第27讲：第二型曲面积分：$\iint_{\Sigma}\vec{A}(x,y,z)\cdot d\vec{S}$ (2023.5.10)

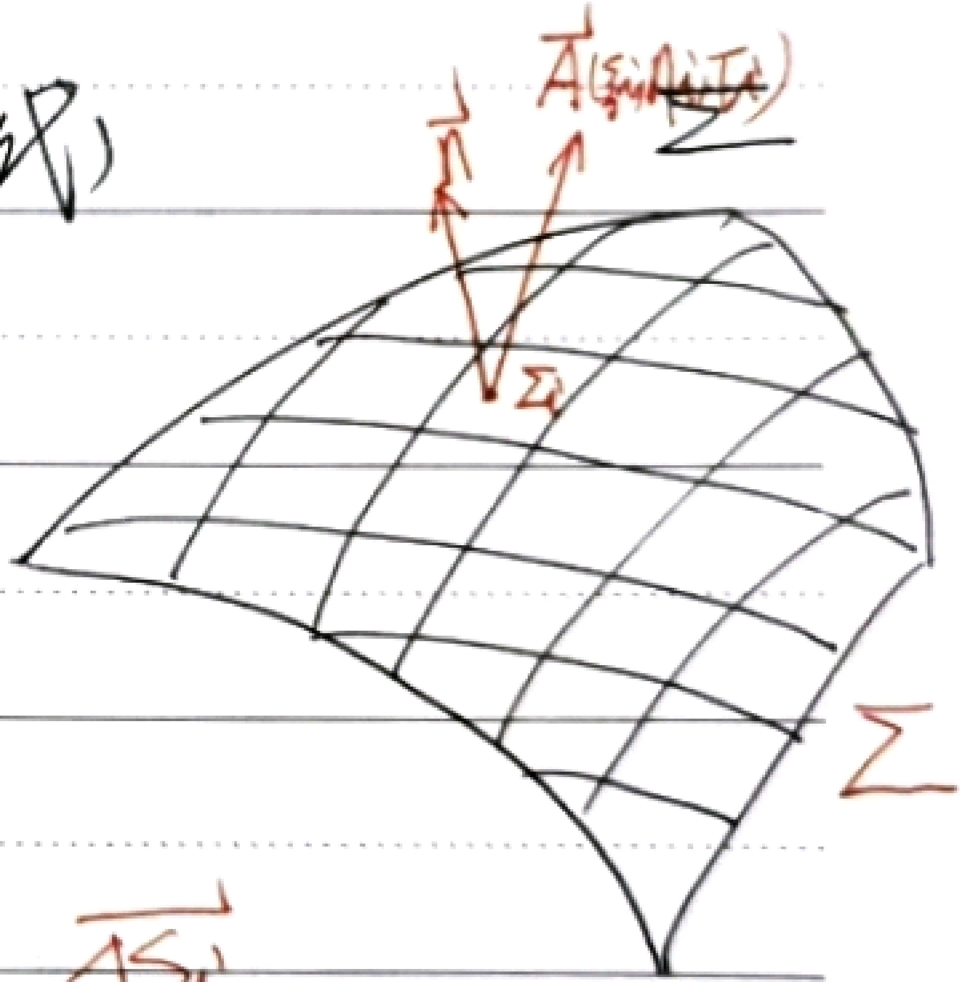
(一) 概念与主要性质：

例1、设流体的流速为 $\vec{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

$\in C(\Omega)$，Ω 为区域，而有向曲面 $\Sigma\subset\Omega$ 且 Σ 为光滑曲面

求单位时间内流体通(流)过 Σ 指定侧的通(流)量 Φ。

解题思路：同部双重近似 (与变力沿曲线做功一样，局部变力以常力替代，曲线用直线替代)



(I) 分割：$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\cdots+\Sigma_i+\cdots+\Sigma_n$

且 ΔS_i 为 Σ_i 的面积(对应切平面)，d_i 为 Σ_i 的直径，

$\lambda=\max\{d_1,d_2,\cdots d_n\}$，

(II) 近似：作乘积：$\vec{A}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{n}\Delta S_i$，$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 为 Σ_i 中任一点。

(III) 求和：$\sum_{i=1}^{n}\vec{A}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{n}\Delta S_i\approx\Phi$

(IV) 求极限：$\lim_{\lambda\to0^+}\sum_{i=1}^{n}\vec{A}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{n}\Delta S_i\xlongequal{\text{若极限唯一}}\Phi$

$\triangleq\iint_{\Sigma}\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma}\vec{A}(x,y,z)\cdot d\vec{S}$

其中 $\vec{dS}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)dS=(\cos\alpha dS,\cos\beta dS,\cos\gamma dS)=(dydz,dzdx,dxdy)$

称之为有向面积元。

公式 $\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{dS}=\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$ (公1)

当 $\vec{A}(x,y,z)\in C(\Omega)$ 时，上述乘积和式的极限必存在唯一。

若 $\vec{A}(x,y,z)$ 在 Ω 中有定义，有界且上述乘积和式的极限存在且

唯一时，称 $\vec{A}(x,y,z)$ 在 Σ 中是 Riemann 可积函数。记作 $\vec{A}\in R(\Sigma)$

主要性质：(设 $\vec{A_1}$，$\vec{A_2}\in R(\Sigma)$，C_1,C_2 为常数)

(1) 线性性质：$\iint\limits_{\Sigma}(C_1\vec{A_1}+C_2\vec{A_2})\cdot\vec{dS}=C_1\iint\limits_{\Sigma}\vec{A_1}\cdot\vec{dS}+C_2\iint\limits_{\Sigma}\vec{A_2}\cdot\vec{dS}$

特别地：$\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_{\Sigma}(P,Q,R)\cdot(dydz,dzdx,dxdy)$

$=\iint\limits_{\Sigma}((P,0,0)+(0,Q,0)+(0,0,R))\cdot(dydz,dzdx,dxdy)$

$=\iint\limits_{\Sigma}(P,0,0)\cdot(dydz,dzdx,dxdy)+\iint\limits_{\Sigma}(0,Q,0)\cdot(dydz,dzdx,dxdy)+\iint\limits_{\Sigma}(0,0,R)\cdot$

$(dydz,dzdx,dxdy)=\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+\iint\limits_{\Sigma}Qdzdx+\iint\limits_{\Sigma}Rdxdy$.

(2) $\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}\vec{A}\cdot\vec{dS}=\iint\limits_{\Sigma_1}\vec{A}\cdot\vec{dS}+\iint\limits_{\Sigma_2}\vec{A}\cdot\vec{dS}$

(3) $\iint_{\Sigma^+}\vec{A}\cdot\vec{ds}=-\iint_{\Sigma^-}\vec{A}\cdot\vec{ds}$

(4). 当Σ是位于xoy平面中区域D且$\vec{n}=k=(0,0,1)$时，有

$z=0$，$\Rightarrow dzdx=0, dydz=0$，$R(x,y,z)=R(x,y,0)\triangleq f(x,y)$.

$\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=+\iint_{D}R(x,y,0)dxdy=\iint_{D}f(x,y)dxdy$

即区域D上的二重积分$\iint_D f(x,y)dxdy$是第二型曲面积分的特例，就像定积分$\int_a^b f(x)dx$是第二型曲线积分的特例一样。

(三) $\iint_{\Sigma}\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{n}ds=\iint_{\Sigma}\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{ds}$ 的计算方法.

设Σ为光滑有向曲面：$r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\in C'(D_{uv})$

则 $\vec{n}=\pm\frac{r'_u\times r'_v}{|r'_u\times r'_v|}$，$ds=|r'_u\times r'_v|dudv=\sqrt{EG-F^2}\,dudv$

从而 $\vec{ds}=\vec{n}ds=\pm r'_u\times r'_v\,dudv$

$\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{ds}=\pm\vec{A}(x,y,z)\cdot r'_u\times r'_v\,dudv=\pm\begin{vmatrix}P & Q & R\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}dudv$

$I=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{ds}=\pm\iint_{D_{uv}}\begin{vmatrix}P & Q & R\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}dudv$ ~~(标)~~

且当Σ取上侧、前侧、右侧时，I取"+"号；Σ取下、后、左侧时，I取"−"号。(一代二换三定号) (3).

特别是当 Σ 为显式曲面 $z=z(x,y)\in C^1(D_{xy})$ 时，

$\Sigma: r(x,y)=(x,y,z(x,y)) \Rightarrow \begin{cases} r'_x=(1,0,z'_x) \\ r'_y=(0,1,z'_y) \end{cases}$

$$I=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}=\pm\iint_{D_{xy}}\begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix}dxdy$$

一代二投三定号！

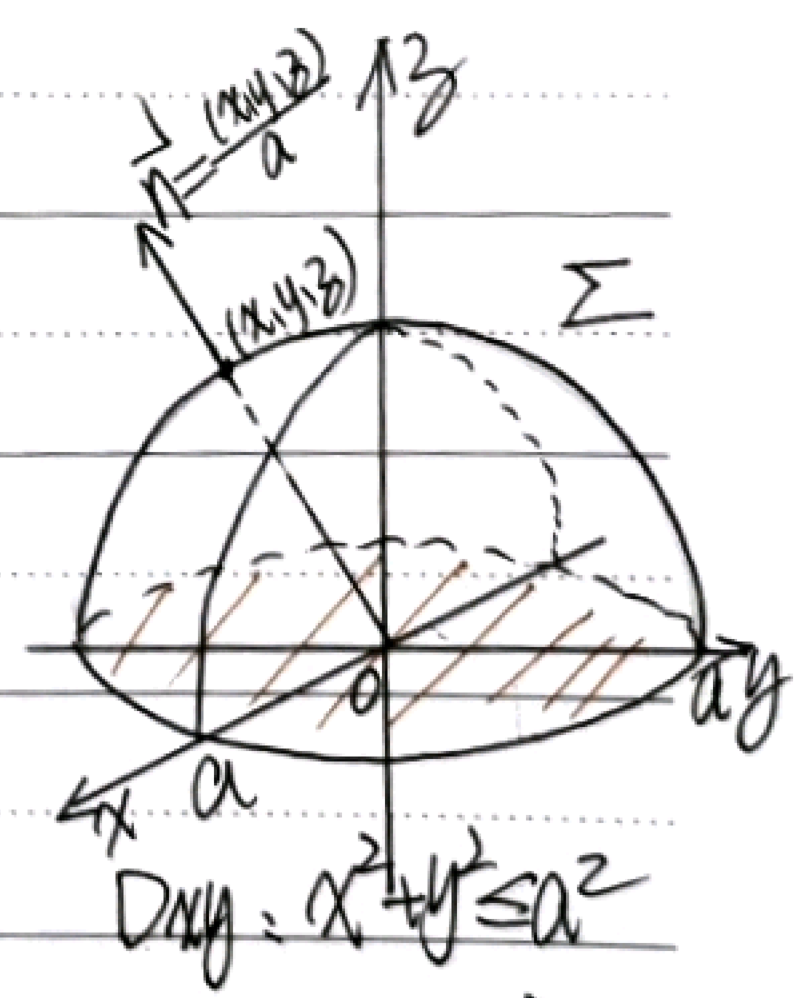
$$=\pm\iint_{D_{xy}}(R-z'_x\cdot P-z'_y Q)dxdy \quad (*3)$$

当 Σ 取上侧时，I 取 + 号，当 Σ 取下侧时，I 取 − 号。

例2，设 Σ 为上半球面：$x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ 的上侧，计算

$I=\iint_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，即求向量场 $\vec{A}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$

通过上半球面 Σ 上侧的通量 I。



解法(1)：Σ 的显式表示为：

$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2\le a^2$ 且

$z'_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，$z'_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2$

$$I=\pm\iint_{D_{xy}}(R-z'_xP-z'_yQ)dxdy=+\iint_{D_{xy}}\left[a^2-x^2-y^2+\frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+\frac{y^3}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right]dxdy \quad (4).$$

利用奇偶对称性，有：$\iint\limits_{D_{xy}} \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy = 0 = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{y^3}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$

$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} (a^2-x^2-y^2)dxdy \xlongequal[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta} \int_0^{2\pi}\int_0^a (a^2-r^2)r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}a^4$;

解法七：Σ的向量式为 $r(\theta,\varphi)=(a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta)$，$\begin{cases}\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ \varphi\in[0,2\pi]\end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} r'_\theta = (a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, -a\sin\theta) = (x'_\theta, y'_\theta, z'_\theta) \\ r'_\varphi = (-a\sin\theta\sin\varphi, a\sin\theta\cos\varphi, 0) = (x'_\varphi, y'_\varphi, z'_\varphi) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a\sin\theta\cos\varphi)^2 & (a\sin\theta\sin\varphi)^2 & (a\cos\theta)^2 \\ a\cos\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^4\cos^3\theta\sin\theta + a^4\sin^4\theta(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)$$

$$I = +\iint\limits_{D_{\theta\varphi}} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \end{vmatrix} d\theta d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\pi}(a^4\cos^3\theta\sin\theta + a^4\sin^4\theta(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi))d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^4\cos^3\theta\sin\theta)2\pi\,d\theta = -2\pi a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\cos\theta = \frac{\pi}{2}a^4;$$

（注：$\int_0^{2\pi}\sin^{2n+1}\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^{2n+1}\theta\,d\theta \equiv 0, \forall n\in N$）

解法八：$\because \vec{A}(x,y,z) = (x^2,y^2,z^2)$，$\vec{n} = \frac{(x,y,z)}{a}$

$\therefore I = \iint\limits_{\Sigma}\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{n}\,ds = \frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}(x^3+y^3+z^3)ds$

利用第一型曲面积分的奇偶对称性有：$\iint\limits_{\Sigma} x^3 dS = \iint\limits_{\Sigma} y^3 dS = 0$，

而 $\iint\limits_{\Sigma} z^3 dS \xlongequal[z=a\cos\theta]{\substack{x=a\sin\theta\cos\varphi \\ y=a\sin\theta\sin\varphi}} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos\theta)^3 a^2\sin\theta d\theta\right)d\varphi$

$= \frac{2\pi a^5}{-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\cos\theta = \frac{2\pi}{4}a^5$，$\therefore I = \frac{\pi}{2}a^4$；

解法(四)：$\because I = \iint\limits_{\Sigma} x^2 dydz + \iint\limits_{\Sigma} y^2 dzdx + \iint\limits_{\Sigma} z^2 dxdy$

而 $I_1 \triangleq \iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} x^2 dydz = \iint\limits_{\substack{\Sigma_1 \\ (x>0)}} x^2 dydz + \iint\limits_{\substack{\Sigma_2 \\ (x<0)}} x^2 dydz$

偶零奇倍

$= +\iint\limits_{y^2+z^2\le a^2,z\ge0}\left(\sqrt{a^2-y^2-z^2}\right)^2 dydz + (-1)\iint\limits_{y^2+z^2\le a^2,(z\ge0)}\left(-\sqrt{a^2-y^2-z^2}\right)^2 dydz = 0$

一代二投三定号

同理，$\iint\limits_{\Sigma} y^2 dzdx = 0$，而 $\iint\limits_{\Sigma} z^2 dxdy = +\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)^2 dxdy$

$\xlongequal[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a (a^2-r^2)rdr\right)d\theta = \frac{\pi}{2}a^4$.

解法(五)：补面 Σ_0：$z=0$，$x^2+y^2\le a^2$，$\vec{n}=-\vec{k}$，再用Gauss公式。

$I = \iint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}dS = \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}\vec{A}\cdot\vec{n}dS - \iint\limits_{\Sigma_0}\vec{A}\cdot\vec{n}dS = \iiint\limits_{\Omega}(\nabla\cdot\vec{A})dV - 0$

$= \iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+2z)dV = 0+0+2\iiint\limits_{\Omega} z dV = \frac{\pi}{2}a^4$.

(三) 作业：ex11.4 / 1(1),(2),(4),(5),(6),(7)；2.

第27讲（续）（附第二型曲面积分的定义与奇偶对称性）

(一) 有向曲面Σ的侧由Σ的单位法向量 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 来具体确定：若 $\cos\gamma\geq0\ (\leq0)$ 恒成立，则表示Σ取上侧（下侧）；

若 $\cos\beta\geq0\ (\leq0)$ 恒成立，则表示Σ取右侧（左侧）；

若 $\cos\alpha\geq0\ (\leq0)$ 恒成立，则表示Σ取前侧（后侧）。

再由 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\dfrac{\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'}{|\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'|}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix}\Big/|\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'|$

$=\left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}i+\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}j+\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}k\right)\Big/|\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'|$ 知，

$\cos\gamma\geq0\ (\leq0)$ 恒成立 $\Longleftrightarrow \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\geq0\ (\leq0)$ 在 D_{uv} 上恒成立。

因此，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\geq0\ (\leq0)$ 在 D_{uv} 上恒成立，表示Σ取上侧（下侧）

同理，$\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\geq0\ (\leq0)$ 在 D_{uv} 上恒成立表示Σ取前侧（后侧）。

(二) 第二型曲面积分：$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\,dydz+\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\,dzdx+\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\,dxdy$

具有特别的性质：偶零奇倍，即

(1) 若 $P(x,y,z)$ 关于 x 是偶函数且Σ关于坐标面 $x=0$ 对称时

必有 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=0$，当 $P(x,y,z)$ 是 x 的奇函数且 Σ 关于 $x=0$ 坐标面对称时，$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=2\iint\limits_{\Sigma_1} P(x,y,z)dydz$，

其中，Σ_1 是 $x\geq 0$ 部分的 Σ。

(2°) 当 $Q(x,y,z)$ 关于 y 是(偶)、(奇)函数且 Σ 关于 $y=0$ 坐标面对称时，$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx=0$，($2\iint\limits_{\Sigma_2} Q(x,y,z)dzdx$，$\Sigma_2$ 是 Σ 在 $y\geq 0$ 的部分)

(3°) 当 $R(x,y,z)$ 关于 z 是偶(奇)函数且 Σ 关于 $z=0$ 坐标面对称时，$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=0$，($2\iint\limits_{\Sigma_3} R(x,y,z)dxdy$，$\Sigma_3$ 是 Σ 在 $z\geq 0$ 的部分)

只证(1°)即可，因 Σ 关于 $x=0$ 的坐标面对称，Σ_1 为前侧，$\Sigma-\Sigma_1$ 为后侧，设 Σ_1 的参数表示为 $x=x(y,z)\in C(D_{yz})$

则在 $\Sigma-\Sigma_1$ 上，参数表示为 $x=-x(y,z)\in C(D_{yz})$，并且

$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=\iint\limits_{\Sigma_1} P(x,y,z)dydz+\iint\limits_{\Sigma-\Sigma_1} P(x,y,z)dydz=$

$$(+1)\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,dy\,dz+(-1)\iint_{D_{yz}} P(-x(y,z),y,z)\,dy\,dz$$

$$=\iint_{D_{yz}}[P(x(y,z),y,z)-P(x(y,z),y,z)]\,dy\,dz=\iint_{D_{yz}} 0\,dy\,dz=0.$$

(通常前侧取"+"，后侧取"-"；右侧取"+"，左侧取"-"；上侧取"+"，下侧取"-")

当 $P(x,y,z)$ 关于 x 是奇函数时，$P(-x(y,z),y,z)=-P(x(y,z),y,z)$

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,dy\,dz=+\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,dy\,dz+(-1)\iint_{D_{yz}}(-P(x(y,z),y,z))\,dy\,dz$$

$$=2\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,dy\,dz=2\iint_{\Sigma_1} P(x,y,z)\,dy\,dz。$$

但是，在重积分中(含定积分)及在第一型的曲面、曲线积分中，常会用到对称性来简化的"偶倍奇零"

利用奇偶对称性的"偶倍奇零"法及高斯(Gauss)公式法解课上的例3见第31讲讲稿的 P_6。

(3).