphi_2')+f'\cdot\left[(\varphi_{11}''x+\varphi_{12}'')y+\varphi_1'+(\varphi_{21}''\cdot x+\varphi_{22}'')\right]$$

$$=f''(\varphi_1'x+\varphi_2')(\varphi_1'y+\varphi_2')+f'\cdot(\varphi_{11}''xy+(x+y)\varphi_{12}''+\varphi_{22}''+\varphi_1')$$

Remark：φ_1' 和 φ_x' 不要搞混，

形如 $\varphi=\varphi(xy,\ x+y)$，则 $\overset{=\varphi'(xy)}{\varphi_1'}\neq\varphi_x'$

形如 $\varphi=\varphi(x,y)$ 则 $\varphi_1'=\varphi_x'$

，一般来讲都用1,2,…标位置，x,y…标变量

T2（习题9.3的题2(4)）

求由方程所确定的隐函数的导数：$e^{-xy}-2z+e^z=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial x}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

解（$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 由 $z=z(x,y)$ 来确定），令 $F(x,y,z)=e^{-xy}-2z+e^z$

由于 $F_x'=e^{-xy}(-y)$，$F_y'=e^{-xy}(-x)$　　$F_z'=-2+e^z$

$$\therefore\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{ye^{-xy}}{e^z-2}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xe^{-xy}}{e^z-2}$$

（$\dfrac{\partial x}{\partial y}$ 由 $x=x(y,z)$ 确定）　同样 $\dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_x'}=-\dfrac{x}{y}$

（$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 由 $z=z(x,y)$ 确定）
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{ye^{-xy}(-y)(e^z-2)-ye^{-xy}e^z\cdot\dfrac{ye^{-xy}}{e^z-2}}{(e^z-2)^2}$$

$$=\frac{-y^2e^{-xy}(e^z-2)^2-y^2e^{z-2xy}}{(e^z-2)^3}$$

真题

T3 (18') 讨论函数

(习题9.2的17)

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点的可微性，以及它在原点的偏导数是否连续？

解：(从定义出发)

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时

$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_y(x,y)=2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{|x|}=0 \qquad f_y(0,0)=0$$

但 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f_x(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\Big(\underbrace{2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{无问题}}-\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{显然不存在}}\Big)$，$f_y(x,y)$ 同理

∴ 偏导数在原点处不连续

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

∴ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

T4 (22') 求函数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在点 $(0,0)$ 的4阶Taylor展开式

(习题9.5 4(2))

解：已知 $\sqrt{1-t}\ \overset{\text{泰勒}}{=\!=}\ 1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2) \qquad (t\to0)$

$$\therefore\ \sqrt{1-(x^2+y^2)}=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2+o(\rho^4) \qquad \rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

Remark：能借用一阶泰勒展开就尽量用，用公式太繁琐！

~~函数 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在闭区域 $D=\{(x,y)\mid x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 6\}$ 上的最大值与最小值.~~

~~解:~~

T5 (19') 求函数 $f(x,y)=x^2+xy^2-x$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 2\}$ 上的最大最小值.
(综合题14)

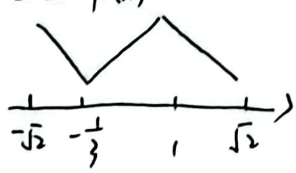
解: $\begin{cases} f'_x = 2x+y^2-1 = 0 \\ f'_y = 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$ (在 D 内)

$\Rightarrow f(0,1)=0,\ f(0,-1)=0 \quad f(\frac{1}{2},0)=-\frac{1}{4}$

再考虑边界点: $x^2+y^2=2 \quad -\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$

此时 $f(x,y)=x^2+x(2-x^2)-x=-x^3+x^2+x \triangleq F(x)$

$F'(x)=-3x^2+2x+1=-(3x+1)(x-1)$



显然边界最大为 $\max\{F(-\sqrt{2}), F(1)\}=2+\sqrt{2}$

边界最小为 $\min\{F(-\frac{1}{3}), F(\sqrt{2})\}=-\frac{5}{27}$

综上 $\min=-\frac{1}{4}$, $\max=2+\sqrt{2}$.

Remark: 最值可能的地方: 驻点, 边界点, 导数不存在的点。

T6 (21') 设 A, B, C 是平面上不共线的三点, 且三角形 △ABC 有一个内角 ≥120°. 考虑平面上如下函数

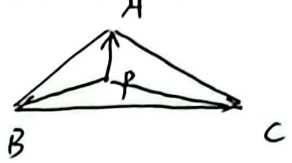
$$f(p)=|\vec{PA}|+|\vec{PB}|+|\vec{PC}|$$

(1) 证明函数 $f(p)$ 可以在平面上取到最小值

(2) 求函数 $f(p)$ 在可微点的梯度

(3) 证明函数 $f(p)$ 没有驻点, 求函数的最小值并说明理由.

解 (1) 不失一般性，假设 $\angle A \ge 120^\circ$



将平面分成两个区域

$$D_1=\{P: |\vec{PA}|>|\vec{AB}|+|\vec{AC}|\},\quad D_2=D_1^{c}=\{P: |\vec{PA}|\le|\vec{AB}|+|\vec{AC}|\}$$ ←是一个圆

在 D_1 内，$f(P)=|\vec{PA}|+|\vec{PB}|+|\vec{PC}|>|\vec{AB}|+|\vec{AC}|$

在 D_2 内，由于 D_2 是有界闭集，且 $f(P)$ 显然连续，则 $f(P)$ 在 D_2 内一定存在最值

且最小值 $\min \le f(A)=|\vec{AB}+\vec{AC}|$ $(A\in D_2)$

(2) 类似于 $\nabla\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)=\left(\frac{(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}},\ \frac{(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right)$

$$\therefore \nabla f(P)=\frac{\vec{PA}}{|\vec{PA}|}+\frac{\vec{PB}}{|\vec{PB}|}+\frac{\vec{PC}}{|\vec{PC}|}$$

(3) 反证，若有驻点 $P=P_0$（利用 $\angle A=120^\circ$ 找矛盾）

则 $\nabla f(P_0)=\vec{0}$，记 $\vec{e_1}=\frac{\vec{PA}}{|\vec{PA}|}$，$\vec{e_2}=\frac{\vec{PB}}{|\vec{PB}|}$，$\vec{e_3}=\frac{\vec{PC}}{|\vec{PC}|}$

$\therefore \vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}=\vec{0}$ $\Rightarrow$ 两两成 120°（利用 $|\vec{e_1}|=|-\vec{e_2}-\vec{e_3}|=1$ 可得）

再设 $u=|\vec{PA}|$，$v=|\vec{PB}|$，$w=|\vec{PC}|$，$u,v,w>0$

由余弦定理 $|\vec{AB}|=\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos120^\circ}=\sqrt{u^2+v^2+uv}$

$|\vec{BC}|=\sqrt{v^2+vw+w^2}$，$|\vec{AC}|=\sqrt{u^2+uw+w^2}$

此时 $|AB|^2+|AC|^2+|AB||AC|-|BC|^2=2u^2+uv+uw-vw+\underbrace{\sqrt{u^2+uv+v^2}\cdot\sqrt{u^2+uw+w^2}}_{>v\cdot w}>0$

而 $\cos120^\circ=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2|AB|\cdot|AC|}$ $\Rightarrow AB^2+AC^2-BC^2+|AB|\cdot|AC|=0$ 矛盾 $\therefore$ 无驻点.

综合(1)，(3)并知最小值只能在区边界或不可导点取到. 分析这两种情况.

在边界上：$f(P)>f(A)$.，不可导点（由(2)可知）$(P=A,B,C)$ 此时 $f(B)=|\vec{AB}|+|\vec{BC}|\overset{A=120^\circ}{>}|\vec{AB}|+|\vec{AC}|=f(A)$.

显然 $f(C) > f(A)$

综上 最小值为 $f(A) = |\vec{AB}| + |\vec{AC}|$

T7 设 $F(x,y)$ 是二元可微函数，求证：空间中存在一条直线使得由方程

$$F(x-ay, z-by) = 0$$

表示的曲面的切平面总与此直线平行，其中 a, b 是常数。

解：记 $G(x,y,z) = F(x-ay, z-by)$

法向 $\vec{n} = (G_x, G_y, G_z) = (F_1', -aF_1' - bF_2', F_2')$

∴ 只须找到一条直线与法向量方向一直垂直

观察知 $a \cdot F_1' + 1 \cdot (-aF_1' - bF_2') + b \cdot F_2' = 0$

∴ 以 $(a, 1, b)$ 为方向向量的直线与曲面切平面总是平行。

(一些不错的题)

T8 设 $f(x,y,z)$ 是 n 次齐次函数，$z = \varphi(x,y)$ 是由方程 $f(x,y,z) = 0$ 确定 $(f_z' \neq 0)$

(综合题4) 证明 $\varphi(x,y)$ 是一次齐次函数

证明 $\Leftrightarrow$ 由上一题知只须证 (综合题3) $x\underset{\varphi_1'}{\underline{\varphi_x'}} + y\underset{\varphi_2'}{\underline{\varphi_y'}} = \varphi$

由于 $f(x, y, \varphi(x,y)) = 0$

则有 对 x 求偏导：$f_1' \cdot 1 + f_3' \cdot \varphi_1' = 0$

对 y 求偏导：$f_2' \cdot 1 + f_3' \cdot \varphi_2' = 0$

$\Rightarrow (xf_1' + yf_2') + f_3'(x\varphi_1' + y\varphi_2') = 0$ ①

∵ $f(x,y,z)$ 是 n 次齐次函数，由上一题知 $xf_1' + yf_2' + \underset{\varphi}{\underline{z}}f_3' = nf = 0$ ②

结合①② $f_3'(x\varphi_1' + y\varphi_2' - \varphi) = 0$

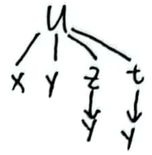
∵ $f_3' = f_z' \neq 0$

$\Rightarrow x\varphi_1' + y\varphi_2' = \varphi$ 得证。

T9 设 $u(x,y)$ 是由方程组 $u=f(x,y,z,t)$, $g(y,z,t)=0$, $h(z,t)=0$ 确定的函数，其中 f,g,h 均连续可微，且 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)} \neq 0$，求 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解. 首先认清函数之间的关系，由于 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)} \neq 0 \Rightarrow z,t$ 可以由 y 来表示，即由 $\begin{cases} g(y,z,t)=0 \\ h(z,t)=0 \end{cases}$ 确定

$\therefore u = f(x,y,z(y),t(y))$，$z,t$ 就是中间变量



$$\therefore \frac{\partial u}{\partial y} = f_2' \cdot 1 + f_3' \cdot z'(y) + f_4' \cdot t'(y)$$

$\therefore$ 对方程组 $\begin{cases} g(y,z,t)=0 \\ h(z,t)=0 \end{cases}$ 两边进行求导 $\begin{cases} g_1' + g_2' z'(y) + g_3' t'(y) = 0 \\ h_1' z'(y) + h_2' t'(y) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow z'(y) = \frac{g_1' h_2'}{g_3' h_1' - g_2' h_2'} \qquad t'(y) = \frac{g_1' h_1'}{g_2' h_2' - g_3' h_1'}$$

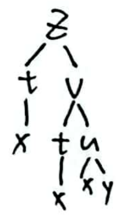
$$\therefore \frac{\partial u}{\partial y} = f_2' + \frac{f_3' g_1' h_2'}{g_3' h_1' - g_2' h_2'} + \frac{f_4' g_1' h_1'}{g_2' h_2' - g_3' h_1'}$$

T10 通过代换 $x=t$，$y=\frac{t}{1+tu}$，$z=\frac{t}{1+tv}$，试把方程

$$x^2 z_x + y^2 z_y = z^2$$

变为以 v 为因变量，t,u 为自变量的形式

变量代换之后



解：开始：$z=z(x,y)$ 形式 $\xrightarrow{\text{变换}}$ $v=v(t,u)$

需要什么，求什么. ~~z_x~~ 由 $z=\frac{t}{1+tv}$ 知：

$$z_x = \left(\frac{t}{1+tv}\right)_t t_x + \left(\frac{t}{1+tv}\right)_v (v_t t_x + v_u \cdot u_x) \quad ①$$

$$z_y = \left(\frac{t}{1+tv}\right)_v v_u \cdot u_y \quad ②$$

根据题目反解：$t=x$，$u=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$ $\Rightarrow t_x = 1$ $\quad u_x = \frac{1}{x^2}$ $\quad u_y = -\frac{1}{y^2}$

$$\therefore ① = \frac{1}{(1+vt)^2} + \frac{-t^2}{(1+tv)^2}\left(v_t + \frac{1}{x^2} v_u\right) \qquad ② = \frac{-t^2}{(1+tv)^2} v_u \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

将(1)(2)代入原方程.

$$x^2\left(\frac{1}{(1+Vt)^2}-\frac{t^2}{(1+tV)^2}(V_t+\frac{t}{x^2}V_u)\right)+y^2\left(\frac{-t^2}{(1+tV)^2}V_u\left(-\frac{1}{y^2}\right)\right)=z^2$$

将 x,y,z 代入化简得 $\frac{-t^4V_t}{(1+tV)^2}=0 \overset{\text{任意}}{\Longrightarrow} V_t=0$

T_{11} (综合题8)

若 R^2 上的可微函数 $f(x,y)$ 满足 $xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)=0$, 则 $f(x,y)\equiv C$

解法1, 用综合题7的结论.

$$xf_x'+yf_y'=0=0\cdot f(x,y) \iff f(x,y)\text{是0次齐次}$$

$$\therefore \forall t\in\mathbb{R}.\quad f(tx,ty)=t^0f(x,y)=f(x,y)$$

$$\text{令 } t\to 0 \Rightarrow f(x,y)=f(0,0)$$

法2. 设 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ 取 $\vec{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$

则 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\overset{\text{定义}}{=}\cos\theta f_x'+\sin\theta f_y'\overset{\text{题设}}{=}0$

$\therefore$ 在任一从原点出发的射线上的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=0$. $\Rightarrow$ 在射线上为常数 $\Rightarrow f(x,y)\equiv f(0,0)$

#

T_{12} 求曲面 $x=u+v,\ y=u^2+v^2,\ z=u^3+v^3$ 的切平面当切点 $M(u,v)$, $u\neq v$, 趋于曲面的边界 $u=v$ 上的点 $M_0(u_0,v_0)$ 时的极限位置.

$z=z(x,y)$

解: 先求 $u\neq v$ 时的切平面方程. 由于

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}2u & 2v\\ 3u^2 & 3v^2\end{vmatrix}=6uv(v-u)\qquad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}3u^2, & 3v^2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3(u^2-v^2)$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2u & 2v\end{vmatrix}=2(v-u).$$

← 由课本 P242 得法向量坐标

$$\therefore \text{切平面为: } 6uv(v-u)(X-(u+v))+3(u^2-v^2)(Y-(u^2+v^2))+2(v-u)(Z-(u^3+v^3))=0$$

$$\Rightarrow 6uvX-3(u+v)Y+2Z=3uv(u+v)-u^3-v^3.$$

令 $(u,v)\to(u_0,v_0)$，有

$$6u_0^2X-6u_0Y+2Z=4u_0^3$$

即 $3u_0^2x-3u_0y+z=2u_0^3$

T13 求证 $f(x,y)=yx^y(1-x)<e^{-1}$，其中 $x\in(0,1)$，$y\in(0,+\infty)$

证明：只需找出 $f(x,y)$ 的最大值与 e^{-1} 比较

首先 f 在区域的边界上恒为 0，而区域内部 >0 $\Rightarrow$ 最大值在内部，记为 (x_0,y_0) 点

$$\begin{cases} f_x'=y^2x^{y-1}(1-x)-yx^y=yx^{y-1}(y-xy-x)=0 \\ f_y'=x^y(1-x)+yx^y\ln x(1-x)=x^y(1-x)(1+y\ln x)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-xy-x=0 \\ 1+y\ln x=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_0(1-x_0)=x_0 \\ x_0^{y_0}=e^{-1} \end{cases}$$ 此时无需解具体极值点.

$$\therefore f(x,y)=yx^y(1-x)\le f(x_0,y_0)=y_0x_0^{y_0}(1-x_0)=e^{-1}x_0<e^{-1}$$ #