下面的例子展示了微扰法的技巧; 其本质是 n 阶可逆方阵的全体在 $F^{n\times n}$ 中稠密.

例 4.4.11. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 为 4 个 n 阶复方阵, 满足 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$. 证明:

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=\left|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}\right|.$$

证明. (1) 先考虑矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的情形. 此时

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{\text{用第一行的 } \boldsymbol{A}\\ \text{消去第二行的 } \boldsymbol{C}}]{-(\boldsymbol{CA}^{-1})r_1\to r_2}\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}-(\boldsymbol{CA}^{-1})\boldsymbol{A} & \boldsymbol{D}-(\boldsymbol{CA}^{-1})\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\end{vmatrix}$$
$$=\left|\boldsymbol{A}\right|\left|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\right|=\left|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{ACA}^{-1}\boldsymbol{B}\right|.$$

由于 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$, 可以推出 $\boldsymbol{ACA}^{-1}=\boldsymbol{C}$. 从而上式为 $|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|$.

(2) 假设 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 即 $|\boldsymbol{A}|=0$. 考虑辅助矩阵 $\boldsymbol{A}_t:=\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}$, 其中 $t\in\mathbb{C}$. 从而 $\boldsymbol{A}_0=\boldsymbol{A}$. 一个事实是:

$$|\boldsymbol{A}_t|=|\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}|=t^n+\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})t^{n-1}+\cdots+|\boldsymbol{A}|,$$

是一个关于 t 的首项系数为 1 的 n 次复系数多项式, 其系数由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 决定, 中间的其它系数比较复杂. 这个多项式最多有 n 个不同的复根, 将其全体记作 $T=\{\,t_1,\dots,t_m\,\}$, 其中 $m\le n$. 故对任意的 $t\in\mathbb{C}\setminus T$, 有 $|\boldsymbol{A}_t|\ne 0$, 从而 $\boldsymbol{A}_t$ 可逆. 注意到 $\boldsymbol{A}_t\boldsymbol{C}=\boldsymbol{CA}_t$, 由上面的讨论, 知道

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_t & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=\left|\boldsymbol{A}_t\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CB}\right|.$$

利用行列式的全展开可知, 上面等式两边都是关于 t 的次数不超过 n 的多项式, 是连续函数. 对它们同时取极限 $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\notin T}}$, 左式收敛于 $\left|\begin{smallmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{smallmatrix}\right|$, 而右式收敛于 $|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|$, 故仍有等式

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=\left|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}\right|.$$ □

习题 4.4.12. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in F^{n\times n}$. 若 $n=2$ 或 3, 分别计算 $\det(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{I}_n)$, 并将结果表示成关于 λ 的多项式.

例 4.4.13. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $2n$ 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{JA}=\boldsymbol{J}$, 其中 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n\\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. 这样的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 被称为**辛矩阵**. 我们这儿希望证明 $\det(\boldsymbol{A})=1$.

上课不讲

不妨设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{W}$ 皆为 n 阶方阵. 则方程 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}$ 等价于说 $\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{Y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{W}$ 都是对称矩阵, 且 $\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{W}-\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{I}$. 由推论 *4.4.2* 可知, 通过初等变换, 我们有 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 都是可逆矩阵, 而 $\boldsymbol{D}$ 是一个对角矩阵. 注意到 $\operatorname{diag}(\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}},\boldsymbol{P}^{-1})$, $\operatorname{diag}(\boldsymbol{Q}^{-1},\boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}})$, 以及

$$\boldsymbol{B}\coloneqq\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}} & \\ & \boldsymbol{P}^{-1}\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1} & \\ & \boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}* & *\\ \boldsymbol{D} & *\end{pmatrix}$$

都是辛矩阵, 并且 $|\boldsymbol{A}|=1$ 的充要条件是 $|\boldsymbol{B}|=1$. 因此, 我们不妨假设 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{D}$ 就是对角阵.

如前所述, 存在有限集合 T 使得当 $t\notin T$ 时 $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}$ 是可逆矩阵. 此时, 我们有

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}+t\boldsymbol{I} & \boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W}\end{pmatrix}&=\det(\boldsymbol{X}+t\boldsymbol{I})\det(\boldsymbol{W}-\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{X}+t\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{Y})\quad(\textit{Schur}\text{ 行列式公式})\\
&=\det(\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}+t\boldsymbol{I})\det(\boldsymbol{W}-\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{X}+t\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{Y})\\
&=\det((\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}+t\boldsymbol{I})\boldsymbol{W}-(\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}+t\boldsymbol{I})\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{X}+t\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{Y})\\
&=\det(\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{W}+t\boldsymbol{W}-(\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Z}+t\boldsymbol{Z})(\boldsymbol{X}+t\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{Y})\\
&=\det(\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{W}+t\boldsymbol{W}-(\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Z}+t\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}})(\boldsymbol{X}+t\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{Y})\quad\text{因为 }\boldsymbol{Z}\text{ 是对称阵}\\
&=\det(\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{W}+t\boldsymbol{W}-(\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{X}+t\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}})(\boldsymbol{X}+t\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{Y})\quad\text{因为 }\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Z}\text{ 是对称阵}\\
&=\det(\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{W}+t\boldsymbol{W}-\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{X}+t\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}+t\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{Y})\\
&=\det(\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{W}+t\boldsymbol{W}-\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Y})\\
&=\det(\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{W}),\quad\text{因为}\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{W}-\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{I}.\end{aligned}$$

对于 $t\notin T$, 令 $t\to 0$, 我们得到 $\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{I})=1$.

习题 4.4.14. 设 $\boldsymbol{M}$ 是一个 2 阶矩阵, 证明: $\boldsymbol{M}^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ 当且仅当 $|\boldsymbol{M}|=1$.

习题 4.4.15. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶复方阵, 证明以下关于伴随矩阵的等式:

(1) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$;

(2) $(\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{-1})^*=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}^{-1}$, 其中 $\boldsymbol{X}$ 为可逆的 n 阶方阵;

(3) 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*$.

(提示: 先在 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 皆可逆的条件下证明这些结果. 若它们不同时可逆, 将其分别用 $\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}_n$ 和 $\boldsymbol{B}+t\boldsymbol{I}_n$ 代替, 再取极限.)

习题 4.4.16. 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 为 n 维列向量, 证明以下关于伴随矩阵的等式:

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}})^*=\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}+(1-\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}.$$

(提示: 先在 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}$ 可逆的条件下证明该公式)

习题 4.4.17. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, $\boldsymbol{v}$ 为 n 维列向量, $\boldsymbol{u}$ 为 n 维行向量, a 是一个数. 证明:

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{u} & a\end{vmatrix}=a|\boldsymbol{A}|-\boldsymbol{u}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{v}.$$

(提示: 先在 $\boldsymbol{A}$ 可逆的条件下证明该公式)

习题 4.4.18. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 为 n 维行向量. 证明:

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{u}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{A}|+\boldsymbol{v}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{u}^{\mathsf{T}}.$$

4.5 秩与相抵

在本节中, 对于矩阵 $\boldsymbol{A}$, 我们仍然用 $\boldsymbol{A}\left(\begin{smallmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r\end{smallmatrix}\right)$ 来表示由 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1<i_2<\cdots<i_r$ 行、第 $j_1<j_2<\cdots<j_r$ 列元素构成的 r **阶子阵**, 其行列式称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 r **阶子式**.

定义 4.5.1. $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数称为 $\boldsymbol{A}$ 的**秩** (*rank*)*, 记作 $r(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$. 约定: 零矩阵的秩为 0.

例 4.5.2. 对于矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

而言, 它有 $C_4^3C_3^3=4$ 个不同的 3 阶子阵, $C_4^2C_3^2=18$ 个不同的 2 阶子阵. 由于 $\boldsymbol{A}$ 的所有 3 阶子式都为 0, 而其第 $1,2$ 行和 $2,3$ 列的元素所组成的 $\boldsymbol{A}$ 的 2 阶子式

$$|\boldsymbol{A}\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{smallmatrix}\right)|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 5\end{vmatrix}=10\neq 0.$$

故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=2$.

*其实很多人都认为, 用矩阵的行向量张成的线性空间的维数 (即下一章引入的矩阵的**行秩**这一概念) 来定义矩阵的秩, 是更佳的方式.

注 4.5.3. (1) 若 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$, 则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \le \min(m,n)$.

(2) 由行列式的递归定义可知, 若 $\boldsymbol{A}$ 的所有 k 阶子式为 0, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的所有高于 k 阶的子式 (若存在) 也必然为 0. 故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 r 阶非零子式, 且所有 $r+1$ 阶子式为 0 (若 $r = \min(m,n)$, 最后一条视为自动成立).

(3) 由于转置不改变行列式, 而 $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$ 的每个子式都是由 $\boldsymbol{A}$ 的某个子阵转置后的行列式, 故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^\mathsf{T}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.

(4) 类似地, 对于 $\lambda \neq 0$, 有 $\operatorname{rank}(\lambda\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.

(5) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$. 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的各个行向量互成比例, 其各个列向量也互成比例.

例 4.5.4 (阶梯形矩阵的秩是它的非零行数)**.** 设有阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix}
0\cdots\cdots 0 \quad a_{1j_1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\
0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \quad a_{2j_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_{2n} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \quad a_{rj_r}\cdots\cdots a_{rn} \\
0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0
\end{pmatrix},$$

其中 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$, 并且对于 $i = 1,2,\ldots,r$ 有 $a_{ij_i} \neq 0$. 很明显, $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式全为 0, 并且 $\boldsymbol{A}$ 有 r 阶子式

$$\det\left(\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_r \end{pmatrix}\right) = a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{rj_r} \neq 0,$$

这说明 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r$. 特别地, $\left(\begin{smallmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{smallmatrix}\right)$ 的秩为 r.

如同研究方阵的行列式一样, 接下来, 我们需要看一下矩阵的初等变换对矩阵的秩的影响.

定理 4.5.5. 初等变换不改变矩阵的秩.

证明. 由对称性, 仅考虑初等行变换, 即证明初等行变换不改变矩阵的秩. 为此, 我们断言: 对于任意的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和初等矩阵 $\boldsymbol{E}$, 我们都有

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}) \le \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}). \tag{4.9}$$

若该断言总是成立, 那么由于反过来 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}^{-1}(\boldsymbol{EA})$, 而 $\boldsymbol{E}^{-1}$ 也是初等矩阵, 故对称地, 我们也会有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \le \operatorname{rank}(\boldsymbol{EA})$. 从而得到 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{EA})$. 由于初等行变换与左乘初等矩阵是等同的, 这说明了初等行变换不改变矩阵的秩.

下面来证明断言中的不等式 (4.9). 设 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r$. 此时只需证明 $\boldsymbol{EA}$ 的所有 $r+1$ 阶子式为 0. 由于 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式为 0, 而 $\boldsymbol{EA}$ 的 $r+1$ 阶子式是这些子式的线性组合 (由 Binet–Cauchy 公式可直接看出这一点, 当然, 由于这儿的 $\boldsymbol{E}$ 非常简单, 也可以分情况直接计算验证, 参见教材的引理 4.5.1), 故该断言成立. $\square$

推论 4.5.6. *设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为 m 阶可逆矩阵, $\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶可逆矩阵, 则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{PAQ}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.*

证明. 仅需注意以下事实: (1) 可逆矩阵是初等矩阵的乘积; (2) 初等行变换等同于左乘初等矩阵; (3) 初等列变换等同于右乘初等矩阵. $\square$

求矩阵的秩的常用方法 对于矩阵 $\boldsymbol{A}$, 在 $\boldsymbol{A}$ 的维数比较大时, 若用定义来求解 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 则计算量非常大, 从而并不实用. 由于我们已有定理 4.5.5 和例 4.5.4, 一般地, 我们会通过初等行变换, 将 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的非零行的行数 r 就是 $\boldsymbol{A}$ 的秩. 很显然, 用该方法求秩的时候, 没有必要计算原始矩阵的约化标准形, 其阶梯标准形就够用了.

例 4.5.7. *设有 4×5 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 通过一系列初等行变换后得到:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-r_1 \to r_3 \\ -2r_1 \to r_4}]{-2r_1 \to r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{B}.$$

故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = 2$.

矩阵的相抵等价

定义 4.5.8. *若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 同为 $m \times n$ 矩阵, 且存在可逆的 m 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和可逆的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PAQ}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$* **相抵** *(也称为***等价***, equivalent). 不难验证, 相抵关系是一个***等价关系***, 即满足:*

(**反身性**) *$\boldsymbol{A}$ 与自身相抵;*

(**对称性**) *若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵, 则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 也相抵;*

(**传递性**) *$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵, 且 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相抵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 也相抵.*

所有的 $m \times n$ 矩阵依照相抵关系分为不同的**相抵等价类** (同一相抵等价类的矩阵互相相抵, 两个不同相抵等价类的矩阵互不相抵).

下面的定理表明, 同型的矩阵是否相抵是由其秩唯一决定的.

定理 4.5.9. 同型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相抵的充要条件是 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$. 教材定理 4.5.2

证明. 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相抵, 推论 4.5.6 说明 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.

反之, 设 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$. 推论 4.4.2 说明, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必与某个 $\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r, \boldsymbol{O})$ 相抵, 其中的 r 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 唯一决定: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r, \boldsymbol{O})) = r$. 此时, 由于 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$, 我们知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = r$ 以及 $\boldsymbol{B}$ 也相抵于 $\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r, \boldsymbol{O})$. 从而由相抵等价的传递性可知, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵. □

上面的证明表明: 任何矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所在的相抵等价类里存在唯一的形如 $\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r, \boldsymbol{O})$ 的矩阵, 其中的 r 必为 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$. 此时, 我们称 $\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r, \boldsymbol{O})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**相抵标准形**.

例 4.5.10. 检验矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

是否相抵.

解. 考虑 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的阶梯标准形, 我们通过初等行变换可以得到

$$\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

这说明 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 2 = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相抵. □

例 4.5.11. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为任意矩阵, 证明: 教材例题 4.5.2, 公式需要牢记

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}).$$

证明. 设 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r$, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = s$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2$ (阶数可能不一致) 使得 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1 = \operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r, \boldsymbol{O})$, $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2 = \operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_s, \boldsymbol{O})$. 此时,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \\ & \boldsymbol{P}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1 & \\ & \boldsymbol{Q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1 & \\ & \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & & & \\ & \boldsymbol{O} & & \\ & & \boldsymbol{I}_s & \\ & & & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

通过初等变换, 我们看到

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & & & \\ & \boldsymbol{O} & & \\ & & \boldsymbol{I}_s & \\ & & & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & & & \\ & & \boldsymbol{I}_s & \\ & \boldsymbol{O} & & \\ & & & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & & & \\ & \boldsymbol{I}_s & & \\ & & \boldsymbol{O} & \\ & & & \boldsymbol{O} \end{pmatrix},$$

而后者即为 $\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_{r+s}, \boldsymbol{O})$, 它的秩恰为 $r+s$. □

例 4.5.12. 对于矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

若已知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 3$, 求出 a 和 b.

解. 做初等变换

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow[-3r_1 \to r_4]{-2r_1 \to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2r_2 \to r_4]{-r_2 \to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & 4-2b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-c_1 \to c_4]{\substack{-c_1 \to c_2 \\ -c_1 \to c_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & 4-2b \end{pmatrix} \xrightarrow[-c_2 \to c_4]{-c_2 \to c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & 4-2b \end{pmatrix} \xlongequal{\text{记作}} \boldsymbol{B}.$$

这等价于说

$$3 = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \operatorname{rank} \begin{pmatrix} a-1 & 2-b \\ 0 & 4-2b \end{pmatrix}.$$

由于 $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$, 这等价于说

$$1 = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} a-1 & 2-b \\ 0 & 4-2b \end{pmatrix} \xlongequal{\text{初等行变换}} \operatorname{rank} \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & 4-2b \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(a-1) + \operatorname{rank}(4-2b),$$

其中后面的两个是一阶方阵的秩. 这意味着 $a=1$, $b \neq 2$ 或者 $a \neq 1$, $b=2$. □

接下来介绍的几个不等式在处理矩阵乘积的秩时是比较有用的.

例 4.5.13. 对于矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in F^{n\times p}$, 证明: 教材例题4.5.7, 公式需要牢记

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \le \min(\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}), \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})).$$

证明. **(思路一)** . 设 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r$, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = s$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2$ (阶数可能不一致) 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1 \operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r, \boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_2 \operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_s, \boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}_2$. 将 $\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{P}_2$ 写成分块矩阵 $(\boldsymbol{R}_{ij})_{2\times 2}$, 其中 $\boldsymbol{R}_{11}$ 为 $r\times s$ 矩阵. 此时有 教材上的解法. 要求学生体会其中的分块技巧, 及分块所带来的便利性

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{P}_1 \operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r, \boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{P}_2 \operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_s, \boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{P}_1 \operatorname{diag}(\boldsymbol{R}_{11}, \boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}_2.$$

于是

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}(\operatorname{diag}(\boldsymbol{R}_{11}, \boldsymbol{O})) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{R}_{11}) \le \min(r, s).$$

(思路二) 利用 Binet–Cauchy 公式. □

例 4.5.14. 教材 P116, 作业题 #41, 公式需要牢记

(1) (i) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}) \ge \operatorname{rank}\left((\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\right) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}).$

(ii) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}) \ge \operatorname{rank}\left((\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\right) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}).$

(iii) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}) \ge \operatorname{rank}\left((\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B})\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\right) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}).$

(2)

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B}\end{pmatrix} &\ge \operatorname{rank}\left((\boldsymbol{I}\ \boldsymbol{I})\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\right)\\ &= \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

(3)

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix} \ge \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}).$$

为了证明该不等式, 我们利用定义. 假定 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=r$, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})=s$. 从而存在子式

$$\det\left(\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1' & i_2' & \dots & i_r' \\ j_1' & j_2' & \dots & j_r' \end{pmatrix}\right)\neq 0,\qquad \det\left(\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1'' & i_2'' & \dots & i_s'' \\ j_1'' & j_2'' & \dots & j_s'' \end{pmatrix}\right)\neq 0.$$

若设 $\boldsymbol{A}\in F^{p\times q}$, 那么由此可以看出 $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{smallmatrix}\right)$ 的子式

$$\begin{aligned}
&\det\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1' & i_2' & \dots & i_r' & p+i_1'' & p+i_2'' & \dots & p+i_s'' \\ j_1' & j_2' & \dots & j_r' & q+j_1'' & q+j_2'' & \dots & q+j_s'' \end{pmatrix}\right)\\
&\xlongequal{\text{是准上三角分块矩阵的行列式}}\det\left(\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1' & i_2' & \dots & i_r' \\ j_1' & j_2' & \dots & j_r' \end{pmatrix}\right)\det\left(\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} i_1'' & i_2'' & \dots & i_s'' \\ j_1'' & j_2'' & \dots & j_s'' \end{pmatrix}\right)\neq 0.
\end{aligned}$$

这说明 $\operatorname{rank}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{smallmatrix}\right)\geq r+s=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.

习题 4.5.15. 设 $\boldsymbol{A}\in F^{n\times m}$, $\boldsymbol{B}\in F^{m\times p}$. 若 $m=\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})$, 证明: $m=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.

我们再补充一个教材上没有提到的有用的不等式.

例 4.5.16 (Frobenius 不等式). 假定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为 $n\times m$, $m\times p$, $p\times q$ 矩阵. 试证: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{BC})\leq\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC})$.

证明.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC})&=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{ABC}\end{pmatrix}\\
&\xlongequal{-c_1\boldsymbol{C}\to c_2}\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & -\boldsymbol{BC}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB}\end{pmatrix}\xlongequal{\boldsymbol{A}r_1\to r_2}\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & -\boldsymbol{BC}\\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\\
&\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{BC}\end{pmatrix}\underbrace{\geq}_{\text{教材作业 \#41(3)}}\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{BC}).
\end{aligned}$$ □

推论 4.5.17. 假定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别为 $n\times m$, $m\times p$, $p\times q$ 矩阵.

(a) (***Sylvester* 不等式**): $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})\leq m+\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})$.　公式需要牢记

(b) 当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$ 时, 有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{BC})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC})$.

作为应用, 我们有

习题 4.5.18. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 并存在正整数 N 使得 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^N)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1})$. 证明: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^N)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+2})=\cdots$. (提示: *Frobenius* 不等式)

例 4.5.19. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为**幂等矩阵**, 即 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$. 证明: $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.

证明. 设 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=r$. 由相抵标准形可知, 存在可逆的同阶方阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{PAQ}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O}_{n-r})$. 此时条件 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 等价于

$$\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O}_{n-r}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O}_{n-r}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O}_{n-r}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1},$$

即

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O}_{n-r}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O}_{n-r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O}_{n-r}\end{pmatrix}.$$

设方阵 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_{11} & \boldsymbol{R}_{12}\\ \boldsymbol{R}_{21} & \boldsymbol{R}_{22}\end{pmatrix}$ 为分块的形式, 其中 $\boldsymbol{R}_{11}$ 为 r 阶方阵. 代入上面的等式, 我们解得 $\boldsymbol{R}_{11}=\boldsymbol{I}_r$. 此时,

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})&=\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O}_{n-r}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\right)=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O}_{n-r}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\right)\\&=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O}_{n-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{R}_{12}\\ \boldsymbol{R}_{21} & \boldsymbol{R}_{22}\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{R}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=r=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}).\end{aligned}$$

□

例 4.5.20. 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 证明: 教材例题 4.5.8

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n.$$

证明. **(思路一)** 作分块矩阵的初等变换, 我们有

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\to r_2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\to c_2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\\&\xrightarrow{-\boldsymbol{A}r_2\to r_1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\xrightarrow{-c_2\boldsymbol{A}\to c_1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

这说明 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2)+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2)+n$. 从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2$ 当且仅当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2)=0$, 当且仅当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n$.

(思路二) 先证明 “$\Rightarrow$”. 由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 我们有等式 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$. 由此, 我们有 上课不讲

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})-n\underbrace{\leq}_{??}\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}))=\operatorname{rank}(\boldsymbol{O})=0,$$

这说明 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\leq n$. 另一方面,

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\underbrace{\geq}_{\text{作业 }\#41(1)(2)}\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}))=\operatorname{rank}(\boldsymbol{I})=n.$$

综上即有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n$.

再证明 “$\Leftarrow$”. 设 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=r$. 由相抵标准形可知, 存在可逆的同阶方阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{PAQ}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{O}_{n-r})$. 那么,

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\right)\boldsymbol{Q}^{-1}.$$

若令 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_{11}&\boldsymbol{H}_{12}\\\boldsymbol{H}_{21}&\boldsymbol{H}_{22}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{H}_{11}$ 为 r 阶方阵, 则有

$$\begin{aligned}n-r=\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})&=\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\right)=\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{I}-\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_{11}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{H}_{21}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\right)\\&=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r-\boldsymbol{H}_{11}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{H}_{21}&\boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2\boldsymbol{H}_{21}\to c_1}\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r-\boldsymbol{H}_{11}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由于 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_{n-r})=n-r$, 这说明 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_r-\boldsymbol{H}_{11})=0$, 即 $\boldsymbol{H}_{11}=\boldsymbol{I}_r$. 此时,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_{11}&\boldsymbol{H}_{12}\\\boldsymbol{H}_{21}&\boldsymbol{H}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\\&=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_{11}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

□

例 4.5.21. *设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$, 且 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可逆. 证明: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.* 上课不讲

证明. (思路一) 通过直接计算, 我们有等式

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}).$$

由于乘以可逆矩阵不改变矩阵的秩, 我们立刻得到 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.

(思路二) 由于 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可逆, 我们有

$$n=\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\leq\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(-\boldsymbol{B})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}).$$

由前面的例 4.5.20, 我们已经知道了 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n$, 从而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\leq\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$. 但是很明显, 由对称性, 我们可以得到 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})\leq\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$. 从而得到 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$. □

例 4.5.22. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为**对合矩阵**, 即 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$. 求方阵 $\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 的相抵标准形. P116#38, #43

解. 问题归结于求矩阵的秩 $r:=\operatorname{rank}(\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}))$. 由于 $\boldsymbol{A}=\pm\boldsymbol{I}$ 都满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$, 且对应的矩阵的秩 $r=n$, 因此, 我们有理由猜测 $r=n$ 对于所有的 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$ 都成立. 下面来证明这一结论.

一方面, 我们有

$$\operatorname{rank}(\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}))\geq\operatorname{rank}((\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}))=\operatorname{rank}(2\boldsymbol{I})=n.$$

另一方面, 由 Sylvester 不等式可知, 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}))&=\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\\&\leq\operatorname{rank}((\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}))+n=\operatorname{rank}(\boldsymbol{O})+n=n.\end{aligned}$$

这说明确实有 $r=n$, 从而所求的相抵标准形为 $\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{O}_n)$. □