Cramer 法则 (Cramer's Rule)

定理 4.3.52. 若 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 为可逆矩阵, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解. 该解满足 $x_i = |\boldsymbol{A}_i|/|\boldsymbol{A}|$, 其中 $\boldsymbol{A}_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列换成 $\boldsymbol{b}$ 后得到的新矩阵.*

教材定理 4.3.9

证明. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则方程组显然有唯一解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. 此时, 设 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的各个列向量, 则 $\boldsymbol{b} = \sum_j x_j \boldsymbol{\beta}_j$, 其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$. 于是,

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{A}_i) &= \det(\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{i-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\beta}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n) = \det(\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{i-1}, \sum_j x_j\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n) \\ &= \sum_j x_j \det(\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{i-1}, \boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n) = x_i \det(\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n) = x_i \det(\boldsymbol{A}),\end{aligned}$$

其中求和式里, 若 $j \neq i$, 则相应的行列式为 0. 从而, $x_i = \det(\boldsymbol{A}_i)/\det(\boldsymbol{A})$. □

例 4.3.53. 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是互不相同的数. 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + \cdots + a_1^{n-1}x_n = 1, \\ x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_2^{n-1}x_n = 1, \\ \qquad\vdots \\ x_1 + a_nx_2 + \cdots + a_n^{n-1}x_n = 1. \end{cases}$$

注. 需要指出的是, 利用 *Cramer* 法则来计算 n 阶线性方程组时, 需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式, 一般而言其计算量是比较大的. 此时, *Cramer* 法则并不是实用的求解方法.

---

*克莱因所著的《古今数学思想》里介绍: 用行列式的方法解含有两个、三个和四个未知量的联立线性方程, 可能在 1729 年, 是由**麦克劳林**开创的, 并发表在他的遗作《代数论著》(Treatise of Algebra, 1748) 中. 虽然书中的记法不太好, 但是他的法则是我们今天所使用的法则. **克莱姆**把它发表在他的《线性代数分析导言》(Introduction a l'analyse des lignes courbes algebriques, 1750) 中. 克莱姆给出了一条法则, 用于确定经过五个点的般的二次曲线 $A + By + Cx + Dy^2 + Exy + x^2 = 0$ 的系数. 他的行列式和现在一样, 是这样一些乘积的和, 这些乘积是在每一行和每一列中取一个且只取一个元素组成: 每一个乘积的符号是这样确定的, 即从标准次序出发, 得到这些元素的排列所需的重排数, 如果这个数是偶数, 则符号是正的, 否则就是负的. 1764 年, **贝祖**把确定行列式每一项的符号的手续系统化了. 给定了含 n 个未知量的 n 个齐次线性方程, 贝祖证明: 系数行列式等于零 (结式等于零) 是这方程组有非零解的条件.

解. 该线性方程组的系数方阵的行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 \cdots\cdots a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 \cdots\cdots a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ 1 & a_n \cdots\cdots a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i) \neq 0.$$

故该方程组有唯一解. 显然,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$$

是它的 (唯一) 解.

若使用定理 4.3.52 中的记号, 则 $j=1$ 时, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1$ 可逆, 从而 $x_1 = 1$. 而对于 $j = 2, 3, \dots, n$, A_j 中的第 1 列和第 j 列相等, 从而 $\det(\boldsymbol{A}_j) = 0$, 进而有 $x_j = 0$. □

习题 4.3.54. 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t) = (a_{ij}(t))$ 是一个可逆方阵, 其每个元素都是关于实变量 t 的可微函数. 记 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}'(t) = (a'_{ij}(t))$ 为对每个元素都求导后得到的方阵. 证明: 行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ 作为 t 的函数的导数满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det(\boldsymbol{A})) = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{A}^{-1}).$$

4.4 初等变换

定理 4.4.1. 对于任意矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, 存在一系列的 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \dots, \boldsymbol{P}_s$ 和 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \dots, \boldsymbol{Q}_t$ 使得 教材定理 4.4.3

$$\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}_1 \cdots \boldsymbol{Q}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

证明. 我们只需证明存在一系列的行和列的初等变换, 将 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\left(\begin{smallmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{smallmatrix}\right)$ 的形式.

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow[\text{Gauss 消元法}]{\text{一系列的初等行变换}} \text{约化标准形} \xrightarrow[\text{其次, 适当交换列}]{\text{首先, 用各行主元 1 将该行其它元素消为 0}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

很明显, 上面定理中的 r 是 $\boldsymbol{A}$ 的行标准形 (阶梯形矩阵) 的主元的个数 (非零行数). 另外, 将上面定理中的矩阵乘积 $\boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_1$ 记作 $\boldsymbol{P}$, 矩阵乘积 $\boldsymbol{Q}_1 \cdots \boldsymbol{Q}_t$ 记作 $\boldsymbol{Q}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶可逆矩阵. 此时有

推论 4.4.2. 对于任意矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, 存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{PAQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 教材定理 4.4.4

求逆矩阵的初等变换法 考虑分块矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{等同于依次左乘了 } \boldsymbol{P}_1,\dots,\boldsymbol{P}_s \\ \text{这些 } \boldsymbol{P}_i \text{ 是初等矩阵}}]{\text{假定存在一系列的初等行变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{X} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵. 若记 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_1$, 则上面的操作说明

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{X} \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{PA} & \boldsymbol{PI}_n \end{pmatrix}.$$

即

$$\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{I}_n, \qquad \boldsymbol{PI}_n = \boldsymbol{X}.$$

从而 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}$ 为可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆. 这是我们求方阵的逆的标准方法, 大家需要熟练掌握. 当然, 我们需要说明, 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则这个方法一定可以求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 这是因为此时 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆, 从而可以表示成初等方阵的乘积: $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_s \cdots \boldsymbol{P}_1$. 对 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}$ 依次施行 $\boldsymbol{P}_1, \dots, \boldsymbol{P}_s$ 所对应的初等行变换即可.

另外, 对称地, 我们也可以有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{一系列的初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 4.4.3. 求可逆方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

其计算可以留作课前热身题

解.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2r_1 \to r_3]{-3r_1 \to r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_2 \to r_3]{r_2 \to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/7 & 1/7 & -3/7 \end{pmatrix} \xrightarrow[4r_3 \to r_2]{2r_3 \to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/7 & 2/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 & -2/7 & 4/7 & -5/7 \\ 0 & 0 & 1 & 3/7 & 1/7 & -3/7 \end{pmatrix}.$$

这说明

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/7 & 2/7 & 1/7 \\ -2/7 & 4/7 & -5/7 \\ 3/7 & 1/7 & -3/7 \end{pmatrix}.$$

□

例 4.4.4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&-1\\2&4&2\end{pmatrix}$, 用上面的方法, 在做过一系列的初等行变换后, 我们有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&0&-2&-2&1\end{pmatrix}\to \operatorname{rref}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}1&0&-3&0&2&-\frac{1}{2}\\0&1&2&0&-1&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

其计算可以留作课前热身题

从中间的阶梯标准形就可以看出, $\boldsymbol{A}$ 不是可逆矩阵; 因为有可逆矩阵左乘它得到一个不可逆矩阵. 当然, 由于 $\det(\boldsymbol{A})=0$, 我们也可以很容易地看到这一点.

分块矩阵的初等行变换

(1) 两个块行互换位置;

(2) 用一个可逆矩阵左乘某一块行;

(3) 用一个矩阵 $\boldsymbol{P}$ (不要求可逆) 左乘某一块行加到另一块行上. 例如

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}\xrightarrow{\boldsymbol{P}r_1\to r_2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}.$$

注意, 这里的 r_1 表示的分块矩阵的第一个块行, 不是元素的第一行. 类似地, 还有分块矩阵的初等列变化. 但是对应的 (2) 和 (3) 需要考虑的是矩阵的右乘, 而记号上我们会采用 $c_i\boldsymbol{P}\to c_j$ 等等.

类似于初等矩阵的定义, 将**分块单位阵** (单位阵分块后得到的分块矩阵) 经过一次初等行 (列) 变换后得到的分块矩阵称为**分块初等矩阵**.

类似于之前的结果 (定理 4.3.22), 对于分块矩阵作初等行 (列) 变换等同于用一个相应的分块初等矩阵左乘 (右乘).

例 4.4.5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{22}$ 为方阵. 故 $\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{A}_{11})\det(\boldsymbol{A}_{12})$ (参见习题 *4.3.33*), 从而 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{A}_{11}$ 和 $\boldsymbol{A}_{12}$ 皆为可逆矩阵. 假设这一条件得到满足, 我们通过初等行变换来求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_{22}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}\xrightarrow[\boldsymbol{A}_{22}^{-1}r_2]{\boldsymbol{A}_{11}^{-1}r_1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}&\boldsymbol{A}_{11}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-A_{11}^{-1}A_{12}r_2\to r1}\begin{pmatrix} I & O & A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & I & O & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

这说明

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

习题 4.4.6. 设 A 和 B 都是 n 阶方阵, 求分块矩阵 $\begin{pmatrix} I & A & C \\ O & I & B \\ O & O & I \end{pmatrix}$ 的逆.

习题 4.4.7. (1) 设 A, B 为 n 阶方阵, 且 $I-BA$ 可逆. 求矩阵 $M=\begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

(2) 在 $I-AB$ 可逆的条件下重新求上面的 M 的逆矩阵.

(3) 证明: $I-AB$ 可逆的充要条件是 $I-BA$ 可逆 (参见教材 *P115#25*, 其中 *#25* 的公式称为 ***Schur* 公式** (的特殊形式) 或 ***Sylvester* 行列式公式**, 需要牢记).

习题 4.4.8. 设 $B\in F^{n\times m}$, $A\in F^{m\times n}$. 证明 $\begin{pmatrix} B & I_n \\ O & A \end{pmatrix}$ 可逆的充要条件是 AB 可逆.

例 4.4.9.

$$\begin{pmatrix} I & O \\ P & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ PA_{11}+A_{21} & PA_{12}+A_{22} \end{pmatrix}.$$

若对该式两边同取行列式, 由于 $\det\begin{pmatrix} I & O \\ P & I \end{pmatrix}=1$ (参见习题 *4.3.33*), 这步计算表明对于分块矩阵的倍加行 (列) 操作不改变相应矩阵的行列式.*

进一步地, 若其中的 A_{11} 为方阵, A_{22} 为方阵, 且 A_{11} 可逆, 那么我们可以选取 $P=-A_{21}A_{11}^{-1}$ (为了用 A_{11} 消去 A_{21}), 从而得到

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}}_{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & -A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}+A_{22} \end{pmatrix}.$$

*对于分块矩阵的另外两个类型的初等变换, 其对行列式的改变就没有这么简单, 计算时需要慎重. 请务必想清楚相应的变换公式.

其中右下角的 $-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}$ 称为 $\boldsymbol{A}_{11}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 中的***Schur*** 补. 若取行列式 (参见习题 *4.3.33*), 则得到***Schur*** 行列式公式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_{11}| \cdot \left|-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\right|.$$

例 4.4.10. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 证明:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \cdot |\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|.$$

证明.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \to r_1} \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} \xlongequal{-c_1 \to c_2} \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \cdot |\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|. \quad \square$$

下面的例子展示了微扰法的技巧; 其本质是 n 阶可逆方阵的全体在 $F^{n\times n}$ 中稠密.

例 4.4.11. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 为 4 个 n 阶复方阵, 满足 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$. 证明:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = \left|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}\right|.$$

证明. (1) 先考虑矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的情形. 此时

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\text{用第一行的 } \boldsymbol{A} \\ \text{消去第二行的 } \boldsymbol{C}}]{-(\boldsymbol{CA}^{-1})r_1 \to r_2} \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C}-(\boldsymbol{CA}^{-1})\boldsymbol{A} & \boldsymbol{D}-(\boldsymbol{CA}^{-1})\boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B} \end{vmatrix}$$

$$= \left|\boldsymbol{A}\right| \left|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\right| = \left|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{ACA}^{-1}\boldsymbol{B}\right|.$$

由于 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$, 可以推出 $\boldsymbol{ACA}^{-1}=\boldsymbol{C}$. 从而上式为 $|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|$.

(2) 假设 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 即 $|\boldsymbol{A}|=0$. 考虑辅助矩阵 $\boldsymbol{A}_t=\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}$, 其中 $t\in\mathbb{C}$. 从而 $\boldsymbol{A}_0=\boldsymbol{A}$. 一个事实是:

$$|\boldsymbol{A}_t| = |\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}| = t^n + \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})t^{n-1} + \cdots + |\boldsymbol{A}|,$$

是一个关于 t 的首项系数为 1 的 n 次复系数多项式, 其系数由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 决定, 中间的其它系数比较复杂. 这个多项式最多有 n 个不同的复根, 将其全体记作 $T=\{t_1,\dots,t_m\}$, 其中 $m\le n$. 故对任意的 $t\in\mathbb{C}\setminus T$, 有 $|\boldsymbol{A}_t|\ne 0$, 从而 $\boldsymbol{A}_t$ 可逆. 注意到 $\boldsymbol{A}_t\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_t$, 由上面的讨论, 知道

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_t & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = \left|\boldsymbol{A}_t\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CB}\right|.$$