

线性代数 (B1) 第十次作业

请于 2023 年 5 月 23 日周二上课前在教室里交.

补充习题可视作思考题, 学有余力的同学强烈建议认真完成.

2023 年 5 月 16 日布置的作业

教材习题. P191-192: #21, #22, #23, #24.

补充习题 1. 对于 $A \in F^{n \times n}$, 我们定义线性变换 $\mathcal{A} : F^{n \times n} \rightarrow F^{n \times n}$, $B \mapsto AB - BA$.

(1) 若 A 为对角阵, 验证 $F^{n \times n}$ 中的标准矩阵 E_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) 是 \mathcal{A} 的特征向量.

(2) 若 A 可以相似对角化, 证明 \mathcal{A} 也可以对角化.

2023 年 5 月 18 日布置的作业

教材习题. P220: #3.

补充习题 2. 证明 \mathbb{R}^n 中的向量 u 和 v 满足平行四边形法则:

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2.$$

补充习题 3. 设 4 维实的列向量 α 的长度为 5, 求 $|I_4 - \alpha\alpha^T|$ 的值.

补充习题 4. 我们考虑线性空间 $V = \mathbb{R}_4[x]$, 这是次数不超过 4 的实系数多项式构成的实线性空间. 设 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 依次为 $-2, -1, 0, 1, 2$. 对于 $f, g \in \mathbb{R}_4[x]$, 定义

$$(f, g) := \sum_{i=0}^4 f(a_i)g(a_i).$$

这给出了 V 的一个内积. 求它在自然基 $1, x, x^2, x^3, x^4$ 下的度量矩阵.

补充习题 5. 设 $\mathbb{R}_2[x]$ 中的某个内积在基 $a_1 = x - 1$, $a_2 = x + 1$, $a_3 = x^2$ 下的度量矩阵

为 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则该内积在基 $b_1 = 2x$, $b_2 = -x + 1$, $b_3 = x^2 + 2$ 下的度量矩阵是什么?