第十四次作业参考

贺维易

2023 年 7 月 2 日

目录

一点说明

(i) 作业讲义部分题过程可能有省略。如对作业仍有疑问可以在群里或答疑课上讨论。

(ii) **作业讲义会随时间更新。**

(iii) 请及时核对自己在 BB 系统里的分数，如有问题请向对应的助教反馈。

(iv) 附录里的内容仅供有兴趣的同学参考，有可能涉及之后才会学习或课外的知识，不要求在现阶段掌握。

(v) 讲义最好用电脑打开，文档内置了链接功能，复习或查看指定的作业很方便。

成绩说明：成绩公式为

$$\text{score} = \begin{cases} 10 - k \cdot \max\{n - n_0, 0\} & \text{未迟交} \\ 5 & \text{迟交} \end{cases}$$

其中 n 为错题数，n_0 为容忍度；k 为系数，取决于当周作业的题量。第 14 次作业不考虑补充题共 12 题，$n = 12$，考虑到一些同学出现了计算失误、笔误、抄错题目等等

情况，$n_0 = 1$；$k = 0.5$。对于一些不严格的证明，助教也会酌情给分。也意味着作业得到满分不代表作业没有问题，请认真查看自己的作业。

上述评分标准对每个助教都成立。

1 6 月 13 日布置的作业

1.1 教材习题 P246:12,13,15,18(2),19(2),21

习题 1 (教材习题 12). 问参数 t 满足什么条件时，下列二次型正定？
(1)$Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_1x_3$;
(2)$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+tx_1x_2+tx_1x_3+x_2x_3$.

解. 只需写出二次型的矩阵，然后使各顺序主子式大于 0.

(1) 二次型的矩阵为$\begin{pmatrix}2 & 1 & \frac{t}{2}\\ 1 & 1 & 0\\ \frac{t}{2} & 0 & 1\end{pmatrix}$

而顺序主子式满足

$$2>0,\quad \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1>0,\quad \begin{vmatrix}2 & 1 & \frac{t}{2}\\ 1 & 1 & 0\\ \frac{t}{2} & 0 & 1\end{vmatrix}=1-\frac{t^2}{4}>0$$

得到 $-2<t<2$.

(2) 二次型的矩阵为$\begin{pmatrix}1 & \frac{t}{2} & \frac{t}{2}\\ \frac{t}{2} & 2 & \frac{1}{2}\\ \frac{t}{2} & \frac{1}{2} & 3\end{pmatrix}$

而顺序主子式满足

$$1>0,\quad \begin{vmatrix}1 & \frac{t}{2}\\ \frac{t}{2} & 2\end{vmatrix}=2-\frac{t^2}{4}>0,\quad \begin{vmatrix}1 & \frac{t}{2} & \frac{t}{2}\\ \frac{t}{2} & 2 & \frac{1}{2}\\ \frac{t}{2} & \frac{1}{2} & 3\end{vmatrix}=\frac{23}{4}-t^2>0$$

得到 $-\frac{\sqrt{23}}{2}<t<\frac{\sqrt{23}}{2}$. □

习题 2 (教材习题 13). 设 $Q=ax_1^2+bx_2^2+ax_3^2+2cx_1x_3$，问 a,b,c 满足什么条件时，Q 为正定二次型？

解. 二次型的矩阵为$\begin{pmatrix}a & 0 & c\\ 0 & b & 0\\ c & 0 & a\end{pmatrix}$

而顺序主子式满足

$$a>0,\quad \begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{vmatrix}=ab>0,\quad \begin{vmatrix}a & 0 & c\\ 0 & b & 0\\ c & 0 & a\end{vmatrix}=a^2b-c^2b=b(a^2-c^2)>0$$

得到 $a>0,b>0,a>|c|$.

□

习题 3 (教材习题 15). 设有 n 元实二次型

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2,$$

其中 $a_i(i=1,\cdots,n)$ 为实数，试问：当 $a_1,\cdots,a_n$ 满足何种条件时，$Q(x_1,\cdots,x_n)$ 为正定二次型？

解. 显然 $Q\geq 0$，只需分析 $Q=0$ 的情况，正定时需要关于 $x_1,...,x_n$ 的系数行列式非零，即

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n}a_i\neq 0$$

是 Q 为正定二次型的条件. □

习题 4 (教材习题 18(2)). 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，证明：
(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 正定，则对任意正整数 k，$\boldsymbol{A}^k$ 亦正定.

证明. (2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 实对称正定，则 $\boldsymbol{A}$ 一定可以正交相似到对角阵. 设存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)(\lambda_i>0,i=1,\cdots,n)$，所以 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^k\boldsymbol{P}^{-1}$，即 $\boldsymbol{A}^k$ 正交相似到 $\boldsymbol{D}^k=\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\cdots,\lambda_n^k)$ 正定，则 $\boldsymbol{A}^k$ 正定. □

习题 5 (教材习题 19(2)). 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆实对称矩阵，证明：
(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 正定，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵.

证明. $\boldsymbol{A}$ 正定，$\det(\boldsymbol{A})>0$，且 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值大于 0，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的所有特征值大于 0，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定，又由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$ 可知伴随矩阵也正定. □

习题 6 (教材习题 21). 设实向量 $\boldsymbol{\alpha_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_m}$ 为 n 维列向量，定义 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j$，证明矩阵

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_m) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m) \end{pmatrix}$$

为正定矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

证明. 充分性: 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则它们可作为有限维空间的一组基，由定义，上述矩阵是如题定义的内积 (易验证这是一种内积) 在这组基下的度量矩阵，且由内积的性质可知它为正定矩阵 (参考教材 P199).
必要性：设题中矩阵为 $\boldsymbol{B}$ 正定，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n})$. 对任意非零向量 $\boldsymbol{x}$ 有 $\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}>0$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，故 $\boldsymbol{A}$ 列满秩，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关. □

1.2 补充习题 1

习题 7 (补充习题 1)**.** 已知 2021 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 = 2021\boldsymbol{A}$. 证明**:** $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{2021}$ 必然是正定的.

证明. 由 $\boldsymbol{A}^2 = 2021\boldsymbol{A}$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值是 $0, 2021$，设存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{A}$ 正交相似到对角阵，即有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\boldsymbol{P}^{-1}$，显然也有 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k)\boldsymbol{P}^{-1}$ 对任意 $k \geq 1$.

因此 $\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{2021}) = \det[\boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}+\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)+\cdots+\mathrm{diag}(\lambda_1^{2021}, \cdots, \lambda_n^{2021}))\boldsymbol{P}^{-1}] = \prod_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{2021}(1+\lambda_i^k) > 0$. 所以 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^{2021}$ 必然是正定的. □

1.3 补充习题 2

习题 8 (补充习题 2)**.** 设 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n \times m$ 实矩阵. 证明**:** $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{B})$

证明. $\boldsymbol{A}$ 正定，则存在 n 维矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶实可逆方阵. 记 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}$，因为初等变换不改变矩阵的秩且对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$，因此 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$. □

1.4 补充习题 3

习题 9 (补充习题 3)**.** 若 n 阶正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也是正交矩阵，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$.

证明. $\boldsymbol{A} > 0$，所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}$ 的所有特征值是 ± 1，而又因为其正定性，所以 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值为 1. 又 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，易见 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶单位阵. □

2　6 月 15 日布置的作业

2.1　教材习题 P246:14,16,20,23,24(1),28

习题 10 (教材习题 14). 试证：二次型 $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ 负定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的奇数阶顺序主子式全小于零，偶数阶顺序主子式全大于零.

证明. $\boldsymbol{A}$ 负定时 $-\boldsymbol{A}$ 正定，即 $-\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全大于零，所以 $\boldsymbol{A}$ 的奇数阶顺序主子式全小于零，偶数阶顺序主子式全大于零. 反之同理，即有充要性. □

习题 11 (教材习题 16). 在 $Q = \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2xz - 2yz$ 中，问：
(1) 哪些 λ 的值使得 Q 为正定二次型？
(2) 哪些 λ 的值使得 Q 为负定二次型？
(3) 当 $\lambda = 2$ 和 $\lambda = -1$ 时，Q 分别为什么类型？

解. (1) 二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$
正定二次型的顺序主子式均大于 0

$$\lambda > 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 > 0$$

得到 $\lambda > 2$.
(2) 此时 $-Q$ 为正定二次型，对应的矩阵为 $\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$
正定二次型的顺序主子式均大于 0

$$-\lambda > 0, \quad \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda + 1)^2 > 0$$

得到 $\lambda < -1$.
(3)$\lambda = 2$ 为半正定二次型，$\lambda = -1$ 为半负定二次型. □

习题 12 (教材习题 20). 在二次型 $Q = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ 中，实对称矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n \times n}$，若

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1, \quad \det \boldsymbol{A} = 0$$

证明：Q 为半正定二次型.

证明. 将 $\boldsymbol{A}$ 分块如下

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \alpha^T\\ \alpha & a_{nn}\end{pmatrix}$$

其中左上角是由 $\boldsymbol{A}$ 的前 $n-1$ 行和前 $n-1$ 列交叉位置的元素组成. 以及知道 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 的所有顺序主子式都大于零，因此 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 正定，存在 $n-1$ 阶可逆方阵 $\boldsymbol{P}_1$ 将 A_{n-1} 相合到 $n-1$ 阶单位阵 $I_{(n-1)}$. 于是 $\boldsymbol{A}$ 被相合到

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1^T & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{\beta}^T\\ \boldsymbol{\beta} & a_{nn}\end{pmatrix}$$

再相合到对角阵

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{\beta} & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{\beta}^T\\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & d\end{pmatrix}$$

其中 $d=\det\boldsymbol{D}=\det\boldsymbol{B}=(\det\boldsymbol{A})(\det\boldsymbol{P}_1)^2=0$. 可见 $\boldsymbol{A}$ 相合于 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{I}_{n-1},0)$，这证明了 $\boldsymbol{A}$ 半正定，于是 Q 为半正定二次型. □

习题 13 (教材习题 23)**.** *设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$，证明:$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 为正定矩阵或半正定矩阵.*

证明. 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1 或 -1. 设存在可逆矩阵 P 使得 $\boldsymbol{A}$ 正交相似到对角阵，即 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，所以 $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})=\det[\boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{P}^{-1}+\boldsymbol{I}]=\det[\boldsymbol{P}\det(1+\lambda_1,\cdots,1+\lambda_n)\boldsymbol{P}^{-1}]=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)\geq 0$，即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 为正定矩阵或半正定矩阵. □

习题 14 (教材习题 24(1))**.** *设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶实对称正定矩阵，证明:*
(1)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 亦正定.

证明. 对任意非零向量 $\boldsymbol{x}$ 有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0,\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$，所以 $\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$，即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 正定. □

习题 15 (教材习题 28)**.** *设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称方阵，证明下列命题等价:*
(1)$\boldsymbol{A}$ 为半正定方阵;
(2)$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶实方阵;
(3)$\boldsymbol{A}$ 的各阶主子式皆非负.

证明. (2)⇒(3): 参考补充习题 4.
(3)⇒(2):
(1)⇒(2):
(2)⇒(1): □

2.2 补充习题 4

习题 16 (补充习题 4)**.** 对实二次型 $Q(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，证明以下几条等价.

(1)$\boldsymbol{A}\geq 0$.

(2)$\boldsymbol{A}$ 相合于它的相抵标准形 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(3)$\boldsymbol{A}$ 的特征值全为非负实数.

(4) 存在 $m\times n$ 维矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$.(可以由此推出，$m\leq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$)

(5) 存在 $m\times n$ 维矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$，其中 $m=rank(\boldsymbol{A})$.

(6) 存在 $n\times n$ 维矩阵 P 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$.

(7) 所有的主子式皆非负.

证明. 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & & \\ & -\boldsymbol{I}_s & \\ & & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的规范形.

(1)⇒(2): 设 $s\neq 0$，考虑坐标变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 并选取 $\boldsymbol{Y}_0$ 是第 $r+1$ 个元素为 1 其它为 0 的单位向量，则 $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}_0\neq 0$ 且

$$Q(\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{Y}_0^T\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & & \\ & -\boldsymbol{I}_s & \\ & & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Y}_0=-1<0$$

这与 $\boldsymbol{A}$ 是半正定矩阵矛盾，所以 $s=0$，即 $\boldsymbol{A}$ 相合于它的相抵标准形.

(2)⇒(1): 若 $s=0$，同样考虑上述坐标变换，

$$Q(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^T\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Y}\geq 0$$

所以 $\boldsymbol{A}\geq 0$.

(1)⇒(3): 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值，$\boldsymbol{A}$ 正交相似于对角阵 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，因为对称方阵的半正定性在正交相似下是不变的, 所以 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 是半正定的，只需取第 i 个位置为 1 其它为 0 的单位向量 $\boldsymbol{e}_i$ 则有 $\boldsymbol{e}_i^T\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{e}_i=\lambda_i\geq 0$，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为非负实数.

(6)⇒(7): 记取自 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行，第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 列交叉位置上的元素构成的 k 阶主子式为 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}$，则由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$ 得到，

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}=\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n}\boldsymbol{P}^T\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_k\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}$$

显然 $\boldsymbol{P}^T\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_k\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}=\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n}\left(\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_k\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}\right)^2\geq 0$ 即所有主子式非负.

(7)⇒(3): 见讲义.
(3)⇒(6): 由结论存在 n 阶正交方阵 $\boldsymbol{O}$ 使得 $\boldsymbol{O}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{O} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，此时取 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{O}^T \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{O}$ 即可.
(6)⇒(1): 对任意 $\boldsymbol{X}$ 有 $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{X})^T(\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}) \geq 0$ 所以 $\boldsymbol{A} \geq 0$.
至此证明了 (1)(2)(3)(6)(7) 的等价关系，对于 (4)(5) 可以考虑矩阵的奇异值分解. □

致谢

感谢各助教对本文档的校对工作和内容补充，感谢申伊塃老师以及同学对助教工作的支持。