第36讲：$2l$周期函数的Fourier级数展开 (2023.6.9)

(一) 设$2l$周期函数$f(x)$满足Dirichlet收敛条件，

则从$f(x+2l)\equiv f(x)$，$\forall x\in R$，若令$x=\frac{l}{\pi}u$，则

$f(x)=f(\frac{l}{\pi}u)\triangleq g(u)$，$u\in R$，且$g(u+2\pi)=f(\frac{l}{\pi}(u+2\pi))$

$=f(2l+\frac{l}{\pi}u)=f(\frac{l}{\pi}u)=g(u)$，$\forall u\in R$．即$g(u)$是$R$上的$2\pi$周期函数，且从$g'(u)=f'(\frac{l}{\pi}u)\frac{l}{\pi}$知．$g(u)$也满足Dirichlet收敛条件．设$g(u)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nu+b_n\sin nu)$，则

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(u)\cos nu\,du\xlongequal{\text{令 }\frac{l}{\pi}u=x}\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\left(\frac{\pi}{l}\right)dx$$

$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\quad(n\geq 0)$；同理，$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$，

$(n\geq 1)$．于是

$$f(x)=g(u)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\xlongequal{\text{处处}}\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.\quad(式1)$$

$$其中\begin{cases}a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x, & (n\geq 0)\\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x, & (n\geq 1)\end{cases}\quad(式2)$$

特别地，当$f(x)$是奇函数或偶函数时，$a_n=0$或$b_n=0$，

这时，$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x \xlongequal{处处} \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$，$\forall x\in R$，或者（式3）

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x \xlongequal{处处} \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},\ \forall x\in R.\quad(式4)$$

在（式3）中，$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$，$(n\geq1)$；

在（式4）中，$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$，$(n\geq0)$.

（式3），（式4）分别称为$f(x)$的正弦级数与余弦级数。

（三）例题：

例1. 求$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2h}, & |x|<h\\ 0 & h\leq|x|\leq l\end{cases}$的Fourier级数，指出收敛情况，并求数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi h}{l}$之和。

例2. 分别将$f(x)=\begin{cases}x & 0\leq x<\frac{l}{2}\\ l-x & \frac{l}{2}\leq x\leq l\end{cases}$ (1) 展成正弦级数，(2) 展成余弦级数。

例3. 将$f(x)=\cos ax$在$[-\pi,\pi]$上展成Fourier级数，$a\in(0,1)$，a是常数。

解例1. 先将 $f(x)$ 以 $T=2l$ 为周期开拓到 R 上，记以 $2l$ 周期函数为 $F(x)$，则 $F(x)$ 满足 Dirichlet 收敛条件，且 $F(x)|_{[-l,l]}=f(x)$.

(2°). 由 $f(x)$ 是偶函数知 $F(x)$ 为偶函数，故 $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$

$\equiv 0\ (n\geq 1)$； $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{l}\int_{-h}^{h}\frac{1}{2h}dx=\frac{1}{l}$；

当 $n\geq 1$ 时，$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$

$=\frac{1}{l}\int_{-h}^{h}\frac{1}{2h}\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{1}{lh}\int_{0}^{h}\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{1}{n\pi h}\sin\frac{n\pi h}{l}$.

(3°) $\because f(x)=F(x)|_{[-l,l]}\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x=\frac{1}{2l}+\frac{1}{\pi h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi h}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x$

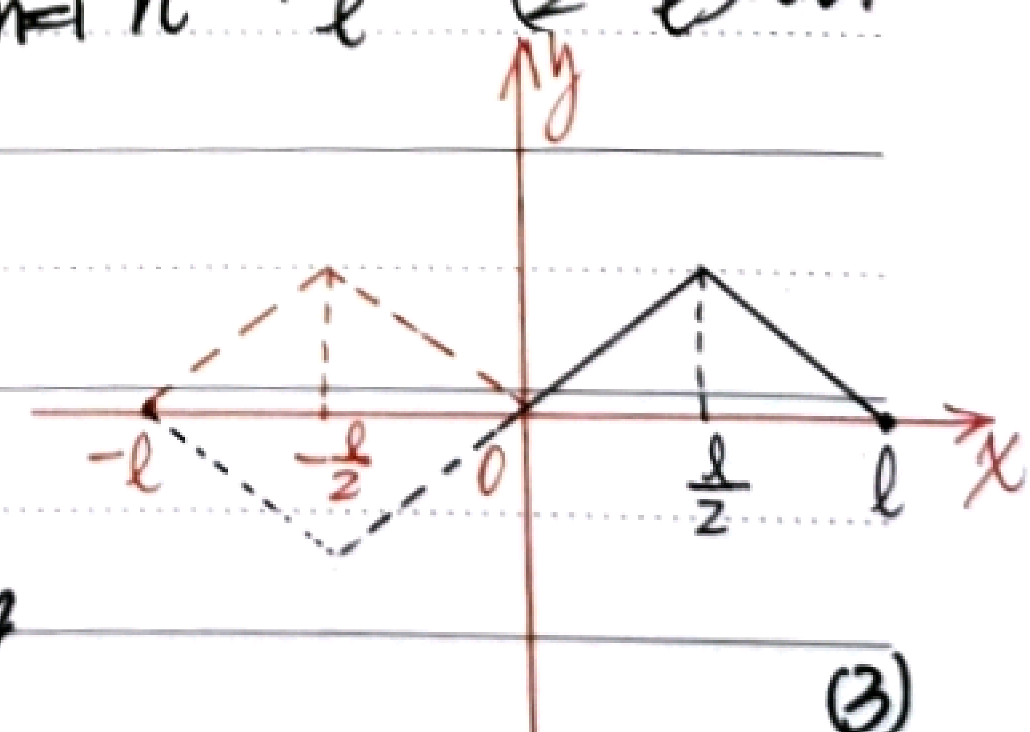
$$=\begin{cases} f(x), & |x|<l,\ |x|\neq h, \\ \frac{\frac{h}{2}+0}{2}=\frac{h}{4}, & |x|=h, \\ \frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}=0, & x=\pm l. \end{cases}$$

(4°). 特别地，取 $x=h$ 时，有

$\frac{1}{2l}+\frac{1}{\pi h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi h}{l}\cos\frac{n\pi h}{l}=\frac{h}{4}$，即

$\frac{1}{2l}+\frac{1}{\pi h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\times 2}\sin\frac{2n\pi h}{l}=\frac{h}{4}\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi h}{l}=(\frac{h}{2}-\frac{1}{l})\pi h$.

解例2 (1) 先将 $f(x)$ 奇开拓到 $[-l,l]$ 上，再作 $T=2l$ 的周期开拓



(3).

到R上，记这2l周期函数为F(x)，则F(x)满足Dirichlet

收敛条件且在R上处处连续。

因F(x)是奇函数，故 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\equiv0,\ (n\geq0)$，而

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}F(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\right]$$

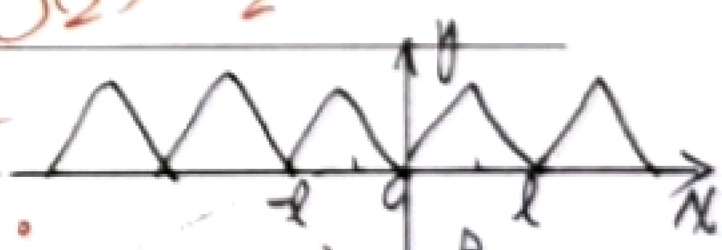
$$=\begin{cases}0 & n=2m\\ \frac{(-1)^{m-1}4l}{(2m-1)^2\pi^2}, & n=2m-1,\end{cases}$$

故 $f(x)=F(x)\big|_{[0,l]}\sim\frac{4l}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2}\sin\frac{(2m-1)\pi}{l}x$

$\underline{\text{处处，一致，绝对}}$ $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leq x\leq\frac{l}{2}\\ l-x, & \frac{l}{2}\leq x\leq l\end{cases}$

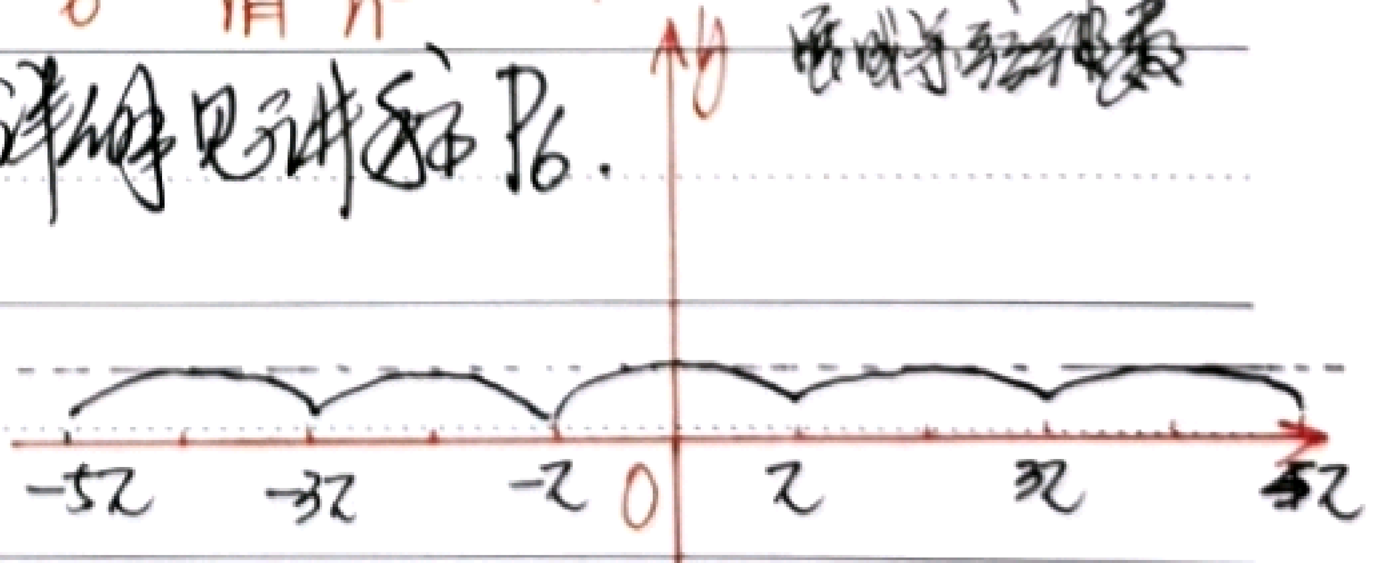
特别地，取 $x=\frac{l}{2}$，则 $\frac{4l}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2}\sin\frac{(2m-1)}{2}\pi=f(\frac{l}{2})=\frac{l}{2}\Rightarrow$

$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.



注：例12(2)的详细解见元件资料P6.

续例13：



(1) 先将f(x)作 $T=2\pi$ 的周

期开拓到R上，记这周期函数为F(x)，因 $f(-\pi)=\cos a\pi=f(\pi)$.

所以，$F(x)$ 在 R 上处处连续，满足Dirichlet收敛条件，且为偶函数.

(2). $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,dx=0,\ (n\geq 1)$. $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ax\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{a}d\sin ax=\frac{2\sin a\pi}{a\pi}$，$n\geq 1$时，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(a+n)x+\cos(a-n)x]dx$

$$=\frac{(-1)^n 2a\sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)}$$

(3) $f(x)=F(x)\big|_{[-\pi,\pi]}\sim\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\frac{\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2a}{a^2-n^2}\cos nx\xlongequal[\text{绝对}]{\text{处处，一致}}\cos ax$

特别地，取 $x=0$ 得：$\frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2a}{a^2-n^2}\right)=1$ 即

$$\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2a}{a^2-n^2}=\frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (※)$$

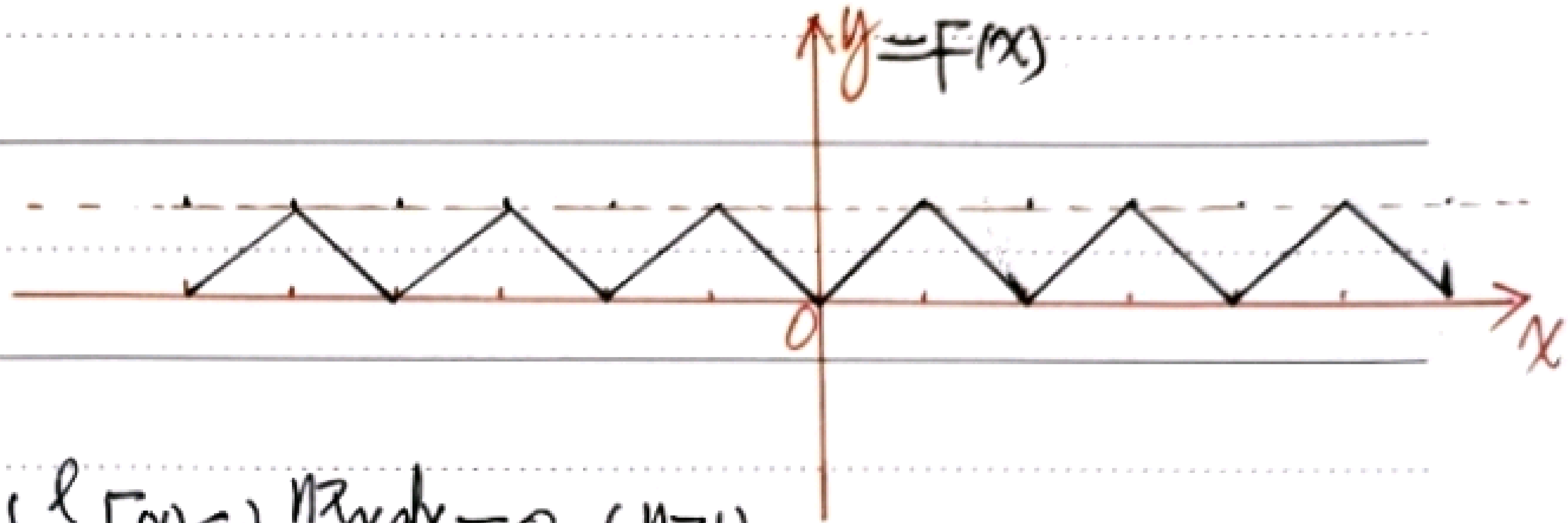
在ch13中，将利用(※)证明Gamma函数$\Gamma(x)$的余元公式：

$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$，~~$\forall a\in(0,1)$~~，$\forall x\in(0,1)$

(三) 作业：ex12.1

2(3),(4); 3(2); 9; 10.

如例2(2)：先将$f(x)$偶延拓到$[-l,l]$上，再作$T=2l$的周期延拓，延拓到R上的周期的、连续的、偶的函数记作$F(x)$.



此时，$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=0,\ (n\geq 1)$.

$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{0\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{l}\left(\int_0^{\frac{l}{2}}x\,dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\,dx\right)=\frac{2}{l}\times\frac{l^2}{4}=\frac{l}{2}$,

$n\geq 1$时 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{l}\left(\int_0^{\frac{l}{2}}x\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\right)$

$$=\begin{cases}\frac{-2l}{(2m+1)^2\pi^2}, & n=4m+2,\ m=0,1,2,\cdots\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$\therefore f(x)=F(x)\big|_{[0,l)}\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$

$$=\frac{l}{4}-\frac{2l}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos\frac{(4m+2)}{l}\pi x$$

<u>处处，一致，绝对</u> $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leq x<\frac{l}{2}\\ l-x, & \frac{l}{2}\leq x\leq l.\end{cases}$

特别地，取$x=0$，则$f(0)=0\Rightarrow$

$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$