第十三次作业参考

贺维易，王睿

2023 年 6 月 19 日

目录

一点说明

(i) 作业讲义部分题过程可能有省略。如对作业仍有疑问可以在群里或答疑课上讨论。

(ii) **作业讲义会随时间更新。**

(iii) 请及时核对自己在 BB 系统里的分数，如有问题请向对应的助教反馈。

(iv) 附录里的内容仅供有兴趣的同学参考，有可能涉及之后才会学习或课外的知识，不要求在现阶段掌握。

(v) 讲义最好用电脑打开，文档内置了链接功能，复习或查看指定的作业很方便。

成绩说明：成绩公式为

$$\text{score} = \begin{cases} 10 - k \cdot \max\{n - n_0, 0\} & \text{未迟交} \\ 5 & \text{迟交} \end{cases}$$

其中 n 为错题数，n_0 为容忍度；k 为系数，取决于当周作业的题量。第 13 次不考虑补充题共 10 题，$n = 10$，考虑到一些同学出现了计算失误、笔误、抄错题目等等情况，$n_0 = 1$；$k = 0.5$。对于一些不严格的证明，助教也会酌情给分。也意味着作业得到满分不代表作业没有问题，请认真查看自己的作业。

上述评分标准对每个助教都成立。

1 6 月 6 日布置的作业

1.1 教材习题 P245:3(3)(4),4(1)(2),5(2)

习题 1 (教材习题 3(3)(4)). *求正交变换化下列实二次型为标准形:*

(3) $Q = 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$;

(4) $Q = 2x_1x_2 - 2x_3x_4$.

解. 将实对称阵正交相似到对角阵

(3) 二次型的矩阵是

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

它的特征值为 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -3$(两重).

对于 $\lambda_1 = 6$，得特征向量 $\boldsymbol{x_1} = (1,1,1)^T$，把它单位化得 $\boldsymbol{e_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$.

对于 $\lambda_2 = -3$，得特征向量 $\boldsymbol{x_2} = (-1,1,0)^T, \boldsymbol{x_3} = (-1,0,1)^T$. 把它们标准正交化得 $\boldsymbol{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T, \boldsymbol{e_3} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)^T$.

于是原二次型的标准形为 $\widetilde{Q}(y_1,y_2,y_3) = 6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2$. 相应的变换矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(4) 二次型的矩阵是

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

它的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$(均为两重).

对于 $\lambda_1 = 1$，得特征向量 $\boldsymbol{x_1} = (1,1,0,0)^T, \boldsymbol{x_2} = (0,0,-1,1)^T$，把它们标准正交化得 $\boldsymbol{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^T, \boldsymbol{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-1,1)^T$.

对于 $\lambda_2 = -1$，得特征向量 $\boldsymbol{x_3} = (-1,1,0,0)^T, \boldsymbol{x_4} = (0,0,1,1)^T$. 把它们标准正交化得 $\boldsymbol{e_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0,0)^T, \boldsymbol{e_4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)^T$.

于是原二次型的标准形为 $\widetilde{Q}(y_1,y_2,y_3,y_4) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$. 相应的变换矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

□

习题 2 (教材习题 4(1)(2)). 用配方法将下列二次型化为标准形，并求相应的可逆线性变换:

(1)$Q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

(2)$Q = x_1^2 + x_2x_3$

解. (1) 易见 $Q = \frac{1}{2}[(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_2+x_3)^2]$，故令 $y_1 = x_1+x_2, y_2 = x_1+x_3, y_3 = x_2+x_3$，得到 $Q(x_1, x_2, x_3) = \widetilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$. 相合变换矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(2) 令 $x_1 = y_1, x_2 = y_2 + y_3, x_3 = y_2 - y_3$. 得到 $Q(x_1, x_2, x_3) = \widetilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. 相合变换矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

□

习题 3 (教材习题 5(2)). 用初等变换法将下列二次型化成标准型，并求相应的可逆线性变换。(2)$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{x}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

解. 这里用初等变换法，将单位矩阵放在待变换矩阵的下面，对待变换矩阵作成对的初等行、列变换，同时仅对单位阵作初等列变换，下面在初等变换的记号上有所省略。注意采用行的形式作初等变换也是可以的。

对 $\boldsymbol{Q}$ 作初等相合变换化为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \to c_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \to c_3, -c_2 \to c_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是原二次型的标准形为 $\widetilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. 相应的变换矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

1.2 补充习题 1

习题 4 (补充习题 1). 研究特征值为 λ_1 和 λ_2 的二阶对称实矩阵 $\boldsymbol{A}$，求其元素 a_{12} 可能取的值之最大者和最小者.

证明. 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{12}, a_{22} \end{pmatrix}$. 特征多项式为 $p(\lambda)=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}^2$，由韦达定理

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22}-a_{12}^2 \\ \lambda_1+\lambda_2 = a_{11}+a_{22} \end{cases}$$

因此 $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}-\lambda_1\lambda_2 \in [0, \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)^2 - \lambda_1\lambda_2 = \left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\right)^2]$，因此 a_{12} 最小值为 $-\left|\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\right|$，最大值为 $\left|\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\right|$. □

2 6 月 8 日布置的作业

2.1 教材习题 P245:5(4),6,7,8,9

习题 5 (教材习题 5(4)). 用初等变换法将下列二次型化成标准型，并求相应的可逆线性变换。(4)$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{x}^T\begin{pmatrix}0&\frac12&0&\frac12\\ \frac12&0&\frac12&0\\ 0&\frac12&0&\frac12\\ \frac12&0&\frac12&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$

解. 这里用初等变换法，将单位矩阵放在待变换矩阵的下面，对待变换矩阵作成对的初等行、列变换，同时仅对单位阵作初等列变换。在箭头上方的是对上方矩阵所作变换，在箭头下方的是对下方矩阵所作变换。

对 $\boldsymbol{Q}$ 作初等相合变换化为对角矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}\\ \boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac12&0&\frac12\\ \frac12&0&\frac12&0\\ 0&\frac12&0&\frac12\\ \frac12&0&\frac12&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2\to c_1]{\{c_2\to c_1,r_2\to r_1\}}\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac12&\frac12\\ \frac12&0&\frac12&0\\ \frac12&\frac12&0&\frac12\\ \frac12&0&\frac12&0\\ 1&0&0&0\\ 1&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac12c_1\to c_2]{\{-\frac12c_1\to c_2,-\frac12r_1\to r_2\}}\begin{pmatrix}1&0&\frac12&\frac12\\ 0&-\frac14&\frac14&-\frac14\\ \frac12&\frac14&0&\frac12\\ \frac12&-\frac14&\frac12&0\\ 1&-\frac12&0&0\\ 1&\frac12&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac12c_1\to c_3]{\{-\frac12c_1\to c_3,-\frac12r_1\to r_3\}}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac12\\ 0&-\frac14&\frac14&-\frac14\\ 0&\frac14&-\frac14&\frac14\\ \frac12&-\frac14&\frac14&0\\ 1&-\frac12&-\frac12&0\\ 1&\frac12&-\frac12&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac12c_1\to c_4]{\{-\frac12c_1\to c_4,-\frac12r_1\to r_4\}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 0&-\frac14&\frac14&-\frac14\\ 0&\frac14&-\frac14&\frac14\\ 0&-\frac14&\frac14&-\frac14\\ 1&-\frac12&-\frac12&-\frac12\\ 1&\frac12&-\frac12&-\frac12\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2\to c_3]{\{c_2\to c_3,r_2\to r_3\}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 0&-\frac14&0&-\frac14\\ 0&0&0&0\\ 0&-\frac14&0&-\frac14\\ 1&-\frac12&-1&-\frac12\\ 1&\frac12&0&-\frac12\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-c_2\to c_4]{\{-c_2\to c_4,-r_2\to r_4\}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 0&-\frac14&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1&-\frac12&-1&0\\ 1&\frac12&0&-1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}$$

于是原二次型的标准形为 $\widetilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2$. 相应的变换矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

习题 6 (教材习题 6). 试证：在实数域上，对称矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 不相合。

证明. 根据**惯性定理**容易看到 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的惯性指数不同（正/负惯性指数），因此两者不相合。或显式地写出证明，考虑二次型 $Q(x_1, x_2 \cdots, x_n) := \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，若存在可逆变换 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{P}$ 使得两矩阵相合，此时 $Q(y_1, y_2 \cdots, y_n) = \boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})^T (\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}) \geq 0, \boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$，而根据 $Q(y_1, y_2 \cdots, y_n) = \boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{Y}$ 可取 $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 使得 $Q(y_1, y_2 \cdots, y_n) < 0$ 发生矛盾，因此矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 不相合。

为什么要求实数域：因为非实数不一定有 $x^2 \geq 0$。 □

习题 7 (教材习题 7). 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的相合标准型。

证明. **相合标准型只关心特征值的正负**。对于 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 总存在同阶正交阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 为对角阵，有 $\boldsymbol{A}^2 = \left(\boldsymbol{T} \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \boldsymbol{T}^{-1}\right)^2 = \boldsymbol{T} \operatorname{diag}\left(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2\right) \boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{T} \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \boldsymbol{T}^{-1} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_1^2 \geq 0, \cdots, \lambda_n = \lambda_n^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \text{ or } 1$，说明 $\boldsymbol{A}$ 特征值没有负项，因此相合标准型为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}, r = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$. □

习题 8 (教材习题 8). 证明：秩为 r 的对称矩阵可以表示成 r 个秩为 *1* 的对称矩阵之和。

证明. 对于秩为 r 的对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 可通过相合变换化为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{P}, \boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r), \lambda_i \neq 0$$

. 取 $\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{P}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{D'}_i & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{P}, \boldsymbol{D'}_i = \operatorname{diag}(0, \cdots, \lambda_i, \cdots, 0)$,则 $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{B}_i$,且 $\boldsymbol{B}_i^T = \left(\boldsymbol{P}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{D'}_i & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{P}\right)^T = \boldsymbol{P}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{D'}_i & \\ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}_i, \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}_i) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{D'}_i) = 1$ □

习题 9 (教材习题 9)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵，证明：
(1)$\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵当且仅当对任意一个 n 维向量 $\boldsymbol{x}$，有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$
(2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，且对任意一个 n 维向量 $\boldsymbol{x}$，有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

证明. (1)

(i) $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵 $\rightarrow$ 对任意一个 n 维向量 $\boldsymbol{x}$，有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$。$\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵说明 $a_{ii}=0, a_{ij}=-a_{ji}$ 若 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$，则 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i,j=1}^{n}x_ia_{ij}x_j=\sum\limits_{i,j=1,i\neq j}^{n}x_ia_{ij}x_j=\sum\limits_{i,j=1,i<j}^{n}x_ia_{ij}x_j+\sum\limits_{i,j=1,i>j}^{n}x_ia_{ij}x_j=\sum\limits_{i,j=1,i<j}^{n}x_ia_{ij}x_j+\sum\limits_{i,j=1,i<j}^{n}x_ja_{ji}x_i=\sum\limits_{i,j=1,i<j}^{n}x_i(a_{ij}+a_{ji})x_j=0$

(ii) $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵 $\leftarrow$ 对任意一个 n 维向量 $\boldsymbol{x}$，有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$。若 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$，则 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i,j=1}^{n}x_ia_{ij}x_j$；取 $\boldsymbol{x}=(0,0,\cdots,x_i=1,\cdots,0)$，则 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_ia_{ii}x_i=a_{ii}=0$；取 $\boldsymbol{x}=(0,x_i=1,\cdots,x_j=1,\cdots,0)$，则 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_ia_{ii}x_i+x_ja_{jj}x_j+x_ia_{ij}x_j+x_ja_{ji}x_i=a_{ij}+a_{ji}=0\Rightarrow a_{ij}=-a_{ji}$，说明 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵。

(2) 只要能熟练利用相合对角化，结论是显然的。利用 $\boldsymbol{x}$ 的任意性，不断选择一些 $\boldsymbol{x}$ 证明每个特征值都是 0 即可。 □

致谢

感谢各助教对本文档的校对工作和内容补充，感谢申伊塃老师以及同学对助教工作的支持。