第5讲：隐函数微分法

(2023.3.15)

(一) 隐函数存在定理及隐函数微分法：

例1. 方程：$x^2+y^2-a^2=0$ ($a>0$,常数)，在 $y>0$ 时隐含了函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ ($|x|\le a$)，在 $y<0$ 时，隐含了函数 $y=-\sqrt{a^2-x^2}$，$|x|\le a$.

这种由方程所确定的函数，称之为隐函数 (implicit function)。而将明显地用自变量的解析式来表示因变量的函数称为显函数，如，$y=\sin x$，$z=x^2y+e^{xy^3}$ 都是显函数。

当方程所确定的隐函数，不能表示为显函数时，怎样求导或偏导数呢？下面的 Th1，Th2 回答了这个问题：

Th1：设 $F(x,y)\in C^1(D)$，D是区域，且 $F(x_0,y_0)=F(M_0)=0$，而 $F_y'(M_0)\neq 0$ 或 $F_x'(M_0)\neq 0$，则 $\exists\delta>0$,使 方程 $F(x,y)=0$ 在 $U(M_0,\delta)$ 中确定了唯一的一个隐函数 $y=f(x)$，且 $f(x_0)=y_0$ 及

$g'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$，$\forall(x,y)\in \mathring{U}(M_0,\delta)$.

即隐函数 $y=g(x)$ 在 x_0 的附近有连续的导数。

Th2：若 $\begin{cases} ① F(x,y,z)\in C^1(D)，D是R^3中的区域; \\ ② F(x_0,y_0,z_0)=F(M_0)=0，M_0\in D. \\ ③ F'_z(M_0)\neq 0，或 F'_y(M_0)\neq 0 或 F'_x(M_0)\neq 0. \end{cases}$

则必有 $\delta>0$，使 $\begin{cases} ① 方程 F(x,y,z)=0 在 \mathring{U}(M_0,\delta)中唯一确定隐函数 \\ \quad z=f(x,y) 或 y=y(x,z) 或 x=x(y,z). \\ ② f(x_0,y_0)=z_0, \\ ③ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}；\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. (x,y,z)\in \mathring{U}(M_0,\delta) \end{cases}$

即隐函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的附近有连续的偏导数。公式必定是可微的。

证 Th1：不妨设 $F'_y(x_0,y_0)>0$，则 $F(x_0,y)$ 在 y_0 附近严增，即在 $M_0(x_0,y_0)$ 的邻附近形成了一条唯一的严格单增的平面曲线 L，设 L 的解析表达式为 $y=g(x)$，$(x,y)\in \mathring{U}(M_0,\delta)$，

则 $y=g(x)$ 即为所求的隐函数，此时，有

$F(x,g(x))\equiv 0$，两边对 x 求导可知：

$F'_x(x,y)\cdot 1+F'_y(x,y)\cdot g'(x)=(0)'_x=0 \Rightarrow g'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$，

$\forall (x,y)\in U(M_0,\delta)$，

Th2 可类似地证明。设 $z=f(x,y)$ 是方程 $F(x,y,z)=0$

$\in U(M_0,\delta)$ 中所确定的隐函数，则 $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$，

两边关于 x 求偏导：$F'_x(x,y,z)\cdot 1+F'_y(x,y,z)\cdot 0+F'_z(x,y,z)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}=0$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$，$\forall (x,y,z)\in U(M_0,\delta)$。

而 $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$ 两边对 y 求偏导得：

$F'_x(x,y,z)\cdot 0+F'_y(x,y,z)\cdot 1+F'_z(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial y}=0\Rightarrow$

$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$，$\forall (x,y,z)\in U(M_0,\delta)$。

例1. 设方程 $F(x,y,z)=0$ 在 $U(M_0,\delta)$ 中可确定3个隐函数：

$z=z(x,y)$，$y=y(x,z)$，$x=x(y,z)$，则必有：

$\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}\equiv -1$，即偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 是一个整体符号，

不能看作是 ∂z 比上 ∂y 即 ∂z 与 ∂y 的比值。

但是,在 $\frac{dy}{dx}$ 中,$\frac{dy}{dx}$ 表示函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 之比值。这是导数符号 $\frac{dy}{dx}$ 与偏导数符号 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 的本质区别。

证明:$\because \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$; $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_y(x,y,z)}$;

$\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{F'_z(x,y,z)}{F'_x(x,y,z)}$,

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}=\left(-\frac{F'_y}{F'_z}\right)\left(-\frac{F'_x}{F'_y}\right)\left(-\frac{F'_z}{F'_x}\right)=(-1)^3=-1.$$

例如,方程 $x^2+y^2+z^2-a^2=0$ 在第一卦限中的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的邻域 $U(M_0,\delta)$ 中,(其中 $x_0^2+y_0^2+z_0^2-a^2=0$) 可同时确定 3 个隐函数:$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$; $y=\sqrt{a^2-x^2-z^2}$; $x=\sqrt{a^2-y^2-z^2}$.

此时 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$; $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}$; $\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{z}{\sqrt{a^2-y^2-z^2}}$ $\Longrightarrow$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}=\left(-\frac{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)\left(-\frac{\sqrt{a^2-y^2-z^2}}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}\right)\left(-\frac{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{\sqrt{a^2-y^2-z^2}}\right)=(-1)^3=-1.$$

例2、设 $F(x,y)\in C^2(D)$，D是区域，且函数 $y=\varphi(x)$

由方程 $F(x,y)=0$ 所确定，试证明：

$$\varphi''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}$$

证：(1°) $\varphi'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\triangleq y'_x$

(2°) $\varphi''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=-\left(\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\right)'_x=-\frac{(F'_x(x,y))'_xF'_y(x,y)-(F'_y(x,y))'_xF'_x(x,y)}{(F'_y(x,y))^2}$

$$=\frac{(F''_{xx}(x,y)\cdot1+F''_{xy}(x,y)\cdot y'_x)F'_y(x,y)-(F''_{yx}(x,y)\cdot1+F''_{yy}(x,y)\cdot y'_x)F'_x(x,y)}{(F'_y(x,y))^2}(-1)$$

$$=\frac{(F''_{xx}+F''_{xy}(-\frac{F'_x}{F'_y}))F'_y-(F''_{yx}+F''_{yy}(-\frac{F'_x}{F'_y}))F'_x}{(F'_y)^2}(-1)$$

$$=\frac{F''_{xx}(F'_y)^2-F''_{xy}F'_xF'_y-F''_{yx}F'_yF'_x+F''_{yy}(F'_x)^2}{(F'_y)^3}(-1)\quad \underline{F''_{yx}=F''_{xy}}$$

$$=-\frac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}$$

设 $F(x,y,z)\in C^2(D)$，D是区域，且 $z=f(x,y)$ 由 $F(x,y,z)=0$

不自觉,则可同样计算$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.(思考题)

(三)全微分的一阶微分形式不变性:

(1). 设$u=f(x,y,z)$在区域D上可微,则有:

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$, x,y,z是自变量. (※1)

(2). 设$u=f(x,y,z)$及$x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$, $z=z(s,t)$

皆可微且$u=f(x(s,t),y(s,t),z(s,t))$有意义,则

$du=\frac{\partial u}{\partial s}ds+\frac{\partial u}{\partial t}dt$

$=(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s})ds+(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t})dt$

$=\frac{\partial u}{\partial x}(\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt)+\frac{\partial u}{\partial y}(\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt)+\frac{\partial u}{\partial z}(\frac{\partial z}{\partial s}ds+\frac{\partial z}{\partial t}dt)$

而$dx=\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt$, $dy=\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt$, $dz=\frac{\partial z}{\partial s}ds+\frac{\partial z}{\partial t}dt$

故仍有:$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$, x,y,z是中间变量. (※2)

即对多元可微函数$u=f(x,y,z)$而言,无论x,y,z是

自变量,还是中间变量,在计算一阶全微分du或$df(x,y,z)$

时，结论的形式是完全相同的。数学上把这个性质称作"一阶(全)微分形式不变性"。

依一阶微分形式不变性，可推出全微分的四则运算法则：(设 u, v 都是可微函数)。

(1). $d(u\pm v)=du\pm dv$；(2) $d(uv)=vdu+udv$

(3) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$ $(v\neq 0)$.

证(1)：设 $f(u,v)=u+v$，u, v 是自变量，则

$df(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv=1du+1dv$，即

$d(u+v)=df(u,v)=du+dv$；同理 $d(u-v)=du-dv$.

证(3)：设 $f(u,v)=\frac{u}{v}$，$v\neq 0$，u, v 是自变量，则

$d\left(\frac{u}{v}\right)=df(u,v)=f_u'\cdot du+f_v' dv=\frac{1}{v}du+\left(-\frac{u}{v^2}\right)dv=\frac{vdu-udv}{v^2}$

设 $z=f(x,y)\in C^1(D)$，D 是区域，则

$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=f_x'\cdot dx+f_y'\cdot dy$.

$$d(dz) \triangleq d^2 z = (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy$$

求偏导时 视dx, dy为常量

$$= (f''_{xx} dx + f''_{yx} dy) dx + (f''_{xy} dx + f''_{yy} dy) dy$$

$$= f''_{xx} dx^2 + f''_{yx} dy dx + f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2$$

$d(d^2 z) \triangleq d^3 z, \cdots d(d^{n-1} z) = d^n z,$

当$n \geq 2$时，称$d^n z$为高阶微分。高阶微分一般不再有形式不变性。

(三). 第6讲：多元函数微分法习题课(II)

(四). 第5讲作业：

ex9.2: 20(2),(3),(4); 25; 28; 32;

ex9.3: 1(1); 2(2),(4); 4(1).