第13章综合习题以及其它补充习题

以下是第13章综合习题

1. 设 $f(x)\geqslant 0$ 并在 $[0,+\infty)$ 的任何有限区间上可积, 数列 $\{a_n\}$ 单调增且 $a_0=0$, $a_n\to+\infty\ (n\to\infty)$. 证明积分 $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛于 l 当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛于 l. (**注意, 书上题目存在输入错误: 应该是"$\{a_n\}$ 单调增且 $a_0=0, a_n\to+\infty\ (n\to\infty)$".)**

证明 因为 $f(x)\geqslant 0$, 所以可利用非负函数积分和正项级数有界性即可, 或利用收敛性的Cauchy收敛准则

对任意的 $A>0$, 因 $a_n\to\infty$, 所以存在 a_n 使得 $a_{n-1}\leqslant A\leqslant a_n$.

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n-1}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

所以任何有限区间上积分有界当且仅当级数部分和有界. 即可证得结果.

2. 证明积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$$

收敛.

该题提供了一个 $[0,+\infty)$ 上非负、连续、无界、$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$, 但是收敛的例子.

证明 取 $a_n=n\pi$, $n=0,1,\cdots$, 因此 a_n 满足上题条件, 得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi}\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$. 利用 $\sin^2 x$ 是周期 π 的偶函数这个条件,其通项满足

$$\begin{aligned}
0\leqslant\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}&\leqslant(n+1)\pi\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi)^6\sin^2 u}\\
&=2(n+1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi)^6\sin^2 u}\\
&\leqslant 2(n+1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 u+n^6\pi^6\sin^2 u}\\
&=\frac{2(n+1)\pi}{n^3\pi^3}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}(n^3\pi^3\tan u)}{1+(n^3\pi^3\tan u)^2}\\
&=\frac{2(n+1)\pi}{n^2\pi^3}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\leqslant\frac{n+1}{n^3\pi}.
\end{aligned}$$

因此级数收敛, 根据上题结果, 得积分收敛.

综合习题第 3 题直接求导即可.

4. 证明n 阶Bessel 函数

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

满足下列Bessel 方程：

$$x^2J_n''(x)+J_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0$$

证明 二元函数 $f(\varphi,x)=\cos(n\varphi-x\sin\varphi)$ 关于 x 的一阶和二阶偏导数

$$f_x'(\varphi,x)=\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\sin\varphi;\ \ f_{xx}''(\varphi,x)=-\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\sin^2\varphi$$

连续. 因此可在积分号下对 x 求导. 利用分部积分得

$$\begin{aligned}J_n'(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=-\frac{1}{\pi}\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\cos\varphi\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)(n-x\cos\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi-\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi.\\J_n''(x)&=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)&=\frac{nx}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi-\frac{x^2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.\\&=\frac{nx}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi-x^2J_n(x).\end{aligned}$$

因为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)(n-x\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial\sin(n\varphi-x\sin\varphi)}{\partial\varphi}d\varphi=0$$

所以

$$\frac{nx}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{n^2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi=n^2J_n(x)$$

因此有

$$x^2J_n''(x)+J_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0.$$

5. 证明: 对任意值 u, 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

证明 令 $\psi(u) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x)\,\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}
\psi'(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}(\cos x\cos(u\sin x) - \sin x\sin(u\sin x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x + x)\,\mathrm{d}x \\
\psi''(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x + 2x)\,\mathrm{d}x \\
\psi^{(n)}(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x + nx)\,\mathrm{d}x \\
\cdots &= \cdots
\end{aligned}$$

显然每一步求导都是合理的, 同时对于任意给定的 u , 存在 M, 使得 $|u| \leqslant M$, $|\psi^{(n)}(u)| \leqslant \mathrm{e}^M$, 所以$\psi(u)$ 在$[-M, M]$ 中可以展开成Taylor 级数.

注意到 $\psi(0) = 1,\ \psi^{(n)}(0) = 0,\ n = 1, 2, \cdots$, 所以对任意的 u, 有

$$\psi(u) = \psi(0) = 1.$$

该题有一种更巧妙的证明, 将积分化为曲线积分并利用Green公式.

视 x 为角度, 令 $\xi = \cos x, \eta = \sin x, \Longrightarrow\ \mathrm{d}\xi = -\sin x\,\mathrm{d}x,\ \ \mathrm{d}\eta = \cos x\,\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}
\psi'(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}(\cos x\cos(u\sin x) - \sin x\sin(u\sin x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\xi^2+\eta^2=1} e^{u\xi}(\cos(u\eta)\,\mathrm{d}\eta + \sin(u\eta)\,\mathrm{d}\xi) \\
&= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant 1} \left(\frac{\partial(e^{u\xi}\cos(u\eta))}{\partial\xi} - \frac{\partial(\mathrm{e}^{u\xi}\sin(u\eta))}{\partial\eta}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = 0
\end{aligned}$$

所以 $\psi(u) = \psi(0) = 1$.

6. 证明积分$\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin 3x}{x+u}\mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}x$ 关于 u 在$[0, +\infty)$ 上一致收敛.

证明 利用Dirichlet 判别法, 不难验证在任何有限区间上

$$\left|\int_a^b \sin 3x\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{3}$$

对 u 一致有界. 关键是要验证 $f(x,u)=\dfrac{\mathrm{e}^{-ux}}{x+u}$ 对任何 $u\geqslant 0$ 是 x 的单调函数且当 $x\to+\infty$ 时, 关于 $u\geqslant 0$ 一致趋于零.

因为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-ux}\left(\frac{u(x+u)+1}{(x+u)^2}\right)\leqslant 0\ (x\geqslant 0,u\geqslant 0)$$

因此 $f(x,u)$ 是 x 的单调函数.

对任何 $u\geqslant 0$,

$$|f(x,u)|=\left|\frac{\mathrm{e}^{-ux}}{x+u}\right|\leqslant\frac{1}{x}\to 0\ (x\to+\infty)$$

所以$f(x,u)=\dfrac{\mathrm{e}^{-ux}}{x+u}$ 对任何 $u\geqslant 0$ 是 x 的单调函数且当 $x\to+\infty$ 时, 关于 $u\geqslant 0$ 一致趋于零.

7. 证明积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$$

关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛, 但在 $[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$ 上一致收敛.

证明不一致收敛往往比证明一致收敛还要困难, 只有对一致收敛性概念很好的理解, 才能根据题意解决问题.

证明 假如积分在 $u\geqslant 0$ 一致收敛, 那么根据一致收敛的Cauchy收敛准则, 对任意 $\varepsilon>0$, 一定存在 $M>0$, 使得对任意的 $A>M$, $A'>M$, 有

$$\left|\int_A^{A'}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

对任何 $u\geqslant 0$ 成立, 因此

$$\sup_{u\geqslant 0}\left|\int_A^{A'}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon.$$

对任意的 $A>M$, 取 $A'=\alpha A$, $u=\dfrac{1}{A}$,其中 $1<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, 那么

$$\begin{aligned}\varepsilon&\geqslant\sup_{u\geqslant 0}\left|\int_A^{A'}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right|\\&\geqslant\left|\int_A^{A'}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right|_{u=1/A}=\left|\int_A^{\alpha A}\frac{x\cos\frac{x}{A}}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right|\\&=\int_1^{\alpha}\frac{A^2t\cos t}{A^2t^2+a^2}\,\mathrm{d}t\geqslant\cos\alpha\int_1^{\alpha}\frac{A^2t}{A^2t^2+a^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\cos\alpha\ln\frac{A^2\alpha^2+a^2}{A^2+a^2}\end{aligned}$$

令 $A \to +\infty$, 就有

$$\varepsilon \geqslant \cos\alpha \ln\alpha > 0.$$

这里用到了$\cos t$ 在 $[1,\alpha] \subset \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调减. 上述结论与 ε 是任意整数矛盾, 因此积分在 $u \geqslant 0$ 不一致收敛. 在 $u \geqslant \delta > 0$ 上的一致收敛性可仿照书上例13.4.3的方法证明.

8. 证明积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \ (a>0)$$

关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛.

证明方法与上题一样, 只是注意到$\sin x$**在** $[1,\alpha] \subset \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ **上单调增即可**.

9. 设 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明函数

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ux\,\mathrm{d}x$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

本题要证明函数 $\varphi(u)$ **在** $|u|<\infty$ **上一致连续, 即对任意的** $\varepsilon>0$, **要找到这样的** $\delta>0$, **使得对任何** u,u', **只要** $|u-u'|<\delta$, **就有** $|\varphi(u)-\varphi(u')|<\varepsilon$.

证明 因 $|f(x)\cos ux| \leqslant |f(x)|$, 所以积分 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ux\,\mathrm{d}x$ 关于 $|u|<\infty$ 一致收敛. 所以函数 $\varphi(u)$ 在 $|u|<\infty$ 有定义且连续. 下面要证 $\varphi(u)$ 是 $|u|<\infty$ 上一致连续函数.

$\forall\varepsilon>0$, 存在 $M>0$, 使得

$$\int_{-\infty}^{M} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{5}, \quad \int_{-\infty}^{-M} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{5},$$

记 $A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$, 取

$$0<\delta<\frac{\varepsilon}{5M(A+1)},$$

则对于任意的u, u', 当 $|u-u'|<\delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned}
|\varphi(u)-\varphi(u')| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ux\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos u'x\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_{-M}^{M} |f(x)||\cos ux-\cos u'x|\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_{-\infty}^{-M} |f(x)||\cos ux-\cos u'x|\,\mathrm{d}x + \int_{M}^{+\infty} |f(x)||\cos ux-\cos u'x|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{-M}^{M} |f(x)||x||u-u'|\,\mathrm{d}x + 2\int_{-\infty}^{-M} |f(x)|\,\mathrm{d}x + 2\int_{M}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant MA|u-u'| + \frac{4}{5}\varepsilon < \varepsilon.
\end{aligned}$$

这样就证明了 $\varphi(u)$ 的一致连续性.

该题的证明方法是利用条件, 将无穷远的尾巴砍掉, 然后在有限区间$[-M, M]$ **上估计.**

10. 证明函数

$$f(x)=\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^x}\,\mathrm{d}t$$

在 $[0,1)$ 上连续.

证明 注意该题积分在 $t=n\pi$ 都是瑕点, 因此需要分段考虑.利用第 1 题结果, 取 $a_n=n\pi$, 因此

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^x}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^x}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-u-n\pi}}{|\sin u|^x}\,\mathrm{d}u \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}\right)\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{|\sin u|^x}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sin^x u}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

因此, 只要证明瑕积分 $\int\limits_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sin^x u}\,\mathrm{d}u$ 在 $0\leqslant x<1$ 收敛且连续即可. 因为

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sin^x u} \sim \frac{1}{u^x} \quad u\to 0^+ \\
&\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sin^x u} \sim \frac{1}{(\pi-u)^x} \quad u\to \pi^-
\end{aligned}$$

所以瑕积分

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sin^x u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sin^x u}\,\mathrm{d}u + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sin^x u}\,\mathrm{d}u$$

在 $0 \leqslant x < 1$ 收敛.

$\forall x_0 \in [0,1)$, $\exists \delta > 0$, 使得 $0 \leqslant x_0 < 1-\delta$, 且

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^{1-\delta}} \sim \frac{1}{t^{1-\delta}} \quad (t \to 0^+)$$

在 $x \in [0, 1-\delta]$ 上, 有

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^x} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^{1-\delta}},$$

所以由 Weierstrass 定理, $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^x}\,\mathrm{d}t$ 在 $[0,1-\delta]$ 上一致收敛, 被积函数显然是x 的连续函数, 这样就得到 $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^x}\,\mathrm{d}t$ 在 $[0,1-\delta]$ 上连续, 同理可证 $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^x}\,\mathrm{d}t$ 在 $[0,1-\delta]$ 上也连续, 因此函数 $f(x)$ 在 $[0,1-\delta]$ 上连续, 推出在 x_0 连续, 由于 $0 \leqslant x_0 < 1$ 的任意性, 得 $f(x)$ 在$[0,1)$ 上连续.

11. 证明

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \ln\sqrt{2\pi}.$$

证明 对 $0 < x < 1$, 在余元公式两边取对数并积分

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\pi\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \ln\sin\pi x\,\mathrm{d}x$$

对左边第二个积分换元：

$$2\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \ln\pi - \int_0^1 \ln\sin\pi x\,\mathrm{d}x = \ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln\sin x\,\mathrm{d}x$$

下面计算右边的积分

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \ln\sin x\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin 2x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\ln 2\end{aligned}$$

因此得

$$\int_0^{\pi} \ln \sin x \, \mathrm{d}x = -\pi \ln 2$$

最后得

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln \pi + \ln 2) = \ln \sqrt{2\pi}.$$

12. 证明

$$\int_0^1 \sin \pi x \ln \Gamma(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\ln \frac{\pi}{2} + 1\right).$$

证明 类似第11题, 有

$$\int_0^1 \sin \pi x \ln \Gamma(x) \, \mathrm{d}x + \int_0^1 \sin \pi x \ln \Gamma(1-x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sin \pi x \ln \pi \, \mathrm{d}x - \int_0^1 \sin \pi x \ln \sin \pi x \, \mathrm{d}x..$$

$$\Longrightarrow 2\int_0^1 \sin \pi x \ln \Gamma(x) \, \mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi} \ln \pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \ln \sin x \, \mathrm{d}x.$$

下面计算右边的积分.

$$\int_0^{\pi} \sin x \ln \sin x \, \mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right) \, \mathrm{d}x$$

令 $\sin \frac{x}{2} = u$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin x \ln \sin x \, \mathrm{d}x &= 4\int_0^1 u \ln(2u\sqrt{1-u^2}) \, \mathrm{d}u \\ &= 4\int_0^1 u \left(\ln 2 + \ln u + \frac{1}{2}\ln(1-u^2)\right) \, \mathrm{d}u \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

这里要注意积分

$$\int_0^1 u \ln(1-u^2) \, \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1-u^2) \, \mathrm{d}(1-u^2) = -\int_0^1 u \, \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}.$$

将上列结果代入即可得

$$\int_0^1 \sin \pi x \ln \Gamma(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\ln \frac{\pi}{2} + 1\right).$$

13. 证明

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3 - \cos x}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

证明 利用三角函数半角公式$\cos x=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$, 得 $3-\cos x=2\left(1+\sin^2\frac{x}{2}\right)$. 令

$$u=\sin^2\frac{x}{2},\Longrightarrow \mathrm{d}u=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{u(1-u)}\,\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-\cos x}}&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(1+u)u(1-u)}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2u(1-u^2)}}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^{3/4}(1-t)^{1/2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 t^{1/4-1}(1-t)^{1/2-1}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(2^{1/2-1}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\\
&=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).
\end{aligned}$$

这里, 作了换元 $t=u^2$ 以及利用了加倍公式.

14. 设 $\varphi(x)$ 是$(0,+\infty)$ 上正的、严格递减的连续函数, 且

$$\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=+\infty,\quad \int_0^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x=1,$$

又设 $x=\psi(y)$ 是 $y=\varphi(x)$ 的反函数. 求证:存在 $p\in(0,1)$, 使得

$$\int_0^p\varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^p\psi(y)\,\mathrm{d}y=1+p^2$$

证明 分如下步骤:

(1). 因为积分 $\int\limits_0^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $\varphi(x)$ 严格递减, 因此

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0,$$

否则, 必存在 $\alpha>0$, 使得 $\varphi(x)\geqslant\alpha$ $(0<x<+\infty)$, 这样

$$\int_0^A\varphi(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\alpha A\to+\infty.$$

推得积分发散, 因此矛盾.

(2). 因为 $\varphi(x)$ 连续, 严格递减, 所以

$$\lim_{x\to 0^+}(\varphi(x)-x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}(\varphi(x)-x)=-\infty$$

因此在$(0,+\infty)$ 上存在唯一的不动点 $\varphi(p)=p$. 且在 $0<x<p$ 上有 $\varphi(x)>p$, 在 $x>p$ 上有 $\varphi(x)<p$. 该不动点也是反函数$x=\psi(y)$的不动点 $p=\psi(p)$.

(3). 因为

$$1>\int_0^p\varphi(x)\,\mathrm{d}x>\int_0^p p\,\mathrm{d}x=p^2$$

所以 $p\in(0,1)$.

(4). 注意到 $y=\varphi(x)$ 和反函数 $x=\psi(y)$ 分别在$0<x<+\infty$ 和 $0<y<+\infty$ 上的积分是同一条曲线在Oxy 第一象限与 x 轴和 y 轴围成的开口曲边三角形面积, 因此

$$\int_0^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x=1,\quad \int_0^{+\infty}\psi(y)\,\mathrm{d}y=1$$

且 $\int\limits_0^p\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 是y 轴、x 轴上 $[0,p]$、直线 $x=p$ 以及函数 $y=\varphi(x)$ 围成的面积. 这块面积等于$[0,p]\times[0,p]$ 的面积与 $\psi(y)$ 在y 轴上 $[p,+\infty)$ 上覆盖的面积, 即

$$\int_0^p\varphi(x)\,\mathrm{d}x=p^2+\int_p^{+\infty}\psi(y)\,\mathrm{d}y$$

由此推出

$$\int_0^p\varphi(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^p\psi(y)\,\mathrm{d}y=1+p^2.$$

15. 设 $f\Big|_{[0,+\infty)}$ 连续, 且$\int_0^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明函数

$$g(x)=f(x)-2\mathrm{e}^{-x}\int_0^x\mathrm{e}^tf(t)\,\mathrm{d}t\quad(x\geqslant 0)$$

满足

$$\int_0^{+\infty}g^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 令 $h(x)=\int_0^x\mathrm{e}^tf(t)\,\mathrm{d}t\ \ (x\geqslant 0),\quad h(0)=0$ 则

$$g(x)-f(x)=-2\mathrm{e}^{-x}h(x),$$
$$g(x)+f(x)=2\mathrm{e}^{-x}(h'(x)-h(x)),$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow g^2(x)-f^2(x) &= -4\mathrm{e}^{-2x}h(x)(h'(x)-h(x))\\ &= -2\left(\mathrm{e}^{-2x}h^2(x)\right)'\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int_0^X g^2(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^X f^2(x)\,\mathrm{d}x=-2\mathrm{e}^{-2x}h^2(x)\Big|_0^X$$

下面的问题是如何证明

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

因为$\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 所以对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $A>0$, 使得当 $X>A$ 时, 有

$$\int_A^X f^2(x)\,\mathrm{d}x<\varepsilon^2,$$

$$\begin{aligned}\left(e^{-X}\int_A^X e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 &\leqslant \mathrm{e}^{-2X}\int_A^X \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t\int_A^X f^2(t)\,\mathrm{d}t\\ &< \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2(X-A)})\varepsilon^2<\varepsilon^2\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left|e^{-X}\int_A^X e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right|<\varepsilon.$$

记 $M=\displaystyle\int_0^A \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t$, 则存在 $B>0$ 使得当 $X>B$ 时有$|\mathrm{e}^{-X}M|<\varepsilon$, 因此当 $X>B$ 时有

$$\left|\mathrm{e}^{-X}\int_0^X e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\mathrm{e}^{-X}\int_0^A e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right|+\left|\mathrm{e}^{-X}\int_A^X e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right|<2\varepsilon.$$

以下是部分补充题目

1. 求下列积分的值：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^8)^2}.$$

解 做变换 $u=x^8$, 或 $x=u^{1/8}$, 因此 $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8}u^{1/8-1}\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^8)^2} &= \frac{1}{8}\int_0^{+\infty}\frac{u^{1/8-1}}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{8}\mathrm{B}\left(\frac{1}{8},\frac{15}{8}\right)=\frac{1}{8}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{15}{8}\right)}{\Gamma(2)}\\ &= \frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}+1\right)=\frac{7}{64}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)\\ &= \frac{7}{64}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{64}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{8}}.\end{aligned}$$

这里用到了B 函数的另一种表示：

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}}\,\mathrm{d}u.$$

这个表示如果记不住, 可通过变换

$$t=\frac{1}{1+u},\Longrightarrow 1-t=\frac{u}{1+u},\quad \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2},$$

直接推导出来. 最后, 通过

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

算出

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

代入,即可的最后结果.

2. 设 p,q 都是正数，求 $I=\int_0^1 x^q\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\,\mathrm{d}x$

解 做变换 $x=\mathrm{e}^{-t}$,

$$\int_0^1 x^q\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-qt}t^p\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}t^p\mathrm{e}^{-(q+1)t}\,\mathrm{d}t.$$

再令 $(q+1)t=u$

$$I=\frac{1}{(q+1)^{p+1}}\int_0^{\infty}u^p\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{p\Gamma(p)}{(q+1)^{p+1}}$$

3. 证明下列积分收敛，定义的含参变量函数在$(0,+\infty)$ 上可导

$$F(t)=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\ln(1+tx)\,\mathrm{d}x$$

证明：该题的关键是在应用 Dirichlet 定理判别收敛时, 如何拆分被积函数.

把积分写成

$$F(t)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\frac{\ln(1+tx)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

这样可以看出 $F(t)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛， $\frac{\ln(1+tx)}{\sqrt{x}}$ 当 x 充分大时对 x 单调减趋于零。

被积函数 $f(x,t)=\frac{\sin x}{x}\ln(1+tx)$ 对 t 有连续的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\sin x}{1+tx}$, $(x\geqslant 0,t>0)$.

在 t 的任何闭子区间 $[\alpha,\beta]$ 上，根据 Dirichlet 判别法 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{1+tx}$ 关于 t 在$[\alpha,\beta]$ 一致收敛，因此得到 $F(t)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上可导，由$[\alpha,\beta]$ 的任意性，得到在 $t>0$ 可导.

4. 设 $f(x):(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ 上单调减有界的连续函数。求

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x\quad(0<a<b).$$

解 注意到该题没有假设积分收敛, 也没有假设函数可导, 因此无法将 $f(ax)-f(bx)$ 表示为

$$\frac{f(ax)-f(bx)}{x}=\int_a^b f'(ux)\,\mathrm{d}u$$

具体做法如下：设

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\alpha,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\beta.$$

对任意小的 $\varepsilon>0$ 和任意大的 $A>0$, 在$[\varepsilon,A]$ 上 $f(ax),f(bx)$ 单调减有界, 因此可积，$\dfrac{1}{x}$ 可积，所以

$$\frac{f(ax)}{x},\ \frac{f(bx)}{x}$$

可积.

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_{a\varepsilon}^{aA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{b\varepsilon}^{bA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{aA}^{bA}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}f(b\varepsilon)\ln\frac{b}{a}\leqslant\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant f(a\varepsilon)\ln\frac{b}{a}\\ f(bA)\ln\frac{b}{a}\leqslant\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant f(aA)\ln\frac{b}{a}\end{cases}$$

令 $\varepsilon\to0^+$, $A\to+\infty$, 得积分收敛且

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=(\alpha-\beta)(\ln b-\ln a).$$

以下给出几个与凸性相关的不等式证明

1. Jensen 不等式（第一册习题3.5第一题），设 $f(x)$ 是区间 I 上二阶可导的凸函数, $x_1,\cdots,x_n\in I$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1,\alpha_k>0$, 则

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n)$$

证明 因为 $f''\geqslant 0$, 令 $\overline{x}=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$, 在 $\overline{x}$ 作Taylor展开

$$\begin{aligned}f(x_k)&=f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x_k-\overline{x})+\frac{f''(\xi_k)}{2!}(x_k-\overline{x})^2\\&\geqslant f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x_k-\overline{x}),\ \ k=1,\cdots,n.\end{aligned}$$

两边乘以α_k 并求和得

$$\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n)\geqslant f(\overline{x})+f'(\overline{x})(\overline{x}-\overline{x})=f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)$$

2. Hölder 不等式（第一册第3章综合习题第20题）, 设 $x_1,\cdots,x_n$ 和 $y_1,\cdots,y_n$ 非负; $p>1,q>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$（共轭条件）, 则

$$\sum_{k=1}^n x_ky_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

证明 令 $f(u)=u^p,\ u\geqslant 0.\ f''(u)=p(p-1)u^{p-2}\geqslant 0$, 因此 $f(u)$ 是凸函数. 取

$$\alpha_k=\frac{y_k^q}{\sum_{i=1}^n y_i^q},\ \ u_k=x_ky_k^{1-q},\ \ k=1,\cdots,n$$

代入Jensen 不等式

$$\begin{aligned}&f(\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_nu_n)\leqslant\alpha_1f(u_1)+\cdots+\alpha_nf(u_n)\\\Longrightarrow&\left(\frac{\sum_{k=1}^n x_ky_k}{\sum_{k=1}^n y_k^q}\right)^p\leqslant\sum_{k=1}^n\left(\frac{y_k^q}{\sum_{i=1}^n y_i^q}(x_ky_k^{1-q})^p\right)=\frac{\sum_{k=1}^n x_k^p}{\sum_{k=1}^n y_k^q}.\end{aligned}$$

这里我们用到了 $p+q-pq=0$. 两边开 p 次根即得结果.

3. 积分形式的 Hölder 不等式, 设 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$ 上可积, p,q 满足 $p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则

$$\int_a^b|f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b|f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

证明 做分割 $T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 利用 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n|f(\xi_k)||g(\xi_k)|\Delta x_k&=\sum_{k=1}^n|f(\xi_k)|\Delta x_k^{\frac{1}{p}}|g(\xi_k)|\Delta x_k^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant\left(\sum_{k=1}^n|f(\xi_k)|^p\Delta x_k\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n|g(\xi_k)|^q\Delta x_k\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

令$|T| \to 0$ 即可得积分形式的Hölder 不等式.

4. 习题13.5, 第 6 题: 证明$\ln\Gamma(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

证明 首先回顾关于凸函数的定义: 设 $f(x)$ 是区间 I 上的函数, 如果任给 I 中两点 x_1, x_2, 以及任意 $\alpha \in (0,1)$ 有

$$f\left(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\right) \leqslant \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2),$$

那么称函数是区间 I 上的凸函数.

设 $p>1$ 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 取 $\alpha=\dfrac{1}{p}$, 因此 $1-\alpha=\dfrac{1}{q}$. 这样, 凸函数定义的等价形式为: 对任意 $x_1, x_2 \in I$ 有

$$f\left(\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}\right) \leqslant \frac{f(x_1)}{p}+\frac{f(x_2)}{q}.$$

为了证明 $\ln\Gamma(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数, 首先有对任意 $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{x_1-1}{p}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{p}}\right)\left(t^{\frac{x_2-1}{q}}e^{-\frac{t}{q}}\right)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \left(\int_0^{+\infty} t^{x_1-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty} t^{x_2-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\Gamma(x_1)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\Gamma(x_2)\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

这里用到了积分形式的 Hölder 不等式（见第 3 题）

$$\Longrightarrow \ln\Gamma\left(\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}\right) \leqslant \frac{1}{p}\ln\Gamma(x_1)+\frac{1}{q}\Gamma(x_2),$$

即, $\ln\Gamma(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.