**引理 1**

如果 $n$ 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的复根都是实数, 那么 $\boldsymbol{A}$ 一定可以正交相似上三角化, 即存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为上三角阵.

**推论 2**

如果 $n$ 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的复根都是实数, 且 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 是一个对称阵.

这个技巧还可以用来证明: 实对称阵一定正交相似于对角阵. 注意, 用正交阵做相似变换等同于用其做相合变换.

**定理 3**

对于 $n$ 阶实对称方阵 $\boldsymbol{A}$, 总存在同阶正交阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角阵.

**例 4**

如果实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵, 证明: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

## 注 5

下面给出定理 3 中的正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 计算步骤.

1. 求出实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s},$$

   其中当 $i \neq j$ 时, 特征值 $\lambda_i \neq \lambda_j$, 而 $n_i$ 为 $\lambda_i$ 的代数重数.

2. 由于 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化, $\lambda_i$ 的代数重数 $n_i$ 等于它的几何重数 $m_i$. 这说明特征子空间 $V_{\boldsymbol{A}}(\lambda_i)$ 存在一组基 $\boldsymbol{x}_{i,1}, \boldsymbol{x}_{i,2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{i,n_i}$. 利用 *Gram–Schmidt* 正交化过程, 不妨假定 $\boldsymbol{x}_{i,1}, \boldsymbol{x}_{i,2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{i,n_i}$ 是一个标准正交向量组.

3. 由于 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值之间的特征向量是相互正交, 我们得到了 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基

$$\{\boldsymbol{x}_{i,j} \mid 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq n_i\}.$$

将这些列向量有序排列得到矩阵

$$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{x}_{1,1}, \boldsymbol{x}_{1,2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{1,n_1}, \boldsymbol{x}_{2,1}, \boldsymbol{x}_{2,2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{2,n_2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{s,1}, \boldsymbol{x}_{s,2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{s,n_s}),$$

则 $\boldsymbol{T}$ 是一个正交矩阵, 满足

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \lambda_s, \ldots, \lambda_s).$$

## 例 6

考虑对称阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

## 例 7

设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 $n$ 阶的实对称方阵. 证明: $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 的充要条件是存在正交方阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 与 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 同时为对角阵.

# 第八章 实二次型

教材的 §2.2.5 简要地介绍了三维欧氏空间中的二次曲面. 由二次多项式定义, 我们有

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4y^2 + a_5yz + a_6z^2 + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10} = 0.$$

其中,

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4y^2 + a_5yz + a_6z^2$$

为二次项, 不为零,

$$a_7x + a_8y + a_9z$$

为一次项、线性项, 而 $a_{10}$ 为常数项.

通过适当的坐标变换 (正交变换 + 平移变换; 这两种变换都能保持向量之间的距离不变, 其中正交变换是线性变换, 而平移变换一般不是线性变换), 可以把二次曲面 (quadratic surface) 归结成几种标准曲面:

1. 椭球面, 单叶双曲面, 双叶双曲面, 二次锥面, 椭圆柱面, 双曲柱面; (它们没有线性项)
2. 椭圆抛物面, 双曲抛物面, 抛物柱面. (它们有线性项)

其中, 柱面型二次曲面是退化的二次曲面. 各位同学需要自行阅读教材的 §2.2.5 中的相关内容, 做到能将各类二次曲面与其标准方程熟练对应.

在这一章里, 我们将系统学习如何将二次多项式化成标准形. 特别地,

1. 我们在多元 ($n$ 维) 中考虑;
2. 我们研究什么是“标准”的.

# 二次型的矩阵表示

**定义 8**

关于 $n$ 个变量 $x_1, \ldots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

其中 $a_{ij} = a_{ji}$, 称为 $x_1, \ldots, x_n$ 的二次型 (*quadratic form*) 或二次形式. 当所有 $a_{ij}$ 都是实数、复数或者整数时, $Q$ 称为实二次型、复二次型或者整二次型. 在本书里, 我们只考虑实二次型.

**例 9**

研究二次型

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

一般地, 实二次型可以表示成为

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \boldsymbol{X}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{X},$$

其中 $\boldsymbol{X} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n \times n}$. 由于 $a_{ij} = a_{ji}$, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是实对称阵.

在刚刚的例子里, 我们有

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1/2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

这样的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 $Q$ 的矩阵.

## 课堂练习

写出以

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

为矩阵的关于 $x_1, x_2, x_3$ 的二次型.

## 注 10

若将上面的二次型 $Q$ 视为关于 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ 的函数, 则相应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的元素也可以由该函数的特殊取值表示出来. 例如, 不妨设 $n = 3$, 那么, $a_{11} = Q(1, 0, 0)$, $a_{22} = Q(0, 1, 0)$, 而 $a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}\left(Q(1, 1, 0) - Q(1, 0, 0) - Q(0, 1, 0)\right)$.

如果把 $\boldsymbol{X} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 看成 $n$ 维线性空间 $V$ 中的向量 $\gamma$ 在某组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标, 那么二次型 $Q$ 可以看成关于向量 $\gamma$ 的函数, 从而记作

$$Q(\gamma) := \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}.$$

此时, $\boldsymbol{A}$ 也称为二次型 $\boldsymbol{Q}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵.

同一个向量 $\gamma$ 在不同基下的坐标可能不同. 接下来, 我们考察二次型 $Q$ 在不同基下的矩阵的变换公式.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的两组基. 设 $\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^n$ 在这两组基下的坐标分别为 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$, 即

$$\gamma=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{Y}.$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$, 即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}.$$

则坐标之间有变换公式

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X},\qquad \text{或等价地},\qquad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}.$$

设二次型 $Q$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$. 此时,

$$Q(\gamma)=\boldsymbol{Y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Y}.$$

故 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ (为什么?). 这说明二次型 $\boldsymbol{Q}$ 在不同基下的矩阵是相合的.

1. 相合关系是一种等价关系，可以保持二次型 $Q$ 的矩阵的秩不变，因此，二次型 $Q$ 在任意一组基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩也被称为二次型 $Q$ 的秩.
2. 对于可逆方阵 $\boldsymbol{P}$，我们称坐标变换

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$$

给出了一个可逆的或者满秩的线性变换. 请注意，这只是坐标的一个保数乘保加法的变换操作，并不是我们之前提到的线性空间到自身的线性变换.

## 例 11

考虑二元的二次型

$$Q(\gamma) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

并采用可逆的线性变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{PY}$, 其中 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

# 二次型的标准形

## 定义 12

假定二次型 $Q(x_1,\ldots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 通过某个坐标的可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 化为不含混合项 (交叉项) 的形式:

$$Q(x_1,\ldots,x_n)|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}} := \boldsymbol{Y}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Y}=\mu_1 y_1^2+\mu_2 y_2^2+\cdots+\mu_n y_n^2,$$

即

$$\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n).$$

我们称该形式为二次型 $Q$ 的标准形 (*canonical form*).

## 注 13

标准形显然不唯一. 例如

$$Q(x_1,x_2)=2x_1^2+3x_2^2=y_1^2+y_2^2,$$

其中 $y_1=\sqrt{2}x_1$, $y_2=\sqrt{3}x_2$.