线性代数 (B1) 第四次作业

请于 2023 年 4 月 4 日周二上课前在教室里交.

补充习题可视作思考题, 正常情况下不作要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

2023 年 3 月 28 日布置的作业

教材习题. P114 #10, #23.

补充习题 1. 对于 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$, 我们可以定义函数 $\psi_{\boldsymbol{A}}:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$, $\boldsymbol{X}\mapsto \operatorname{tr}(\boldsymbol{AX})$. 若 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\psi_{\boldsymbol{A}}=\psi_{\boldsymbol{B}}$, 证明: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

补充习题 2. 对于分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1\ \ \boldsymbol{A}_2)\in F^{m\times(m+n)}$, 若方阵 $\boldsymbol{A}_1$ 可逆, 求出所有的 $\boldsymbol{B}\in F^{(m+n)\times m}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}_m$.

补充习题 3. 令 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}$, 其中为了讨论的方便, 可以假定 a,b,c 皆为正数. 利用初等的方法, 计算由 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{0}$ 为顶点构成的平行四边形的面积. 再利用定义分别计算 2 阶方阵 $(\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v})$ 和 $(\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{u})$ 的行列式. 解释一下你的 "发现".

补充习题 4. 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & a & & & \\ b & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a \\ & & & b & a+b \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

(提示: 可能需要就 a 与 b 是否相等来讨论.)

2023 年 3 月 30 日布置的作业

补充习题 5. 设 $p_i(x)$ 是关于变元 x 的 i 次多项式, 其 x^i 前的系数为 c_i. 证明:

$$\begin{vmatrix} p_0(x_1) & p_1(x_1) \cdots\cdots & p_{n-1}(x_1) \\ p_0(x_2) & p_1(x_2) \cdots\cdots & p_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_0(x_n) & p_1(x_n) \cdots\cdots & p_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = c_0 c_1 \cdots c_{n-1} \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

补充习题 6. 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda - a_1^2 & -a_1 a_2 \cdots\cdots & -a_1 a_n \\ -a_2 a_1 & \lambda - a_2^2 \cdots\cdots & -a_2 a_n \\ \vdots & \vdots \quad \ddots & \vdots \\ -a_n a_1 & -a_n a_2 \cdots\cdots & \lambda - a_n^2 \end{vmatrix}.$$

补充习题 7. (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶反对称的矩阵, 其中 n 为奇数. 证明: $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶反对称的矩阵, 其中 n 为偶数. 若给 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素都加上相同的一个数 λ, 从而得到新矩阵 $\boldsymbol{B}$. 证明: $\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{B})$. (提示: 若将 $\boldsymbol{B}$ 视作 $\boldsymbol{A}$ 的每个列向量都加上了一个新的列向量所得到的矩阵. 将其行列式按列全部拆开, 你会得到 2^n 个行列式. 接下来考虑 $n+1$ 阶反对称阵
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \cdots\cdots 1 \\ -1 & \\ \vdots & \boldsymbol{A} \\ -1 & \end{pmatrix}$, 将其行列式按第一行展开, 你又观察到什么?)

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶反对称的矩阵, 其中 n 为偶数, 并且 $\boldsymbol{A}$ 的对角线右上方的所有元素都是 1. 求 $\det(\boldsymbol{A})$.