二次曲线与曲面的分类

在这一节里, 我们要通过坐标变换将一般的二次曲线 (曲面) 的方程化简.

保持图像形状不变的坐标变换有两种基本形式: 正交变换和平移变换. 我们一般默认是采用这两种坐标的变换. 注意, 平移变换不是线性变换.

二维情形

首先，考察平面上的二次曲线 (quadratic curve)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0.$$

第一步，我们把图形摆正，即将二次曲线的对称轴调整到与坐标轴平行的状态. 这意味着消去交叉项 xy. 注意到曲线中的二次项为

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = (x, y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

将该二次型的矩阵记作 $\boldsymbol{A}$. 这个 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵，可以通过正交矩阵，相似 (相合) 于对角阵，即存在正交阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$，其中 λ_1, λ_2 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

此时, 若 $\boldsymbol{P}$ 为第一类正交矩阵, 则 $\boldsymbol{P}$ 对应于一个旋转, 可以写成

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

的形式. 若 $\boldsymbol{P}$ 为第二类正交矩阵, 设 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2)$, 考虑 $\boldsymbol{P}' = (\boldsymbol{P}_1, -\boldsymbol{P}_2)$, 则 $\boldsymbol{P}'$ 为第一类正交矩阵, 且 $(\boldsymbol{P}')^\top \boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}') = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. 故, 我们可以直接假设 $\boldsymbol{P}$ 是一个如上形式的旋转.

第二步，我们来确定 $\boldsymbol{P}$ 的具体形式，这意味着

$$\boldsymbol{P}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

需要成为一个对角阵. 由于这已经是一个实对称阵了，我们接下来只需要 $(1,2)$ 位置的元素为 0，即

$$(-a_{11} + a_{22})\cos(\theta)\sin(\theta) + a_{12}(-\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) = 0.$$

在 $a_{12} \neq 0$ 的条件下，我们可以得到

$$\cot(2\theta) = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

解出适当的 θ 后, 我们可以写出 $\boldsymbol{P}$ (即通过三角函数的公式, 将 $\cos(\theta)$ 和 $\sin(\theta)$ 都用 $\cot(2\theta)$ 表示出来). 此时考虑坐标变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

则二次曲线的方程可以化成

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2b_1'x' + 2b_2y' + c' = 0,$$

其中 λ_1, λ_2 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 (注意顺序, 它们依赖于 $\boldsymbol{P}$ 的选取), 不全为 0, 而 $c' = c$.

在最后一步里，我们通过配方来进一步化简曲线的方程. 其中，若 $\lambda_1 \neq 0$，我们令 $\tilde{x} = x' + b'_1/\lambda_1$，否则，令 $\tilde{x} = x'$. 类似地，若 $\lambda_2 \neq 0$，我们令 $\tilde{y} = y' + b'_2/\lambda_2$，否则，令 $\tilde{y} = y'$. 此时，方程可以化成如下的标准形式.

1. (椭圆型) 此时，$\lambda_1\lambda_2 > 0$，即 λ_1 与 λ_2 同号:

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \lambda_3 = 0.$$

当然，依赖于 λ_3 是否与 λ_1 同号，或为零，该方程组可能无解，有退化解，或有正常解.

2. (双曲线型) 此时, $\lambda_1\lambda_2 < 0$, 即 λ_1 与 λ_2 异号:

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \lambda_3 = 0.$$

   若 $\lambda_3 = 0$, 该方程为两条相交直线. 若 $\lambda_3 \neq 0$, 该方程为正常的双曲线.

3. (抛物线型) λ_1 与 λ_2 之中有一个为零. 不妨设 $\lambda_2 = 0$. 则此时的方程为

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + 2b_2'\tilde{y} + c' = 0.$$

   a. 若 $b_2' \neq 0$, 我们可以令 $\tilde{y}' = \tilde{y} + \frac{c'}{2b_2'}$, 可以进一步简化方程.
   b. 若 $b_2' = 0$, 则方程退化成 $\lambda_1\tilde{x}^2 + c' = 0$.

三维情形

考察由如下方程给出的二次曲面 (quadratic surface)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0.$$

对于其二次项

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

令二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

我们寻找正交阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵. 此时, 令

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

则二次曲面的方程可以化为

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + 2b_1'x' + 2b_2'y' + 2b_3'z' + c' = 0.$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 主对角线上的元素, 即 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值; 而 $c' = c$. 接下来, 根据参数是否为零, 我们做适当的坐标轴平移, 进一步简化方程. 由于具体情况较多, 我们就不具体讨论了.

教学的要求是学生能根据简化后的方程判断曲面的类型, 参见教材 §2.2.5 中的分类.

注 1

此时维数为 3, 正交阵 $\boldsymbol{P}$ 一般不会有二维中的简单情形. 那么该如何求呢? 之前已经提过: 通过特征值来计算特征向量, 然后对特征向量作正交归一化. 当然, 二维的情形也可以采用这一办法来处理.

例 2

试指出二次曲面

$$x^2 + (2+\lambda)y^2 + \lambda z^2 + 2xy - 2xz - yz - 5 = 0$$

中参数 λ 取什么值时, 该曲面为椭球面.

例 3

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2.

1. 求参数 c 及此二次型对应矩阵的特征值.
2. 指出方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示何种二次曲面.

例 4

用正交变换和平移将二次方程

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4yz - 2x + 2\sqrt{2}y - 6\sqrt{2}z + 5 = 0$$

化为标准形式, 并判断它是什么曲面.