第23讲：第一型曲线(面)积分 (2023.4.28)

（即数量场的曲面积分：$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS$）

(一) 复习：

设 $L: r(t)=(x(t),y(t),z(t))\in C^1[\alpha,\beta]$ 且 $r'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))\neq\theta$，

$\forall t\in[\alpha,\beta]$，此时称 L 为正则曲线 (regular curve)，

$g(x,y,z)$ 定义在 L 上且连续，则

$$\int_L g(x,y,z)\,ds \triangleq \lim_{\lambda\to0^+}\sum_{i=1}^{n} g(x(\tau_i),y(\tau_i),z(\tau_i))\Delta S_i$$

$$=\int_\alpha^\beta g(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt \quad (※1)$$

(二) 第一型曲面积分：$\iint_\Sigma g(x,y,z)\,dS$

设 Σ 为光滑曲面：$r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\in C^1(D_{uv})$ 且

$\vec{n}=r'_u\times r'_v\neq\theta$，$\forall(u,v)\in D_{uv}$。称这样的曲面 Σ 为正则曲面 (regular surface)，$g(x,y,z)$ 是曲面薄片 Σ 上点 $M(x,y,z)$ 处的面密度，求曲面薄片 Σ 的总质量 $m(\Sigma)$。

① 分割 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\cdots\cup\Sigma_i\cup\cdots\cup\Sigma_n$，设 Σ_i 的面积为 ΔS_i

直径为 d_i, $i=1,2,\cdots,n$. $\lambda=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$.

(II) 近似: 在 Σ_i 中任取一点 $(x(\xi_i,\eta_i),y(\xi_i,\eta_i),z(\xi_i,\eta_i))$. 作

$\rho(x(\xi_i,\eta_i),y(\xi_i,\eta_i),z(\xi_i,\eta_i))\cdot\Delta S_i \quad i=1,2,3,\cdots n$

(III) 求和: $\sum_{i=1}^{n}\rho(x(\xi_i,\eta_i),y(\xi_i,\eta_i),z(\xi_i,\eta_i))\Delta S_i \approx m(\Sigma)$.

(IV) 取极限: $\lim_{\lambda\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\rho(x(\xi_i,\eta_i),y(\xi_i,\eta_i),z(\xi_i,\eta_i))\Delta S_i$ 若存在,唯一

$m(\Sigma)\triangleq\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)dS$ —— 第一型(类)的曲面积分.

此时,称 $\rho(x,y,z)$ 在 Σ 上是 Riemann 可积的,记作 $\rho\in R(\Sigma)$

当 $\rho(x,y,z)$ 是定义在 Σ 上的有界函数时. 上述极限可能存在且唯一、也可能不存在且唯一. 但当 $\rho\in C(\Sigma)$ 时. 上述极限必存在且唯一. 即有:

$\rho\in C(\Sigma)\Longrightarrow\rho\in R(\Sigma)$ (不证明)

(二) 第一型曲面积分 $\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)dS$ 的运算性质:

(1) 设 $\rho_1,\rho_2\in R(\Sigma)$, C_1,C_2 为任意常数,则

$\iint\limits_{\Sigma}(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)ds=c_1\iint\limits_{\Sigma}\varphi_1 ds+c_2\iint\limits_{\Sigma}\varphi_2 ds$（线性性质）

(2). 曲面Σ的面积$S(\Sigma)=\iint\limits_{\Sigma}1ds$.

(3). 若$\varphi(x,y,z)\in C(\Sigma)$，则有积分中值定：

$\exists M_0\in\Sigma$，使$\iint\limits_{\Sigma}\varphi(x,y,z)ds=\varphi(M_0)S(\Sigma)$.

称$\varphi(M_0)=\iint\limits_{\Sigma}\varphi ds/S(\Sigma)$为$\varphi(x,y,z)$在$\Sigma$上取值的积分平均。

(4). 设Σ由有限光滑曲面$\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots,\Sigma_m$连接而成，则称

Σ是逐片光滑的。此时，有：

$$\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2+\cdots+\Sigma_m}\varphi ds=\iint\limits_{\Sigma_1}\varphi ds+\iint\limits_{\Sigma_2}\varphi ds+\cdots+\iint\limits_{\Sigma_m}\varphi ds$$

(四) 第一型曲面积分的计算：

$\because ds=|\vec{r}'_u du\times\vec{r}'_v dv|=|\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v|dudv=\sqrt{|\vec{r}'_u|^2|\vec{r}'_v|^2-(\vec{r}'_u\cdot\vec{r}'_v)^2}\,dudv$

$=\sqrt{EG-F^2}\,dudv$，其中，$E=|\vec{r}'_u|^2=|(x'_u,y'_u,z'_u)|^2=x'^2_u+y'^2_u+z'^2_u$

$G=|\vec{r}'_v|^2=|(x'_v,y'_v,z'_v)|^2=x'^2_v+y'^2_v+z'^2_v$，$F=\vec{r}'_u\cdot\vec{r}'_v=(x'_u,y'_u,z'_u)\cdot(x'_v,y'_v,z'_v)$

$=x'_u x'_v+y'_u y'_v+z'_u z'_v$.

$\therefore I=\iint\limits_{\Sigma} \varphi(x,y,z)\,dS=\iint\limits_{D_{uv}} \varphi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$, (式2)

即第一型曲面积分是通过化为参数域 D_{uv} 上的二重积分来计算的，证明的方法与第一型线积分的证明方法相同。

特别地，当 Σ 为显式曲面：$z=z(x,y)\in C(D_{xy})$ 时，可将 x、y 作为参数量，$r(x,y)=(x,y,z(x,y))\Rightarrow\begin{cases} r'_x=(1,0,z'_x) \\ r'_y=(0,1,z'_y)\end{cases}$

$E=|r'_x|^2=1+z'^2_x$，$G=|r'_y|^2=1+z'^2_y$，$F=r'_x\cdot r'_y=z'_x z'_y\Rightarrow$

$dS=\sqrt{EG-F^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dx\,dy\Rightarrow$

$I=\iint\limits_{\Sigma} \varphi(x,y,z)\,dS=\iint\limits_{D_{xy}} \varphi(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dx\,dy$, (式3)

例1. 计算球面 Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ 的面积 $S(\Sigma)$；

例2. 设 Σ 是球面 Σ_1：$x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ 被柱面 Σ_2：$x^2+y^2=ax$ 截下的部分，求 Σ 的面积 $S(\Sigma)$。

解例1（方法一）：Σ 的参数方程为：$\begin{cases} x=a\sin\theta\cos\varphi \\ y=a\sin\theta\sin\varphi \\ z=a\cos\theta\end{cases}$

$\Sigma: r(\theta,\varphi)=(a\sin\theta\cos\varphi,\ a\sin\theta\sin\varphi,\ a\cos\theta) \Rightarrow \begin{cases}|r'_\theta|^2=a^2=E\\ |r'_\varphi|^2=a^2\sin^2\theta=G\\ F=r'_\theta\cdot r'_\varphi=0\end{cases}$

$dS=\sqrt{EG-F^2}\,d\theta d\varphi=a^2\sin\theta\, d\theta d\varphi$

$S(\Sigma)=\iint\limits_{\Sigma}1dS=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}a^2\sin\theta\, d\theta\right)d\varphi=4\pi a^2.$

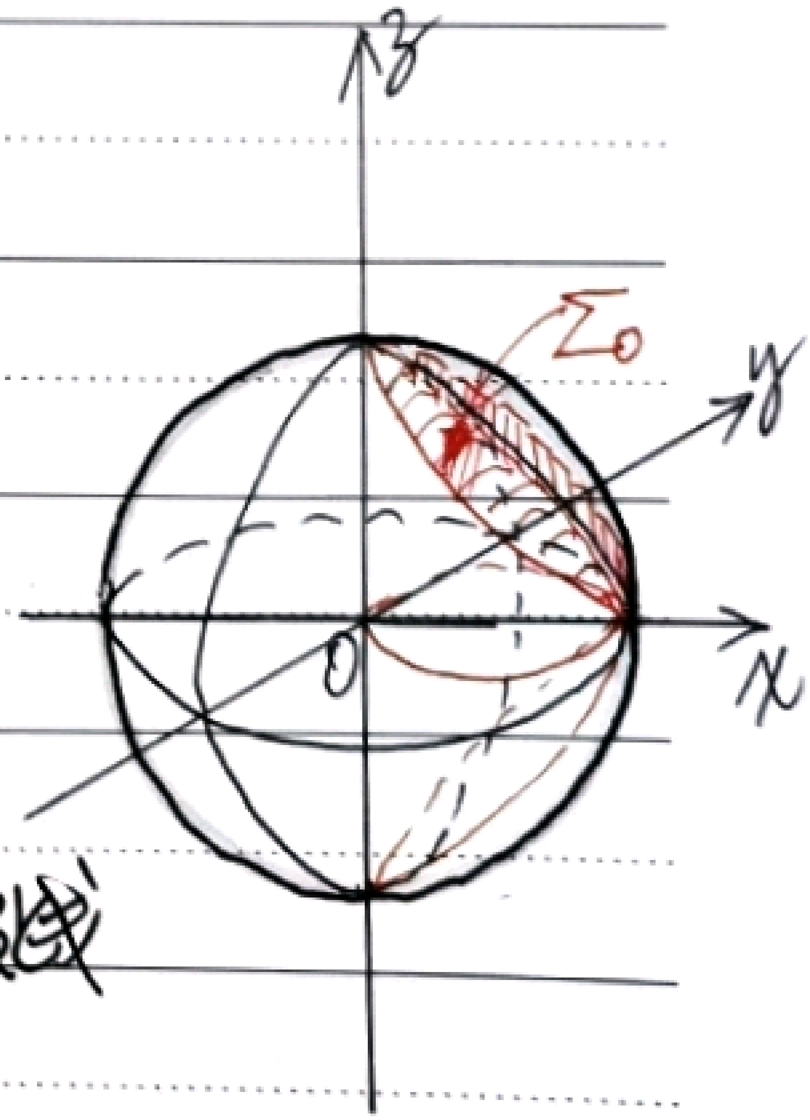
例1(方法二)：设Σ_1为Σ的上半部分：$\Sigma_1: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2\le a^2$.

则 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{z}\right)^2+\left(\frac{-y}{z}\right)^2}\,dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$

$S(\Sigma)=2\iint\limits_{\Sigma_1}1dS=2\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy \xlongequal[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta}$

$2\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{a\,r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}d\theta=\frac{2a\cdot 2\pi}{-2}\int_0^a(a^2-r^2)^{-\frac{1}{2}}d(a^2-r^2)$

$=-2a\pi\frac{(a^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_0^a=4\pi a^2.$



练习：设Σ_0是Σ在第一卦限部分，

由对称性知，$S(\Sigma)=4\iint\limits_{\Sigma_0}1dS$

令 $\begin{cases}x=a\sin\theta\cos\varphi\\ y=a\sin\theta\sin\varphi\\ z=a\cos\theta\end{cases}$ 则 $\begin{cases}\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]\end{cases}$ 且从交线

$x^2+y^2=a^2-z^2=ax \Rightarrow a^2-(a\cos\theta)^2=a(a\sin\theta\cos\varphi)\Rightarrow \sin\theta=\cos\varphi$

$=\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$ 即 $\begin{cases}0\le\theta\le\frac{\pi}{2}-\varphi\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

从而 $S(\Sigma)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}a^2\sin\theta\,d\theta\right)d\varphi=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}d\varphi$

$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)d\varphi=4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

(三) 第一型曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$、$\int_L f(x,y,z)ds$ 的奇偶对称性与轮换对称性：

(1). 若 $f(x,y)\in C(L)$ 且 $f(x,y)$ 关于 y 为奇(偶)函数，则当 L 关于坐标轴 $y=0$ 对称时，有 $\int_L f ds=\begin{cases}0 & \text{当 } f \text{ 为奇} \sim \\ 2\int_{L_1} f ds, & \text{当 } f \text{ 为偶} \sim\end{cases}$

(2) 若 $f(x,y)\in C(L)$ 且当 x,y 交换时，L 的方程不变，则有：

$I=\int_L f(x,y)ds=\int_L f(y,x)ds=\frac{1}{2}\int_L\left(f(x,y)+f(y,x)\right)ds$

(3). 若 $f(x,y,z)\in C(L)$ 且 $f(x,y,z)$ 关于 z 为奇(偶)函数，当 L 关于坐标面 $z=0$ 对称时，有 $\int_L f ds=\begin{cases}0 & f \text{ 为奇} \sim \\ 2\int_{L_1} f ds, & f \text{ 为偶} \sim\end{cases}$

(4). 若 $f(x,y,z)\in C(L)$ 且当 $(x,y,z)\to(y,z,x)\to(z,x,y)$ 时，L 的方程不变，则有第一型线积分的轮换对称性：

$I=\int_L \varphi(x,y,z)ds=\int_L \varphi(y,z,x)ds=\int_L \varphi(z,x,y)ds$

$=\frac{1}{3}\int_L[\varphi(x,y,z)+\varphi(y,z,x)+\varphi(z,x,y)]ds$

第一型曲面积分 $\iint_\Sigma \varphi(x,y,z)dS$ 也有类似的奇偶对称性

与轮换对称性：（例13. 计算 $I=\iint_\Sigma(x^2+y^2)dS$，$\Sigma$ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限部分。 答案 $\frac{1}{2}\pi a^4$.）

(1) 若 $\varphi\in C(\Sigma)$ 且 $\varphi(x,y,z)$ 关于 z 为奇（偶）函数，Σ 关于坐标面 $z=0$ 对称，则 $\iint_\Sigma \varphi(x,y,z)dS=\begin{cases}0 & \varphi\text{ 为奇} \\ 2\iint_{\Sigma_1}\varphi dS, & \varphi\text{ 为偶}\end{cases}$.

(2) 轮换对称性：设 $\varphi(x,y,z)\in C(\Sigma)$ 且当 $(x,y,z)\to(y,z,x)\to(z,x,y)$ 时，Σ 的方程不变，则有：（例14. 计算 $I=\iint_\Sigma(xy+yz+zx)dS$，$\Sigma$ 是锥面 $z^2=k^2(x^2+y^2)$ $(z\geq 0)$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 截下的曲面。）

$I=\iint_\Sigma\varphi(x,y,z)dS=\iint_\Sigma\varphi(y,z,x)dS=\iint_\Sigma\varphi(z,x,y)dS=$

$\frac{1}{3}\iint_\Sigma[\varphi(x,y,z)+\varphi(y,z,x)+\varphi(z,x,y)]dS$ 答案：$\frac{\sqrt{2}}{24}a^4(8ak^2+7)\sqrt{1+k^2}$.

作业：ex11.2/ 1/(1), (4), (6), (7)；2/(2), (3)；3/(1)(2).