第3讲：正项级数的审敛法及其应用 (2023.5.19)

(一) 无穷级数的基本概念 (级数: series)

称：$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为无穷级数，称前 n 项和 $a_1+a_2+\cdots+a_n \triangleq S_n$ 为此级数的部分和. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = A$ (常数)，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛于 A；若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 (divergence). 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛于常数 A 时，记作：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$.

此时必有 $a_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow A-A=0 \ (n\to\infty)$，即通项 $a_n \longrightarrow 0$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件。

(二) 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的基本性质：

(1). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow \{S_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow \{S_n\}$ 为 Cauchy 列 $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$，当 $m>n>N$ 时，$|S_m-S_n|<\varepsilon$，即 $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$，$\forall p\in\mathbb{N}^*$；

(2) 添加或去掉有限项，不影响 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性；

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$（常数），则对 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项任意加括号后得到的新级数仍收敛，且收敛于 A。

证(3)：设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 加括号后为：$a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+(a_6+a_7+a_8)+(a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12})+\cdots$ 设 $b_1=a_1$，$b_2=a_2+a_3$，$b_3=a_4+a_5$，$b_4=a_6+a_7+a_8$，$b_5=a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$，… 加括号后的新级数记为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，部分和为 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$，则 $T_1=b_1=a_1=S_1$，$T_2=b_1+b_2=a_1+(a_2+a_3)=S_3$，$T_3=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)=S_5$，$T_4=b_1+b_2+b_3+b_4=S_8$，$T_5=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=S_{12}$，即 $\{T_n\}$ 是 $\{S_n\}$ 的一个子列，且 $\lim_{n\to\infty} S_n = A = \lim_{n\to\infty} T_n$（子列性质）

即 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = A$，即加括号后的新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 仍收敛于 A。

(三) 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ 的审敛法：

Th1：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界；

Th2：两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的比较审敛法：

设 $0\le a_n\le b_n,\ \forall n\ge n_0\in N^*$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛。

换言之，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 必发散；

Th3：正项级数比较审敛法的极限形式：设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都为正项级数且 $b_n>0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$。

(1) 当 $0<A<+\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 同敛散，特别是 $A=1$ 时，有 $a_n\sim b_n\ (n\to\infty)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 同敛散。

(2) 当 $A=0$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛；

(3) 当 $A=+\infty$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 必收敛。

Th4：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ (a_n>0)$ 的比值审敛法：若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛，$\rho>1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 必发散；$\rho=1$ 时不能确定 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性，如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛。

（此两者的 ρ 都等于1。

Th5：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的根值审敛法：若 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho<1$

则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，若$\rho>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散，若$\rho=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散性不确定，如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$都有$\rho=1$，但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛。

Th6：正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的积分判别法(Cauchy)

若$f(x)\in[1,+\infty)$上C，单减，非负，则$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$与$\int_1^{+\infty}f(x)dx$同敛散。

证Th1：$\because\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛$\Longleftrightarrow\{S_n\}$收敛，而$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$单增，故只要$\{S_n\}$有上界，则$\lim_{n\to\infty}S_n$存在收敛$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

证Th2：令$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，且$0\le a_n\le b_n,n\geq1$。则$S_n\le T_n$，若$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛时，$\{T_n\}$有上界$\Rightarrow\{S_n\}$有上界。$\Rightarrow\{S_n\}$收敛，$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。

(10)

证Th3：由$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$知，若$0<A<+\infty$时，对$\varepsilon=\frac{A}{2}>0$，$\exists$ $n_0\in N^*$，当$n>n_0$时，$A-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<A+\varepsilon$ 即 $\frac{A}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3}{2}A\Rightarrow$

$\frac{A}{2}b_n < a_n < \frac{3}{2}Ab_n$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛(convergence)，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}Ab_n$ con，So比较法，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con；若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散(divergence)，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{2}b_n$ div，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div；

(2°) 当 $A=0$ 时，$\exists n_0 \in N^*$，当 $n \geq n_0$ 时，$\frac{a_n}{b_n} < 1 \Rightarrow 0 \leq a_n < b_n$.

当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ con 时，必有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con；

(3°) 当 $A=+\infty$ 时，$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$，从(2°)知，当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con 时，必有 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ con。

证Th4：(1°) 当 $0 \leq \rho < 1$ 时 取 $\varepsilon > 0$，使 $\rho+\varepsilon=\rho_0<1$，对此 $\varepsilon>0$，$\exists n_0 \in N^*$，当 $n \geq n_0$ 时，$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho+\varepsilon = \rho_0 \Rightarrow a_{n+1} < \rho_0 a_n$，

即 $a_{n_0+1} < \rho_0 a_{n_0}$，$a_{n_0+2} < \rho_0 a_{n_0+1} < \rho_0^2 a_{n_0}$，$a_{n_0+3} < \rho_0 a_{n_0+2} < \rho_0^3 a_{n_0}$，

$\cdots a_{n_0+m} < \rho_0^m a_{n_0}$ 且从 $0<\rho_0<1$ 知，等比级数 $\sum_{m=1}^{\infty}\rho_0^m a_{n_0}$ 收敛，So比较法，$\sum_{m=1}^{\infty} a_{n_0+m}$ con $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con.

(2°) 当 $\rho > 1$ 时，取 $\varepsilon > 0$，使 $\rho-\varepsilon=\rho_0>1$ 对此 $\varepsilon>0$，$\exists n_0 \in N^*$

当$n\geq n_0$时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}>\rho-\varepsilon=\rho_0>1\Rightarrow a_{n_0+m}>\rho_0^m a_{n_0}$, $m=1,2,3,\cdots$

且从$\rho_0>1$知，等比级数$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\rho_0^m a_{n_0}$ div $\Rightarrow\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{n_0+m}$ div

$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ div.

证Th5：(1°) 当$\rho<1$时，取$\varepsilon>0$，使$\rho+\varepsilon=\rho_0<1$ 对此$\varepsilon>0$，$\exists n_0\in N^*$

当$n\geq n_0$时，从$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho\Rightarrow 0<\sqrt[n]{a_n}<\rho+\varepsilon=\rho_0<1\Rightarrow a_n<\rho_0^n$

且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\rho_0^n$ con. $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ con;

(2°) 当$\rho>1$时，取$\varepsilon>0$，使$\rho-\varepsilon=\rho_0>1$，对此$\varepsilon>0$，$\exists n_0\in N^*$，当

$n\geq n_0$时，从$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho\Rightarrow\sqrt[n]{a_n}>\rho-\varepsilon=\rho_0>1\Rightarrow a_n>\rho_0^n$

且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\rho_0^n$ div. $\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ div。

证Th6：对$\forall n\in N^*$，当$n<x\leq n+1$时，有$f(n)\geq f(x)\geq f(n+1)$

从而 $f(n)=\int_n^{n+1}f(n)dx\geq\int_n^{n+1}f(x)dx\geq\int_n^{n+1}f(n+1)dx=f(n+1)$, $n=1,2,3,\cdots$

$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{m}f(n)\geq\int_1^{m+1}f(x)dx\geq\sum\limits_{n=1}^{m}f(n+1)$

(1°) 当正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ con时，$\sum\limits_{n=1}^{m}f(n)$有上界，$\Rightarrow\int_1^{m+1}f(x)dx$

单调有上界，从而$\int_1^{+\infty}f(x)dx$ con;

(20) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ div 时，$\sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)$ 也 div，从而 $\sum_{n=1}^{m} f(n+1)$ 无上界，$\Rightarrow \int_1^{m+1} f(x)dx$ 无上界 $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ 不收敛。

(四) 例题：

(1) 证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ con，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必收敛，称这时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为绝对收敛。若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con 而 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ div，称这时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为条件收敛；如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛于 $\ln 2$，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ div。

(2) 证明：p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p\le 1$ 时 div；当 $p>1$ 时 con，如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$；$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$，(见 ch12 证明)

(3)、若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=A$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=B$，A，B 为常数，则对 $\forall c_1,c_2\in R$ 有 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_1a_n+c_2b_n)=c_1\sum_{n=1}^{\infty}a_n+c_2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=c_1A+c_2B$.

证(1)：令 $\begin{cases} b_n=\frac{|a_n|+a_n}{2} \\ c_n=\frac{|a_n|-a_n}{2} \end{cases}$，则 $\begin{cases} 0\le b_n\le |a_n| \\ 0\le c_n\le |a_n| \end{cases}$

从 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ con 知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 均 con，而 $a_n=2b_n-|a_n|$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 均 con，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con.

证(2)/(i)，当 $p=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^1}$ 的部分和 $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\sim\ln n$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\ln n = +\infty$. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ div 到 $+\infty$.

(2°) 当 $0<p<1$ 时. $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^p}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ div.

∴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $0<p<1$ 时 div, 当 $p\leq 0$ 时, ∵ $a_n=\frac{1}{n^p}=n^{-p}$ $\not\to 0$ $(n\to\infty)$, 收敛的必要条件不满足, ∴ $p\leq 0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ div.

(3°) 当 $p>1$ 时, 取 $f(x)=\frac{1}{x^p}$, $x\in[1,+\infty)$, 则 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上 C, 单减, 非负, 且 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 收敛于 $\frac{1}{p-1}$, 依积分判别法, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 也收敛。

证(3): 设 $\sum\limits_{m=1}^{n} a_m=S_n$, $\sum\limits_{m=1}^{n} b_m=T_n$, 则 $\sum\limits_{m=1}^{n}(c_1a_m+c_2b_m)=$ $c_1S_n+c_2T_n \xrightarrow{n\to\infty} c_1A+c_2B \Rightarrow \sum\limits_{m=1}^{\infty}(c_1a_m+c_2b_m)=c_1A+c_2B$,

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_1a_n+c_2b_n)=c_1A+c_2B=c_1\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+c_2\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

(五)作业: ex7.1: 1/(1); 2/(4),(5),(6),(9),(11); 5; 7.