第9章综合习题题解

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是非零常数. $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微. 求证: 存在 $\mathbb{R}$ 上一元可微函数 $F(s)$ 使得 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)$ 的充分必要条件是 $a_j\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

证明 (必要性) 设有一元可微函数 $F(s)$ 使得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n). \tag{1}$$

记 $s = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_iF'(s),\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

故

$$a_j\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_ia_jF'(s) = a_i\frac{\partial f}{\partial x_j},\ i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

(充分性) 作可逆线性变换 $(x_1, \cdots, x_n) \longrightarrow (t_1, \cdots, t_n)$

$$\begin{aligned} t_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \\ t_2 &= a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \\ &\cdots \\ t_n &= a_nx_n \end{aligned}$$

或

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

点评: 上述变换可逆是因为变换是关于$(x_1, \cdots, x_n)$ 的非齐次线性方程组, 系数行列式是上三角行列式, 斜对角线元素非零, 因此行列式非零. 方程有唯一解. 或者从 $(x_1, \cdots, x_n)$ 到 $(t_1, \cdots, t_n)$ 变换的矩阵是三角矩阵, 其中对角线元素 $a_1, \cdots, a_n$ 非零, 因此变换可逆.

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial t_i}\frac{\partial t_i}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial t_i}a_k = a_k\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial t_i},\ k = 1. \cdots, n$$

由条件（不妨设 $l < k$）

$$a_l\frac{\partial f}{\partial x_k} = a_k\frac{\partial f}{\partial x_l},$$

推出
$$\sum_{i=l+1}^{k}\frac{\partial f}{\partial t_i}=0,\quad 1\leqslant l<k\leqslant n,$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t_i}=0, i=2,3,\cdots,n$$
即 f 只依赖 t_1, 所以 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 可以表示为 t_1 的函数. 即存在 $F(s)$ 使得 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F(t_1)=F(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)$

2. 设 $f(x,y,z)=F(u,v,w)$, 其中 $x^2=vw$, $y^2=wu$, $z^2=uv$. 求证:
$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=u\frac{\partial F}{\partial u}+v\frac{\partial F}{\partial v}+w\frac{\partial F}{\partial w}.$$

直接利用复合函数求导即可.

3. 若函数 $u=f(x,y,z)$ 满足恒等式 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)\,(t>0)$, 则称 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数. 试证下述关于齐次函数的欧拉定理: 可微函数 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数的充要条件是:
$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=kf(x,y,z).$$

证明 $(\Longrightarrow)$ $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$两边对 t 求导, 再令 $t=1$ 即可.
$(\Longleftarrow)$ 令 $F(t)=f(tx,ty,tz)$, 对 t 求导得
$$\begin{aligned}F'(t)&=xf'_1(tx,ty,tz)+yf'_2(tx,ty,tz)+zf'_3(tx,ty,tz)\\&=\frac{1}{t}(txf'_1(tx,ty,tz)+tyf'_2(tx,ty,tz)+tzf'_3(tx,ty,tz))\\&=\frac{k}{t}f(tx,ty,tz)=\frac{k}{t}F(t)\end{aligned}$$
解得$F(t)=Ct^k$, 令 $t=1$ 定出常数 $C=F(1)=f(x,y,z)$ 即可得结果.

点评：一般来说，若必要性求导可证, 则充分性可用积分. 另一方面, 上述结果对 n 个变元也是对的, 即 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是k 次齐次函数当且仅当
$$x_1f'_{x_1}+x_2f'_{x_2}+\cdots+x_nf'_{x_n}=kf.$$

5. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续二阶偏导数, 且对任意实数 x,y,z 满足 $f(x,y)=f(y,x)$ 和

$$f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=3f\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right). \tag{1}$$

试求 $f(x,y)$.

证明 记 $(u,v)=\left(\dfrac{x+y+z}{3},\ \dfrac{x+y+z}{3}\right)$. 上式两边对 x,y 求混合偏导数,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v)+\frac{2}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(u,v)+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v).$$

注意到上式左边与 z 无关. 因此取 $z=-x-y$, 因而 $(u,v)=(0,0)$. 故,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=A\text{ 是常数}.$$

分别对两个变量逐次求原函数（不定积分）并注意到积分常数对变量的依赖性可知存在一元函数 g,h 使得

$$f(x,y)=Axy+g(x)+h(y).$$

由于 $f(x,y)=f(y,x)$. 可知 $g(x)=h(x)$. 因而

$$f(x,y)=Axy+g(x)+g(y). \tag{2}$$

于是

$$f(x,x)=Ax^2+2g(x). \tag{3}$$

在 (1) 中令 $z=0$, 得

$$f(x,y)+f(x,0)+f(y,0)=3f\left(\frac{x+y}{3},\frac{x+y}{3}\right). \tag{4}$$

由 (2) 得

$$f(x,0)=g(x)+g(0). \tag{5}$$

结合 (2),(4),(5) 可得

$$Axy+2g(x)+2g(y)+2g(0)=\frac{A}{3}(x+y)^2+6g\left(\frac{x+y}{3}\right). \tag{6}$$

对此式关于变量 x 求二阶导数, 得

$$2g''(x) = \frac{2A}{3} + \frac{2}{3}g''\left(\frac{x+y}{3}\right).$$

再取 $y = 2x$, 得

$$g''(x) = \frac{A}{2}.$$

于是

$$g(x) = \frac{A}{4}x^2 + C_1 x + C_2,$$

这里 C_1, C_2 是常数. 将上式代入 (2), 可得

$$f(x,y) = a(x^2 + 4xy + y^2) + b(x+y) + c,$$

这里 $a = \frac{A}{4}$, $b = C_1$, $c = 2C_2$ 都是常数.

6. 证明不等式 $\dfrac{x^2+y^2}{4} \leqslant \mathrm{e}^{x+y-2}$ $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$.

证明 令 $f(x,y) = (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-x-y}$, $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. 则 f 连续可导, 在第一象限非负, 且

$$\lim_{x\to+\infty, y\to+\infty} f(x,y) = 0.$$

于是 $f(x,y)$ 在第一象限可取到最大值.

在第一象限内部（即$x > 0, y > 0$）:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x - x^2 - y^2)e^{-x-y} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2y - x^2 - y^2)e^{-x-y} = 0,$$

解得第一象限内部的唯一驻点为 $(1,1)$.

在边界 x 轴上, 有 $f(x,0) = x^2e^{-x}$, 它在 $x = 2$ 取最大值. 在边界 y 轴上, 有 $f(0,y) = y^2e^{-y}$, 它在 $y = 2$ 取最大值. 由于 $f(1,1) = 2e^{-2}$, $f(2,0) = f(0,2) = 4e^{-2}$. 这说明, $f(x,y)$ 在第一象限的最大值为 $4e^{-2}$. 故,

$$(x^2+y^2)e^{-x-y} \leqslant 4e^{-2}.$$

即,

$$\frac{x^2+y^2}{4} \leqslant e^{x+y-2}.$$

点评：1、极值方法是求证不等式的一个常用方法. 2、最值问题不但要求出区域内部极值点, 还要考虑边界上的极值问题, 综合所有内部和边界极值综合考虑.

7. 设在 $\mathbb{R}^3$ 上定义的 $u=f(x,y,z)$ 是 z 的连续函数, 且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续. 证明 u 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续.

证明 任给 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在M_0 一个闭邻域（如闭单位球 $B=\overline{B(M_0,1)}$）上连续, 故有界. 即存在常数 $C>0$ 使得

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(P)\right|\leqslant C,\left|\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right|\leqslant C,\ \ P\in B.$$

当 $(x,y,z)\in B$, 时, 由微分中值定理, 存在 $\theta,\eta\in(0,1)$ 使得

$$\begin{aligned}f(x,y,z)-f(x_0,y,z)&=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta(x-x_0),y,z)(x-x_0),\\ f(x_0,y,z)-f(x_0,y_0,z)&=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\eta(y-y_0),z)(y-y_0).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}|f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)|&=|f(x,y,z)-f(x_0,y,z)+\\ &\quad f(x_0,y,z)-f(x_0,y_0,z)+f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)|\\ &\leqslant C|x-x_0|+C|y-y_0|+|f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)|.\end{aligned}$$

因为 $f(x_0,y_0,z)$ 关于 z 连续, 所以对任意 $\varepsilon>0$, 存在 δ_1，当 $|z-z_0|<\delta_1$ 时, 有

$$|f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

取 $\delta=\min\{\dfrac{\varepsilon}{3C},\delta_1,1\}$, 则当

$$|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta,\ |z-z_0|<\delta,$$

就有

$$|f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)|<\varepsilon.$$

由于点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的任意性, 推出函数在 $\mathbb{R}^3$ 上连续.

点评: 连续性是局部概念, 因此只要在任意一点邻域内考虑即可. 多变量函数连续性, 必须按照定义证明. 不能因为 $f(x,y,z)$ 对每个变量分别连续就自然得出函数连续的结论. 本题正式说明, 如果 f 对每个变量分别连续, 再加上对其中两个变量有连续偏导数, 则可推出函数连续.

8. 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是包含原点的凸区域, $f \in C^1(D)$. 若

$$x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0, \ \ ((x,y) \in D),$$

则 $f(x,y)$ 是常数.

证明 因为 D 是包含原点的凸区域, 对于 $(x,y) \in D$ 及 $t \in [0,1]$, 有 $(tx,ty) \in D$. 令 $\varphi(t) = f(tx,ty)$. 则 φ 在 $[0,1]$ 可导, 且

$$\varphi'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = 0.$$

这说明 φ 是常数. 故, $\varphi(1) = \varphi(0)$. 即, $f(x,y) = f(0,0)$.

点评：1、包含原点的凸区域 D, 意味着连接任何一点 (x,y) 到原点的直线段都在D 内, 该直线段上的点 (u,v) 表示为 $(0+tx, 0+ty) = (tx.ty)$, 其中, $0 < t < 1$.

9. 设 $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f(0,0) = 0$. 证明: 存在 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数 g_1, g_2 使得

$$f(x,y) = xg_1(x,y) + yg_2(x,y).$$

分析：因为

$$f(x,y) = f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) - f(0,y) + f(0,y) - f(0,0),$$

如果分别用微分中值公式:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) - f(0,y) + f(0,y) - f(0,0) \\ &= f'_x(\theta_1 x, 0)x + f'_y(0, \theta_2 y)y, \end{aligned}$$

虽然 θ_1, θ_2 分别存在, 但是具体形式并不清楚. 因此不能用中值公式!

继续分析看出

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) - f(0,y) + f(0,y) - f(0,0) \\ &= \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x}x + \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y}y \end{aligned}$$

但是两个函数 $\dfrac{f(x,y) - f(0,y)}{x}$, $\dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y}$ 分别在 $x = 0$ 和 $y = 0$ 没有定义. 因此需要补充定义, 使其分别在 $x = 0$ 和 $y = 0$ 不但有定义, 而且连续. 由于

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = f'_x(0,y), \ \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{x} = f'_y(0,0)$$

因此补充定义值应该是极限值, 为此构造两个在 $\mathbb{R}^2$ 上函数

$$g_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x,y)-f(0,y)}{x}, & x\neq 0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y), & x=0\end{cases}$$

$$g_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}, & y\neq 0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0), & y=0\end{cases}$$

由 $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$, 可知 g_1,g_2 都是连续函数. 显然有

$$f(x,y)=f(x,y)-f(0,0)=xg_1(x,y)+yg_2(x,y).$$

点评: 此题的条件可减弱为: $f\in C(\mathbb{R}^2)$ 在 $(0,0)$ 可微且 $f(0,0)=0$. 证明如下:

由 f 在 $(0,0)$ 可微及 $f(0,0)=0$, 知

$$f(x,y)=ax+by+R(x,y),$$

其中 $a=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $b=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

$$R(x,y)=f(x,y)-ax-by$$

是 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 的高阶无穷小量:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{R(x,y)}{\rho}=0,$$

取

$$g_1(x,y)=\begin{cases}a+\dfrac{x(f(x,y)-ax-by)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ a, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$g_2(x,y)=\begin{cases}b+\dfrac{y(f(x,y)-ax-by)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ b, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$g_1(x,y)$ 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 显然连续, 在 $(0,0)$ 处有

$$\lim_{\rho\to 0}g_1(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\left(a+\frac{xR(x,y)}{\rho^2}\right)$$

因 $\frac{|x|}{\rho}\leqslant 1,\ R(x,y)=o(\rho)$, 所以上述极限为

$$\lim_{\rho\to 0} g_1(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\left(a+\frac{xR(x,y)}{\rho^2}\right)=a=g_1(0,0)$$

即 $g_1(x,y)$ 在 $(0,0)$ 也连续. 同理可证 $g_2(x,y)$ 连续.

因此无论是 $(x,y)\neq(0,0)$ 还是 $(x,y)=(0,0)$ 都可验证

$$f(x,y)=xg_1(x,y)+yg_2(x,y).$$

10. 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域 U 上有定义, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 U 上存在. 求证: 若 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 中有一个在 (x_0,y_0) 处连续, 则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微.

证明 不妨设 $f'_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 本题目标是要证明

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_0,y_0)&=f(x,y)-f(x_0,y)+f(x_0,y)-f(x_0,y_0)\\&=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\rho).\end{aligned}$$

因为 $f'_x(x,y)$ 连续, 因此在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(x,y)-f(x_0,y)=f'_x(x_0+\theta(x-x_0),y)(x-x_0)\to f'_x(x_0,y_0).$$

但是$f'_y(x,y)$ 不知道是否连续, 因此对 $f(x_0,y)-f(x_0,y_0)$ 不能采用类似办法. 但可以用下列函数代替

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}, & y\neq y_0\\ f'_y(x_0,y_0), & y=y_0.\end{cases}$$

因此当 $y\neq y_0$ 时, 有

$$\begin{aligned}&f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x_0,y)+f(x_0,y)-f(x_0,y_0)\\&=f'_x(x_0,\theta(x-x_0),y)(x-x_0)+g(y)(y-y_0)\\&=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\\&\quad+[f'_x(x_0+\theta(x-x_0),y)-f'_x(x_0,y_0)](x-x_0)\\&\quad+\left[g(y)-f'_y(x_0,y_0)\right](y-y_0).\end{aligned}$$

当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时, 上式右端的中括号都趋于零, 因此是 ρ 的无穷小量, 所以

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. 这说明 f 在 (x_0,y_0) 可微.

11. 设 $u(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上取正值且有二阶连续偏导数. 证明 u 满足方程

$$uu''_{xy}=u'_xu'_y \tag{1}$$

的充分必要条件是存在一元函数 f 和 g 使得 $u(x,y)=f(x)g(y)$.

证明 若 $u(x,y)=f(x)g(y)$, 则易知 (1) 成立.

反之, 若 (1) 成立, 则

$$\frac{u''_{xy}}{u'_x}=\frac{u'_y}{u}$$
$$\Longrightarrow \frac{(u'_x)'_y}{u'_x}=\frac{u'_y}{u}$$

因此解得

$$\ln u'_x=\ln u+C(x)\Longrightarrow u'_x=u\mathrm{e}^{C(x)}$$
$$\Longrightarrow \ln u(x,y)=\int_0^x \mathrm{e}^{C(t)}\,\mathrm{d}t+C_1(y)$$

于是得到结果.

但是: 为了避免 u'_x 出现零的情况, 因 $u(x,y)>0$, 令 $\Phi=\dfrac{u'_y}{u}$

$$\Phi'_x=\frac{1}{u^2}\cdot\left(uu''_{xy}-u'_yu'_x\right)=0.$$

因而 Φ 与 x 无关, 它仅是 y 的函数: $\Phi=\Phi(y)$. 由$\Phi(y)=\dfrac{u'_y}{u}$ 对 y 积分得

$$\ln u=\int_0^y\Phi(t)\,\mathrm{d}t+C_1(x)\Longrightarrow u(x,y)=\mathrm{e}^{\int_0^y\Phi(t)\,\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{C_1(x)}$$

即 $u(x,y)$ 可表示为 $u(x,y)=f(x)g(y)$ 的形式.

12. 设 $\boldsymbol{r}:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ 的映射

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\mathrm{i}+y(t)j,\quad t\in[a,b]$$

有连续的导函数. 则存在 $\theta\in(a,b)$, 使得

$$|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)|\leqslant|\boldsymbol{r}'(\theta)|(b-a).$$

点评： 本题说明: 虽然对向量值函数不存在微分中值公式, 但可以由一种“拟微分中值公式”.

证明 令

$$\varphi(t) = (\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)) \cdot \boldsymbol{r}(t),$$

则存在 $\theta \in (a, b)$, 使得

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\theta)(b - a)$$

$$\Longrightarrow \varphi(b) - \varphi(a) = (\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)) \cdot (\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a))$$
$$\varphi'(\theta) = (\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)) \cdot \boldsymbol{r}'(\theta),$$

$$\Longrightarrow |\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)|^2 = |(\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)) \cdot \boldsymbol{r}'(\theta)|(b - a) \leqslant |\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)||\boldsymbol{r}'(\theta)|(b - a)$$

13. 设 $f(x, y, z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上有一阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}$. 如果 $f(x, 0, 0) > 0$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 成立, 求证: 对任意的 $(x, y, z) \in \mathbb{R}$, 也有 $f(x, y, z) > 0$.

证明 根据三元函数中值定理, 存在连接 (x, y, z) 和 $(x + y + z, 0, 0)$ 的线段上一点 $P(\xi, \eta, \zeta)$, 使得

$$f(x, y, z) - f(x + y + z, 0, 0) = (-y - z)f'_x(P) + yf'_y(P) + zf'_z(P).$$

由于三个偏导数相等, 可知 $f(x, y, z) = f(x + y + z, 0, 0) > 0$.

点评： 若采取 $f(x, y, z) - f(x, 0, 0) = f(x, y, z) - f(x, y, 0) + f(x, y, 0) - f(x, 0, 0)$ 再分别用中值公式, 则得不到所要结果, 所以必须采用多变量函数的中值公式. .

14. 求函数 $f(x, y) = x^2 + xy^2 - x$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2\}$ 上的最大值和最小值.

分析： 这是一个求最值的问题, 因此不但要考虑内部所有极值点, 还要考虑函数在边界$\partial D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2\}$ 上的所有极值点. 而边界上的问题实际上是一个条件极值问题. 好在在圆周上 $y^2 = 2 - x^2$, 因此函数在圆周上有显式表示 $f(x, y) = h(x) = -x^3 + x^2 + x$, 一般情况下，应作为条件极值考虑.

证明 因 D 有界闭, 所以 f 在 D 上存在最大值. 若最值点在内部, 则它是驻点. 由

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y^2-1=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=2xy=0,$$

可得 f 的驻点为 $(0,\pm 1)$, $(\frac{1}{2},0)$.

在圆周 $x^2+y^2=2$ 上,

$$f(x,y)=h(x)=-x^3+x^2+x,\quad -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}.$$

它有驻点 $x=1$ 和 $x=-\frac{1}{3}$. 对应的 y 分别为 $y=\pm 1, y=\frac{\sqrt{17}}{3}$

比较函数 $f(x,y)$ 在 D 内部驻点 $(0,\pm 1)$, $(\frac{1}{2},0)$, 边界 ∂D 上的驻点 $(1,\pm 1)$, $(-\frac{1}{3},\frac{\sqrt{17}}{3})$ 以及边界上端点 $(\pm\sqrt{2},0)$ 处的函数值可知，$f(x,y)$ 在$(-\sqrt{2},0)$ 取最大值 $2+\sqrt{2}$, 在 $(\frac{1}{2},0)$ 取最小值 $-\frac{1}{4}$.

15. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正数, 且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$. 用 Lagrange 乘数法证明

$$x_1x_2\cdots x_n\Big(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\Big)\leqslant n, \tag{1}$$

等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时成立.

证明 当 $n=1,2$ 时, (1) 式成为等式, 无需证明. 设 $n\geqslant 3$. (1) 式左端

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1x_2\cdots x_n\Big(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\Big)$$

是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 $n-1$ 次多项式, 在条件 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正数, 且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ 的条件下, f 有最大值. 因为当 $x_1,\cdots,x_n$ 都为正数时, f 取正值. 当某变量如 $x_1=0$ 时, 由均值不等式, 有

$$\begin{aligned}f=x_2\cdots x_n&\leqslant\left(\frac{x_2+\cdots+x_n}{n-1}\right)^{n-1}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\\&=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<e<n.\end{aligned}$$

而 $f(1,1,\cdots,1)=n$. 故, f 的最大值在内部 (即, 所有 x_i 为正的点) 取到. 设

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n)-\lambda(x_1+\cdots,x_n-n).$$

令 $\frac{\partial F}{\partial x_i}=0,\ i=1,2\cdots,n$. 得

$$\frac{x_1\cdots x_n}{x_i}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)+x_1\cdots x_n\left(-\frac{1}{x_i^2}\right)-\lambda=0,$$

$i=1,2,\cdots,n$. 若 $x_1\neq x_2$, 则将前两个这样的式子相减, 可得

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}.$$

当 $n>2$ 时此式不成立. 因而 $x_1=x_2$. 一般可得 $x_1=x_2=\cdots=x_n$. 注意到 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$. 可知 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$. 故, $(1,1,\cdots,1)$ 是唯一的驻点. 该点只能是最大值点. 于是在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正数, 且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ 时, f 的最大值是 n.

16. （2022春期中考试）证明: 积分方程

$$f(x,y)=1+\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y f(u,v)\,\mathrm{d}v$$

在 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 至多只有一个连续解.

证明 （反证法）假设有两个连续解 $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, 则 $g(x,y)=f_1(x,y)-f_2(x,y)$ 连续且满足

$$g(x,y)=\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y g(u,v)\,\mathrm{d}v.$$

因 $g(x,y)$ 连续, 因此在 D 上有界: $|g(x,y)|\leqslant M$, 推出

$$|g(x,y)|\leqslant\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y |g(u,v)|\,\mathrm{d}v\leqslant Mxy,$$

由此推出

$$|g(x,y)|\leqslant\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y |g(u,v)|\,\mathrm{d}v\leqslant\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y Muv\,\mathrm{d}v=M\frac{x^2y^2}{2^2},$$

归纳得到

$$|g(x,y)|\leqslant M\frac{x^ny^n}{(n!)^2},\ (x,y)\in D$$

对任意 n 成立, 所以 $g(x,y)=0$.

点评: 本题实际上可通过迭代法给出积分方程的解. 条件可放宽到$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant +\infty,\ 0\leqslant y\leqslant +\infty\}$ 具体做法如下: 在 D 上, 取

$$\begin{aligned}&f_0(x,y)=1,\\ &f_{n+1}(x,y)=1+\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y f_n(u,v)\,\mathrm{d}v,\ n=0,1,2,\cdots\end{aligned}$$

推出

$$
\begin{aligned}
&f_0(x,y)=1,\\
&f_1(x,y)=1+\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y f_0(u,v)\,\mathrm{d}v=1+xy,\\
&f_2(x,y)=1+\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y f_1(u,v)\,\mathrm{d}v=1+xy+\frac{x^2y^2}{2^2},\\
&\qquad\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

若

$$f_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^ky^k}{(k!)^2},$$

则

$$f_{n+1}(x,y)=1+\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y f_n(u,v)\,\mathrm{d}v=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^ky^k}{(k!)^2}.$$

对任意 $a>0$, 在 $D_a=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant a\}$ 上,

$$\left|\frac{x^ny^n}{(n!)^2}\right|\leqslant\frac{a^{2n}}{(n!)^2}$$

所以级数

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^ny^n}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}f_n(u,v)\,\mathrm{d}v$$

在 D_a 上一致收敛, 因此

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}f_{n+1}(x,y)&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y f_n(u,v)\,\mathrm{d}v\right)\\
&=1+\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y\left(\lim_{n\to\infty}f_n(u,v)\right)\mathrm{d}v,
\end{aligned}
$$

即 $f(x,y)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^ny^n}{(n!)^2}$ 是方程的解.

提醒: 这里用到了二元函数项级数的一致收敛性（Weierstrass判别法）以及二重积分与极限的交换性问题. 解决这些问题与单变量情形完全一致.读者可仿照单变量情形证明之.