第32讲：非负项级数的审敛法 2023.5.22.

(一) 复习 (令 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $n\in N^*$)

(1). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ con $\Leftrightarrow$ Cauchy准则：$\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in N^*$ 当 $n\geq n_0$ 时且 $m>n$ 时，恒有 $|S_m-S_n|<\varepsilon$. 取 $m=n+p$, $\forall p\in N^*$ 则 $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$, 即 $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$, $\forall p\in N^*$. 即对非负项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，若从某项开始后，任取一段的和可任意小，则这个非负项级数必收敛。这就是级数收敛的Cauchy准则，也是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件。

(2). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $\Longrightarrow$ $a_n\longrightarrow 0$ $(n\to\infty)$. (级数收敛的必要条件)

(3). $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ con，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也 con. 称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为绝对收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con. 但 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ div. 称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为条件收敛。

(4) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con，则对 $\forall m>1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^m$ 都收敛。

(从 $m\in[1,+\infty)$ 中取值的任意性知，由一个收敛的正项级数，便可得到无数个收敛的正项级数)

证(4)：已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ con，$\because a_n \to 0\ (n\to\infty)$，$\Rightarrow \forall 0<\varepsilon<1$，$\exists n_0\in N^*$

当 $n\geq n_0$ 时，$0\leq a_n<\varepsilon<1$，对 $\forall m>1$，有 $0\leq a_n^m<a_n^1\ (n\geq n_0)$

且 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ con $\Rightarrow \sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n^m$ con（比较法）$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^m$ con.

(5) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\ (a_n\geq 0)$ 满足：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ con；

若 $\rho>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ div，若 $\rho=1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性不确定（根值法）

证(5)：(1°) 当 $\rho<1$ 时，取 $\varepsilon>0$，设 $\rho+\varepsilon=\rho_0<1$，从 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho\Rightarrow\exists n_0\in N^*$

当 $n\geq n_0$ 时，$0\leq\sqrt[n]{a_n}<\rho+\varepsilon=\rho_0\Rightarrow a_n<\rho_0^n\ (n\geq n_0)$，且 $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\rho_0^n=\dfrac{\rho_0^{n_0}}{1-\rho_0}$.

$\therefore \sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ con $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ con.

(2°) 当 $\rho>1$ 时，取 $\varepsilon>0$ 设 $\rho-\varepsilon=\rho_0>1$，从 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho\Rightarrow\exists n_0\in N^*$

当 $n\geq n_0$ 时，$\sqrt[n]{a_n}>\rho-\varepsilon=\rho_0>1\Rightarrow a_n>\rho_0^n\ (n\geq n_0)$ 且 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\rho_0^n$ div.

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\rho_0^n$ div，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ div；

(3°) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ div，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ con，但 ρ 都等于1。

(6). 凡可用比值法的正项级数，都可用根值法，

但反之未必。（反例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{2^n}$）

证(6)：(1°) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$ (常数)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ $\underline{\text{取} a_0=1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$. 因此用

比值法收敛(发散)的，用根值法同样收敛(发散).

(2°) 对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$，用根值法：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3+(-1)^n}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$ con；但若用比

值法，则因 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\frac{3+(-1)^{n+1}}{3+(-1)^n}$ 为 $1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4}, \cdots$.

即 $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ 振荡发散，得不到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho=\frac{1}{2}<1$.

(7). Cauchy 积分判别法：

若函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 中 C，非负，单减，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与

反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 同敛散。

证(7)：对 $\forall n\in N^*$，当 $n\le x\le n+1$ 时，$f(n)\ge f(x)\ge f(n+1)\ge 0$

$\Rightarrow \int_n^{n+1}f(n)dx=f(n)\ge\int_n^{n+1}f(x)dx\ge\int_n^{n+1}f(n+1)dx=f(n+1)$，$n=1,2,3,\cdots$

相加得：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)\ge\int_1^{+\infty}f(x)dx\ge\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n+1)$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ con.

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)\le M$. $(M>0)\Rightarrow$ 对 $\forall b>1$，$\int_1^b f(x)dx$ 有上界且单增

从而 $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)dx$ 收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ div，则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n+1)$ div，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n+1) = +\infty \Rightarrow \int_1^b f(x)dx$ 无界，从而 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ div。

例1. 判断下列级数的敛散性：($\alpha>0$，常数).

(1). $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$； (2). $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln(\ln n))^{1+\alpha}}$，(3). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(e^{\frac{1}{n^2}}-1)$，

(4). $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\lambda n}{n+1}\right)^n$ ($\lambda>0$ 常数). (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$，(6). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+4)}}$

解(1)：令 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$，$x\in[2,+\infty)$，则 $f(x)\in[2,+\infty)$ 上C，非负，单调递减，且 $\int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}} = \int_2^{+\infty}\frac{d\ln x}{(\ln x)^{\alpha}} \xlongequal{\ln x=u} \int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{du}{u^{\alpha}}$

当 $\alpha>1$ 时收敛；当 $\alpha\le 1$ 时 div. 从而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ 当 $\alpha>1$ 时 con，

当 $\alpha\le 1$ 时 div.

解(2) 令 $f(x)=\frac{1}{x\ln x(\ln(\ln x))^{1+\alpha}}$，则 $f(x)\in[3,+\infty)$ 上C，非负，单调递减，且 $\int_3^{+\infty} f(x)dx = \int_3^{+\infty}\frac{d(\ln\ln x)}{(\ln(\ln x))^{1+\alpha}} \xlongequal{\ln(\ln x)=u} \int_{\ln(\ln 3)}^{+\infty}\frac{du}{u^{1+\alpha}}$

当 $\alpha>0$ 时 con. 从而 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln(\ln n))^{1+\alpha}}$ con

(4).

解(3)：利用 $e^x-1\sim x\ (x\to0)$，$\Rightarrow e^{\frac{1}{n^2}}-1\sim\frac{1}{n^2}$，$(n\to\infty)$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ con. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(e^{\frac{1}{n^2}}-1)$ 绝对con.

(实际上，对 $\forall p>1$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(e^{\frac{1}{n^p}}-1)$ 都绝对收敛)

解(4)：$\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda n}{n+1}=\lambda$，故 $0<\lambda<1$ 时，原级数

收敛，当 $\lambda>1$ 时，原级数发散，当 $\lambda=1$ 时，$a_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n$

$=\left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{\frac{-n}{n+1}}\to e^{-1}=\frac{1}{e}\neq0\ (n\to\infty)$，从而，原级数div。

解(5)：$\because \frac{1}{n!}<\frac{1}{(n-1)n}\ (n\geq2)$ 且 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}$ 收敛于1，依比较法：

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛。(后面将证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛于 $e-1$)。

解(6)：$a_n=\frac{n+5}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+4)}}\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\ (n\to\infty)$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ con.

依比较法的极限形式知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+4)}}$ con.

(当 $p_m(n)$，$q_l(n)$ 分别是 m 次，l 次 n 的多项式时，只要 $l-m>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_m(n)}{q_l(n)}$ con)

(三). 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\ (a_n>0)$ 收敛的Leibniz判法：

只要 $a_n\downarrow0\ (n\to\infty)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ con.

证：令 $S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})$ 则 $S_{2n}\uparrow$.

且 $S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}\le a_1$，$\forall n\in N^*$.

从而 $\{S_{2n}\}$ 收敛. 令 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=A$（常数）. 则

$S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}\longrightarrow A+0\ (n\to\infty)$. $\therefore\{S_n\}$ 收敛于 A.

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=A$.（con）.

例2. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$ 是交错级数.

且 $a_n=\frac{1}{n}\downarrow 0\ (n\to\infty)$. 依 Leibniz 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$ 收敛，后面将证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ div. 因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 条件收敛。

推广：交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\lambda}}$ 当 $\lambda>1$ 时都绝对 con；当 $0<\lambda\le 1$ 时都条件 con.

(三) 黎曼的一个定理：

Th1：设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于 A，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A\ (A>0)$. 则任意重排 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的项，新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n$ 仍收敛于 A.

证：令 $A_n=\tilde{a}_1+\tilde{a}_2+\cdots+\tilde{a}_n$. 则 $A_n\uparrow$，且

$\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的一部分. 故 $A_n \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$.

即 $\{A_n\}$ 单调有上界. 故 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 存在. 设 $\lim_{n\to\infty} A_n = a$.

则 $a \le A$; 而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也是 $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ 重排后的一种, 即有 $A \le a$.

从而 $a = \lim_{n\to\infty} A_n = A = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Th2: 若任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛于 A, (A 为常数). 则任意重排 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ 仍收敛于 A。

证 Th2: 设 $a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2} = \begin{cases} a_n, & a_n > 0 \\ 0, & a_n \le 0 \end{cases}$, $a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}$,

则 $a_n^- = \begin{cases} -a_n, & a_n < 0 \\ 0, & a_n \ge 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 0 \le a_n^+ \le |a_n| \\ 0 \le a_n^- \le |a_n| \end{cases}$ 且 $\begin{cases} a_n^+ + a_n^- = |a_n| \\ a_n^+ - a_n^- = a_n \end{cases}$

$\Rightarrow$ 依比较法, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 皆收敛. 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 皆为正项级数. 重排后, 仍有: $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^-$

$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$.

Th3. 若任意项级数条件收敛, 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{条件} A$, ($A$ 常数),

则 (1°) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$.

(20) 令 $\begin{cases} S_n^+ = a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_n^+ \\ S_n^- = a_1^- + a_2^- + \cdots + a_n^- \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n^+}{S_n^-} = 1$，即

S_n^+ 与 S_n^- 是等价无穷大。(ex7.1/13)

(30) 对条件收敛的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 进行重排，新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ 可能发散，也可能收敛到任意指定的常数 α。

- 证 7h3/(10). 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件 con 知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ con 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ div.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 中有一个收敛，比如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ con，则从 $a_n^+ - a_n^- = a_n$ $\Rightarrow a_n^- = a_n^+ - a_n \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 也 con. 再由 $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 也收敛，矛盾！

- 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都 div，即 $S_n^+ = a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_n^+ \uparrow$ 无上界，$S_n^- = a_1^- + a_2^- + \cdots + a_n^- \uparrow$ 无上界，从而 $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} S_n^+ = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty, \\ \lim\limits_{n\to\infty} S_n^- = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty, \end{cases}$

证 7h3/(20) $\because \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{S_n^+}{S_n^-} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n^+ - S_n^-}{S_n^-} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{S_n^-}$ $= \lim \dfrac{A}{+\infty} = 0$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n^+}{S_n^-} = 1$.

- 证 7h3/(30). $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \xrightarrow{\text{条件收敛}} \ln 2$.

按"一正接两负"的规律重排 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，则有

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\cdots$$

设此级数部分和为 S_n，则

$$S_{3n}=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{\ln 2}{2}.$$

且 $S_{3n-1}=S_{3n}+\frac{1}{4n}\longrightarrow\frac{1}{2}\ln 2+0=\frac{1}{2}\ln 2$.

$S_{3n-2}=S_{3n-1}+\frac{1}{4n-2}\to\frac{1}{2}\ln 2$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\ln 2$

即 $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\cdots=\frac{1}{2}\ln 2$.

利用：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\gamma_0+\ln n+\alpha_n$ （$\gamma_0\approx 0.5772,\ \alpha_n\to 0$）.

可得到：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 按"p正接q负"规律重排.（$p,q\in N^*$）

则新级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$。（严格证明见Th7.17）

（四）作业：EX7.1：2/(8),(12),(14),(15),(16),3；11；

12/(3),(5),(7)；13.