第七章　欧几里得空间

在熟知的三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 我们可以建立直角坐标系 $Oxyz$. 对于任意的向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)^\mathsf{T}$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)^\mathsf{T}\in\mathbb{R}^3$, 我们有**向量的内积** (**点乘**, **标量积**)

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\coloneqq a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

这儿, 我们将把内积记成 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$. 内积的几何意义是: 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模长 $|\boldsymbol{a}|$ 为 $\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$, 而且

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\theta),$$

其中的 θ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角. 这一套处理方法可以推广到高维情形.

7.1　定义与基本性质

定义 7.1.1. 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 如果对于 V 内任意两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都按照某一法则对应于一个实数, 记作 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in\mathbb{R}$,* 满足:

(对称性)　$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$,

(对于第一位置的线性性)　$\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 以及 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$,

(正定性)　对于任意的 $\boldsymbol{a}\in V$ 有 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\geq 0$, 且不等式中等号成立的充要条件为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,

则称该二元运算法则为 V 上的**内积** (*inner product*), 而 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**内积**. 定义了内积的 $\mathbb{R}$ 上的线性空间称为**内积空间** (*inner product space*) 或**欧几里得空间**, 简称为**欧氏空间**. 此时, 把线性空间 V 的维数叫作欧氏空间 V 的**维数**.

注 7.1.2.　(1) 从内积的对称性和对于第一位置的线性性, 我们可以马上推出对于第二位置的线性性.

*有些教材里将其记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$, 用来与有序对的记号作区别; 这样的记号也许更为合理.

(2) 对于任意的 $\boldsymbol{a}\in V$, 我们有 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{0})=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{a})=0$.

(3) 同一个线性空间在不同的内积下将被视作不同的内积空间.

例 7.1.3 (内积空间的例子). (1) 对于数组空间 $\mathbb{R}^n$, 将里面的向量视为列向量. 任取其中两个向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{b}=(b_1,\dots,b_n)^\mathsf{T}$, 我们可以定义

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\coloneqq a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\boldsymbol{a}^\mathsf{T}\boldsymbol{b}.$$

可以验证, 这是一个内积, 称为 $\mathbb{R}^n$ 的**标准内积** (*standard inner product*) 或者**欧几里得内积**. 若不作特别说明的话, 我们默认 $\mathbb{R}^n$ 为采用了如此定义的内积空间.

当然, 对于给定的一个元素全为正的向量 $\boldsymbol{w}=(w_1,\dots,w_n)^\mathsf{T}$, 我们也可以定义 $\mathbb{R}^n$ 上的一个新的内积为

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\coloneqq\sum_{i=1}^n a_ib_iw_i.$$

其中这些标量 w_i 称为这个新的内积的**权** (*weights*).

(2) 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间, $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V 的一组基. 对于任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$, 设它们在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标分别为 $\boldsymbol{X}=(x_1,\dots,x_n)^\mathsf{T}$ 和 $\boldsymbol{Y}=(y_1,\dots,y_n)^\mathsf{T}$, 即 $\boldsymbol{x}=\sum_i x_i\boldsymbol{\alpha}_i$, $\boldsymbol{y}=\sum_i y_i\boldsymbol{\alpha}_i$. 定义

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\coloneqq\sum_i x_iy_i,$$

即 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 之间的标准内积. 不难验证, 这给出了 V 上的一个内积.

(3) 由全体 $m\times n$ 实矩阵构成的线性空间 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 中, 定义一个二元函数为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\coloneqq\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{B}).$$

容易验证, 该二元函数是 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上的一个内积.

(4) $C[a,b]$ 为有界闭区间 $[a,b]$ 上的实连续函数的全体, 是 $\mathbb{R}$ 上的无穷维线性空间. 这儿假定 $a<b$. 对于 $f,g\in C[a,b]$, 定义

$$(f,g)\coloneqq\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

这给出了 $C[a,b]$ 的一个内积. 为了验证正定性, 我们注意到

$$(f,f)=\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x\geq 0.$$

若存在 $[a,b]$ 中某个 x_0 满足 $f(x_0)\neq 0$, 那么由函数 f^2 的连续性可知, 存在 $[a,b]$ 中包含 x_0 的小区间 I, 使得在 I 上有 $f^2\geq \frac{f(x_0)^2}{2}$. 若令 I 的长度为 $p>0$, 那么

$$(f,f)=\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x\geq\int_I f(x)^2\,\mathrm{d}x\geq\frac{f(x_0)^2p}{2}>0.$$

这说明若 $(f,f)=0$, 则 f 在 $[a,b]$ 上必为零函数.

更一般地, 若 $w(x)\in C[a,b]$ 是一个正的连续函数, 那么

$$(f,g)\coloneqq\int_a^b f(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x$$

给出了 $C[a,b]$ 的一个新的内积, 而 $w(x)$ 称为该内积的**权函数** (*weight function*).

(5) 对于 $F=\mathbb{R}$, 我们考虑线性空间 $F_n[x]$. 这是次数不超过 n 的实系数多项式构成的实线性空间. 设 $a_0,a_1,\ldots,a_n$ 为不同的实数, 对于 $f,g\in F_n[x]$, 定义

$$(f,g)\coloneqq\sum_{i=0}^n f(a_i)g(a_i).$$

这给出了 $F_n[x]$ 的一个内积. 为了验证正定性, 我们注意到

$$(f,f)=\sum_{i=0}^n f(a_i)^2\geq 0.$$

若 $(f,f)=0$, 则 $a_0,a_1,\ldots,a_n$ 为 $f(x)$ 的不同的根. 而 $f(x)$ 的次数不超过 n, 这说明 f 必为零多项式.

更一般地, 若 $w_0,w_1,\ldots,w_n$ 为一组正数, 那么

$$(f,g)\coloneqq\sum_{i=0}^n f(a_i)g(a_i)w_i$$

也定义了 $F_n[x]$ 上的一个内积.

定理 7.1.4 (Cauchy–Schwarz)**.** 设 V 是欧氏空间, $(\cdot,\cdot)$ 是 V 的内积, 则对 V 中的任意两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 有 $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|\leq\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})}$.

证明. 不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, 从而 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\neq 0$. 对于任意实数 λ, 有

$$0\leq(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\lambda^2+2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\lambda+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}).$$

右式是关于 λ 的实系数二次多项式, 故其判别式非正:

$$4(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2-4(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\leq 0.$$

化简即可. □

注 7.1.5. (1) 由证明过程易知, *Cauchy–Schwarz* 不等式中等号成立的条件是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 线性相关.

(2) 将 *Cauchy–Schwarz* 不等式运用于例 *7.1.3* (1), 我们得到, 若 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, 则

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}.$$

将 *Cauchy–Schwarz* 不等式运用于例 *7.1.3* (4), 我们得到, 若 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x}.$$

定义 7.1.6. 设 V 是欧氏空间, $(\cdot,\cdot)$ 是 V 的内积, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$. 仿照三维的情形, 我们定义如下.

(1) $|\boldsymbol{a}| \coloneqq \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} \geq 0$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**长度** (*length*) 或**模** (*module*). 有时模也记作 $\|\boldsymbol{a}\|$.* 由内积的正定性容易推出, $\|\boldsymbol{a}\| = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. 另外, 对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 我们都有 $\|\lambda\boldsymbol{a}\| = |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{a}\|$.

(2) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的**夹角**为 $\theta = \arccos\left(\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|}\right)$. 注意, 由 *Cauchy–Schwarz* 不等式, 我们有

$$-1 \leq \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|} \leq 1,$$

从而定义是可行的.

(3) 进一步地, 若 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$ (允许 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{0}$), 则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直** (*perpendicular*) 或**正交** (*orthogonal*), 记作 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$. 容易验证, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 当且仅当 $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$, 当且仅当**勾股定理** (也被称为**毕达哥拉斯定理**) 成立:

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2.$$

另外, 零向量 $\boldsymbol{0}$ 与 V 中任意的向量都正交, 并且是 V 中满足这一条件的唯一的向量, 也是 V 中唯一的与自身正交的向量.

(4) 长度为 1 的向量称为**单位向量**.

(5) 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 之间的**距离**定义为 $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \coloneqq \|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\|$. 我们很容易验证:

---

*为了与标量的绝对值以示区别, 在我们的教案里会采用这一记号.

(对称性) $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = d(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$,

(正定性) $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \geq 0$, 且 $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$,

(三角不等式) $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \leq d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}) + d(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$.

容易看出,

$$\begin{aligned}
\text{关于距离的三角不等式} &\xLeftrightarrow[\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\beta}]{\text{记 } \boldsymbol{a}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}} \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\| \quad (\text{模的三角不等式}) \\
&\Leftrightarrow \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 \leq (\|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|)^2 \\
&\Leftrightarrow (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \leq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\| + \|\boldsymbol{b}\|^2 \\
&\Leftrightarrow (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) \leq (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + 2\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\| + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) \\
&\Leftrightarrow (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \leq \|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|. \quad (\text{Cauchy–Schwarz 不等式})
\end{aligned}$$

习题 7.1.7. 证明 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 满足**平行四边形法则**:

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = 2\|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{v}\|^2.$$

习题 7.1.8. 设 4 维实的列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度为 5, 求 $|\boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}|$ 的值.

7.2 内积的表示与标准正交基

回忆. 设 V 是有限维向量空间, $\mathscr{A}$ 为 V 上的线性变换, 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则 $\mathscr{A}$ 的具体作用由 $\boldsymbol{A}$ 唯一决定. (定理 6.2.3)

若 V 是有限维欧氏空间, 对于其上的内积, 我们也有类似地表述.

设 $(\cdot,\cdot)$ 是 V 上的内积, 任给 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$, 假定它们在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标分别为 $\boldsymbol{X} = (x_1,\ldots,x_n)^\mathsf{T}$ 和 $\boldsymbol{Y} = (y_1,\ldots,y_n)^\mathsf{T}$, 我们有

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{\alpha}_i, \sum_{j=1}^n y_j\boldsymbol{\alpha}_j\right) \xlongequal{\text{双线性性}} \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j).$$

令 $\boldsymbol{G} = (g_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 其中 $g_{ij} = (\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)$. 则上式可以表述成

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{X}^\mathsf{T}\boldsymbol{G}\boldsymbol{Y}.$$

注意, 由内积的对称性, 有 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j) = (\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_i)$, 即 $g_{ij} = g_{ji}$. 这说明方阵 $\boldsymbol{G}$ 是实对称阵. 在接下来的讨论中, 方阵 $\boldsymbol{G}$ 将被称为内积 $(\cdot,\cdot)$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的**度量矩阵**.

一般地, 对于 n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$, 若是对于任意的非零列向量 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n$, 皆有 $\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是一个**正定方阵**. 故由内积的正定性, 知其度量矩阵 $\boldsymbol{G}$ 必为一个正定方阵.

反过来, 给定 $\mathbb{R}$ 上的有限维线性空间 V 和上面的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 以及一个 n 阶正定的实对称方阵 $\boldsymbol{G}$, 可以定义 V 上的一个内积如下. 任给 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$, 假定它们在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标分别为 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$, 定义 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{G}\boldsymbol{Y}$. 则 V 变成了一个内积空间.

习题 7.2.1. 我们考虑线性空间 $V=\mathbb{R}_4[x]$, 这是次数不超过 4 的实系数多项式构成的实线性空间. 设 a_0,a_1,a_2,a_3,a_4 依次为 $-2,-1,0,1,2$. 对于 $f,g\in\mathbb{R}_4[x]$, 定义

$$(f,g):=\sum_{i=0}^{4}f(a_i)g(a_i).$$

这给出了 V 的一个内积. 求它在自然基 $1,x,x^2,x^3,x^4$ 下的度量矩阵.

现在出现了一个很自然的问题: 在考虑线性空间 V 的一组新的基时, 线性变换相应的矩阵要做相似变换. 那么对于内积而言, 相应的度量矩阵该如何改变?

引理 7.2.2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in F^{n\times n}$. 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 当且仅当对于任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$, 有 $\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$.

证明. 必要性是显然的. 对于充分性, 只需选取数组空间的标准基中的向量: 取 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{e}_j$, 那么 $\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元素, 而 $\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的 (i,j) 元素. □

设 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是欧氏空间 V 的另外一组基. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$, 即有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}.$$

设内积在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的度量矩阵分别为 $\boldsymbol{G},\widetilde{\boldsymbol{G}}$. 对于任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$, 假设它们在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标分别为 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$. 从而, 它们在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标分别为 $\widetilde{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Y}$. 由定义, 有

$$\boxed{\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{G}\boldsymbol{Y}}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\widetilde{\boldsymbol{X}}^\top\widetilde{\boldsymbol{G}}\widetilde{\boldsymbol{Y}}=\boxed{\boldsymbol{X}^\top(\boldsymbol{P}^\top)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Y}}.$$

由上面的引理可知, 这说明 $\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{P}^\top)^{-1}\widetilde{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{P}^{-1}$, 即

$$\widetilde{\boldsymbol{G}}=\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{G}\boldsymbol{P}.$$

定义 7.2.3. 给定两个同阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$. 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 由**相合变换** (congruent transformation) 得到的, 称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**相合**的.