# 线性方程组解的存在性和唯一性

**定理 1**

设 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$, 而 $\boldsymbol{x} \in F^n$ 和 $\boldsymbol{b} \in F^m$ 为列向量. 记 $\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})$ 为相应的增广矩阵. 则

1. 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}})$;
2. 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解且唯一 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}}) = n$.

**推论 2**

关于 $n$ 个未知元的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 总有零解. 它有非零解的充要条件是 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) < n$. 特别地, 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶方阵, 则齐次线性方程组有非零解的充要条件是 $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.

# 齐次线性方程组解集的结构

**定理 3**

关于 $n$ 个未知元的齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解的全体

$$V=\{\boldsymbol{x}\in F^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\}$$

是 $F^n$ 的子空间, 满足 $\dim(V)=n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$, 即

解集空间的自由度 = 全空间的维数 − 约束条件的维数.

**定义**

上面的子空间 $V$ 称为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解空间, 也被称为系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间 (并被记作 $N(\boldsymbol{A})$ 或 $\operatorname{Null}(\boldsymbol{A})$). $V$ 的任意一组基称为该方程组的基础解系. 显然, 一般情形下, 基础解系并不唯一.

## 例 4

求齐次线性方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 8x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 6x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

**例 5**

若矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}_{n\times s}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})\leq n$.

**例 6**

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 的实矩阵. 证明: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.

**注**

在上面的例子中, 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 维复矩阵, 用类似地方法, 我们可以证明: $\operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$. 其中用到了对矩阵取复共轭运算. 另一方面, 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 维复矩阵, 我们一般不再有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$. 比如, 我们可以取 $\boldsymbol{A} = (1, \mathrm{i})^{\mathsf{T}}$.

**例 7**

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 的实矩阵, $\boldsymbol{b}$ 是 $m$ 维实的列向量. 证明: 关于 $\boldsymbol{x}$ 的线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}$ 必有解.

我们有如下的事实：若 $\gamma_1, \gamma_2$ 是非齐次的线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的任意两个解，而 $\gamma_0$ 是对应的齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解，则

1. $\gamma_1 - \gamma_2$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解: $\boldsymbol{A}(\gamma_1 - \gamma_2) = \boldsymbol{A}\gamma_1 - \boldsymbol{A}\gamma_2 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = 0$;
2. $\gamma_1 + \gamma_0$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解: $\boldsymbol{A}(\gamma_1 + \gamma_0) = \boldsymbol{A}\gamma_1 + \boldsymbol{A}\gamma_0 = \boldsymbol{b} + 0 = \boldsymbol{b}$.

## 定理 8

若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解集为 $W$, $\gamma$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解, 而对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解空间为 $V$, 则

$$W=\gamma+V:=\{\gamma+\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}\in V\}.$$

## 注

1. 在几何上来看, $W$ 是一个线性空间的过点 $\gamma$ 的平移, 这被称为一个仿射空间. 一般而言, 我们不会将其简称为一个空间.
2. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 是 $V$ 的一组基 (即齐次线性方程组的一组基础解系), 则

$$W=\left\{\gamma+\sum_{i=1}^{n-r}t_i\boldsymbol{\alpha}_i\mid t_i\in F\right\}.$$

3. 齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有时也被称为线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的导出组.

## 例 9

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (0, 1, 0)^\mathsf{T}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (-3, 2, 2)^\mathsf{T}$ 是线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \end{cases}$$

的两个解. 求该方程组的通解.

## 例 10

已知有 3 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, -1)^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (-1, -1, 2)^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (2, a, 1)^\mathsf{T}$ 和 $\boldsymbol{\beta} = (1, 2, b)^\mathsf{T}$.

1. $a, b$ 为何值时, $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?
2. $a, b$ 为何值时, $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示?
3. $a, b$ 为何值时, $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 但是表示并不唯一?

## 例 11

讨论 $a, b$ 取何值时方程组无解？何时方程组有解？在有解时，求其通解.

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + bx_3 = 4 \end{cases}$$

# 一般线性空间

在这一节，$F$ 仍然是数域. 我们将 $F$ 上的 $n$ 维数组空间 $F^n$ 推广，考虑定义了加法和数乘的非空集合.

**例 12**

$F^{m\times n}$ 是数域 $F$ 上所有的 $m \times n$ 矩阵构成的集合，有自然的加法和数乘运算，即矩阵的加法与数乘.

## 例 13

给定非负整数 $n$ 和数域 $F$, 考虑集合

$$F_n[x] := \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in F\}.$$

这是 $F$ 上次数不超过 $n$ 的以 $F$ 为系数的多项式的全体. 这个非空集合上定义了多项式的加法:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i. \qquad \text{(系数的加法)}$$

也定义了多项式的数乘:

$$\lambda \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) x^i. \qquad \text{(系数的乘法)}$$

该集合 (相对于加法的) 的零元:

$$0=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \Leftrightarrow a_0=a_1=\cdots=a_n=0. \qquad (\text{零多项式})$$

$F_n[x]$ 对 “加法” 和 “数乘” 都运算封闭, 即对任意的 $f, g \in F_n[x]$ 和任意的 $\lambda \in F$ 总有 $f+g, \lambda f \in F_n[x]$.

## 请翻开教材

1. 自学教材 P141 定义 5.6.1, 了解什么叫作域 $F$ 上的线性空间或者向量空间? 请结合刚才的例子和之前的 $n$ 维数组空间 $F^n$, 体会这些运算规律.
2. 自学教材 P143 线性空间的 4 条基本性质.

简言之, 一般线性空间是定义了相协调的加法与数乘运算的非空集合.

# 线性空间的例子

1. 数组空间 $F^n$ 任意的线性子空间依照数组的加法与乘法构成 (依上面抽象定义的) 一个线性空间.
2. 例 12 中数域 $F$ 上所有的 $m \times n$ 矩阵构成的集合 $F^{m\times n}$ 依照矩阵的加法和数乘构成一个线性空间.
3. 例 13 中的数域 $F$ 上次数不超过 $n$ 的以 $F$ 为系数的多项式的全体 $F_n[x]$ 依照多项式的加法与数乘构成一个线性空间. 更一般地, 以 $F$ 为系数的多项式的全体 $F[x] = \bigcup_{n\geq 0} F_n[x]$ 依照多项式的加法与数乘构成一个线性空间, 并且我们有如下的包含关系:
$$F = F_0[x] \subsetneq F_1[x] \subsetneq F_2[x] \subsetneq \cdots \subsetneq F[x]. \tag{1}$$

4. 闭区间 $[a, b]$ 上 $n$ 阶连续可导函数 ($n$ 阶导数是连续函数) 的全体 $C^n[a, b]$, 对于函数的加法及数与函数的乘法, 构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 并有如下包含关系:

$$C[a, b] = C^0[a, b] \supsetneq C^1[a, b] \supsetneq C^2[a, b] \supsetneq \cdots \supsetneq C^n[a, b] \supsetneq \cdots \supsetneq C^\infty[a, b], \qquad (2)$$

其中 $C^\infty[a, b] := \bigcap_{n\geq 0} C^n[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上无穷阶可导函数的全体.

5. 复数的全体 $\mathbb{C}$ 上有自然定义的加法. 另外, 对于复数 $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$, 我们熟知 $\lambda z = \lambda a + \lambda b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}$. 不难看出, $\mathbb{C}$ 在这些运算下构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

# 不是线性空间的例子

1. $\mathbb{R}^+$ 对于通常实数的加法和乘法, 不构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 它对于数乘不封闭: 可以考虑乘以 $-1$.
2. 设 $V$ 是 $F^n$ 中的与某个非零向量不平行的所有向量的全体, 在向量的通常加法和数乘下, 不构成 $F$ 上的线性空间. 例如选取 $F=\mathbb{R}$, $V$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中不与向量 $(1,0)$ 平行的所有向量的全体. 则 $(1,1)$ 与 $(0,-1)$ 都是 $V$ 中的向量, 可是它们的向量和为 $(1,0)$, 不在 $V$ 中.

# 不是线性空间的例子

3. 次数恰好等于 $n$ 的全体实系数多项式，在多项式的加法与数乘多项式的运算下一般不是线性空间．它对于加法不封闭，例如 $n \geq 2$ 时，$f(x) = x^n + x$, $g(x) = 1 - x^n$, 则 $f(x) + g(x) = x + 1$ 的次数不再恰好是 $n$ 了．
4. 数域 $F$ 上的全体二阶可逆矩阵的集合，对于矩阵的加法和数乘矩阵运算不构成线性空间．它对于数乘不封闭，任何矩阵乘以 0 后得到零矩阵，而零矩阵不是可逆矩阵．另外，它对矩阵的加法也不是封闭的，例如可以考虑矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的矩阵加法．

**请翻开教材**

自学教材 P144 的定义 5.6.2.

**例 14**

1. 在等式 (1) 中, 对于每个严格包含关系, 前者都是后者的线性子空间.
2. 在等式 (2) 中, 对于每个严格包含关系, 后者都是前者的线性子空间.

## 例 15

$n$ 阶对称方阵 (*symmetric matrix*) 的全体

$$\mathrm{SM}_n(F) := \{\boldsymbol{A} \in F^{n\times n} \mid \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{A}\}$$

和 $n$ 阶反对称方阵 (*anti-symmetric matrix*) 的全体

$$\mathrm{AM}_n(F) := \{\boldsymbol{A} \in F^{n\times n} \mid \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{A}\}$$

都是 $F^{n\times n}$ 的子空间.

**例 16**

设 $V$ 是 $F$ 上的线性空间, $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m \in V$, 而 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$, 则 $\sum_{i=1}^n \lambda_i \boldsymbol{a}_i \in V$ 称为 $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ 的一个线性组合或线性表示. $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$ 生成的子空间

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m \rangle := \{\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \dots + \lambda_m \boldsymbol{a}_m \mid \lambda_i \in F\}$$

是 $V$ 的子空间, 它是由 $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合的全体所构成的.

# 一般线性空间的理论

## 定义

设 $V$ 是数域 $F$ 上的线性空间.

a. 给定 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in V$, 若存在不全为零的系数 $\lambda_i \in F$, 使得线性组合 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{x}_i = \mathbf{0} \in V$, 则称向量组 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ 线性相关; 否则, 则称该向量组线性无关.

b. 设 $S \subseteq V$ 为一组非空向量集合, 其中 $S$ 的元素个数可以为无穷多个.
   i. 对于给定的向量 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 若存在有限多个向量 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in S$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以由 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ 线性表示, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以由 $S$ 线性表示.
   ii. 若 $S$ 的任意非空有限子集都是线性无关的, 则称 $S$ 是线性无关的.

当 $S$ 是一个有限集合时, 上面的定义与前面的有限向量组时的定义一致.

## 请翻开教材

自学教材 P144 的定义 5.6.3, 需要注意集合 $S$ 可以为无穷集合.