第五周作业参考

王睿、贺维易

2023 年 4 月 11 日

目录

一点说明

(i) 作业讲义部分题过程可能有省略。如对作业仍有疑问可以在群里或答疑课上讨论。

(ii) **作业讲义会随时间更新**。

(iii) 请及时核对自己在 BB 系统里的分数，如有问题请向对应的助教反馈。

(iv) 附录里的内容仅供有兴趣的同学参考，有可能涉及之后才会学习或课外的知识，不要求在现阶段掌握。

(v) 讲义最好用电脑打开，文档内置了链接功能，复习或查看指定的作业很方便。

成绩说明：成绩公式为

$$\text{score} = \begin{cases} 10 - k \cdot \max\{n - n_0, 0\} & \text{未迟交} \\ 5 & \text{迟交} \end{cases}$$

其中 n 为错题数，n_0 为容忍度；k 为系数，取决于当周作业的题量。第五周不考虑补充题共 15 题，$n = 15$，考虑到一些同学出现了计算失误、笔误、抄错题目等等情况，$n_0 = 3$；$k = 0.5$。对于一些不严格的证明，助教也会酌情给分。也意味着作业得到满分不代表作业没有问题，请认真查看自己的作业。

上述评分标准对每个助教都成立。

1 第五周作业

1.1 4 月 4 日布置的作业

1.1.1 教材习题 P114:21,26(1),34

习题 1 (教材习题 21)**.** 求以下排列的逆序数，并指出其奇偶性：
(1)$(6,8,1,4,7,5,3,2,9)$; (2)$(6,4,2,1,9,7,3,5,8)$;
(3)$(7,5,2,3,9,8,1,6,4)$.

解. 逆序数的定义参考书中 P92 **定义 4.3.2**，这里给出逆序数的计算是从排列的左向右数的。
(1)$\tau(s)=5+6+0+2+3+2+1+0+0=19$.
(2)$\tau(s)=5+3+1+0+4+2+0+0+0=15$.
(3)$\tau(s)=6+4+1+1+4+3+0+1+0=20$.

□

习题 2 (教材习题 26(1))**.** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，λ 是数，证明：
(1)$(\lambda\boldsymbol{A})^*=\lambda^{n-1}\boldsymbol{A}^*$;

证明. 此题可以直接从伴随矩阵的定义来证明。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 满足 $(\boldsymbol{A}^*)_{ji}=A_{ij}$，其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\ 2\cdots(i-1)(i+1)\cdots n\\1\ 2\cdots(j-1)(j+1)\cdots n\end{pmatrix}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式。这里特别区别了 $\boldsymbol{A}$ 和 A，以表明代数余子式不是矩阵而是数。

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\ 2\cdots(i-1)(i+1)\cdots n\\1\ 2\cdots(j-1)(j+1)\cdots n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i-1,1}&\cdots&a_{i-1,j-1}&a_{i-1,j+1}&\cdots&a_{i-1,n}\\a_{i+1,1}&\cdots&a_{i+1,j-1}&a_{i+1,j+1}&\cdots&a_{i+1,n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

对 $\lambda\boldsymbol{A}$ 而言，相当于把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素都乘 λ 倍，即

$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{A})\begin{pmatrix}1\ 2\cdots(i-1)(i+1)\cdots n\\1\ 2\cdots(j-1)(j+1)\cdots n\end{pmatrix}&=\begin{vmatrix}\lambda a_{11}&\cdots&\lambda a_{1,j-1}&\lambda a_{1,j+1}&\cdots&\lambda a_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\\lambda a_{i-1,1}&\cdots&\lambda a_{i-1,j-1}&\lambda a_{i-1,j+1}&\cdots&\lambda a_{i-1,n}\\\lambda a_{i+1,1}&\cdots&\lambda a_{i+1,j-1}&\lambda a_{i+1,j+1}&\cdots&\lambda a_{i+1,n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\\lambda a_{n1}&\cdots&\lambda a_{n,j-1}&\lambda a_{n,j+1}&\cdots&\lambda a_{nn}\end{vmatrix}\\&=\lambda^{n-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\ 2\cdots(i-1)(i+1)\cdots n\\1\ 2\cdots(j-1)(j+1)\cdots n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{A})^*_{ji} = (\lambda A)_{ij} &= (-1)^{i+j}(\lambda\boldsymbol{A})\begin{pmatrix}1\ 2\cdots(i-1)(i+1)\cdots n\\ 1\ 2\cdots(j-1)(j+1)\cdots n\end{pmatrix}\\ &= (-1)^{i+j}\lambda^{n-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\ 2\cdots(i-1)(i+1)\cdots n\\ 1\ 2\cdots(j-1)(j+1)\cdots n\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow (\lambda\boldsymbol{A})^* = \lambda^{n-1}\boldsymbol{A}^*\\ &= \lambda^{n-1}A_{ij} = (\lambda^{n-1}\boldsymbol{A}^*)_{ji}\end{aligned}$$

在完成伴随矩阵有关问题的时候，矩阵、行列式、数之间的关系一定要清晰。 □

习题 3 (教材习题 34)**.** 证明：初等矩阵具有以下性质：
(1)$\boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)\boldsymbol{T}_{ij}(\mu) = \boldsymbol{T}_{ij}(\lambda+\mu)$
(2)当$i \neq q$且$j \neq p$时,$\boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)\boldsymbol{T}_{pq}(\mu) = \boldsymbol{T}_{pq}(\mu)\boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)$
(3)$\boldsymbol{D}_i(-1)\boldsymbol{S}_{ij} = \boldsymbol{S}_{ij}\boldsymbol{D}_j(-1) = \boldsymbol{T}_{ji}(1)\boldsymbol{T}_{ij}(-1)\boldsymbol{T}_{ji}(1)$

证明. (1)

$$\begin{aligned}(1)\boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)\boldsymbol{T}_{ij}(\mu) &= \begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \mu & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \lambda+\mu & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix} = \boldsymbol{T}_{ij}(\lambda+\mu)\end{aligned}$$

(2) 本题只要与第一问相同，使用矩阵的形式表达也可简单地证明。这里用数学符号形式地证明：

$$\boldsymbol{T}_{ij}(\lambda) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\lambda}_{ij}, \boldsymbol{T}_{pq}(\mu) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\mu}_{pq}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)\boldsymbol{T}_{pq}(\mu) &= (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\lambda}_{ij})\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\mu}_{pq}\right) = \boldsymbol{I}+\boldsymbol{\lambda}_{ij}+\boldsymbol{\mu}_{pq}+\boldsymbol{\lambda}_{ij}\boldsymbol{\mu}_{pq} = \boldsymbol{I}+\boldsymbol{\lambda}_{ij}+\boldsymbol{\mu}_{pq}\\ &= \boldsymbol{I}+\boldsymbol{\lambda}_{ij}+\boldsymbol{\mu}_{pq}+\boldsymbol{\mu}_{pq}\boldsymbol{\lambda}_{ij} = \left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\mu}_{pq}\right)(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\lambda}_{ij}) = \boldsymbol{T}_{pq}(\mu)\boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}_{ij}$ 表示在第 i 行 j 列处有元素 λ、其余位置为 0 的矩阵，$\boldsymbol{\lambda}_{ij}\boldsymbol{\mu}_{pq} = \boldsymbol{0}$ 是由于 $j \neq p$；$\boldsymbol{\mu}_{pq}\boldsymbol{\lambda}_{ij} = \boldsymbol{0}$ 是由于 $q \neq i$。

(3) 这里展示第三种方法，可以借助矩阵对矩阵的作用以及被作用矩阵的任意性来证明矩阵相等。考

虑要证明的每一项都是 $m\times m$ 的矩阵，对 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的作用，将 $\boldsymbol{A}$ 分块成行向量，参考书 P103，有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_i(-1)\boldsymbol{S}_{ij}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{D}_i(-1)\boldsymbol{S}_{ij}\left(\boldsymbol{\beta}_1\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_i\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_j\cdots\ \boldsymbol{\beta}_m\right)^T \\
&= \boldsymbol{D}_i(-1)\left(\boldsymbol{\beta}_1\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_j\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_i\cdots\ \boldsymbol{\beta}_m\right)^T \\
&= \left(\boldsymbol{\beta}_1\ \cdots\ -\boldsymbol{\beta}_j\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_i\cdots\ \boldsymbol{\beta}_m\right)^T \\
\boldsymbol{S}_{ij}\boldsymbol{D}_j(-1)\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{S}_{ij}\boldsymbol{D}_j(-1)\left(\boldsymbol{\beta}_1\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_i\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_j\cdots\ \boldsymbol{\beta}_m\right)^T \\
&= \boldsymbol{S}_{ij}\left(\boldsymbol{\beta}_1\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_i\ \cdots\ -\boldsymbol{\beta}_j\cdots\ \boldsymbol{\beta}_m\right)^T \\
&= \left(\boldsymbol{\beta}_1\ \cdots\ -\boldsymbol{\beta}_j\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_i\cdots\ \boldsymbol{\beta}_m\right)^T \\
\boldsymbol{T}_{ji}(1)\boldsymbol{T}_{ij}(-1)\boldsymbol{T}_{ji}(1)\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{T}_{ji}(1)\boldsymbol{T}_{ij}(-1)\boldsymbol{T}_{ji}(1)\left(\boldsymbol{\beta}_1\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_i\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_j\cdots\ \boldsymbol{\beta}_m\right)^T \\
&= \boldsymbol{T}_{ji}(1)\boldsymbol{T}_{ij}(-1)\left(\boldsymbol{\beta}_1\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_i\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_j+\boldsymbol{\beta}_i\cdots\ \boldsymbol{\beta}_m\right)^T \\
&= \boldsymbol{T}_{ji}(1)\left(\boldsymbol{\beta}_1\ \cdots\ -\boldsymbol{\beta}_j\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_j+\boldsymbol{\beta}_i\cdots\ \boldsymbol{\beta}_m\right)^T \\
&= \left(\boldsymbol{\beta}_1\ \cdots\ -\boldsymbol{\beta}_j\ \cdots\ \boldsymbol{\beta}_i\cdots\ \boldsymbol{\beta}_m\right)^T
\end{aligned}
$$

因此可知 $\forall n, \boldsymbol{A}\in F^{m\times n}, \boldsymbol{D}_i(-1)\boldsymbol{S}_{ij}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}_{ij}\boldsymbol{D}_j(-1)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}_{ji}(1)\boldsymbol{T}_{ij}(-1)\boldsymbol{T}_{ji}(1)\boldsymbol{A}$。由于 $\boldsymbol{A}$ 的任意性，(可取 $n=1$，构造 m 个单位向量即可证明)，可得 $\boldsymbol{D}_i(-1)\boldsymbol{S}_{ij}=\boldsymbol{S}_{ij}\boldsymbol{D}_j(-1)=\boldsymbol{T}_{ji}(1)\boldsymbol{T}_{ij}(-1)\boldsymbol{T}_{ji}(1)$. □

1.1.2 补充习题 1,2,3,4,5

习题 4 (补充习题 1). 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 形如

$$
\begin{pmatrix}
 & 1 & & & \\
 & & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & 1 \\
a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1}
\end{pmatrix}
$$

求 $\det(\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})$，其中 $\lambda\in F$ 为标量。

解.

$$
\det(\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}
\lambda & -1 & & & \\
 & \lambda & -1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & \lambda & -1 \\
-a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & \lambda-a_{n-1}
\end{vmatrix}
$$

设行列式为 Δ_n，按第一列展开，有

$$
\Delta_n=\begin{vmatrix}
\lambda & -1 & & & \\
 & \lambda & -1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & \lambda & -1 \\
-a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & \lambda-a_{n-1}
\end{vmatrix}
=\lambda\begin{vmatrix}
\lambda & -1 & & \\
 & \ddots & \ddots & \\
 & & \lambda & -1 \\
-a_1 & \cdots & -a_{n-2} & \lambda-a_{n-1}
\end{vmatrix}
-a_0(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}
-1 & & & \\
\lambda & -1 & & \\
 & \ddots & \ddots & \\
 & & \lambda & -1
\end{vmatrix}
$$

$$
=\lambda\Delta_{n-1}-a_0(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}=\lambda\Delta_{n-1}-a_0
$$

$$
\Delta_{n-i}=\lambda\Delta_{n-i-1}-a_i, \Delta_2=\begin{vmatrix}
\lambda & -1 \\
-a_{n-2} & \lambda-a_{n-1}
\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-a_{n-1})-a_{n-2}=\lambda\Delta_1-a_{n-2}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \Delta_n = \lambda\Delta_{n-1} - a_0 &= \lambda(\lambda\Delta_{n-2} - a_1) - a_0 \\
&= \lambda^2\Delta_{n-2} - \lambda a_1 - a_0 \\
&= \cdots \\
&= \lambda^{n-1}\Delta_1 - \sum_{i=0}^{n-2}\lambda^i a_i \\
&= \lambda^{n-1}(\lambda - a_{n-1}) - \sum_{i=0}^{n-2}\lambda^i a_i = \lambda^n - \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i a_i
\end{aligned}
$$

□

习题 5 (补充习题 2)**.** *在这里，验证 Laplace 展开定理的一个特殊形式（有困难的同学可以参考教材上的定理 4.3.1）。设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$1 < k \le n$，对任意的 $1 \le i < j \le n$，记 D_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 删去 $1,k$ 行，并删去第 i,j 列后得到的 $n-2$ 阶方针的行列式。证明：*

$$
\det \boldsymbol{A} = \sum_{1\le i<j\le n} (-1)^{1+k+i+j} \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{ki} & a_{kj} \end{vmatrix} D_{ij}
$$

证明. $\boldsymbol{A}$ 对第一行展开有

$$
\det \boldsymbol{A} = \sum_{p=1}^{n} a_{1p}(-1)^{1+p}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 2\cdots(k-1)\ k\ (k+1)\cdots n \\ 1\ 2\cdots(p-1)(p+1)\cdots n \end{pmatrix}
$$

$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 2\cdots(k-1)\ k\ (k+1)\cdots n \\ 1\ 2\cdots(p-1)(p+1)\cdots n \end{pmatrix}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 去掉第一行与第 p 列的行列式，继续对 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 2\cdots(k-1)\ k\ (k+1)\cdots n \\ 1\ 2\cdots(p-1)(p+1)\cdots n \end{pmatrix}$ 按第 $k-1$ 行（对应 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 行）展开，有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 2\cdots(k-1)\ k\ (k+1)\cdots n \\ 1\ 2\cdots(p-1)(p+1)\cdots n \end{pmatrix} =& \sum_{q=1}^{p-1} a_{kq}(-1)^{k-1+q}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 2\cdots(k-1)\ (k+1)\cdots n \\ 1\ 2\cdots(q-1)(q+1)\cdots(p-1)(p+1)\cdots n \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{q=p+1}^{n} a_{kq}(-1)^{k-1+q-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 2\cdots(k-1)\ (k+1)\cdots n \\ 1\ 2\cdots(p-1)(p+1)\cdots(q-1)(q+1)\cdots n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

按照题中记号，可记为

$$
\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 2\cdots(k-1)\ k\ (k+1)\cdots n \\ 1\ 2\cdots(p-1)(p+1)\cdots n \end{pmatrix} = \sum_{q=1}^{p-1} a_{kq}(-1)^{k-1+q}D_{pq} + \sum_{q=p+1}^{n} a_{kq}(-1)^{k-1+q-1}D_{pq}
$$

代回 $\boldsymbol{A}$ 对第一行展开的表达式，有

$$\begin{aligned}\det\boldsymbol{A}&=\sum_{p=1}^{n}a_{1p}(-1)^{1+p}\left[\sum_{q=1}^{p-1}a_{kq}(-1)^{k-1+q}D_{pq}+\sum_{q=p+1}^{n}a_{kq}(-1)^{k-1+q-1}D_{pq}\right]\\&=\sum_{p,q=1,q<p}^{n}a_{1p}a_{kq}(-1)^{k+p+q}D_{pq}+\sum_{p,q=1,p<q}^{n}a_{1p}a_{kq}(-1)^{k+p+q+1}D_{pq}\\&=\sum_{p,q=1,q<p}^{n}a_{1p}a_{kq}(-1)^{k+p+q}D_{pq}+\sum_{p,q=1,q<p}^{n}a_{1q}a_{kp}(-1)^{k+q+p+1}D_{qp}\\&=\sum_{p,q=1,q<p}^{n}\left(a_{1q}a_{kp}-a_{1p}a_{kq}\right)(-1)^{k+q+p+1}D_{qp}\\&=\sum_{p,q=1,q<p}^{n}(-1)^{k+q+p+1}\begin{vmatrix}a_{1q}&a_{1p}\\a_{kq}&a_{kp}\end{vmatrix}D_{qp}=\sum_{1\le i<j\le n}(-1)^{1+k+i+j}\begin{vmatrix}a_{1i}&a_{1j}\\a_{ki}&a_{kj}\end{vmatrix}D_{ij}\end{aligned}$$

□

习题 6 (补充习题 3)**.** *（本题要求所有同学都完成）在这里，再考虑 Laplace 展开定理的另外一种特殊形式. 事实上, Laplace 展开定理的（复杂）证明就是以讨论形如这样的结果开始的。对于下面的分块矩阵, 证明相应的行列式公式, 其中* $\boldsymbol{A}\in F^{m\times m},\boldsymbol{D}\in F^{n\times n},\boldsymbol{C}\in F^{n\times m},\boldsymbol{B}\in F^{m\times n}$.

$$(i)\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}=\det\boldsymbol{A}\qquad(ii)\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\det\boldsymbol{D}$$
$$(iii)\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{D}=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$$

（提示: 在前两小问里分别对最后一行和第一行作展开, 在第三小问里可以利用前两小问的矩阵的乘法. 第三小问的公式要求熟记.）

证明. (i) 的证明是容易的：对最后一行/列展开，则除了第 $m+n$ 行 $m+n$ 列元素为 1，其余元素都为 0，因此

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}=1\times\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_{n-1}\end{pmatrix}+0\times\cdots=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_{n-1}\end{pmatrix}$$

不断重复这一过程，则有

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_{n-1}\end{pmatrix}=\cdots\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_1=1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=\det\boldsymbol{A}$$

(ii) 的证明与 (i) 类似，只不过变为对第一行做展开，依然有

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}=1\times\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{m-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C'}_{n\times m-1}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}+0\times\cdots=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{m-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C'}_{n\times m-1}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$$

不断重复这一过程，则有

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{m-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C'}_{n\times m-1}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\cdots\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_1=1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C'}_{n\times 1}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\det\boldsymbol{D}$$

(iii) 的证明可以参考教材 P93 例 4.3.5，或参考 20230406 讲义，假设 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$，以及

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{D}$$

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{D}$$

对 $\det \boldsymbol{A} = 0$ 的情况使用微扰法讨论。还可以对 m 使用归纳法，从 $m = 1$ 开始讨论证明。 □

习题 7 (补充习题 4)**.** 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的所有 2 阶代数余子式之和。

解. $\boldsymbol{A}$ 的所有 2 阶代数余子式可以一一对应到 $\boldsymbol{A}^*$ 中的所有元素。想要将 $\boldsymbol{A}^*$ 中的所有元素加和，可以考虑

$$\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

可以注意到 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行，可以联想到利用矩阵及其伴随矩阵的性质，即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}, \det(\boldsymbol{A}) = 1 \Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I}$$

利用矩阵分块，将 $\boldsymbol{A}$ 按行分为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$，有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{A}^* \\ \boldsymbol{\alpha}_3\boldsymbol{A}^* \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}$$

取等式两边对应的第一行，即得

$$\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{A}^*$$

代回求和的式子，有

$$\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{A}^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

□

习题 8 (补充习题 5)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 n 阶反对称方阵. 若 n 为奇数, 验证 $\boldsymbol{A}^*$ 是一个对称矩阵; 若 n 为偶数, 验证 $\boldsymbol{A}^*$ 是一个反对称矩阵。

证明. 利用伴随矩阵的定义即可。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 满足 $(\boldsymbol{A}^*)_{ji} = A_{ij}$，其中
$A_{ij} = (-1)^{i+j}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1\ 2 \cdots (i-1)(i+1) \cdots n \\ 1\ 2 \cdots (j-1)(j+1) \cdots n \end{pmatrix}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式。对于 n 阶反对称方阵 $\boldsymbol{A}$，满足 $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}, a_{ij} = -a_{ji}$。本题要证明 $\boldsymbol{A}^*$ 是对称或反对称矩阵，即要求观察 $(\boldsymbol{A}^*)_{ji} = A_{ij}$ 与 $(\boldsymbol{A}^*)_{ij} = A_{ji}$

之间的关系。余子式前面的系数 $(-1)^{i+j}$ 相同，因此只需观察余子式 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\ 2\cdots(i-1)(i+1)\cdots n\\1\ 2\cdots(j-1)(j+1)\cdots n\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\ 2\cdots(j-1)(j+1)\cdots n\\1\ 2\cdots(i-1)(i+1)\cdots n\end{pmatrix}$。

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\ 2\cdots(i-1)(i+1)\cdots n\\1\ 2\cdots(j-1)(j+1)\cdots n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i-1,1}&\cdots&a_{i-1,j-1}&a_{i-1,j+1}&\cdots&a_{i-1,n}\\a_{i+1,1}&\cdots&a_{i+1,j-1}&a_{i+1,j+1}&\cdots&a_{i+1,n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\ 2\cdots(j-1)(j+1)\cdots n\\1\ 2\cdots(i-1)(i+1)\cdots n\end{pmatrix}&=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,i-1}&a_{1,i+1}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j-1,1}&\cdots&a_{j-1,i-1}&a_{j-1,i+1}&\cdots&a_{j-1,n}\\a_{j+1,1}&\cdots&a_{j+1,i-1}&a_{j+1,i+1}&\cdots&a_{j+1,n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,i-1}&a_{n,i+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\\&=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix}-a_{11}&\cdots&-a_{1,i-1}&-a_{1,i+1}&\cdots&-a_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{j-1,1}&\cdots&-a_{j-1,i-1}&-a_{j-1,i+1}&\cdots&-a_{j-1,n}\\-a_{j+1,1}&\cdots&-a_{j+1,i-1}&-a_{j+1,i+1}&\cdots&-a_{j+1,n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{n1}&\cdots&-a_{n,i-1}&-a_{n,i+1}&\cdots&-a_{nn}\end{vmatrix}\\&=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{i-1,1}&a_{i+1,1}&\cdots&a_{n1}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1,j-1}&\cdots&a_{i-1,j-1}&a_{i+1,j-1}&\cdots&a_{n,j-1}\\a_{1,j+1}&\cdots&a_{i-1,j+1}&a_{i+1,j+1}&\cdots&a_{n,j+1}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&\cdots&a_{i-1,n}&a_{i+1,n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\\&=(-1)^{n-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\ 2\cdots(i-1)(i+1)\cdots n\\1\ 2\cdots(j-1)(j+1)\cdots n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

因此

$$A_{ij}=(-1)^{n-1}A_{ji}$$

当 n 为奇数时, $A_{ij}=A_{ji},\boldsymbol{A}^*$ 是一个对称矩阵; 若 n 为偶数, $A_{ij}=-A_{ji},\boldsymbol{A}^*$ 是一个反对称矩阵。 □

1.2 4 月 6 日布置的作业

1.2.1 教材习题 P115:25,27,29,31(1),32,35(2)(3)(4)

习题 9 (教材习题 25). 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，证明：

$$\det(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}=\det(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$$

证明. 注意到，只需对矩阵 $\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}$ 打洞：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}$$

两边同时取行列式得到第一个等式（可参考补充习题 3），同理：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}$$

两边同时取行列式得到第二个等式，至此我们证明了结论。 □

习题 10 (教材习题 27). 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^*$.

解. 因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆,直接由公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\cdot\boldsymbol{A}^*$,现在只需求 $\det(\boldsymbol{A})$. 而 $\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{A}^{-1})=1,\det(\boldsymbol{A}^{-1})=2$，代入计算可得

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

□

习题 11 (教材习题 29). 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行、每列元素之和都是 0，证明：$\boldsymbol{A}^*$ 的所有元素都相等.

证明. 我们证明 $\boldsymbol{A}_{ij}=\boldsymbol{A}_{ik}$，$i,j,k=1,2,\cdots,n$
将矩阵 A 划去第 i 行，将得到的矩阵记为 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$.，$\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 $n-1$ 维列向量，且有 $\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$. 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{ij}&=(-1)^{i+j}\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j-1},\boldsymbol{\alpha}_{j+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\\&=(-1)^{i+j}\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j-1},\boldsymbol{\alpha}_{j+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},-(\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{n-1}))\\&=(-1)^{i+j}\sum_{m=1}^{n-1}\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j-1},\boldsymbol{\alpha}_{j+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},-\boldsymbol{\alpha}_m)\\&=(-1)^{i+j}\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j-1},\boldsymbol{\alpha}_{j+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},-\boldsymbol{\alpha}_j)\\&=(-1)^{i+j+1}\cdot(-1)^{n-j-1}\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1})\\&=(-1)^{n+i}\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1})\end{aligned}$$

与 j 无关，故 $\boldsymbol{A}_{ij}=\boldsymbol{A}_{ik}$，$\boldsymbol{A}^*$ 的每一行相等，同理每一列也相等，即 $\boldsymbol{A}^*$ 的所有元素都相等。
下面用秩给出另一个更简单的解法：$\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和是 0，即有:

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

齐次方程有非零解，故 $\det(\boldsymbol{A})=0$，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\le n-1$.
参考习题 39 的结论，当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\le n-2$ 时,$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})^*=0$，即 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{0}$，显然 $\boldsymbol{A}^*$ 的所有元素都相等.

当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=n-1$ 时，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})^*=1$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只有一个向量 $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.

又因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{A}^*$ 的每一列都是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，即每一列都是 $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 的倍数，所以 $\boldsymbol{A}^*$ 的每一列元素相等.
同理由 $\boldsymbol{A}$ 的每列元素之和是 0 可知 $\boldsymbol{A}^*$ 的每一行元素相等。综上 $\boldsymbol{A}^*$ 的所有元素都相等.

□

习题 12 (教材习题 31)**.** *用 Cramer 法则求解下列线性方程组:*

$$(1)\begin{cases}x_1-x_2+x_3=3\\x_1+x_2+4x_3=5\\x_1+3x_2+9x_3=7\end{cases}\quad(2)\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8\\x_1-3x_2-6x_4=9\\2x_2-x_3+2x_4=-5\\x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0\end{cases}$$

解. 直接由 Cramer 法则求解即可，这里仅给出答案:

$$(1)\begin{cases}x_1=3\\x_2=\frac{1}{3}\\x_3=\frac{1}{3}\end{cases}\quad(2)\begin{cases}x_1=3\\x_2=-4\\x_3=-1\\x_4=1\end{cases}$$

□

习题 13 (教材习题 32)**.** *设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 及 $y_0,y_1,\cdots,y_n$ 是任给实数，其中 $x_i(0\le i\le n$ 两两不等. 证明：存在唯一的次数不超过 n 的多项式 $p(x)$，满足 $p(x_i)=y_i,i=0,1,\cdots,n$.*

证明. 本题利用了 Vandermonde 行列式的性质.

不妨设多项式 $p(x)$ 的次数为 n，即设 $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$. 则有

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1^n=y_1 \\ \vdots \\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases}$$

将上式视为以 $a_0,\cdots,a_n$ 为未知数的线性方程组，所以有系数矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

其行列式为 $\prod_{0\le j<i\le n}(x_i-x_j)\neq 0$(因为 x_i 两两不等). 上述线性方程组有唯一解，即多项式 $p(x)$ 的系数是唯一的。
事实上，本题证明了插值多项式的存在唯一性. □

习题 14 (教材习题 35)**.** 计算下列矩阵的逆矩阵：

$$(2)\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}(3)\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}(4)\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_k & & & \end{pmatrix}.$$

解. (2) 用 4×4 单位矩阵进行扩展：

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 4 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

做行变换，将虚线左侧变为单位阵，最终得到：

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{2}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

逆矩阵在增广矩阵右侧，即

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{7} & 0 \\ \frac{5}{14} & \frac{2}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

(4) 同理用单位阵进行扩展

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} & & & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & \ddots & & \\ & \iddots & \iddots & \vdots & & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & 1 \end{array}\right)$$

将第 i 行 $\times(-1)$ 加到从第 $i+1$ 行到第 n 行的每一行，$i=1,\cdots n-1$，得到

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{array}\right)$$

最后交换行，将左侧变为单位阵

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

逆矩阵在增广矩阵右侧，即

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & 1 & 0 & \vdots \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) 同理用单位阵进行扩展

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} & & & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{I} & & & \\ & & \boldsymbol{A}_2 & & & \ddots & & \\ & \iddots & & & & & \ddots & \\ \boldsymbol{A}_k & & & & & & & \boldsymbol{I} \end{array}\right)$$

因为 $\boldsymbol{A}_i$ 可逆，用 $\boldsymbol{A}_i^{-1}$ 乘以每个分块，再做交换行将左侧变为单位阵，得到

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} \boldsymbol{I} & & & & & & & \boldsymbol{A}_k^{-1} \\ & \ddots & & & & & \iddots & \\ & & \ddots & & & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \end{array}\right)$$

逆矩阵在增广矩阵右侧，即

$$\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_k^{-1} \\ & & \iddots & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

□

致谢

感谢各助教对本文档的校对工作和内容补充，感谢申伊$\boxed{\text{F}}$老师以及同学对助教工作的支持。