第七周作业参考

王睿、胡铁宁

2023 年 4 月 25 日

目录

一点说明

(i) 作业讲义部分题过程可能有省略。如对作业仍有疑问可以在群里或答疑课上讨论。

(ii) **作业讲义会随时间更新。**

(iii) 请及时核对自己在 BB 系统里的分数，如有问题请向对应的助教反馈。

(iv) 附录里的内容仅供有兴趣的同学参考，有可能涉及之后才会学习或课外的知识，不要求在现阶段掌握。

(v) 讲义最好用电脑打开，文档内置了链接功能，复习或查看指定的作业很方便。

成绩说明：成绩公式为

$$\text{score} = \begin{cases} 10 - k \cdot \max\{n - n_0, 0\} & \text{未迟交} \\ 5 & \text{迟交} \end{cases}$$

其中 n 为错题数，n_0 为容忍度；k 为系数，取决于当周作业的题量。第七周不考虑补充题共 11 题 (习题1和习题13分别为一个题，其余每个小问均为一个题)，$n = 11$，考虑到一些同学出现了计算失误、笔误、抄错题目等等情况，$n_0 = 3$；$k = 0.5$。对于一些

不严格的证明，助教也会酌情给分。也意味着作业得到满分不代表作业没有问题，请认真查看自己的作业。

上述评分标准对每个助教都成立。

1 第七周作业

1.1 4 月 18 日布置的作业

1.1.1 教材习题 P155:12,19(2),21,22,23,24

习题 1 (教材习题 12). 下列说法是否正确？为什么？

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,(s\geq 2)$ 线性相关，则其中的每一个向量都可以表示成其他向量的线性组合；

(2) 如果向量组的任何不是它本身的子向量组都线性无关，则该向量组也线性无关；

(3) 若向量组线性无关，则它的任何子向量组都线性无关；

(4)F^n 的 $n+1$ 个向量组成的向量组必线性相关；

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$ 必线性无关；

(6) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$ 必线性相关；

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\in F^n$ 线性无关，则它们的加长向量组也必线性无关；

(8) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\in F^n$ 线性相关，则它们的加长向量组也必线性相关；

解. (1)$\times$.$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0)$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 表示。

(2)$\times$.$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1)$。$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\},\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3\},\{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 都分别是线性无关的子向量组；但 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 不是线性无关的向量组。

(3)$\checkmark$. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow\neg\exists\lambda_1,\cdots,\lambda_s\neq 0\in F,\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}\Rightarrow\neg\exists\lambda_1,\cdots,\lambda_i\in F,\lambda_{i+1}=0,\cdots,\lambda_s=0,\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$

(4)$\checkmark$.$\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1})\leq n<n+1\Rightarrow\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}\}$ 线性相关。

(5)$\times$. 可以观察到 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4-\cdots$ 可能得到 $\mathbf{0}$。$s=2k$ 为偶数时 $\sum\limits_{i=1}^{s=2k-1}(-1)^{i-1}(\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\alpha}_{i+1})+(-1)^{2k-1}(\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{\alpha}_1+(-1)^{2k-2}\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$。另一方面若存在 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，使得 $\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots=\mathbf{0}$，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，一定有 $\lambda_2=-\lambda_1,\lambda_3=-\lambda_2,\cdots$，因此适用于上面一样的分析可知 $s=2k$ 为偶数时线性相关，$s=2k+1$ 为偶数时线性无关。

(6)$\checkmark$.$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s\Rightarrow\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}1&&&1\\1&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&1\end{pmatrix}\leq$ $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关。

(7)$\checkmark$. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的加长向量组可表示为 $\boldsymbol{\alpha}'_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1),\cdots\boldsymbol{\alpha}'_i=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_i)$。$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\in F^n$ 线性无关 $\Leftrightarrow\neg\exists\lambda_1,\cdots,\lambda_s\neq 0\in F,\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}\Rightarrow\neg\exists\lambda_1,\cdots,\lambda_s\neq 0\in F,\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1)+\cdots+\lambda_s(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_s)=(\mathbf{0},\mathbf{0})\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}'_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}'_s$ 线性无关。

(8)$\times$. 若加长的部分 $\boldsymbol{\beta}_i$ 彼此线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}'_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}'_s$ 也可以线性无关。 □

习题 2 (教材习题 19(2)). 求下列向量组的极大无关组与秩

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,6)$

解. 参考教材 P126 例 5.3.2。对 $(\boldsymbol{\alpha}_1^T, \boldsymbol{\alpha}_2^T, \boldsymbol{\alpha}_3^T, \boldsymbol{\alpha}_4^T, \boldsymbol{\alpha}_5^T)$ 作初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在初等行变换得矩阵中 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4$ 是一个极大无关组，对应的 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个极大无关组。秩为 3，与极大无关组的数量相同。 □

习题 3 (教材习题 21)**.** 证明：若向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组线性表示。

证明. 参考教材 P127 定理 5.3.3，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组线性表示；因此向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以将向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性表示中每一项都写成极大无关组的形式，重新整理系数即得由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组的线性表示。 □

习题 4 (教材习题 22)**.** 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 r，则其中任何 r 个线性无关的向量构成 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组。

证明. 设这 r 个线性无关的向量为 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$，它继续扩充可以得到一个极大无关组，其中元素个数为 $s \geq r$ 个。若 $s > r$，根据秩的定义：极大无关向量组所含向量个数为 r，则发生矛盾，因此 $s = r$，对应这 r 个线性无关的向量已经是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组。 □

习题 5 (教材习题 23)**.** 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 r，如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由它的 r 个向量表示，则这 r 个向量构成 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组。

证明. 设这 r 个线性无关的向量为 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$，它可以通过去掉一些向量变得线性无关，从而得到一个极大无关组。其中元素个数为 $p \leq r$ 个。若 $p < r$，根据秩的定义：极大无关向量组所含向量个数为 r，则发生矛盾，因此 $p = r$，对应这 r 个线性无关的向量已经是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组。 □

习题 6 (教材习题 24)**.** 证明：$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) \leq \mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) + \mathrm{rank}(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s)$

证明. 假设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 的极大无关组是 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_p}, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的极大无关组是 $\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_q}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的极大无关组等价于 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_p}, \boldsymbol{\beta}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_q}$ 的极大无关组（可由等价性看出），向量组的极大无关组个数一定小于等于向量组向量个数。即

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) &= \mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_p}, \boldsymbol{\beta}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_q}) \\ &\leq i_p + j_q = \mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) + \mathrm{rank}(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) \end{aligned}$$

□

1.1.2 补充习题 1,2,3

习题 7 (补充习题 1). 设矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{3\times 2}, \boldsymbol{B} \in F^{2\times 3}$ 满足 $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. 证明 $\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

证明. 此题的证明非常 tricky，没有很大的参考价值，不过从结果倒退过程也是一种解决考试的思路。证明：

$$2 + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_3 - \frac{1}{9}\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_3 & \frac{1}{3}\boldsymbol{A} \\ \frac{1}{3}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix} = 3 + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_2 - \frac{1}{9}\boldsymbol{BA})$$

计算可得

$$3 = 2 + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_3 - \frac{1}{9}\boldsymbol{AB}) = 3 + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_2 - \frac{1}{9}\boldsymbol{BA}) \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_2 - \frac{1}{9}\boldsymbol{BA}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{I}_2 - \frac{1}{9}\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{O} \Leftrightarrow \boldsymbol{BA} = 9\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

以下为废案，是助教自己尝试的。我认为得不到答案的解答思路也是有意义的。方程

$$\det(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}) = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \det(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB})$$

的一个扩展是

$$\lambda^m \det(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}) = \lambda^n \det(\lambda \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB})$$

要证明此式，可将 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$，代入

$$\begin{aligned}
\lambda^n \det(\lambda \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB}) =& \lambda^n \det\left(\lambda \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{QB}\right) \\
&= \lambda^n \det\left[\boldsymbol{P}\left(\lambda \boldsymbol{I}_m - \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{QBP}\right)\boldsymbol{P}^{-1}\right] \\
&= \lambda^n \det\left(\lambda \boldsymbol{I}_m - \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\boldsymbol{QBP}\right)
\end{aligned}$$

假设 $\boldsymbol{QBP} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}_{11} \in F^{r\times r}$，则上式化为

$$\begin{aligned}
\lambda^n \det(\lambda \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB}) &= \lambda^n \det\left(\lambda \boldsymbol{I}_m - \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}\right) \\
&= \lambda^n \det\begin{pmatrix} \lambda \boldsymbol{I}_r - \boldsymbol{B}_{11} & -\boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \lambda \boldsymbol{I}_{m-r} \end{pmatrix} \\
&= \lambda^{n+m-r} \det(\lambda \boldsymbol{I}_r - \boldsymbol{B}_{11})
\end{aligned}$$

$\lambda^m \det(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA})$ 的分解是类似的，这里留给同学们自己推导。最后可以得到

$$\lambda^m \det(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}) = \lambda^{m+n-r} \det(\lambda \boldsymbol{I}_r - \boldsymbol{B}_{11}) = \lambda^n \det(\lambda \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB})$$

可以将 $\det(\lambda \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB})$ 看作关于 λ 的 m 次多项式，$\det(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA})$ 看作关于 λ 的 n 次多项式，上式等号对于任意 λ 都成立可以给出关于 $\boldsymbol{BA}$ 和 $\boldsymbol{AB}$ 的信息。对于本题，等式为

$$\lambda^3 \det(\lambda \boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{BA}) = \lambda^2 \det(\lambda \boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{AB}) = \lambda^2 \left| \begin{pmatrix} \lambda - 8 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 5 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda - 5 \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 \times (\lambda - 9)^2 \lambda$$

对于任意 λ 都成立，$\lambda = 0$ 是一个平凡解，$\lambda \neq 0$ 时，有

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{BA}) = (\lambda - 9)^2, \forall \lambda \neq 0$$

假设 $\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$，有

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{BA}) = \det\left(\lambda \boldsymbol{I}_2 - \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\right) = (\lambda - c_{11})(\lambda - c_{22}) - c_{12}c_{21} \equiv (\lambda - 9)^2, \forall \lambda \neq 0$$

有

$$\begin{cases} c_{11} + c_{22} = 18 \\ c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 81 \end{cases}$$

□

习题 8 (补充习题 2)**.** (1) *设 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，任取 $\boldsymbol{A}$ 的 r 个线性无关的行和 r 个线性无关的列. 证明: 这 r 行和这 r 列交叉处的 r 阶子阵可逆.*
(2) 若上题中的 $r < \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$, 则其结论不成立. 试给出反例.
(3) 证明: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式所在的行向量组和列向量组都是线性无关的.
(4) 上题的逆命题不成立，即位于线性无关的行向量组和线性无关的列向量组交叉处的子式不一定非零. 试给出反例。

证明. (1) 不妨假设选择的 r 个线性无关的行位于前 r 行 (若不在可通过行交换变为前 r 行，行交换不改变线性无关/线性相关的性质)，r 个线性无关的列位于前 r 列，则

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}$ 是 $r \times r$ 阶矩阵，由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，将 $\boldsymbol{A}$ 视为行向量，可知前 r 行的行向量是 $\boldsymbol{A}$ 行向量的极大无关组，因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可通过初等行变换化为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$。初等行变换不改变列向量的线性相关性（教材 P125 定理 5.3.1），因此此时 $\boldsymbol{A}_{11}$ 中的所有列向量仍线性无关，$\boldsymbol{A}_{11}$ 矩阵的列秩为 r 等于矩阵的秩等于矩阵的阶数，说明 $\boldsymbol{A}_{11}$ 可逆。

(2)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，选择第 2,3 行和第 1,2 列，矩阵 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=0$

(3) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式说明行列式不为 0，根据教材 P131 推论 5.3.3，易知行向量组和列向量组在非零子式中的分量是线性无关的，因此它们的加长向量组也是线性无关的，可知非零子式所在的行向量组和列向量组都是线性无关的。

(4)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，选择第 2,3 行和第 1,2 列，交叉子式 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$ 行列式为 0。 □

习题 9 (补充习题 3)**.** (1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}\in F^{m\times n}$ 的某个阶梯标准形的所有非零行的行向量, 证明这些向量生成了行空间 $Row(\boldsymbol{A})$.
(2) 证明: 向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,3),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(2,4,1,-2),\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(3,6,3,-7)$$

与

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,-4,11),\quad \boldsymbol{\beta}_2=(2,4,-5,14)$$

等价。

证明. (1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 生成的 F^n 的子空间称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行空间 (记作 $\mathrm{Row}(\boldsymbol{A})$)。要证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 也生成了行空间 $\mathrm{Row}(\boldsymbol{A})$，只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 等价，化标准型的过程相当于初等行变换，对应可逆矩阵，有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_r\\ \boldsymbol{0}\\ \vdots\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_r\\ \boldsymbol{0}\\ \vdots\end{pmatrix}$$

可知 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}$ 与 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 可以相互线性表示，即两向量组等价，对于行空间 $\mathrm{Row}(\boldsymbol{A})$ 中的任意一个向量均可以用 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 表示，且 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 生成的任意向量也落在行空间 $\mathrm{Row}(\boldsymbol{A})$ 中，因此 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 生成的行空间就是 $\mathrm{Row}(\boldsymbol{A})$。

(2) 有许多方法都可以使用。对本题而言，由于前两个分量有比较好的形式，因此可以构造

$$\boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2=(0,0,-3,8),\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}$$

变换 $\det\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}\neq 0\Rightarrow\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3\}\sim\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}$

同样地

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,0,-3,8), \boldsymbol{\alpha}_5 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,-6,16),$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_4 \\ \boldsymbol{\alpha}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5\} \sim \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$$

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}_5 - 2\boldsymbol{\alpha}_4, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_4 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_4 \\ \boldsymbol{\alpha}_5 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_4\} \sim \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$$

容易看到，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_4\} \sim \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_3\}$，根据向量组等价的传递性，易知 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\} \sim \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2\}$. □

1.2 4 月 20 日布置的作业

1.2.1 教材习题 P155:20,31,34,35

习题 10 (教材习题 20). *求下列矩阵的秩, 并求出它的行向量空间的一组基.*

(i) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; *(ii)* $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & -10 & 5 & -7 \\ 4 & -2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

解. 我们知道, 对矩阵作初等行 (列) 变换不改变其列 (行) 向量组的线性相关性. 因此, 在这道题中, 我们只需通过初等列变换对矩阵打洞直至我们能够一眼看到结果.

(i) 进行初等列变换:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ -18 & -5 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ -18 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -15 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

至此, 我们可以看出最后 3 行线性无关而全部 4 行线性相关. 故原矩阵的秩为 3, 后 3 个行向量就是其行向量空间的一组基.(事实上, 除了第一、二、四行, 任取 3 行都可以)

(ii) 进行初等列变换:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & -10 & 5 & -7 \\ 4 & -2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 5 & -7 \\ 4 & -1 & 8 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & -4 \\ 4 & -9 & 12 & -12 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

至此, 我们发现上面的矩阵前两行线性无关, 而只有两列非零可以得到秩不大于 2. 故原矩阵的秩为 2, 第一、二行为其行向量空间的一组基 (事实上不难看出任意两行都构成基).

□

习题 11 (教材习题 31)**.** 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 F^n 的基, 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 有关系式

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{T}.$$

证明: $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 为 F^n 的基当且仅当 $\boldsymbol{T}$ 为可逆方阵.

证明. 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 均为列向量. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 F^n 的基, 故 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 是可逆方阵. 因此,

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n \text{为} F^n \text{的基} \\
\Leftrightarrow &(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)\text{是可逆方阵} \\
\Leftrightarrow &(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{T}\text{是可逆方阵} \\
\Leftrightarrow &\boldsymbol{T}\text{是可逆方阵}.
\end{aligned}$$

□

习题 12 (教材习题 34)**.** 以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (3,1,0), \boldsymbol{\alpha}_2 = (6,3,2), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,5)$ 为基, 求 $\boldsymbol{\beta} = (2,-1,2)$ 的坐标.

解. 设 $\boldsymbol{\beta} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha} + \lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$. 将其写成矩阵就是

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (2,-1,2).$$

解之, 得到 $\boldsymbol{\beta} = (2,-1,2)$ 的坐标 (以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为基) 就是

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-76, 41, -16).$$

□

习题 13 (教材习题 35)**.** 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (3,2,-1,4), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,3,0,-1)$.

(i) 将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的一组基;

(ii) 给出标准基在该组基下的表示;

(iii) 求 $\boldsymbol{\beta} = (1,3,4,-2)$ 在该组基下的坐标.

解. (i) 可以观察, 令 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,1,0), \boldsymbol{\alpha}_4 = (0,0,0,1)$. 可以计算

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\alpha}_4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 的一组扩充基. 当然, 这并不是唯一的.

(ii) 不难计算

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\begin{pmatrix}3&2&0&0\\2&3&0&0\\-1&0&1&0\\4&-1&0&1\end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}3&2&0&0\\2&3&0&0\\-1&0&1&0\\4&-1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}&0&0\\-\frac{2}{5}&\frac{3}{5}&0&0\\\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}&1&0\\-\frac{14}{5}&\frac{11}{5}&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

就是标准基在该组基下的表示.

(iii) 直接计算:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}&=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\begin{pmatrix}1\\3\\4\\-2\end{pmatrix}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}&0&0\\-\frac{2}{5}&\frac{3}{5}&0&0\\\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}&1&0\\-\frac{14}{5}&\frac{11}{5}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\4\\-2\end{pmatrix}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\\frac{7}{5}\\\frac{17}{5}\\\frac{9}{5}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

所求坐标就是 $\left(-\frac{3}{5},\frac{7}{5},\frac{17}{5},\frac{9}{5}\right)^{\mathrm{T}}$.

□

1.2.2 补充习题 4,5,6,7

习题 14 (补充习题 4)**.** *设* $\boldsymbol{A}\in F^{n\times m},\boldsymbol{B}\in F^{m\times p}$. *若* $m=\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})$, *证明:* $m=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.

证明. 利用秩不等式:

$$m=\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}),\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})\}\leqslant\max\{\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}),\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})\}\leqslant m.$$

则上面的不等号均取等号, 故 $m=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$. □

注 14.1. 这道题的本质还是秩不等式, 同学们至少应熟练掌握其一种证法. 证法包括但不限于: *(i)* 利用相抵标准形; *(ii)* 利用行 *(*列*)* 向量组的极大无关组; *(iii)* 利用齐次线性方程组的解空间维数与系数矩阵秩之间的关系; *(iv)* 利用 *Binet–Cauchy* 公式.

习题 15 (补充习题 5)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 并存在正整数 N 使得 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^N)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1})$. 证明: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^N)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+2})=\cdots$. *(*提示: *Frobenius* 不等式*)*

证明. 由 Sylvester 不等式可知

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^N\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^N)\geqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^N)+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^N\boldsymbol{A}),$$

即

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+2})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^N)\geqslant 2\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1}).$$

故由题目条件可得 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+2})\geqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1})$. 另一方面, 又有秩不等式 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+2})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1}\boldsymbol{A})\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1})$. 因此,

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+2})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1}).$$

然后不难依次这样做下去得到欲证明的等式. □

注 15.1. 题目条件有 "存在正整数 N 使得 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^N)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1})$". 事实上, 这个条件一定满足, 因为 $\{\boldsymbol{A}^k\}_{k=1}^{\infty}$ 的秩不可能无穷地严格递减下去.

习题 16 (补充习题 6)**.** 设方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\leqslant 1$.

(i) 对于正整数 s, 求 $\boldsymbol{A}^s$. *(*提示: 用满秩分解定理*)*

(ii) 求行列式 $\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})$. *(*提示: 用教材 *P115* 第 *25* 题*)*

解. (i) 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=0$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{A}^s=\boldsymbol{O}$.

若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=1$, 则由满秩分解定理可知, 存在非零列向量 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 以及非零行向量 $\boldsymbol{\gamma}=(c_1,\cdots,c_n)$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\beta\gamma}$, 即 $a_{ij}=b_ic_j,i,j=1,\cdots,n$. 于是

$$\boldsymbol{A}^s=(\boldsymbol{\beta\gamma})^s=\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\gamma\beta})^{s-1}\boldsymbol{\gamma}=\left(\sum_{i=1}^n b_ic_i\right)^{s-1}\boldsymbol{\beta\gamma}=\left(\sum_{i=1}^n a_{ii}\right)^{s-1}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})^{s-1}\boldsymbol{A}.$$

综上, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})^{s-1}\boldsymbol{A}$.

(ii) 由教材 P115 第 25 题可得当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=1$ 时,

$$\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma})=\det(1+\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\beta})=1+\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=1+\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}).$$

也容易验证当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=0$ 时上式成立.

□

习题 17 (补充习题 7)**.** 设 $\boldsymbol{A}_n$ 为一个 n 阶反对称方阵, 其主对角线的右上角的元素全是 1. 计算 $\boldsymbol{A}_n^*$. *(提示: 答案依赖于 n 的奇偶性. 若 $n=2k$, 由第四次作业中的思考题中的计算可知, $|\boldsymbol{A}_{2k}|=1$. 于是 $\boldsymbol{A}_{2k}^*=\boldsymbol{A}_{2k}^{-1}$. 当 $n=4$ 时,*

$$\boldsymbol{A}_4^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1&-1\\1&0&-1&1\\-1&1&0&-1\\1&-1&1&0\end{pmatrix}.$$

对于一般的 $n=2k,\boldsymbol{A}_n^{-1}$ 具有类似的形式.

对于 $n=2k+1,|\boldsymbol{A}_{2k+1}|=0$. 从而由 $\boldsymbol{A}_{2k+1}\boldsymbol{A}_{2k+1}^*=|\boldsymbol{A}_{2k+1}|\boldsymbol{I}$ 可知, $\boldsymbol{A}_{2k+1}^*$ 的每个列向量都是方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解. 可以解出该方程组的解的全体为 $\boldsymbol{x}=\lambda(1,-1,1,-1,\cdots,1)^{\mathrm{T}},\lambda\in F$. 接下来利用 $\boldsymbol{A}_{2k+1}^*$ 的 $(1,1)$ 位置的元素为 $|\boldsymbol{A}_{2k}|=1$, 以及 $\boldsymbol{A}_{2k+1}^*$ 为一个对称矩阵, 可以推出 $\boldsymbol{A}_{2k+1}^*=((-1)^{i+j})_{n\times n}$.)

解. 当 $n=2k$ 为偶数时, 由提示知 $\boldsymbol{A}_{2k}^*=\boldsymbol{A}_{2k}^{-1}$. 不难验证

$$\boldsymbol{A}_{2k}^*=\boldsymbol{A}_{2k}^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1&\cdots&1&-1\\1&0&-1&\cdots&-1&1\\-1&1&0&\cdots&1&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&1&-1&\cdots&0&-1\\1&-1&1&\cdots&1&0\end{pmatrix}.$$

当 $n=2k+1$ 为奇数时, 由 $\boldsymbol{A}_{2k+1}\boldsymbol{A}_{2k+1}^*=|\boldsymbol{A}_{2k+1}|\boldsymbol{I}$ 可知, $\boldsymbol{A}_{2k+1}^*$ 的每个列向量都是方程 $\boldsymbol{A}_{2k+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解. 我们发现 $(1,-1,1,-1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是这个方程的一个解. 又由于 $\boldsymbol{A}_{2k+1}$ 的行列式为 0 而其 $(1,1)$ 元的行列式为 1, 故 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}_{2k+1})=n-1$, 从而方程 $\boldsymbol{A}_{2k+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间维数为 $n-(n-1)=1$, 解空间就是由 $(1,-1,1,-1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 生成的. 所以再由 $(\boldsymbol{A}_{2k+1}^*)_{ii}=1$ 可得

$$\boldsymbol{A}_{2k+1}^*=\begin{pmatrix}1&-1&1&\cdots&-1&1\\-1&1&-1&\cdots&1&-1\\1&-1&1&\cdots&-1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\-1&1&-1&\cdots&1&-1\\1&-1&1&\cdots&-1&1\end{pmatrix}.$$

□

致谢

感谢各助教对本文档的校对工作和内容补充，感谢申伊埖老师以及同学对助教工作的支持。