线性代数 (B1) 第九次作业

请于 2023 年 5 月 16 日周二上课前在教室里交.

补充习题可视作思考题, 学有余力的同学强烈建议认真完成.

2023 年 5 月 9 日布置的作业

教材习题. P191: #12, #13, #14, #15, #17.

补充习题 1. (1) 设 $\boldsymbol{u}=(3,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{v}=(1,2)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的向量, 并设 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是一个 2 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 分别相应于特征值 2 和 3 的特征向量. 设 $\mathscr{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是线性变换, 由 $\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 给出. 记 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$. 画出 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\mathscr{A}(\boldsymbol{u})$, $\mathscr{A}(\boldsymbol{v})$ 和 $\mathscr{A}(\boldsymbol{w})$.

(2) 设 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 分别对应于特征值 -1 和 3 的特征向量, 重新做上面的小题.

2023 年 5 月 11 日布置的作业

教材习题. P191-192: #16, #18, #19, #20.

补充习题 2. 证明: 若 $\boldsymbol{A}^{2023}=\boldsymbol{O}$, 则 $\det(\boldsymbol{I}-1958\boldsymbol{A})=1$.

补充习题 3. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A}|=\lambda^3+\sigma_1\lambda^2+\sigma_2\lambda+\sigma_3$, 验证 σ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有 2 阶主子式的和.

补充习题 4. 考虑 $\mathbb{C}$ 上的**循环矩阵** $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

(1) 将 $\boldsymbol{A}$ 表示成 $\boldsymbol{C}$ 的矩阵多项式.

(2) 证明 $\boldsymbol{C}$ 有 n 个不同的特征值, 从而可以相似对角化.

(3) 证明 $\boldsymbol{A}$ 也可以相似对角化.

补充习题 5. 求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & h & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 中的 h, 使得 $\lambda = 4$ 的特征子空间的维数为 2.

补充习题 6. 在以下题目中, 设 $\boldsymbol{A}$ 是线性变换 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵. 不写出 $\boldsymbol{A}$, 直接描述 (求出) $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征子空间.

(1) $\mathscr{A}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的相对于某条过原点的直线的反射变换 (镜像映射).

(2) $\mathscr{A}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的相对于某条过原点的直线的旋转变换.