# 第十五次作业参考

贺维易

2023 年 7 月 2 日

## 目录



## 一点说明

(i) 作业讲义部分题过程可能有省略。如对作业仍有疑问可以在群里或答疑课上讨论。

(ii) **作业讲义会随时间更新。**

(iii) 请及时核对自己在 BB 系统里的分数，如有问题请向对应的助教反馈。

(iv) 附录里的内容仅供有兴趣的同学参考，有可能涉及之后才会学习或课外的知识，不要求在现阶段掌握。

(v) 讲义最好用电脑打开，文档内置了链接功能，复习或查看指定的作业很方便。

成绩说明：成绩公式为

$$\text{score}=\begin{cases}10-k\cdot\max\{n-n_0,0\} & \text{未迟交}\\ 5 & \text{迟交}\end{cases}$$

其中 $n$ 为错题数，$n_0$ 为容忍度；$k$ 为系数，取决于当周作业的题量。第 15 周不考虑补充题共 9 题，$n=7$，考虑到一些同学出现了计算失误、笔误、抄错题目等等情况，

$n_0 = 1$；$k = 0.5$。对于一些不严格的证明，助教也会酌情给分。也意味着作业得到满分不代表作业没有问题，请认真查看自己的作业。

上述评分标准对每个助教都成立。

# 1 6 月 20 日布置的作业

## 1.1 教材习题 P247:22

**习题 1** (教材习题 22). 将下列二次方程化为最简形式，并判断曲面类型:
*(1)*$4x^2 - 6y^2 - 6z^2 - 4yz - 4x + 4y + 4z - 5 = 0$;
*(2)*$x^2 - \frac{4}{3}y^2 + \frac{4}{3}z^2 - \frac{16}{3}\sqrt{2}yz + 4x + \frac{8}{3}\sqrt{3}z - 1 = 0$.

**解**. (1) 记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

寻找正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. 做对角化并对各特征向量单位正交化得到 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
于是正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

将原方程的所有交叉项消去，即原方程变为
$4x'^2 - 4y'^2 - 8z'^2 - 4x' + 4\sqrt{2}z' - 5 = 0$，作适当的平移可知是双曲面型.
(2) 记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3}\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{8}{3}\sqrt{2} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

寻找正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. 做对角化并对各特征向量单位正交化得到 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$
于是正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

将原方程的所有交叉项消去，即原方程变为
$x'^2 - 4y'^2 - 4z'^2 + 4x' + \frac{8}{3}\sqrt{2}z' + \frac{8}{3}y' - 1 = 0$，作适当的平移可知是双曲面型.

□

## 1.2 补充习题 1

**习题 2** (补充习题 1)**.** 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶半正定实对称可逆矩阵，证明存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 都是对角方阵。

**证明**. 参考 Homework15 老师编写的答案。 ◻

## 1.3 补充习题 2

**习题 3** (补充习题 2)**.** 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 $n$ 阶单位矩阵，$\boldsymbol{M}^*$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的伴随矩阵，则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^* = ()$.

$(D)\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$

**解**. 利用 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^* = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$.
这里用到了准上三角矩阵求逆以及求行列式的结论，可以参见第三次习题课讲义补充习题 1. ◻

## 1.4 补充习题 3

**习题 4** (补充习题 3)**.** 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 - 4(x_2 - x_3)^2$ 的规范形为 *()*
$(A) y_1^2 + y_2^2 \quad (B) y_1^2 - y_2^2 \quad (C) y_1^2 + y_2^2 - 4y_3^2 \quad (D) y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

**解**. 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

有特征值 $0, 3, -7$，易见正惯性指数和负惯性指数都是 1. 所以选 B. ◻

## 1.5 补充习题 4

**习题 5** (补充习题 4)**.** 已知向量 $\boldsymbol{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma} = k_1\boldsymbol{\alpha_1} + k_2\boldsymbol{\alpha_2} + k_3\boldsymbol{\alpha_3}$. 若 $\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\alpha_i} = \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha_i} (i = 1, 2, 3)$，则 $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$ 值为

**解**. 注意到 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$ 相互正交，且 $||\boldsymbol{\alpha_i}||^2 = 3, i = 1, 2, 3$. 代入 $\boldsymbol{\gamma} = k_1\boldsymbol{\alpha_1} + k_2\boldsymbol{\alpha_2} + k_3\boldsymbol{\alpha_3}$ 则有 $k_i||\boldsymbol{\alpha_i}||^2 = \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha_i}$，分别计算即可得到 $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{11}{9}$. ◻

## 1.6 补充习题 5

**习题 6** (补充习题 5). *方程组* $\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 = 2 \end{cases}$ *有解, 其中 $a, b$ 为常数. 若* $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 4$，则 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} =$

**解**. 设系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \le 3 < 4$，所以 $|\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}| = 0$. 把增广矩阵对应的行列式按第四列展开即可，最终结果 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = 8$ □

## 1.7 补充习题 6

**习题 7** (补充习题 6). *已知二次型*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3,$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_2y_3.$$

*(1) 求可逆变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成 $g(y_1, y_2, y_3)$.*

*(2) 是否存在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成 $g(y_1, y_2, y_3)$?*

**解**. (1) 设 $f$ 对应的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$g$ 对应的矩阵为 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 同样可用初等变换法求出 $\boldsymbol{P}$. 区别在于我们需要对 $\boldsymbol{A}$ 做成对的初等行、列变换得到 $\boldsymbol{B}$，只对 $\boldsymbol{I}$ 做初等列变换即可得到 $\boldsymbol{P}$.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \to c_3, -c_1 \to c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) 如果存在正交变换 $\boldsymbol{Q}$，则 $\boldsymbol{Q}$ 能将 $\boldsymbol{A}$ 相似到 $\boldsymbol{B}$. 而易见 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有不同的特征值，矛盾，所以不存在这样的正交变换 $\boldsymbol{Q}$. □

## 1.8 补充习题 7

**习题 8** (补充习题 7)**.** *设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足：对任意 $x_1, x_2, x_3$ 均有* $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$.

*(1) 求 $\boldsymbol{A}$;*

*(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与对角矩阵 $\Lambda$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \Lambda$.*

**解**. (1)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) 按照步骤求特征值和特征向量即可，下面仅给出答案参考

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

□

**贴两个全卷答案地址，电脑端可以直接点击进去看看有些题目不同的解法**

2023 年数学一

2023 年数学二、三

# 致谢

感谢各助教对本文档的校对工作和内容补充，感谢申伊塃老师以及同学对助教工作的支持。