第39讲：Fourier级数及其应用 (2023.6.7)
(~~2022.5.13~~)

(一) 引进函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数的意义：

①. 将 $f(x)$ 展成 Taylor 级数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$，对 $f(x)$ 的要求太高，需要 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 中有任意阶的导数，且当且仅当余项 $R_n(x)\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$ 时，Taylor 级数才收敛于 $f(x)$；

②. Taylor 级数没有体现周期函数的特点，而周期性是许多应用问题中必须面对的实际问题。

(二) 三角函数系：$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots\cos nx,\sin nx,\cdots$ 在 $[-\pi,\pi]$ 中的正交性：

(1). 1 与 $\cos nx$ 的内积 $\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,\ \forall n\in N^*$

(2). $(1,\sin nx)\triangleq\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx=-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,\ \forall n\in N^*$

(3). $(\cos mx,\cos nx)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]dx$

$=\begin{cases}\pi & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$ 即 $\|\cos nx\|^2=(\cos nx,\cos nx)=\pi$，$n=1,2,3,\cdots$

(4) $(\sin mx, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)dx$

$= \begin{cases}\pi, & m=n \\ 0, & m\neq n\end{cases}$. 即 $\|\sin nx\|^2 = (\sin nx, \sin nx) = \pi$，$\forall n\in N^*$.

(5). $(\cos mx, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx \sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x)$

$dx \equiv 0$，$\forall m, n\in N^*$.

(6). $(1,1) = \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot 1\,dx = 2\pi$. 因此，经单位化后，

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots$ (※1)

成为 $[-\pi,\pi]$ 上的标准正交向量（函数）系。

思考题：(※1) 能否成为 $[-\pi,\pi]$ 上所有 2π 周期函数的标准正交基？

(三) $f(x)$ 的傅氏级数与傅氏系数：

(1). 设 $f(x)$ 以 $T=2\pi$ 为周期：$f(x+2\pi)\equiv f(x)$，$\forall x\in R$，且已知：

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$，$x\in R$，另外，假设右边的级数可逐项积分（例如，右边级数在 R 上一致收敛于 $f(x)$ 时，右边级数即可逐项积分） (2).

1° 利用 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}1\sin nx\,dx\right)$

$= a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot 0 + b_n\cdot 0) = a_0\pi \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$;

2° 当 $m\geq 1$ 时，$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx\right.$

$\left.+ b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx\right) = \frac{a_0}{2}\times 0 + a_m\|\cos mx\|^2 + b_m\times 0 = a_m\pi$,

$\Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx$, $m=1,2,3,\cdots$

3° 当 $m\geq 1$ 时，$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\sin mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx\right.$

$\left.+ b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx\right) = \frac{a_0}{2}\times 0 + a_m\times 0 + b_m\|\sin mx\|^2 = b_m\pi$,

$\Rightarrow b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\,dx$.

综合1°, 2°, 3° 可得：$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx, & n=0,1,2,\cdots \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx, & n=1,2,3,\cdots \end{cases}$

…… (式2)

将(式2)称 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 系数. 利用 $f(x)$, $\cos nx$, $\sin nx$ 皆为 2π 周期函数. 又可得：对于任意常数 a, 成立：

③ $\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi}f(x)\cos nx\,dx, & n=0,1,2,\cdots \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi}f(x)\sin nx\,dx, & n=1,2,3,\cdots \end{cases}$

对于已知的以2π为周期的函数$f(x)$，若$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积时，

由(式2)可求得$a_0, a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots, b_1, b_2, \cdots b_n, \cdots$

称由(式2)所确定系数的级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

为$f(x)$的Fourier级数，记作：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\ x\in R \qquad (式3)$$

(注：(式3)右边的级数未必收敛，即使收敛也未必收敛于$f(x)$)

(四) $f(x)$的傅氏级数的收敛定理(Dirichlet收敛Th)：

若(1) $f(x)$以2π为周期；(2) 在$\forall[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$中，$f(x)$分段光滑，即$f(x)$在$[a,b]$上由有限段光滑曲线连接而成且在连接点处，最多有第一类间断点，则必有：

(1°) $$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ \underset{}{\overset{\text{处处收敛}}{=\!=}}\begin{cases} f(x), & 若x是f的C点 \\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x是f间断点 \end{cases}$$

(2°) 此外，若$f(x)$在R上处处C，则必有：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ \overset{\text{处处、一致、绝对}}{=\!=\!=}\ f(x),\ \forall x\in R. \qquad (式4)$$

Dirichlet收敛Th的详细证明可见数分第三册§15.4。

(五) 例题与应用举例：

例1. 设2π周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 中有：$f(x)=|x|$.

(1) 将 $f(x)$ 展成Fourier级数，并指出收敛情况；

(2). 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和；

(3). 求一般的2π周期且奇、偶函数 $f(x)$ 的傅氏级数。

(4). 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$ 的和。

解(1)：$f(x)$ 满足Dirichlet收敛Th，并且在 R 上处处 C，因此，

$f(x)$ 的傅氏级数在 R 上处处、一致、绝对收敛于 $f(x)$ 本身。

(2)：另外，$f(x)$ 是个偶函数，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx=0$, $n=1,2,3\cdots$

而 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\pi$；当 $n\geq1$ 时.

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx=\frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi}x\,d\sin nx$

$=\frac{2}{n\pi}\left[x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin nxdx\right]=\frac{2}{n\pi}\left[0+\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right]=\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi}$.

$\therefore f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi}\cos nx$

$= \frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$

$= \frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \xlongequal[\text{绝对}]{\text{处处, 一致}} f(x),\ \forall x\in R.$

特别地：$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \xlongequal[\text{处处绝对}]{\text{一致}} x,\ x\in[0,\pi]$

取 $x=0$，即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$，利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的绝对收敛性. 设 $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，则 $A=(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots)+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots)$

$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots)=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}A \Rightarrow A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$；

由 $\begin{cases} 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8} \\ \frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots=\frac{1}{4}A=\frac{\pi^2}{24} \end{cases}$ 相减得：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$；

结论(3)：当 $f(x)$ 满足 Dirichlet 收敛定理 且是奇(偶)函数时.

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=0$，($b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=0$). 因此.

$f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx \xlongequal{\text{处处}} \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$，(当 $f(x)$ 是奇函数) (式5)

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx \xlongequal{\text{处处}} \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$，(当 $f(x)$ 为偶函数) (式6)

(式5)，(式6) 分别称为 $f(x)$ 的正弦级数，余弦级数.

例(4)：从 $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}=x$，$0\le x\le\pi$，两边

在 $[0,x]$ 上积分：$\frac{\pi}{2}x-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}=\frac{x^2}{2}$，$0\le x\le\pi$.

在 $[0,x]$ 上再积分：$\frac{\pi}{4}x^2+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x-1}{(2n-1)^4}=\frac{x^3}{6}$，$0\le x\le\pi$.

令 $x=\pi$，得 $\frac{\pi^3}{4}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^3}{6}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$；

令 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$，由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 绝对收敛知：$S=(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots)+$

$(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots)=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}S\Rightarrow S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$；

从 $\begin{cases}\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}\\ \frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots\ \frac{\pi^4}{90}\times\frac{1}{16}\end{cases}$ 相减得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}=\frac{7}{8}\times\frac{\pi^4}{90}$.

对 $\frac{\pi}{4}x^2+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x-1}{(2n-1)^4}=\frac{x^3}{6}$，$x\in[0,\pi]$ 不断地在 $[0,x]$ 上

积分，然后取 $x=\pi$，还可得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}$ $(m=3,4,5,\cdots)$

的一系列结果，若取 $x=\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}$，和 π 等，也可得到另一些有用

的结果。

作业：ex12.1 1(1),(2)；4；6；7；8.