数学分析 (B) 历年考试真题
2021 版

2018 版 · 说明

1. 这里收录了若干套中国科学技术大学数学分析 (B) 测验以及考试真题, 以及一套数学分析 (A) 的试题作为样卷.

2. 排序顺序优先考虑知识涵盖范围, 其次为时间先后. 即先 B1 后 B2, 期中复习请参考标注有期中试卷及其前面的测验试卷, 因为在它们后面的试卷都会涉及到期中考试之后的内容.

3. 本附录的主要作用是供同学们考试之前模拟使用, 越靠近现在的考卷越能接近现在的出题风格.

4. 没有参考答案, 希望读者自行思考, 同时熟悉题目类型. 建议本门课程的助教在平时习题课先将学过的部分的测验题进行讲解, 在考前习题课讲解对应的考试题.

5. 正值科大 60 周年校庆, 亦为少年班成立 40 周年之际, 谨以此真题集锦, 献礼科大, 也便于以后的助教的习题课工作和同学们复习本门课程. 感谢李平教授和 17 级少创班同学们提供往年题目. 再次祝愿科大数学教育越办越好!

2017–2018 秋季学期数学分析 (B1) 助教

2017–2018 春季学期数学分析 (B2) 助教

2015 级 少年班学院 理科试验 1 班 吴天[1]

2018 年 4 月于合肥

2020 版 · 说明

感谢吴天学长的辛苦整理, 给近年同学们的备考提供了不少方便和有价值的参考.

岁月不居, 时节如流. 转眼间, 科大的数学教育又走过了两载春秋. 本次 2020 年版数学分析 (B) 考试真题加入了 2018–2020 年共 12 套测验及考试真题, 但为了与原 2018 版合并, 延续页码, 只好将这些新题全部追加编排于最后. 2018 年版截止至 47 页, 48–60 页仍按照 “优先考虑知识涵盖范围, 其次为时间先后” 的顺序单独排列, 并在最后提供一套 B3 样卷作为参考.

愿科大的数学教育再攀新的高峰!

编者[2]

2020 年 9 月于合肥

---

[1]欢迎访问主页: http://home.ustc.edu.cn/~wt1997/

[2]最后更新: 2021 年 7 月 24 日. 点击此处获取最新版.

试题纠错、投稿、意见反馈欢迎来信: qifan@mail.ustc.edu.cn

2021 版 · 说明

1. 本次全新改版, 对全部试卷重新编排, 排列顺序按照“优先考虑知识涵盖范围, 其次为时间先后”, 将新加入的试卷与先前的试卷合并排列, 采用 XƎLaTeX 进行编译排版, 并修复了旧版本的若干排印错误.

2. 加入了目录和书签, 并在页眉中加入标题, 方便同学们查找索引.

3. 相比 2020 版, 更新了 2020–2021 学年两个学期的数学分析 (B1), (B2) 的期中、期末等若干套试题, 并提供一套数学分析 (B3) 的期中试题, 供同学们参考. 更新试题包括:

(1) 2020–2021 学年数学分析 (B1), (B2) 的期中、期末共 4 套试题

(2) 2016–2017 学年第一学期数学分析 (B1) 第三次测试

(3) 2007–2008 学年第二学期数学分析 (II) 期末考试

(4) 2017–2018 学年第二学期数学分析 (B2) 期中考试

(5) 2017–2018 学年第二学期数学分析 (B2) 期末考试

(6) 2020–2021 学年第一学期数学分析 (B3) 期中考试

4. 由于本次对全部试卷重新编排, 尽管编者已认真校对, 但新的排印错误仍然难以避免, 若发现排印错误欢迎联系: qifan@mail.ustc.edu.cn, 感激不尽! 勘误将会实时更新到下方的更新日志, 可以根据你所使用的版本留意相应的修正或访问网页

http://home.ustc.edu.cn/~qifan/exams/MathematicalAnalysisExams.pdf

获取最新版本.

2021 年秋季学期数学分析 (B1) 助教
2019 级 少年班学院 创新试点 3 班 余启帆[3]
2021 年 7 月于合肥

更新日志

2021.07.24　2021 版初始版本

[3]欢迎访问主页: http://home.ustc.edu.cn/~qifan/

目录

第 1 部分　数学分析 (B1)

中国科学技术大学 2011–2012 学年第一学期

数学分析 (B1)　第一次测试

1. (10 分) 用数列极限的定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+\sin n}=\dfrac{1}{2}$.

2. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 有定义, 请叙述极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且有限的 Cauchy 收敛准则.

3. (40 分, 每小题 10 分) 求下列极限 (其中 n 均为正整数):

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n+\sin\dfrac{1}{n}}-\sqrt{n}\right)$;

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x^2-1}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}(2-\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

4. (10 分) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}\leqslant ba_n$, $n=1,2,\cdots$, 其中 $0<b<1$. 求证: 数列 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 收敛.

5. (10 分) 设 $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n+\sin a_n}{2}$, $n=1,2,\cdots$. 讨论数列 $\{a_n\}$ 的收敛性和极限.

6. (10 分) 设 E 是非空有上界的数集, 且它的上确界 a 不在 E 中. 求证: E 中存在数列 $\{x_n\}$ 严格递增趋于 E 的上确界.

7. (10 分) 设 $f(x)$ 是定义在实轴 $\mathbb{R}$ 上的函数且对任意 x,y 有

$$|xf(x)-yf(y)|\leqslant M|x|+M|y|,$$

其中 $M>0$. 求证:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 收敛;

(2) 存在常数 a 使得对任意 x, 有 $|f(x)-ax|\leqslant M$.

中国科学技术大学 2011–2012 学年第一学期
数学分析 (B1) 第二次测试

1. (50 分) 计算题.

(1) 求函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最大值, 最小值和凸凹区间;

(2) 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}\mathrm{e}^{-x}$;

(3) 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos x-\sqrt{1+6x}-\mathrm{e}^{-3x}}{\ln(1-x^2)}$;

(4) 计算 $\sqrt[4]{2}$, 精确到 10^{-3}. (注意: 要求给出计算过程, 不允许使用计算器)

(5) 水果公司在对其最新电子产品 iDayDream 售前市场调研发现, 如以 3000 元的价格出售 iDayDream, 会有一百万顾客有购买意向, 此时每台 iDayDream 会有 1000 元的利润; 而每当价格提升或降低 100 元, 潜在顾客会在原来基础上降低或增加 5%. 试求对水果公司而言 iDayDream 的最佳定价以及此时的利润. (在计算中, 你可以使用: 当 x 靠近 0 时, $\ln(1+x)\approx x$)

2. (10 分) 设多项式 $f(x)=\prod\limits_{i=1}^{k}(x-x_i)^{n_i}$, 其中 $k\geqslant 2$, $n_1,\cdots,n_k$ 为正整数, 且 $\sum\limits_{i=1}^{k}n_i=n$, $x_1<x_2<\cdots<x_k$. 证明: 对于 $1\leqslant i\leqslant k-1$, 存在 $x_i<\xi_i<x_{i+1}$, 使得

$$f'(x)=n\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)^{n_i-1}\prod_{i=1}^{k-1}(x-\xi_i).$$

3. (10 分) 设 p,q 为正实数且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 求证: 对于 $x_1,x_2>0$, $x_1x_2\leqslant\dfrac{x_1^p}{p}+\dfrac{x_2^q}{q}$.

4. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-A,A]$ (A 为正常数) 上满足 $f''=-f$. 证明:

$$f(x)=f(0)\cos x+f'(0)\sin x.$$

5. (20 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶可导, 在 (a,b) 内二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)f'(b)>0$. 证明:

(1) 存在 $\xi\in(a,b)$, $f(\xi)=0$;

(2) 存在 $a<\xi_1<\xi_2<b$, $f'(\xi_1)=f(\xi_1)$, $f'(\xi_2)=f(\xi_2)$;

(3) 存在 $\eta\in(a,b)$, $f''(\eta)=f(\eta)$.

中国科学技术大学 2012–2013 学年第一学期
数学分析 (B1)　第一次测试

1. (20 分, 每小题 5 分) 判断下列命题的真伪, 并说明理由.

(1) 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在无穷多个 n, 使得 $|a_n - a| < \varepsilon$, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a;

(2) 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a_N| < \varepsilon$, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛;

(3) 若 $f : [-2, 2] \to [-1, 1]$ 连续, 则存在 $x_0 \in [-2, 2]$ 使得 $f(x_0) = x_0$;

(4) 若 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 一致连续, 则 f 有界.

2. (32 分, 每小题 8 分) 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n - (n-1)\sqrt{1 - \dfrac{1}{n}}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{2x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x(\sqrt{1+\sin x} - 1)}{1 - \cos(\sin x)}$.

3. (10 分) 设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + x^2 \mathrm{e}^{nx}}{x + \mathrm{e}^{nx}}$. 求 $f(x)$, 并研究其连续性.

4. (10 分) 设函数 $f : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ 满足: 对任意 $x \in (0, \infty)$, $f(x) = f(x^2)$. 若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 证明 $f(x)$ 为常值函数.

5. (12 分) 设 $\alpha > 1$, $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{\alpha(1 + x_n)}{\alpha + x_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

6. (8 分) 设 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$, 判断数列 $\{a_n\}$ 的收敛性.

7. (8 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \{a_k\} = 0$.

中国科学技术大学 2012–2013 学年第一学期
数学分析 (B1) 第二次测试

1. (35 分, 每小题 5 分) 计算题.

(1) $x^2 e^x$ 的 n 阶导数;

(2) 已知 $\sin(xy) + y^2 = x$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$. (用 x, y 的函数表示)

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^2}{x^3 \sin x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} x(a^{\frac{1}{x}} - b^{\frac{1}{x}})$, $a, b > 0$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x \cos 2x \cos 3x}{1-\cos x}$;

(7) 求函数 $\ln x$, $x > 0$ 的曲率.

2. (10 分) 求证: $A := \max\{\sqrt[n]{n} : n = 1, 2, \cdots\}$ 存在, 并求出相应的 n_0 使得 $\sqrt[n_0]{n_0} = A$.

3. (10 分) 求常数 a, b 使得 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan^2(ax)}{x}, & x > 0, \\ (2a-1)x + b, & x \leqslant 0 \end{cases}$ 在定义域上可导.

4. (15 分) 设函数 f 在区间 I 上可导. 证明: $f(x)$ 在 I 上一致连续的充分条件是导函数有界, 并举例说明必要性不成立.

5. (15 分) 设有界闭区间 $[a, b]$ 上函数 $f(x)$ 满足

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \quad \forall x, y \in [a, b], \quad \lambda \in (0, 1),$$

证明: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

6. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 附近有二阶连续导数, 且 $f''(0) \neq 0$. 求证: 对任意 x, 若 $|x|$ 充分小, 则存在唯一的 $\theta \in (0, 1)$, 使得 $f(x) = f(0) + f'(\theta x)x$, 并求 $\lim\limits_{x\to 0} \theta$.

中国科学技术大学 2013–2014 学年第一学期
数学分析 (B1)　第一次测试

1. (10 分) 用数列极限的定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+(-1)^n\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$.

2. (18 分, 每小题 9 分) 判别下面两个极限是否收敛:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}\dfrac{x}{x+1}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}\ln k}{k^3}$.

3. (32 分, 每小题 8 分) 求下列极限: (其中 n 均为正整数)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+(-1)^k\sqrt{k}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\ln(2x+1))^{\frac{1}{\sin x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}((n+\ln n)^{\alpha}-n^{\alpha})$ $(\alpha\in(0,1))$.

4. (15 分) 设 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调函数, $f(x)=\sin g(x)$. 求证: $f(x)$ 在任意点 x_0 的左右极限都存在.

5. (15 分) 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 且相邻两项之差为整数. 求证: 从某项开始都有 $a_n=a$.

6. (10 分) 设 $a_1=1$, $a_{n+1}=1+\dfrac{2}{a_n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. 求证: $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

中国科学技术大学 2013–2014 学年第一学期
数学分析 (B1) 第二次测试

1. (12 分) 试确定常数 a, b 的值, 使得 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ 为连续函数.

2. (12 分) 设函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处有二阶导数且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, 求 $f(0)$, $f'(0)$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$.

3. (12 分) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导, $f'(x_0) \neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} - \dfrac{1}{(x - x_0)f'(x_0)} \right)$.

4. (12 分) 设由参数方程 $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \sin t \\ y = \mathrm{e}^t \cos t \end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

5. (12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 在什么条件下, $|f(x)|$ 在 $x = 0$ 处也可导?

6. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 且对任意 $x, y \in (0, +\infty)$, 满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$. 证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续.

7. (10 分) 利用微分学的方法证明: 当自然数 $n > 9$ 时, $(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}} > (\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$.

8. (10 分) 今年, 中国田径运动员在男子百米比赛中创造了 10 秒整的全国纪录. 有人说这位运动员在这次比赛中一定在某个一秒钟的时间内正好跑了 10 米. 这个说法正确吗? 请给出你的证明.

9. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内有二阶导数, 且满足 $f''(x) = \mathrm{e}^x f(x)$, $f(a) = f(b) = 0$, 证明: $f(x) \equiv 0$.

中国科学技术大学 2015–2016 学年第一学期
数学分析 (B1)　第一次测试

1. (10 分) 用函数极限的定义证明: $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x^2+x+2}{x^3+x^2-x-1}\right)=\dfrac{1}{4}$.

2. (10 分) 数列 $\{\sqrt{n}(\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n})\}$ 是否收敛? 说明理由.

3. (20 分, 每小题 10 分) 求下面数列的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^k}{n^n}$ $(k\in\mathbb{N}^*)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2\sin\dfrac{1}{n}\right)^n$

4. (20 分, 每小题 10 分) 求下面函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+8x-10}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$.

5. (10 分) 函数 $x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 是否有界, 当 $x\to+\infty$ 时是否为无穷大量? 说明理由.

6. (10 分) 求数列 $\left\{\dfrac{n+1}{2n-1}\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ 的上极限和下极限.

7. (10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ $(n\geqslant1)$ 定义. 判断数列 $\left\{\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}\right\}$ 是否收敛, 若收敛, 则求其极限.

8. (10 分) 设 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+1}=\dfrac{3n-1}{2n}a_n-\dfrac{n-1}{2n}a_{n-1}$ $(n=2,3,\cdots)$. 求证: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

中国科学技术大学 2015–2016 学年第一学期
数学分析 (B1) 第二次测试

1. 求下面的导数:

(1) 设 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ \left(x\neq -\dfrac{d}{c}\right)$, 求 $f^{(n)}(x)$.

(2) 对由参数方程 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ 确定的函数 $y=y(x)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

2. 求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cot x}{x}\right)$;

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{\mathrm{e}}{2}x+x^2\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}\right)\right]$.

3. 证明:

(1) 不等式 $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}\leqslant\sqrt[n]{x-y}$ 对任何 $x\geqslant y\geqslant 0$ 成立.

(2) 不等式 $\cot x>1-\dfrac{x^2}{2}$ 对任何 $x\neq 0$ 成立.

4. 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$ 的极值.

5. 设函数 $f(x):[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 一致连续, $\alpha\in(0,1]$. 求证: 函数 $g(x)=f^{\alpha}(x)$ 也在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

6. 证明: 多项式 $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k}$ 当 n 是偶数时无零点, 当 n 是奇数时恰有一个零点.

中国科学技术大学 2003–2004 学年第一学期
数学分析 (I)　期中考试

1. (15 分, 每小题 5 分)

(1) 用 $\varepsilon - N$ 语言表达 “数列 $\{a_n\}$ 不以实数 a 为极限” 这一陈述;

(2) 讨论函数 $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的一致连续性;

(3) 用极限的定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$.

2. (20 分, 每小题 5 分) 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$;

(2) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{[x]^2 - 4}{x^2 - 4}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^x$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x - \mathrm{e}\right)$.

3. (20 分, 每小题 5 分) 求下列导数:

(1) $\left(\ln\tan\dfrac{x}{2}\right)'$;

(2) $\left(\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)'$;

(3) $(\sqrt{1-x^2})'$

(4) $(x\mathrm{e}^x)^{(n)}$.

4. (12 分) 设 x_1 是一个正数, 并归纳地定义 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, $n = 1, 2, \cdots$. 求证: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

5. (13 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是严格凸的并有二阶导函数, 又 $f(0) = f'(0) = 0$. 求证: 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$.

6. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上有连续的导函数, 且 $f(0) = 1$. 又当 $x \geqslant 0$ 时, $|f(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x}$. 求证: 存在 $x_0 > 0$, 使得 $f'(x_0) = -\mathrm{e}^{-x_0}$.

7. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上可导, 且满足 $|f'(x)| \leqslant 1$ 及 $f(0) = f(1) = 1$. 求证: 对 $\forall x \in (0, 1]$, 有 $f(x) > \dfrac{1}{2}$.

中国科学技术大学 2005–2006 学年第一学期
数学分析 (I) 期中考试

1. (10 分) 叙述数列 $\{a_n\}$ 收敛于实数 a 的定义, 并用极限定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

2. (10 分) 叙述函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的定义, 并讨论函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的一致连续性 (要给出证明).

3. (10 分) 求数列 $a_n=\dfrac{n^2}{1+n^2}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$ 的上极限和下极限.

4. (20 分, 每小题 5 分) 计算下面数列的极限或导数:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{a}{x}\right)^x$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$;

(3) $\left(\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)'$;

(4) $(x\mathrm{e}^x)^{(n)}$.

5. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上有连续的导函数, 且 $f(0)=1$. 又当 $x\geqslant0$ 时, $|f(x)|\leqslant\mathrm{e}^{-x}$. 求证: 存在 $x_0>0$, 使得 $f'(x_0)=-\mathrm{e}^{-x_0}$.

6. (20 分) 设函数 $f(x)$ 把有界闭区间 $[a,b]$ 映射到 $[a,b]$, 并且满足 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$. 任取 $x_1\in[a,b]$, 并归纳地定义 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+f(x_n))$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $[a,b]$ 内一点 c, 且 $f(c)=c$.

7. (20 分) 设 $f(x)$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 中每点的右导数存在, 且 $f(a)<f(b)$. 求证: 存在 $c\in(a,b)$, 使 $f'_+(c)\geqslant0$.

中国科学技术大学 2006–2007 学年第一学期
数学分析 (I)　期中考试

1. (20 分, 每小题 5 分) 叙述题.

(1) 用 $\varepsilon - N$ 语言表述 “实数 a 不是数列 $\{a_n\}$ 的极限”.

(2) 叙述 “函数 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时以实数 l 为极限” 的定义.

(3) 叙述用来判断数列 $\{a_n\}$ 是否收敛的 Cauchy 收敛准则.

(4) 叙述 “函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续” 的定义.

2. (20 分, 每小题 5 分) 求下列极限:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n^3+k)^{\frac{1}{3}}}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^x-1}$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$;

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x\ln(x+1)}$.

3. (20 分, 每小题 5 分) 计算下面的导数:

(1) $(2^x\sin x+\ln(x^2+1))'$;

(2) $(|x|\sin x)'$;

(3) $\displaystyle\left(\arctan\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'$;

(4) $(x\mathrm{e}^x)^{(n)}$.

4. (10 分) 求函数 $f(x)=x^i(1-x)^{n-i}$ $(0<i<n)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值.

5. (10 分) 设 $f(x)$ 是定义在实轴 $\mathbb{R}$ 上的函数, 且存在常数 L 和 $\alpha>1$ 使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L\,|x-y|^{\alpha}\quad x,y\in\mathbb{R}.$$

求证: $f(x)$ 是常数.

6. (10 分) 求证: 在区间 $(0,1]$ 上不等式 $\sin^2 x<\sin x^2$ 成立.

7. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微且满足 $f(0)=0$ 及 $|f'(x)|\leqslant|f(x)|$, $x\in[0,1]$. 求证: 在 $[0,1]$ 上, $f(x)\equiv 0$.

中国科学技术大学 2007–2008 学年第一学期
数学分析 (I) 期中考试

1. (10 分) 叙述题.

(1) 用 $\varepsilon-\delta$ 语言表述 "函数 $f(x)$ 在区间 I 上不一致连续".

(2) 叙述用来判断数列 $\{a_n\}$ 是否收敛的 Cauchy 收敛准则.

2. (20 分, 每小题 5 分) 求下列极限:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n^3+n-k)^{\frac{1}{3}}}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^3\sin^2\frac{1}{x}}{1-\cos x}$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$;

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{x^2\ln(x+1)}$.

3. (20 分) 计算下面的导数:

(1) $(2^x\sin x+\ln(x^2+1))'$;

(2) $(|x|(\mathrm{e}^x-1))'$;

(3) $\displaystyle\left(\arctan\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'$;

(4) $(x\sin x)^{(n)}$.

4. (20 分) 求函数 $f(x)=\cos^2x\sin x+\cos x\sin^2x$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值.

5. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导且满足 $f(a)=f(b)=0$ 及不等式 $f'(x)\geqslant 2xf(x)$, $x\in[a,b]$. 求证: $f(x)\equiv0$.

6. (10 分) 设 $f(x)$ 在实轴 $\mathbb{R}$ 上有二阶导数, 且满足方程

$$2f(x)+f''(x)=-xf'(x).$$

求证: $f(x)$ 和 $f'(x)$ 都在 $\mathbb{R}$ 上有界.

7. (10 分) 证明: 对任意自然数 n, 方程 $x+x^n=1$ 恰有一个正根 x_n. 进一步证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

中国科学技术大学 2017–2018 学年第一学期
数学分析 (B1)　期中考试

1. (10 分) 用数列极限的定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n+2(-1)^n}=\dfrac{1}{3}$.

2. (8 分) 写出一个在 $(0,1]$ 上连续且有界, 但不一致连续的函数, 并说明理由.

3. (32 分, 每小题 8 分) 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1)\ln(1+x^2)}{(\sin x-x\cos x)\tan x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

4. (12 分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k}$.

5. (15 分) 求常数 a,b 使得 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2(ax)}{x}, & x>0\\ (2a-1)x+b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在定义域内可导.

6. (15 分) 设函数 $y=y(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导且满足方程 $y+2^y-x-\sin x=1$. 求 $y'(0)$.

7. (8 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导. 假设存在 $x_0\in(a,b]$ 使得 $f'(x_0)=0$. 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

中国科学技术大学 2018–2019 学年第一学期
数学分析 (B1) 期中考试

2018 年 11 月 18 日

1. (8 分, 每小题 4 分) 叙述题:

(1) 用 $\varepsilon - N$ 语言表述 "数列 $\{a_n\}$ 不以实数 a 为极限".

(2) 用 $\varepsilon - \delta$ 语言表述 "函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续".

2. (16 分, 每小题 4 分) 求下列数列或函数极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln^2(n+1)-\ln^2 n\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^x$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}\right)$.

3. (16 分, 每小题 4 分) 计算下面的导数:

(1) $\left(\ln\tan\dfrac{x}{2}\right)'$;

(2) $\left(\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)'$;

(3) $\left(\sqrt{1-x^2}\right)'$;

(4) $(x\mathrm{e}^x)^{(n)}$.

4. (15 分) 设 $a_1=1, a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n}, n=1,2,\cdots$. 求证: 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

5. (15 分) 求证: $\sin x > x-\dfrac{x^3}{6}\ (x>0)$.

6. (15 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$. 若对一切 $x,y\in[0,1]$, $x\neq y$, 有

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|.$$

求证: 存在且只存在一个 $x_0\in(0,1]$ 使 $f(x_0)=\dfrac{1-x_0}{x_0}$.

7. (15 分) 设非常值函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶导数, 且满足

$$|f''(x)|\leqslant|f'(x)|.$$

求证: $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调.

中国科学技术大学 2019–2020 学年第一学期
数学分析 (B1)　期中考试

2019 年 11 月 16 日

1. (36 分, 每小题 6 分) 计算题 (给出必要的计算步骤).

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 为正的有界数列, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}+ax+b\right)=0$, 求 a,b 的值.

(3) 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0)\neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}-\dfrac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}\right]$.

(4) 设由参数方程 $\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(5) 设函数 $f(x)=x^2\ln(1-x^2)$, 求当 $n>2$ 时, $f^{(n)}(0)$ 的值.

(6) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

2. (12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, 满足 $f(0)=0,\ f'(0)=1$, 并且 $f(x)$ 有反函数 $g(x)$, 求 $f(x^2)$ 和 $g(x^2)$ 在 $x=0$ 处的关于 x 的二阶导数的值.

3. (18 分, 每小题 6 分) 设 α 为实数, 函数 $f(x)=\begin{cases} x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0.\end{cases}$

解答下列问题: (需说明理由)

(1) 问当且仅当 α 取何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 但不可导?

(2) 问当且仅当 α 取何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 但导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续?

(3) 问当且仅当 α 取何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续?

4. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $\{x_n\}$ 是区间 $[a,b]$ 上的点列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$, 证明: 存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=A$.

5. (12 分, 每小题 6 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上有有界的导函数, 证明:

(1) 函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

(2) 函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

6. (12 分, 每小题 6 分)

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一阶可导, $f(0)=1, f'(x)<f(x)$, 证明: 当 $x>0$ 时, $f(x)<\mathrm{e}^x$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导, $f(0)=1, f'(0)\leqslant 1, f''(x)<f(x)$, 证明: 当 $x>0$ 时, $f(x)<\mathrm{e}^x$.

中国科学技术大学 2020–2021 学年第一学期
数学分析 (B1) 期中考试

2020 年 11 月 21 日

1. (35 分, 每小题 7 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\cos x}{x}$.

(3) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[6]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

(4) 设 $f(x)=(\sin x)^{\cos x}$, 计算 $f'(x)$.

(5) 计算 $f(x)=\sqrt[3]{2-\cos x}$ 在 $x=0$ 处的直到 x^5 的 Taylor 公式.

2. (7 分) 设

$$a_0=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}=a_n(2-a_n),\quad n=0,1,2,\cdots.$$

试证: 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$.

3. (10 分) 设函数

$$f(x)=\begin{cases}(x+a-2)^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ x\cos x+(b-1)(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x<0.\end{cases}$$

试问: 常数 a,b 为何值时, 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续? 此时是否在 $x=0$ 可导?

4. (8 分) 试证: 方程 $x^2=x\sin x+\cos x-\dfrac{1}{2}$ 恰好只有两个不同的实根.

5. (10 分) 设 $a<b<c$, $f(x)$ 分别在 $(a,b]$ 和 $[b,c)$ 上一致连续, 证明: $f(x)$ 在 (a,c) 上一致连续.

6. (10 分) 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限的切线, 使得其与坐标轴围成的三角形的面积最小.

7. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且 $ab>0$. 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

8. (10 分) 设 $f(x)$ 连续, 对于某个固定的 $a\in(0,1)$ 以及某个实数 A 满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(ax)}{x}=A,$$

试证: $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 并求 $f'(0)$ 的值.

中国科学技术大学 2015–2016 学年第一学期
数学分析 (A1) 期中考试

1. (10 分) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续周期函数. 证明: f 一致连续.

2. (10 分) 回答下列问题, 并说明理由.

(1) 设函数 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ 满足 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|^2$, $\forall x,y\in(0,1)$, 是否一定有 $f\equiv 0$?

(2) 设函数 $f\in C[0,1]$ 是单射且 $f(0)<f(1)$, 问 f 是否单调递增?

(3) 设函数 $f\in C[0,1]$, 问对 $\forall t\in(0,1)$, 是否存在 $x,y\in(0,1)$, 使得 $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(t)$?

3. (15 分) 计算下列极限的值.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi x-\pi\sin x}{x^3}$;

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^{2017}}\right)\right)^{\frac{1}{n^{2015}}}$.

4. (10 分) 设可微函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 既非常值函数, 也不是一次多项式. 证明: $\exists\xi,\eta\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)<f(1)-f(0)<f'(\eta)$.

5. (10 分) 设 $f:[0,+\infty)\to(-\infty,0]$ 为凸函数. 证明: f 单调递减.

6. (15 分) 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}\subseteq\mathbb{N}$, 满足

$$a_1=b_1=1,\quad a_n+\sqrt{3}b_n=(a_{n-1}+\sqrt{3}b_{n-1})^2.$$

证明: $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$ 收敛, 并求出该极限值.

7. (10 分) 设函数 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 满足 $M_0:=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|<\infty$, $M_2:=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|<\infty$. 证明: $M_1:=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|<\infty$, 且满足不等式 $M_1^2\leqslant 2M_0M_2$.

8. (10 分) 设函数 $f\in C^2[0,+\infty)$ 满足 $f(x)\leqslant f''(x)$, $\forall x\in[0,+\infty)$ 且 $f(0)\geqslant 0$, $f'(0)\geqslant 0$. 证明: $f(x)\geqslant f(0)+f'(0)x$, $\forall x\in[0,+\infty)$.

9. (10 分) 设可导函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 满足 $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$, $\forall x,y\in[a,b]$. 求 f.

中国科学技术大学 2012–2013 学年第一学期
数学分析 (B1) 第三次测试

1. (24 分, 每小题 6 分) 求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int x(x-1)^7\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int \sin(2x)\cos^2 x\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})\,\mathrm{d}x$.

2. (24 分, 每小题 6 分) 求下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{(x^2+1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{|\cos x|}\sin^5 x\,\mathrm{d}x$.

3. (20 分) 求下面的极限:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}\int_0^{x^2}\frac{t^4}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$.

4. (12 分) 求极坐标方程 $r=\mathrm{e}^{-\theta}$ $(0\leqslant\theta<+\infty)$ 表示的螺线的长度.

5. (10 分) 设 $f(x)\in C[0,1]$ 且满足 $3\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x+1=6\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$. 求证: $f(x)=x$.

6. (10 分) 设 $f\in C(\mathbb{R})$, 令 $g(x,y)=\displaystyle\int_0^x (f(t+y)-f(t))\,\mathrm{d}t$. 求证: $g(x,y)=g(y,x)$.

中国科学技术大学 2012–2013 学年第一学期
数学分析 (B1)　第四次测试

1. (14 分) 求下列微分方程的通解:

(1) $y' = \dfrac{x+y}{y-2} - 1$;

(2) $y' = \dfrac{x+y+2}{x-y+4}$.

2. (12 分) 求微分方程 $y'' - xy' - x^3(y')^3 = 0$, 满足 $y'(0) = 1$, $y(0) = 0$ 的特解.

3. (30 分) 判断下列数项级数的敛散性, 对非正项级数指出其是条件收敛还是绝对收敛, 并写出理由.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{2^n}$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(\ln n)^3}$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

4. (15 分) 设函数序列 $\{f_n(x) = n^{\alpha} x^2 \mathrm{e}^{-nx}\}$, 试问 α 取何值时:

(1) $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上收敛;

(2) $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛;

(3) 等式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 成立.

5. (14 分) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ 的收敛半径及收敛区域, 并求它的和函数.

6. (15 分) 将函数 $\arctan \dfrac{3x-1}{3x+1}$ 展开成 Maclaurin 级数, 并求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

中国科学技术大学 2013–2014 学年第一学期
数学分析 (B1) 第三次测试

1. (36 分, 每小题 9 分) 计算下列积分.

(1) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int \max\{x^3, x^2, 1\}\,\mathrm{d}x$.

2. (18 分, 每小题 9 分) 求极限:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n(n+3k)}}\right)$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+a}\frac{(\ln t)^n}{t+2}\,\mathrm{d}t$, $a>0$, $n\in\mathbb{N}$.

3. (10 分) 计算由曲线 $x=2y^2$ 和 $x=1+y^2$ 所围成的平面图形的面积.

4. (18 分) 设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$, $x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域, D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域, $0<a<2$.

(1) 求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1, D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2;

(2) 问当 a 为何值时, V_1+V_2 最大, 并求此最大值.

5. (6 分) 试用积分方法证明: 当 $x>0$ 时, 有

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}.$$

6. (6 分) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且满足

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\ (x\in[a,b)),\quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明: $\displaystyle\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\,\mathrm{d}x$.

7. (6 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0,\quad \int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

证明: 至少存在两点 $x_1, x_2\in(a,b)$, 使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

中国科学技术大学 2015–2016 学年第一学期
数学分析 (B1) 第三次测试

1. (24 分) 计算下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int x(x-1)^5\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int (2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x$.

2. (24 分) 计算下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+3x}{(x^2+1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{-3}^2 \min\{2, x^2\}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

3. (20 分, 每小题 10 分) 计算下列极限的值.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}$, 其中 $f(x)$ 连续, 且 $f(0)\neq 0$.

4. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续, 且对 $[-1,1]$ 上的任意连续偶函数 $g(x)$, 有

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

证明: $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的奇函数.

5. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导函数, 证明:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \leqslant \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

中国科学技术大学 2016–2017 学年第一学期
数学分析 (B1) 第三次测试

1. (10 分) 用 $\varepsilon-\delta$ 语言写出函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的定义.

2. (14 分) 求不定积分:

(1) $\displaystyle\int (1+\sqrt{x})^{100}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1+x^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$

3. (24 分) 求积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{n\pi} x\,|\sin x|\,\mathrm{d}x$, 其中 n 是正整数;

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

4. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调, 在 $x=0$ 的邻域内无界, 且瑕积分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 求证:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. (12 分) 设

$$F(x)=\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t,\quad G(x)=\int_0^x \cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

求 $F'(0), G'(0)$.

6. (14 分) 回答下列问题并简要说明理由:

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 问 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是否一定有原函数?

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 问 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上是否一定可积?

7. (8 分) 设 n 是正整数, 计算积分

$$\int_0^{\pi} \cos^n x\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

8. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的一阶导数, $f(0)=0$, $f(1)=1$, 且 $f'(x)-f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不变号. 证明:

$$\int_0^1 (f'(x)-f(x))\,\mathrm{d}x>\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

中国科学技术大学 2003–2004 学年第一学期
数学分析 (I)　期末考试

1. (20 分, 每小题 5 分) 叙述题.

(1) 写出函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分的定义.

(2) 写出带 Lagrange 余项的 Taylor 定理.

(3) 写出关于函数是否 Riemann 可积的 Lebesgue 定理.

(4) 写出微积分基本定理.

2. (20 分, 每小题 5 分) 求下列极限:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^{x^2}\arctan t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^4+1}}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$;

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\frac{(k-1)\pi}{2n}-\cos\frac{(k+1)\pi}{2n}}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}$.

3. (20 分, 每小题 5 分) 求下列积分:

(1) $\displaystyle\int\sqrt{x}\ln^2 x\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int\frac{\cos x\sin x}{(1+\sin^2 x)^n}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

4. (20 分) 求参数方程 $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 为参数, $a>0$ 为常数) 所表示的曲线的弧长和曲率.

5. (10 分) 求满足函数方程:

$$\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

的连续函数 $f(x)$.

6. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续的导函数, 且 $f(0)=0$. 求证:

$$\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)\,|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

等号成立当且仅当 $f(x)\equiv cx$, 其中 c 为常数.

中国科学技术大学 2005–2006 学年第一学期
数学分析 (I) 期末考试

1. (20 分, 每小题 5 分) 叙述题.

(1) 写出带 Lagrange 余项的 Taylor 定理.

(2) 写出函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 积分的定义.

(3) 写出关于函数是否 Riemann 可积的 Lebesgue 定理.

(4) 写出微积分基本定理.

2. (40 分, 每小题 10 分) 求下列各式:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^p}{n^{p+1}}$, $p>0$;

(3) $\displaystyle\int x(\ln x)^2\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$.

3. (15 分) 求参数曲线

$$\varGamma: x=\frac{\sin t}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{t}{\sqrt{2}},\quad z=\frac{1-\cos t}{\sqrt{2}},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

的弧长和曲率.

4. (10 分) 设 $f(x)$ 是区间 $[-1,1]$ 上的连续函数, 并且对一切在 $[-1,1]$ 上可积的奇函数 $g(x)$, 有 $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$. 求证: $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的偶函数.

5. (10 分) 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足函数方程

$$\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=(x-1)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

的连续函数. 求证: $f(x)\equiv 0$.

6. (5 分) 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上满足 $f(0)=f(1)=0$ 的连续可微函数, 求证不等式

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{1}{12}\int_0^1|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

等号成立当且仅当 $f(x)\equiv Ax(1-x)$, 其中 A 为常数.

中国科学技术大学 2006–2007 学年第一学期
数学分析 (I) 期末考试

1. (25 分, 每小题 5 分) 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4}\left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^3}\,\mathrm{d}t - x\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x x^n\,\mathrm{d}x$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^3}}{n}$.

2. (20 分, 每小题 5 分) 求下列积分:

(1) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int \frac{\cos x\sin x}{(1+\sin^2 x)^n}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

3. (10 分) 求解微分方程: $(x+y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$.

4. (10 分) 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\alpha}\cos n$ 的条件收敛性和绝对收敛性.

5. (10 分) 讨论函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$ 在区间 $0\leqslant x<+\infty$ 上的一致收敛性.

6. (15 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上非负连续可微, $f(0)=f(1)=0$, 且 $|f'(x)|\leqslant 1$. 求证:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4},$$

又问上面的不等式是否可能成为等式, 为什么?

7. (10 分) 设 $\{a_n\}$ 是正数列且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

中国科学技术大学 2007–2008 学年第一学期
数学分析 (I) 期末考试

1. (15 分, 每小题 5 分) 概念题.

(1) 叙述 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 积分的定义.

(2) 叙述函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在集合 E 上一致收敛的定义.

(3) 叙述函数 $f(x)$ 在区间 I 内一点 x_0 可微的定义.

2. (15 分, 每小题 5 分) 计算下面的积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

3. (15 分) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$ 在其收敛域内的和函数.

4. (15 分) 求微分方程 $y''=\dfrac{y'}{x}+x$ 的通解.

5. (15 分) 设 $\{a_n\}$ 是正数列且满足 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n}=q<1$. 求证: 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

6. (15 分) 求证: 函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}(1-x)^2x^n$ 在区间 $(-1,1]$ 上收敛, 并讨论其和函数在此区间上的连续性.

7. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且满足

$$|f(x)| \leqslant \mathrm{e}^{kx}+k\int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t,$$

其中 k 是常数. 求证: $|f(x)| \leqslant (kx+1)\mathrm{e}^{kx}$.

中国科学技术大学 2008–2009 学年第一学期
数学分析 (I) 期末考试 (A 卷)

1. (15 分) 概念题.

(1) 用 $\varepsilon-\delta$ 语言描述 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$.

(2) 叙述函数列 $f_n(x)$ 在集合 E 上一致收敛于函数 $f(x)$ 的定义.

(3) 叙述函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上的无穷积分存在的定义.

2. (15 分) 计算下面的积分:

(1) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int \frac{\cos x\sin x}{(1+\sin^2 x)^n}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

3. (15 分) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^n-\frac{1}{n}\right)x^n$ 的收敛半径及其和函数.

4. (15 分) 求微分方程 $y'=\dfrac{y^2}{x^2}-2$ 的通解.

5. (15 分) 求证: 当 $x>0$, $\alpha>1$ 时, 有 $(1+x)^\alpha>1+\alpha x$.

6. (10 分) 设 $\alpha>0$, 研究级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)^\alpha-n^\alpha)\cos n$ 的敛散性.

7. (15 分) 设 $a_n=2\sqrt{n}-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$. 求证:

(1) $1\leqslant a_n\leqslant 2-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

(2) 极限 $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在;

(3) 数列 $\{\sqrt{n}(a-a_n)\}$ 有界.

中国科学技术大学 2008–2009 学年第一学期
数学分析 (I) 期末考试 (B 卷)

1. (15 分) 概念题.

(1) 用 $\varepsilon - N$ 语言描述 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$.

(2) 叙述函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在集合 E 上一致收敛于函数 $f(x)$ 的定义.

(3) 叙述函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的定义.

2. (15 分) 计算下面的积分:

(1) $\int x^n \ln x \,\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

3. (15 分) 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-nx}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

4. (15 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛半径 R, 并求此幂级数在 $(-R,R)$ 中的和.

5. (15 分) 求解微分方程: $(x+y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$.

6. (15 分) 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足函数方程

$$\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = (x-1)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

的连续函数. 求证: $f(x) \equiv 0$.

7. (10 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上非负连续可微, $f(0) = f(1) = 0$, 且 $|f'(x)| \leqslant 1$. 求证:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4},$$

又问上面的不等式是否可能成为等式, 为什么?

中国科学技术大学 2011–2012 学年第一学期
数学分析 (B1)　期末考试

1. (20 分) 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{x\ln(1+x)}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^x$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$.

2. (10 分) 计算下面的积分:

(1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.

3. (10 分) 讨论下面级数的敛散性:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{3n-2}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{n!\mathrm{e}^n}$.

4. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶导函数且 $f(x),f'(x),f''(x)$ 都大于 0. 求证: $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0$.

5. (15 分) 求微分方程 $y''-y'=(2x+2)\mathrm{e}^x$ 的通解.

6. (15 分) 考虑函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-n^2x}}{n}$.

(1) 求该级数的收敛域;

(2) 在收敛域内该级数是否一致收敛? 说明理由.

(3) 在收敛域内该级数的和函数是否连续? 说明理由.

7. (10 分) 设 $\{a_n\}$ 是正的单调递增数列且 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛. 求证: $\{a_n\}$ 有界.

8. (10 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续的导函数且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 求证:

$$\int_0^1|f(x)+f'(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant 1.$$

中国科学技术大学 2012–2013 学年第一学期
数学分析 (B1) 期末考试

1. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 有定义. 请叙述当 $x\to+\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 存在有限极限的 Cauchy 收敛准则.

2. (20 分, 每小题 10 分) 求下面的极限.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4+|\sin x|}\int_0^{x^2}\frac{t^4+|\cos t|}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\sqrt{n}\right)$

3. (20 分, 每小题 10 分) 求下列积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{2n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\ (n\in\mathbb{N})$

4. (20 分, 每小题 10 分) 求下面微分方程的通解或初值问题的解.

(1) $(x+y)\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=0$.

(2) $\begin{cases} y''+(y')^2=y', \\ y(0)=y'(0)=1. \end{cases}$

5. (12 分) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x+1)x^n}{n}$ 的收敛域、和函数, 并讨论在收敛域内是否一致收敛.

6. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且 $f(a)=f(b)=0$. 求证: 对任意实数 c, 都存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)+cf(\xi)=0$.

7. (8 分) 设 $f(x)$ 是在 $[0,1]$ 上非负单调递增的连续函数, $0<\alpha<\beta<1$. 求证:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x,$$

且 $\dfrac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$ 不能换为更大的数.

中国科学技术大学 2013–2014 学年第一学期
数学分析 (B1)　期末考试

1. (10 分) 计算下面的导数:

(1) $(\ln(1+\mathrm{e}^{x\sin x}))'$

(2) $((x^2+1)\sin x)^{(n)}$.

2. (20 分) 计算下面的极限:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n-k^2}}$

3. (20 分) 计算下面的不定积分和积分:

(1) $\displaystyle\int(x+1)\mathrm{e}^x\ln x\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

4. (10 分) 求解微分方程 $y\cos x-y'\sin x=y^2(1-\sin x)\cos x$.

5. (10 分) 讨论函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

6. (10 分) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛区域及和函数.

7. (10 分) 求证: 对任意 $x>0$, $y>0$ 有 $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y+xy<\mathrm{e}^{x+y}+1$.

8. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶导函数, $f(x),f'(x),f''(x)$ 都大于 0, 假设存在正数 a,b, 使得 $f''(x)\leqslant af(x)+bf'(x)$ 对一切 $x\in\mathbb{R}$ 成立. 求证:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f'(x)=0$;

(2) 存在常数 c, 使得 $f'(x)\leqslant cf(x)$.

中国科学技术大学 2015–2016 学年第一学期
数学分析 (B1) 期末考试

1. (10 分, 每小题 5 分) 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt{n}\cos nx\sin x^n\,\mathrm{d}x$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t}{\ln(1+x^4)}$

2. (20 分, 每小题 5 分) 求下列积分:

(1) $\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \dfrac{1}{x(1+x^4)}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^1 \dfrac{(1-x)^2\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

(4) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

3. (15 分) 设 $f(x)=x\ln(1+x^2)$, 求 $f^{(n)}(0)$.

4. (15 分) 求在 $[0,+\infty)$ 上连续可微函数 $f(x)$, $f(0)=1$, 使得对任意 $t>0$, 曲线段 $L: y=f(x)$, $x\in[0,t]$ 的弧长恰好等于 L 与两个坐标轴及垂线 $x=t$ 所围成的区域的面积. 并求 L 绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

5. (20 分, 每小题 10 分) 求微分方程的通解.

(1) $(\sin x)y''-(\cos x)y'=\sin^2 x+1$.

(2) $y''-3y'+2y=2x$.

6. (12 分) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且满足方程 $f(x+a)=-f(x)$. 求证:

$$\int_0^{2a} xf(x)\,\mathrm{d}x=-a\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

7. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$. 求证:

$$2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2,$$

并求使上式成为等式的连续函数.

中国科学技术大学 2016–2017 学年第一学期
数学分析 (B1)　期末考试

1. (10 分, 每小题 5 分) 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{\ln(1+x^3)}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 n(1-x)\cos(nx)\sin(x^n)\,\mathrm{d}x$

2. (24 分, 每小题 8 分) 求下列积分:

(1) $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

3. (10 分) 设 $\delta>0$, 考察函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{1+n^2x}$ 分别在区间 $[\delta,+\infty)$ 和 $(0,+\infty)$ 上是否一致收敛.

4. (10 分) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n$ 的收敛半径及和函数.

5. (20 分) 求下列微分方程的通解:

(1) $y'+y=y^2x$;

(2) $xy''+2y'=2$.

6. (10 分) 求微分方程 $y''-2y'=\mathrm{e}^{4x}$ 满足初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=0$ 的特解.

7. (8 分) 设 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 是 $[0,1]$ 上的正连续函数, 满足 $f_1(x)\leqslant 2f_0(x)$. 设

$$f_{n+1}(x)=\frac{2f_n^2(x)}{f_n(x)+f_{n-1}(x)},\quad n=1,2,\cdots.$$

求证:

(1) $f_n(x)\leqslant c_nf_{n-1}(x)$, 其中 $c_1=2$, $c_{n+1}=\dfrac{2c_n}{c_n+1}$, $n=1,2,\cdots$;

(2) $|f_n(x)-f_{n-1}(x)|\leqslant\left(\dfrac{2}{3}\right)^n|f_1(x)-f_0(x)|$;

(3) 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

8. (8 分) 设 $\{a_n\}$ 是大于 1 的递增数列. 求证: 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界.

中国科学技术大学 2017–2018 学年第一学期
数学分析 (B1) 期末考试

1. (10 分) 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是 $n+1$ 个实数, $x_0 \in \mathbb{R}$, 求 n 次多项式 $P_n(x)$ 满足

$$P_n^{(k)}(x_0) = a_k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

2. (24 分, 每小题 6 分) 求下列积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

3. (14 分, 每小题 7 分) 求解下面的微分方程:

(1) 求 $y''' + y'' + y' + y = 0$ 的实的通解.

(2) 求 $\begin{cases} y' + 2xy = 4x \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的解.

4. (10 分) 设 $f(x)$ 是在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上非负单调递增的连续函数. 求证:

$$x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t \geqslant (1-\cos x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

5. (12 分) 设 $u_n(x) = (-1)^n x\mathrm{e}^{-nx}$. 证明:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛;

(2) 对于任何 $x \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 收敛;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

6. (10 分) 求函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x = 2$ 处的 Taylor 级数展开, 并指出收敛集合.

7. (10 分) 已知函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导, $x_0 \in (a,b)$. 定义函数

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x \in (a,b) \setminus \{x_0\}, \\ f'(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

设 $g(x)$ 在 x_0 可导, 且 $f(x)$ 在 x_0 二阶可导. 求证: $g'(x)$ 在 x_0 连续.

8. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导函数, 且 $f(0)f(1) \geqslant 0$. 求证:

$$\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

中国科学技术大学 2018–2019 学年第一学期
数学分析 (B1)　期末考试

2019 年 1 月 11 日

1. (10 分) 设 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$. 求 $f^{(n)}(0)$.

2. (20 分, 每小题 5 分) 求积分和不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x^2-x-1}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\arctan x\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$.

3. (20 分, 每小题 10 分) 求解下面的微分方程:

(1) 求 $(1+x^2)y''+2xy'=x$ 的通解.

(2) 求 $y''-3y'+2y=2x-3$ 的通解.

4. (10 分) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上连续函数. 求证:

$$\int_0^{\pi} xf\left(|\cos x|\right)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(|\cos x|\right)\mathrm{d}x.$$

5. (10 分) 研究函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^2}{n^x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上是否一致收敛.

6. (10 分) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛区域以及和函数.

7. (10 分) 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+\frac{1}{n^2},\quad n\geqslant 2.$$

试证明:

(1) $\dfrac{a_n n\ln n}{a_{n+1}(n+1)\ln(n+1)}<1+\dfrac{1}{n^2}$;

(2) 级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 发散.

8. (10 分) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上取值为正的可微函数, 且对所有 $x,y\in\mathbb{R}$, 有

$$\left|f'(x)-f'(y)\right|^2\leqslant|x-y|.$$

求证: 对所有 $x\in\mathbb{R}$, 有 $\left|f'(x)\right|^3<3f(x)$.

中国科学技术大学 2019–2020 学年第一学期

数学分析 (B1) 期末考试

2020 年 1 月 10 日

1. (30 分, 每小题 6 分) 计算题 (给出必要的计算步骤).

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^4}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int |\ln x|\,\mathrm{d}x$;

(5) 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^p}$, p 是常数, $p>0$, 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}[f(1)f(2)\cdots f(n)]^{\frac{1}{n^{p+1}}}$.

2. (10 分) 已知曲线 $y=y(x)$ 经过原点, 且在原点的切线平行直线 $2x-y-5=0$, 而 $y(x)$ 满足微分方程 $y''-6y'+9y=\mathrm{e}^{3x}$, 求曲线 $y=y(x)$.

3. (10 分) 求由方程 $|\ln x|+|\ln y|=1$ 所表示的平面曲线所围成的平面图形的面积.

4. (10 分) 设 α,β 为实数. 函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x\in(0,1], \\ 0, & x=0. \end{cases}$

问当且仅当 α,β 取何值时, $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可积? (需说明理由)

(注: 此处的可积是指有通常意义的积分, 不包含反常积分.)

5. (12 分, 每小题 6 分)

(1) 设实数 $\alpha>0$, 讨论正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}\right)$ 的敛散性.

(2) 设实数 $A>0$, 讨论函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right)$ 在闭区间 $[-A,A]$ 上的一致收敛性.

6. (8 分) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的可微函数且有反函数, 已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\displaystyle\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$.

7. (12 分) 设函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 证明: $F(x)$ 是以 T 为周期的连续函数的充分必要条件是 $\displaystyle\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

8. (8 分) 设数列 $\{a_n\}$ 为有界数列, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 证明: 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1.

中国科学技术大学 2020–2021 学年第一学期
数学分析 (B1) 期末考试

2021 年 3 月 7 日

1. (30 分, 每小题 6 分) 计算题.

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^{\tan x}\sin t^2\,\mathrm{d}t$;

(4) $y' - \dfrac{2}{x}y = 2x^2$ 的通解;

(5) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛点集及其和函数 $S(x)$.

2. (10 分) 求在极坐标平面中 $r \leqslant 1+\cos\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 所表示的平面图形绕极轴旋转一周所产生旋转体的侧面积 S.

3. (10 分) 求微分方程 $y''+4y = 9x\sin x$ 的通解.

4. (10 分) 求积分 $I = \displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sin x+|\cos x|}\,\mathrm{d}x$.

5. (10 分) 将 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 在点 $x_0 = -4$ 处展开成 Taylor 幂级数, 并指出使展开式成立的 x 的变化范围.

6. (10 分) 函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{2^{nx}}$ 在区间 $J = (0,+\infty)$ 中是否逐点收敛? 是否一致收敛? 要提供相应证明.

7. (10 分) 设 $a_n = \displaystyle\int_0^1\frac{1}{(1+t^3)^{2n}}\,\mathrm{d}t$. 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 的收敛性; 若收敛, 是条件收敛还是绝对收敛? 提供相应证明.

8. (10 分) 设 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且非负, $f(x)$ 不恒为零, $g(x)$ 恒取正值. 对自然数 n, 记 $I_n = \displaystyle\int_a^b (f(x))^n g(x)\,\mathrm{d}x$. 试证数列 $\left\{\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right\}$ 是收敛的, 且其极限为 $\displaystyle\max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$.

第 2 部分　数学分析 (B2)

中国科学技术大学 2011–2012 学年第二学期

数学分析 (B2)　第二次测试

1. (15 分) 计算二重积分

$$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) \mathrm{d}y + \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) \mathrm{d}y.$$

2. (15 分) 计算二重积分 $\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由曲线 $x^2-2xy+y^2+x+y=0$ 和曲线 $x+y+4=0$ 围成的有界区域.

3. (15 分) 计算三重积分 $\iiint_V xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 V 是由 $z=xy$, $z=0$, $x=-1$, $x=1$, $y=2$, $y=3$ 围成的区域.

4. (15 分) 设曲线 L 为圆周 $x^2+y^2=2x$, 计算曲线积分 $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}l$.

5. (15 分) 计算曲线积分 $\iint_S z\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是由 $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 所围成的立体表面.

6. (15 分) 证明:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_{x_1}^1 \mathrm{d}x_2 \cdots \int_{x_{n-1}}^1 x_1x_2\cdots x_n\,\mathrm{d}x_n = \frac{1}{2^n n!}.$$

7. (10 分) 设一球面的方程为 $x^2+y^2+(z+1)^2=1$, 从原点向球面上任一点 Q 处的切平面作垂线, 垂足为点 P, 当点 Q 在球面上变动时, 点 P 的轨迹形成一封闭曲面 S, 求此封闭曲面 S 所围成的立体的体积.

中国科学技术大学 2012–2013 学年第二学期
数学分析 (B2) 第一次测试

1. (20 分, 每小题 10 分) 下面两个函数在原点的连续性如何? 偏导数是否存在? 是否可微? (要说明理由)

$$(1)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$(2)\ f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

2. (15 分) 设 $D=\{(x,y)|x>0,y>0\}$. 求函数 $f(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$ 在区域 D 上的极值, 并说明所求极值是否为最值.

3. (10 分) 用 Lagrange 乘数法求抛物线 $y=(x-\sqrt{2})^2$ 上的点到原点的最小距离.

4. (20 分) 求常数 c 使得变换 $\begin{cases}u=2x+y\\ v=x+cy\end{cases}$ 将方程

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-5\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 其中二阶偏导数都连续.

5. (15 分) 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上有二阶偏导数, 且二阶偏导数都为 0. 求证: $f(x,y)$ 是至多一次函数, 即存在常数 a,b,c, 使得 $f(x,y)=ax+by+c$.

6. (10 分) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $ax+by+cz=\varphi(x^2+y^2+z^2)$ 所确定的隐函数, 其中 φ 是一个可微的一元函数, a,b,c 是常数. 求证:

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

7. (10 分) 设 $P_n=(x_n,y_n)$, $n=1,2,\cdots$ 是平面上的一个有界点列. 求证: $\{P_n\}$ 有收敛的子列.

中国科学技术大学 2012–2013 学年第二学期
数学分析 (B2)　第二次测试

1. (10 分, 每小题 5 分) 简答题.

(1) 设 $\int_I f\,\mathrm{d}\sigma > 0$, 其中 I 为闭矩形, f 在 I 上连续. 证明: 在 I 的内部存在闭矩形 J, 使得 $f > 0$ 在 J 上成立.

(2) 构造一个 $D = [-1,1]^2$ 上的非负函数 $f(x,y)$, 使得 f 在 D 上积分为零, 但是 $f(x,0)$ 关于 x 不可积, 而对任意 $y \neq 0$, $f(x,y)$ 关于 x 可积. 请说明理由.

2. (40 分, 每小题 10 分) 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant x+y} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,\mathrm{d}z$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

3. (15 分) 计算由 $\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=1$ 所围成闭区域的面积.

4. (15 分) 计算由 $(x^2+y^2+z^2)^2 = z^3$ 围成的立体的体积.

5. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 试证: 对任意 $x \in (a,b)$, 有

$$\int_a^x \mathrm{d}x_1 \int_a^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_a^{x_n} f(x_{n+1})\,\mathrm{d}x_{n+1} = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-y)^n f(y)\,\mathrm{d}y, \quad n = 1,2,\cdots.$$

6. (10 分) 计算下述积分:

(1) $\displaystyle\iiint_V \cos x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

(2) $\displaystyle\iiint_V \cos(ax+by+cz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

其中 V 是单位球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, a,b,c 为常数, 满足 $a^2+b^2+c^2=1$.

中国科学技术大学 2013–2014 学年第二学期
数学分析 (B2) 第一次测试

1. (10 分, 每小题 5 分) 概念题.

(1) 叙述 n 元函数 $z=f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在其定义域 D 中一点 x 可微的定义.

(2) 叙述二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 沿方向 $\boldsymbol{e}=(u_0,v_0)$ 的方向导数的定义.

2. (15 分) 下面的函数在原点的连续性如何? 偏导数是否存在? 是否可微? (要说明理由)

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

3. (15 分) 求函数 $f(x,y)=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$ 的极值点.

4. (15 分) 求函数 $f(x,y)=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$ 在条件 $x^2+y^2=1$ 之下的条件极值.

5. (20 分) 求常数 c 使得变换 $\begin{cases}u=2x+y\\ v=x+cy\end{cases}$ 将方程

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-5\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 其中二阶偏导数都连续.

6. (15 分) 求在 $\mathbb{R}^2$ 上满足方程组 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=af\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=bf\end{cases}$ 的二元可微函数 $f(x,y)$, 其中 a,b 是常数.

7. (10 分) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $ax+by+cz=\varphi(x^2+y^2+z^2)$ 所确定的隐函数, 其中 φ 是一个可微的一元函数, a,b,c 是常数. 求证:

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

中国科学技术大学 2019–2020 学年第二学期
数学分析 (B2) 第 8–9 章测试

2020 年 3 月 27 日

1. (15 分) 求直线 $L_1:\begin{cases}x+y=0,\\2x-z-1=0\end{cases}$ 绕直线 $L_2: x=-y=\dfrac{z-1}{2}$ 旋转所得的旋转面的方程.

2. (15 分) 设

$$f(x,y)=\begin{cases}(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2+b)\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

试问:

(1) 当 a,b 为何值时, $f(x,y)$ 在原点处连续?

(2) 当 a,b 为何值时, $f(x,y)$ 在原点处可微?

3. (10 分) 设 $z=z(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 变换 $\begin{cases}u=x+a\sqrt{y}\\v=x+2\sqrt{y}\end{cases}$ 把方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 试确定 a 的值.

4. (20 分) 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^6}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

(1) 设 $\boldsymbol{e}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\sin\alpha\boldsymbol{j}$, 试求使得方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}\right|_{(0,0)}\neq 0$ 为最大值的 α_0;

(2) 试求过点 $M(2,-1,3)$ 与直线 $L: x-1=-y=z+2$ 相交, 且与平面 $\varPi: 3x-2y+z+5=0$ 的夹角为 α_0 的直线方程.

5. (20 分) 设椭球面 $\varSigma: x^2+3y^2+z^2=1$, $\varPi$ 为椭球面在第一象限的切平面.

试求:

(1) 使 $\varPi$ 与三个坐标平面所围成的四面体的体积最小的切点的坐标;

(2) 使 $\varPi$ 与三个坐标平面截出的三角形面积最小的切点坐标.

6. (10 分) 设 $f(x,y,z)$ 在球体 $S: x^2+y^2+z^2\leqslant 9$ 上有连续的偏导数, 且满足 $|\nabla f|\leqslant 1$ 和 $f(0,0,0)=1$. 试证:

$$|f(x,y,z)|\leqslant 4,\quad (x,y,z)\in S.$$

7. (10 分) 设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数, 且 $f(0,1)=f(1,0)$. 试证: 在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上, 至少存在两个不同的点满足方程

$$y\frac{\partial f}{\partial x}=x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

中国科学技术大学 2017–2018 学年第二学期
数学分析 (B2) 期中考试

1. (10 分) 设 $\Phi(x,y,z)$ 是三元可微函数且方程 $\Phi(x,y,z)=0$ 能确定可微的隐函数

$$x=x(y,z),\quad y=y(z,x),\quad z=z(x,y).$$

求 $\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

2. (10 分) 设 $F(x,y)$ 是二元可微函数. 求证: 空间中存在一条直线使得由方程

$$F(x-ay,z-by)=0$$

表示的曲面的切平面总与此直线平行, 其中 a,b 是常数.

3. (15 分) 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

在原点的可微性, 以及它在原点的偏导数是否连续?

4. (15 分) 设 $a_j>0$ $(j=1,2,\cdots,n)$. 求函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

在条件

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=1$$

下的最小值.

5. (15 分) 求定义在星形区域

$$D=\left\{(x,y)\middle|x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\leqslant 1\right\}$$

上满足 $f(1,0)=1$ 的正值连续函数 $f(x,y)$ 使得 $\displaystyle\iint_D\frac{f(x,y)}{f(y,z)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 达到最小, 并求出这个最小值.

6. (15 分) 计算三重积分

$$\iiint_V(x^2+y^2)^5z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 V 是圆柱体 $x^2+y^2\leqslant 1$ 被曲面 $z=\sqrt{3x^2+y^2+1}$ 及 xOy 平面所截下的部分.

7. (10 分) 设 $f(x,y)$ 是定义在 $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上的一阶连续可微函数, 满足 $\nabla f\neq 0$ 且

$$y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad \forall(x,y)\in D.$$

求 $f(x,y)$ 的等值线方程.

8. (10 分) 设 P 是圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ 上的动点. 从原点往圆过点 P 的切线作垂线, 垂足为点 Q. 当 P 沿圆运动时, 点 Q 的轨迹是 xy 平面上一条封闭曲线. 求此封闭曲线围城区域的面积.

中国科学技术大学 2018–2019 学年第二学期
数学分析 (B2)　期中考试

1. (10 分) 设有空间直线 L_1 与 L_2 分别由如下的方程组定义:

$$L_1:\begin{cases} x=y, \\ x+y+z=1, \end{cases} \qquad L_2:\begin{cases} 2x+y=1, \\ x+z=0. \end{cases}$$

求一个平面与它们平行而且到它们的距离相等.

2. (10 分) 设有一条曲线由如下方程组定义:

$$\begin{cases} x=yz \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases}$$

请判断这条曲线在不在一个平面上, 并给出理由.

3. (10 分) 设方程 $y=2x\arctan\dfrac{y}{x}$ 决定了光滑的隐式函数 $y(x)$. 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

4. (15 分) 求函数 $f(x,y)=x^2+xy^2-x$ 在区域

$$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 2\right\}$$

上的最大最小值.

5. (15 分) 设 $C>0$ 是一个常数, 又设函数 $f(x,y)$ 满足: 对于任何平面上的点 (x,y), 存在 $a(x,y)$, $b(x,y)$ 使得对于任何实数 h, k 满足 $|h|+|k|\leqslant 1$, 有

$$|f(x+h,y+k)-f(x,y)-a(x,y)h-b(x,y)k|\leqslant C(|h|+|k|)^{\frac{3}{2}}.$$

求证: f 有一致连续的偏导数.

6. (15 分) 求椭球

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}=1$$

被平面 $x+y+z=1$ 分割得到的两块中, 体积较小的那一块的体积.

7. (10 分) 设 m 是自然数. 求积分

$$\iint_{|x|+|y|\leqslant 1}(x^2-y^2)^m\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

8. (15 分) 设 $D=\{(x,y,z)|x,y,z\in[0,1]\}$ 和 $E=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\leqslant a\right\}$. 若 $a\in(1,2)$, 求 $D\cap E$ 的体积.

中国科学技术大学 2020–2021 学年第二学期
数学分析 (B2) 期中考试

2021 年 5 月 15 日

1.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

(2) 求 $f(x,y)=(x+y)^3$ 在区域 $D=[-1,1]\times[-1,1]$ 上的积分.

(3) 求向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 的叉乘 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

(4) 求 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$ 在原点的 4 阶 Taylor 展开式.

2. 设 $f(x,y)$ 有 2 阶连续偏导数, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\neq 0$, 求 $f(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 的二阶导数 (用 f 的各阶导数表示).

3. 计算积分

$$I=\int_V (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 $V=\left\{(x,y,z)\left|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1, x,y,z\geqslant 0\right.\right\}$.

4. 设 $x,y,z\geqslant 0$, $x+y+z=1$, 试用 Lagrange 乘数法求 $f(x,y,z)=x^a y^b z^c$ $(a,b,c>0)$ 的最大值.

5. 设参数变换 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 有二阶连续的导数, 并满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

证明: 对任意二阶连续可微函数 $z=f(x,y)$, 有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

6.

(1) 求椭球 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{25}=1$ 在点 $M_0\left(\sqrt{3},\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)$ 的切平面 Π;

(2) 设 V 是切平面 Π 与三个坐标平面围成的区域, 求积分

$$I=\iiint_V x\left(\sqrt{3}-\frac{y}{4}-\frac{z}{5}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

7. 设 A,B,C 是平面上不共线的三点, 且三角形 $\triangle ABC$ 有一个内角 $\geqslant 120^\circ$. 考虑平面上如下函数

$$f(P)=\left|\overrightarrow{PA}\right|+\left|\overrightarrow{PB}\right|+\left|\overrightarrow{PC}\right|.$$

(1) 证明函数 $f(P)$ 可以在平面上取到最小值;

(2) 求函数 $f(P)$ 在可微点的梯度;

(3) 证明函数 $f(P)$ 没有驻点, 求函数的最小值并说明理由.

8. 设 f 是定义在 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2<1\right\}$ 上的三阶连续可微函数, 且 $f(0,0)=0$.

(1) 证明: 存在 D 上 2 阶连续可微函数 g_1,g_2 满足

$$f(x,y)=xg_1(x,y)+yg_2(x,y).$$

(2) 又设 $\nabla f(0,0)=0$, 且

$$\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\end{pmatrix}(0,0)<0,$$

证明: 在原点的一个领域内存在变换 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ 使得

$$f(x(u,v),y(u,v))=u^2-v^2.$$

中国科学技术大学 2011–2012 学年第二学期
数学分析 (B2) 第三次测试

1. (10 分) 求向量场 $\boldsymbol{v}=(yz,zx,xy)$ 的散度和旋度.

2. (15 分) 计算第二型曲线积分:

$$\int_L (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z,$$

其中曲线 L 是半球面 $\big\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2=a^2,z\geqslant 0\big\}$ 与圆柱面 $\big\{(x,y,z)\big|x^2+y^2=b^2\big\}$ $(a>b>0)$ 的交线, L 的定向与 z 轴正向构成右手系.

3. (30 分, 每小题 15 分) 计算第二型曲面积分:

(1) $\displaystyle\iint_S (y^2-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z^2-y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x^2-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $S=\big\{(x,y,z)\big|z=2-x^2-y^2,z\geqslant 0\big\}$, S 的定向与 z 轴的正向同侧.

(2) $\displaystyle\iint_S \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$, 其中曲面 $S=\left\{(x,y,z)\middle|\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{25}=1\right\}$, 正向是曲面的外法向.

4. (15 分) 给定平面分段光滑曲线 $L=\{y=2x^{\frac{2}{5}}+1:x\in[-1,0]\}\cup\{y=-2x^5+1:x\in[0,1]\}$, L 的正向是参数 x 增加的方向, 求积分 $\displaystyle\int_L \frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

5. (15 分) 设曲面 $S=\big\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2=1,z\geqslant 0\big\}$, 它的定向 $\boldsymbol{n}$ 是与 z 轴正向同侧的单位法向量, 函数 $f=\sin(x^2+y^2+4xy\sqrt{z})$, $g=x^2+y^2+4z^2$, 求积分 $\displaystyle\iint_S (\nabla f\times\nabla g)\cdot\mathrm{d}S$.

6. (15 分) 讨论如下问题: 若两个向量场的散度和旋度相等, 这两个向量场是否相等?

以下设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 的有界区域是, 它的边界 $\partial\Omega$ 是光滑曲面, $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量场, 涉及到的函数和向量场具有二阶连续偏导数.

(1) (2 分) 设 f 是 $\overline{\Omega}$ 的函数, 证明:

$$\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=\iiint_\Omega \Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中, $\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}$ 是 f 沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数, $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

(2) (5 分) 设定义在 $\overline{\Omega}$ 上的函数满足 $\Delta f=0$, $f\big|_{\partial\Omega}=0$, 证明: $f\equiv 0$.

(3) 设 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 是定义在 $\overline{\Omega}$ 上的向量场, 满足: $\nabla\times\boldsymbol{v}_1=\nabla\times\boldsymbol{v}_2$, $\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1=\nabla\cdot\boldsymbol{v}_2$, 问能否推出 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$? 若成立, 请证明之; 若不然, 你认为在什么合理条件下有 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$.

中国科学技术大学 2011–2012 学年第二学期
数学分析 (B2)　第四次测试

1. (15 分) 设函数 $f(x)=\arcsin(\cos x)$, 将 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成 Fourier 级数, 讨论此 Fourier 级数的收敛性, 并利用此求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

2. (15 分) 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}\sin 2x$ 的 Fourier 变换.

3. (16 分) 判断下面反常积分的敛散性:

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}}$

4. (10 分) 计算积分: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(\tan x)}{\tan x}\,\mathrm{d}x$.

5. (16 分, 每小题 8 分) 证明:

(1) 含参变量积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-bx}\sin x\,\mathrm{d}x$ 在 $0<b<+\infty$ 上收敛, 但不一致收敛;

(2) 对任意正实数 $\varepsilon>0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-bx}\sin x\,\mathrm{d}x$ 在 $0<\varepsilon\leqslant b<+\infty$ 上一致收敛.

6. (10 分) 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续周期函数, 而其导函数 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上逐段光滑, 证明: 函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数 a_n 和 b_n 满足: 当 $n\to\infty$ 时, 有 $n\cdot\max\{a_n,b_n\}\to 0$.

7. (18 分) 利用 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 分别解决下列问题:

(1) 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$ (n 是正整数);

(2) 对固定的参数 $t>0$, 求函数 $F(\lambda)=\mathrm{e}^{-t\lambda^2}$ 的 Fourier 逆变换.

中国科学技术大学 2012–2013 学年第二学期
数学分析 (B2) 第三次测试

1. (20 分, 每小题 10 分) 已知向量场 $\boldsymbol{v} = (2xz, 2yz^2, x^2 + 2y^2z - 1)$.

(1) 求 $\boldsymbol{v}$ 的旋度 $\nabla \times \boldsymbol{v}$;

(2) 问 $\boldsymbol{v}$ 是否是一个有势场? 若是, 求出 $\boldsymbol{v}$ 的一个势函数.

2. (30 分, 每小题 15 分)

(1) 求向量场 $\boldsymbol{v} = (z, x, y)$ 沿曲线 $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, at)$ $(t \in [0, 2\pi])$ 的第二型曲线积分, t 是曲线的正向参数, a 为正常数;

(2) 设曲面 $S : \left\{z = a^2 - x^2 - y^2 \middle| x^2 + y^2 \leqslant a^2\right\}$, S 的定向与 z 轴正向同向, 求积分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$, 其中 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$.

3. (15 分) 设 $a > b > 0$, 求椭圆盘 $\left\{(x, y) \middle| \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ 与椭圆盘 $\left\{(x, y) \middle| \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} \leqslant 1\right\}$ 公共部分的面积.

4. (15 分) 设 f 是 $(0, +\infty)$ 上的光滑函数, 向量场 $\boldsymbol{v} = f(r)\boldsymbol{r}$, 其中 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}|$.

(1) 证明: $\boldsymbol{v}$ 是无旋场;

(2) 若 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$, 求 f.

5. (10 分) 设 $\boldsymbol{v}$ 是定义在区域 $\Omega = \left\{(x, y, z) \middle| \dfrac{1}{4} < x^2 + y^2 + z^2 < \dfrac{5}{4}\right\}$ 上的光滑向量场, 曲面 $S = \left\{(x, y, z) \middle| x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$, 正向为外法向. 证明: $\displaystyle\iint_S \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$.

6. (10 分) 设 u 是定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数, $\boldsymbol{v}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑向量场; Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个有界区域, 它的边界 $S = \partial\Omega$ 是光滑曲面, 并且函数 u 满足: $u(x, y, z) = C$, $\forall (x, y, z) \in S$, 其中 C 为常数. 证明:

$$\iiint_\Omega (\nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \nabla u) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0.$$

中国科学技术大学 2012–2013 学年第二学期
数学分析 (B2)　第四次测试

1. (20 分) 将函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & 1 \leqslant |x| < pi \end{cases}$ 展开成 Fourier 级数, 并求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.

2. (20 分) 求函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1 \\ 1, & |x| < 1 \end{cases}$ 的 Fourier 变换, 并计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos \frac{x}{2}}{x}\,\mathrm{d}x$.

3. (15 分) 研究 p 的取值范围使得广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$: (1) 绝对收敛, (2) 条件收敛,并说明原因.

4. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续且 $f(x) > 0$, 研究函数 $g(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$ 的连续性.

5. (10 分) 计算 (过程中要说明原因): $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{x} \cos x\,\mathrm{d}x$.

6. (10 分) 试利用 Euler 积分计算: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.

7. (10 分) 设

(a) $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可微且单调递减趋于 0;

(b) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$;

(c) $f'(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可积.

求证: $\displaystyle\int_a^{+\infty} xf'(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

中国科学技术大学 2013–2014 学年第二学期
数学分析 (B2) 第三次测试

1. (15 分) 求向量场 $\boldsymbol{v}=(y,z,x)$ 沿曲线 $\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$ $(t\in[0,2\pi])$ 的第二型曲线积分, t 是曲线的正向参数, a,b 为正常数.

2. (15 分) 计算积分 $\displaystyle\iint_{\Sigma}|y|\sqrt{z}\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ $(z\leqslant 1)$.

3. (20 分) 已知向量场 $\boldsymbol{v}=(x^2-2yz,y^2-2xz,3z^2-2xy-1)$, 判断: $\boldsymbol{v}$ 是否是一个保守场? 若是, 求出 $\boldsymbol{v}$ 的一个势函数.

4. (20 分) 计算曲线积分 $\displaystyle\int_L\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 L 是沿曲线 $x^2=2(y+2)$ 从点 $A(-2\sqrt{2},2)$ 到点 $B(2\sqrt{2},2)$ 的一段.

5. (20 分) 设矢量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, 并记 $r=|\boldsymbol{r}|$. 证明:

$$\iiint_{\Omega}r^2\,\mathrm{d}V=\frac{1}{5}\iint_{S}r^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S,$$

其中 Ω 是由闭曲面 S 所包围的不含原点的空间区域, $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的单位外法向.

6. (10 分) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是有界闭区域, 其边界 $\partial\Omega$ 为光滑闭曲面, $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向. 设光滑函数 u 是 Ω 上的调和函数, 且满足边界条件

$$\left[\alpha u+\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right]\bigg|_{\partial\Omega}=0,$$

其中 $\alpha\geqslant 0$ 为常数. 证明: u 在 Ω 上恒为零.

中国科学技术大学 2013–2014 学年第二学期
数学分析 (B2)　第四次测试

1. (16 分, 每小题 8 分)

(1) 有限闭区间 $[a,b]$ 上的可积且平方可积的函数一定是绝对可积的. 这个命题是否成立? 如成立, 请证明; 否则给出反例.

(2) 把函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $[1,2]$ 上按周期为 1 进行 Fourier 展开, 那么得到的 Fourier 级数的收敛域是什么? 在这个收敛域上, 级数是否一致收敛? 这个级数在 $x=0$ 处的值是多少?

2. (30 分) 设 $f(x)=|x|$, $x\in[-\pi,\pi]$.

(1) (5 分) 把 f 延拓到整个直线上, 称为周期为 2π 的函数. 写出延拓后函数的定义;

(2) (10 分) 计算出 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开得到的 Fourier 级数;

(3) (5 分) 上述 Fourier 级数是否收敛? 若收敛, 极限是什么? 请说明理由.

(4) (10 分) 求下述两个级数的和:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$

3. (10 分) 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可导, f' 可积且平方可积. 如果 $f(-\pi)=f(\pi)$, 证明:

$$\lim_{n\to+\infty} na_n=\lim_{n\to+\infty} nb_n=0,$$

其中 a_n 和 b_n 为 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 系数.

4. (24 分) 考虑函数族:

$$N_1(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & \text{else},\end{cases}\qquad N_m(x)=\int_0^1 N_{m-1}(x-t)\,\mathrm{d}t,\quad m\geqslant 2.$$

(1) (10 分) 证明: $N_m(x)=\underbrace{N_1(x)*N_1(x)*\cdots*N_1(x)}_{m\text{ 项}}$, 其中 $*$ 表示卷积运算.

(2) (10 分) 给出 $N_m(x)$ 的 Fourier 变换 $F[N_m](\lambda)$.

(3) (4 分) 当 $m=1,2,\cdots$ 时, $F[N_m](\lambda)$ 经 Fourier 逆变换的结果是什么? 请说明理由.

5. (20 分, 每小题 10 分) 考虑函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-\beta x}$, 其中 $\beta>0$, $x>0$.

(1) 计算 $f(x)$ 的 Fourier 正弦变换的表达式;

(2) 利用上述结果, 证明: 当 $\alpha>0$, $\beta>0$ 时, 有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\alpha\beta}.$$

中国科学技术大学 2015–2016 学年第二学期
数学分析 (B2) 第三次测试

1. (50 分, 每小题 10 分) 计算题.

(1) 求第二型曲线积分 $\oint_{L^+} y\,\mathrm{d}x + |y-x|\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z$, 其中 L^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 的交线, 其方向为与 z 轴正向满足右手法则.

(2) 利用第二型曲线积分计算心脏线 $\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t) \\ y=a(2\sin t-\sin 2t) \end{cases}$ 所围成的平面图形的面积.

(3) 求第二型曲面积分

$$\iint_{S^+} (f(x,y,z)+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (2f(x,y,z)+y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (f(x,y,z)+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数, S^+ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四象限部分的上侧.

(4) 求第二型曲面积分

$$\iint_{S^+} (x+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y+z^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 S^+ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截部分的外侧.

(5) 求第二型曲面积分

$$\iint_{S^+} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其中 S^+ 是有界光滑闭曲面的外侧, 且原点不在曲面 S^+ 上.

2. (15 分) 已知 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是常向量, 且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(1,1,1)$, $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$. 求向量场 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}$ 沿闭曲线 L^+ 的环量, 其中 L^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 其方向为与 z 轴正向满足右手法则.

3. (15 分) 设 f, g 为有连续导数的函数, $f(0)=g(0)=1$, 且向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(yf(x), f(x)+zg(y), g(y))$ 是保守场, 求 f, g 以及向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的势函数.

4. (20 分) 设函数 $\varphi(x)$ 有连续的导数, 在围绕原点的任意逐段光滑的简单闭曲线 C 上, 曲线积分 $\oint_{C^+} \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$ 的值为常数.

(1) 设 L^+ 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$, 在不求出 $\varphi(x)$ 的情况下, 求 $\oint_{L^+} \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$;

(2) 求函数 $\varphi(x)$;

(3) 设 C^+ 是围绕远点的正向光滑简单闭曲线, 求 $\oint_{C^+} \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

中国科学技术大学 2015–2016 学年第二学期
数学分析 (B2)　第四次测试

1. (16 分, 每小题 8 分) 判断下列积分是否收敛:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\ln x)^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

2. (12 分) 证明:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\cos((6k+1)x)}{6k+1}-\frac{\cos((6k+5)x)}{6k+5}\right)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right), \\ \dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}, & x=\dfrac{\pi}{3}, \\ 0, & x\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right), \\ -\dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}, & x=\dfrac{2\pi}{3}, \\ -\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}, & x\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right].\end{cases}$$

3. (12 分) 判断积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ux)}{x}\,\mathrm{d}x$ 是否关于 $u>0$ 一致收敛.

4. (20 分) 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\cos x\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+a^2x^2)-\ln(1+b^2x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

5. (20 分)

(1) 证明: $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\cos(2ux)\,\mathrm{d}u=\begin{cases}1-x, & x\in[0,1], \\ 0, & x>1.\end{cases}$

(2) 计算: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$

6. (10 分) 计算极坐标下曲线 $r^4=\sin^5\theta\cos^3\theta$ 所围成的区域面积.

7. (10 分) 计算 e^{-x^2} 的 Fourier 变换.

中国科学技术大学 2019–2020 学年第二学期
数学分析 (B2) 第 10–11 章测试

2020 年 4 月 20 日

1. 设 $D=\{(u,v)|u\geqslant 0, v\geqslant 0\}$ 为无界区域. 求

$$\iint_D \mathrm{e}^{-u^2-v^2-2uv\cos\alpha}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

其中 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 为常数.

2. 设曲面 $S=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big|x+y+z=1, x,y,z\geqslant 0\big\}$. 求 $\displaystyle\iint_S xyz\,\mathrm{d}S$.

3. 设 $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$, 满足 $|\nabla f|^2=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\equiv 1$.

(1) 证明: $\forall P,Q\in\mathbb{R}^2$, $|f(Q)-f(P)|\leqslant|PQ|$;

(2) 设光滑曲线 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}$ $(t\in[a,b])$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\nabla f(\boldsymbol{r}(t))=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\boldsymbol{j},$$

证明: $\boldsymbol{r}(t)$ 是直线. 已知: 连接两点的最短线是直线.

2020 年 4 月 26 日

4. 求积分:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

5. 求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$ $(x,y\geqslant 0)$ 的面积.

6. 设 D 是平面有界区域, $L=\partial D$ 是光滑曲线. $\boldsymbol{n}$ 是 ∂D 的单位外法向量, $\boldsymbol{v}\in C^1(D)$, $\boldsymbol{v}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$. 用 Green 公式证明:

$$\int_L(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

2020 年 5 月 18 日

7. 设 $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ 是常向量, $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 求向量场 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}$ 的旋度 $\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r})$.

8. 设曲面 $S=\big\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2=1, z\geqslant 0\big\}$, 定向与 z 轴正向同侧. 设 $f=\dfrac{1+z}{1+x^2+y^2}, g=xy+yz+zx$. 求积分 $\displaystyle\iint_S(\nabla f\times\nabla g)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

9. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 的有界区域, $\partial\Omega$ 是光滑曲面.

(1) 设 $f,g\in C^2(\overline{\Omega})$, 满足 $\Delta f=\Delta g, f\big|_{\partial\Omega}=g\big|_{\partial\Omega}$. 证明: $f=g$.

(2) 设 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 是定义在 $\overline{\Omega}$ 上光滑向量场 (二阶偏导数连续), 满足

(a) $\nabla\times\boldsymbol{v}_1=\nabla\times\boldsymbol{v}_2, \nabla\cdot\boldsymbol{v}_1=\nabla\cdot\boldsymbol{v}_2$;

(b) $\boldsymbol{v}_1\big|_{\partial\Omega}=\boldsymbol{v}_2\big|_{\partial\Omega}$.

证明: $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$.

中国科学技术大学 2019–2020 学年第二学期
数学分析 (B2)　第 12 章测试

2020 年 6 月 3 日

1. 求函数 $y = |x|, x \in [-\pi, \pi]$ 的 Fourier 级数.

2. 求级数的和: $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$, $x \in [-\pi, \pi]$.

3. 设 $\{b_n\}$ 是单调下降且非负数列, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ 在 $[-\pi, \pi]$ 一致收敛. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} nb_n = 0$.

中国科学技术大学 2019–2020 学年第二学期
数学分析 (B2)　第 13 章测试

2020 年 6 月 10 日

1. 计算无穷积分 $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{t(2-t)}\,\mathrm{d}t$.

2. 设 $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. 求证:

(1) $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续;

(2) $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导;

(3) $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上二阶可导且满足方程 $F''(t) - F(t) = -\dfrac{1}{t}$.

3. 设 $|\alpha| \neq 1$, 证明积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x \sin \alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 并求其值.

中国科学技术大学 2007–2008 学年第二学期
数学分析 (II) 期末考试

1. (20 分) 设 u, v 是由方程组 $\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$ 所确定的隐函数组, 求 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

2. (20 分) 计算曲面积分 $\displaystyle\iint_S xyz\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分.

3. (10 分) 计算第二型曲面积分

$$\iint_S (y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (z^2+x^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z \geqslant 0)$ 的上侧.

4. (20 分) 求证: 向量场

$$\boldsymbol{F} = (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy)$$

是 $\mathbb{R}^3$ 中的有势场 (即曲线积分与路径无关), 并求 $\boldsymbol{F}$ 的势函数 (即求函数 φ, 使其梯度为 $\boldsymbol{F}$).

5. (20 分) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 且

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi).$$

(1) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数;

(2) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ 的值.

6. (10 分) 设 $f(x,y,z)$ 在闭球 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \leqslant R^2$ 上有二阶连续偏导数, 且

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

令 S 是以 (x_0, y_0, z_0) 为中心, 以 r $(0 \leqslant r \leqslant R)$ 为半径的球面. 证明: 积分

$$\frac{1}{4\pi r} \iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

与 r 无关.

中国科学技术大学 2012–2013 学年第二学期
数学分析 (B2)　期末考试

1. (15 分) 设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 是由下面的方程

$$\begin{cases} u^2+v^2+x^2+y^2=1, \\ u+v+x+y=0 \end{cases}$$

所确定的函数. 求 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

2. (15 分) 计算积分:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{\pi}} x^2 \sin(xy)\,\mathrm{d}x.$$

3. (15 分) 计算抛物线 $2x=y^2$ 与直线 $y=2x-2$ 所围成的区域的面积.

4. (15 分) 求常数 a 使得向量场 $\boldsymbol{F}=(x^2+5ay+3yz, 5x+3axz-2, (a+2)xy-4z)$ 是有势场, 并求出此时的势函数.

5. (15 分) 设 α 不是整数, 求 $\cos\alpha x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数展开, 并证明

$$\frac{\cos\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2-n^2}\right).$$

6. (15 分) 求证: $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{1+(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ 在 $0\leqslant x<+\infty$ 上有二阶连续导数且满足微分方程 $f''(x)+f(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

7. (10 分) 设 D 是 xy 平面上有限条逐段光滑曲线围成的区域, $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数, 且满足方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2a\frac{\partial f}{\partial x}+2b\frac{\partial f}{\partial y}+cf,$$

其中 a,b,c 为常数且 $c\geqslant a^2+b^2$. 求证: 若 f 在 ∂D 上恒为零, 则 f 在 D 上恒为零.

中国科学技术大学 2013–2014 学年第二学期
数学分析 (B2) 期末考试

1. (20 分, 每小题 10 分) 计算下列各题:

(1) 计算 $\mathbb{R}^3$ 上的向量场 $V=(x^2+2y, z^3-2x, y^2+z)$ 的旋度和散度;

(2) 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D \arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 为 $x^2+y^2=4\ (x,y>0)$, $x^2+y^2=1\ (x,y>0)$, 与直线 $y=x$ 和 $x=0$ 所围成的闭区域.

2. (20 分) 已知螺旋面 S 的方程 $\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v \\ z=v \end{cases}$ $(0\leqslant u\leqslant 5, 0\leqslant v\leqslant 2\pi)$, 试求:

(1) 过 S 上一点 $M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的切平面方程;

(2) 计算曲线积分 $\displaystyle\int_L \frac{z^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}l$, 其中 L 是 S 上参数 $u=5$ 对应的曲线.

3. (20 分) 试将函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leqslant\dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<|x|\leqslant\pi \end{cases}$ 展开成 Fourier 级数, 并求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

4. (20 分, 每小题 10 分)

(1) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$, 其中常数 $b>a>0$;

(2) 利用 Euler 积分计算: $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

5. (20 分) 给定 $\mathbb{R}^3$ 中 n 个固定点 M_i, $i=1,2,\cdots,n$, 考察向量函数

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}\nabla\left(-\frac{\gamma_i}{4\pi r_i}\right),$$

其中 $\gamma_i>0$ 为正的常数, r_i 为点 $M(x,y,z)$ 到固定的 M_i 的距离. 已知光滑封闭曲面 S 所围成的区域的内部包含了这 n 个固定点, 试求: $\boldsymbol{F}$ 穿过曲面 S 的流量.

中国科学技术大学 2015–2016 学年第二学期
数学分析 (B2)　期末考试

1. (15 分) 设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 是由下面的方程

$$\begin{cases} u^2+v^2+x^2+y^2=1 \\ u+v+x+y=0 \end{cases}$$

所确定的函数. 求 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

2. (15 分) 计算积分:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{\pi}} x^2 \sin(xy)\,\mathrm{d}x.$$

3. (10 分) 设 D 是由直线 $x=0$, $y=x$, $y=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的区域. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

4. (15 分) 求第二型曲线积分

$$\iint_S x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中曲面 S 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, 法向朝上.

5. (15 分) 求常数 a 使得向量场 $\boldsymbol{F}=(x^2+5ay+3yz, 5x+3axz-2, (a+2)xy-4z)$ 是有势场, 并求出此时的势函数.

6. (15 分) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是正数, 且 $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = n$. 用 Lagrange 乘数法证明:

$$\prod_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \leqslant n,$$

等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时成立.

7. (15 分) 求证: $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ 在 $0<x<+\infty$ 可导且满足微分方程

$$f(x)-f'(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

中国科学技术大学 2016–2017 学年第二学期
数学分析 (B2) 期末考试

1. (12 分, 每小题 6 分)

(1) 设 $z=f(x,y)$, $x=u^2+2v^2$, $y=u\mathrm{e}^v$. 求 $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

(2) 求方程组 $\begin{cases} x=\cos v+u\sin v \\ y=\sin v-u\cos v \end{cases}$ 所确定的反函数组的偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

2. (12 分) 设 $a_j>0$, $b_j>0$ $(j=1,2,\cdots,n)$.

(1) 用 Lagrange 乘数法求函数 $f(x_1,\cdots,x_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_kx_k^2$ 在条件 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kx_k=1$ 下的极值.

(2) 由 (1) 的结论证明不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}b_ix_i^2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)^2$.

3. (12 分) 设 $f(x)$ 有连续的导函数, $f(0)=0$, 且曲线积分 $\displaystyle\int_C(\mathrm{e}^x+f(x))y\,\mathrm{d}x+f(x)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关. 求 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)}(\mathrm{e}^x+f(x))y\,\mathrm{d}x+f(x)\,\mathrm{d}y$.

4. (14 分) 设 a,b,c 是正数, 求第二型曲面积分

$$\iint_S(by^2+cz^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(cz^2+ax^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=1$ $(z\geqslant0)$ 的上侧.

5. (12 分) 设 a,b,c 不全为零, L 是球面 $S:x^2+y^2+z^2=R^2$ $(R>0)$ 与平面 $\Sigma:ax+by+cz=0$ 的交线, 其方向约定为: 质点在 L 上运动的正方向与平面 Σ 的法向 (a,b,c) 成右手系. 计算第二型曲线积分 $\displaystyle\oint_S(bz+c)\,\mathrm{d}x+(cx+a)\,\mathrm{d}y+(ay+b)\,\mathrm{d}z$.

6. (18 分, 每小题 6 分)

(1) 求周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ 的 Fourier 级数;

(2) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$; (3) 由 (1) 的结论求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

7. (12 分) 证明: 由含参变量的广义积分 $F(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}\ln(1+tx)\,\mathrm{d}x$ 定义的函数 $F(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的可导函数.

8. (8 分) 设 D 是由光滑封闭曲线 L 所围的区域, 函数 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数, 且满足 $\mathrm{e}^y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\mathrm{e}^x\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, 并且 f 在 L 上恒为零.

(1) 求证: 存在有连续偏导数的函数 $P(x,y),Q(x,y)$, 使得

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^y\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\mathrm{e}^x\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2,\quad (x,y)\in D;$$

(2) 证明: f 在 D 上恒为零.

中国科学技术大学 2017–2018 学年第二学期
数学分析 (B2) 期末考试

1. (15 分) 设 F 具有一阶连续偏导数, $w=w(x,y,z)$ 是方程

$$F(x-aw,y-bw,z-cw)=1$$

(其中 a,b,c 为常数) 所确定的隐函数, 试求 $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\dfrac{\partial w}{\partial y}+c\dfrac{\partial w}{\partial z}$ 的值.

2. (15 分) 求二元函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y^2}$ 在 $(0,0)$ 的 Taylor 展开的前 4 项 (直到 3 次).

3. (15 分) 设

$$\boldsymbol{v}=(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)\boldsymbol{i}+(a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2)\boldsymbol{j}$$

是平面向量场. 问常数 a_i,b_i,c_i $(i=1,2)$ 满足什么条件时, $\boldsymbol{v}$ 是一个有势场, 并求它的一个势函数.

4. (15 分) 设 p,q 都是正数. 求 $\displaystyle\int_0^1 x^q\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x$.

5. (10 分) 设 L 是平面上光滑的简单闭曲线, 其参数方程表示为 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$. L 的方向与参数 t 增加的方向一致. 证明: L 围成的区域面积 F 等于

$$\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(a_nd_n-b_nc_n),$$

其中 (a_n,b_n) 是 $\varphi(t)$ 的 Fourier 系数, (c_n,d_n) 是 $\psi(t)$ 的 Fourier 系数.

6. (10 分) 求 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}$ $(a\neq 0)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的 Fourier 级数, 并证明:

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{n^2+a^2}\right]=\frac{\cosh(a\pi)}{\sinh(a\pi)}.$$

7. (10 分) 设曲面

$$S\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|x^2+y^2+z^2=1,z>0\right\},$$

它的定向与 z 轴正向同侧. 设

$$f(x,y)=\frac{1+z}{1+x^2+y^2},\quad g(x,y)=xy+yz+zx.$$

求积分 $\displaystyle\iint_S\nabla f\times\nabla g\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

8. (10 分) 设 $|\alpha|\neq 1$. 证明: 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 并求其值.

中国科学技术大学 2018–2019 学年第二学期
数学分析 (B2) 期末考试

1. (10 分) 设已知方程 $\phi\left(x+\dfrac{z}{y}+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定了一个隐函数 $z=f(x,y)$. 求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. (10 分) 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=2x$ 内的部分面积.

3. (10 分) 求积分 $I=\displaystyle\iiint\limits_V\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}V$, 其中 V 为椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 内部.

4. (10 分, 每小题 5 分) 设 $\boldsymbol{v}=\dfrac{y^2+z^2}{r^3}\boldsymbol{i}-\dfrac{xy}{r^3}\boldsymbol{j}-\dfrac{xz}{r^3}\boldsymbol{k}$ 是定义在 $\mathbb{R}^3\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ 上的向量场, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(1) 证明: $\boldsymbol{v}$ 的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$; (2) 求向量场 $\boldsymbol{v}$ 的势函数.

5. (15 分) 设向量场 $\boldsymbol{v}=-x\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-\dfrac{1}{4}}\boldsymbol{k}$, 曲面 $S=\{x^2+y^2+z^2=1\}$, 它的正向是外法向. 求向量场 $\nabla\times\boldsymbol{v}$ 在定向曲面 S 上的积分

$$\iint_S\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

6. (15 分) 计算无穷积分 $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{t(2-t)}\,\mathrm{d}t$.

7. (15 分) 设 $f(x)=\cosh(x-1)$, $0\leqslant x\leqslant 1$. 求该函数的余弦级数, 并证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2+1}=\frac{1}{\mathrm{e}^2-1}.$$

8. (15 分, 每小题 5 分) 设 $F(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. 求证:

(1) $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续;

(2) $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导;

(3) $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导且满足方程 $F''(t)-F(t)=-\dfrac{1}{t}$.

中国科学技术大学 2019–2020 学年第二学期
数学分析 (B2)　期末考试

2020 年 9 月 8 日

1. (10 分) 设 $f(u,v)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续的偏导数, 令 $F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} f(x+\alpha,x-\alpha)\,\mathrm{d}x$, 求 $F'(\alpha)$.

2. (10 分) 计算三重积分 $\iiint_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中积分区域 V 由曲面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=8$ 围成.

3. (10 分) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin x\,\mathrm{d}x$, 其中 $0<a<b$.

4. (10 分) 设 $n,m>0$, 利用 Euler 积分计算积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^m}}\,\mathrm{d}x$.

5. (10 分) 计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被 $z=0$ 和 $z=3$ 所截部分的外侧.

6. (10 分)

(1) 将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant |x|\leqslant \pi\end{cases}$ 展开成以 2π 为周期的 Fourier 级数 (须讨论其收敛性).

(2) 分别求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的值.

7. (6 分) 试定出正数 λ, 使曲面

$$F(x,y,z)=xyz-\lambda=0,\quad G(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

在第一象限某一点相切, 即有共同的切平面.

8. (10 分) 讨论 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性和可微性.

9. (6 分) 设 $f(x,y),g(x,y)$ 在单位圆盘 $U=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上有一阶连续偏导数, 且 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$, 证明: 在单位圆周上存在一点 (ξ,η), 使得 $f(\xi,\eta)\eta=g(\xi,\eta)\xi$.

10. (6 分) 设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$ 上具有连续的二阶偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 计算

$$I=\iiint_\Omega \left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

11. (12 分)

(1) 设 $u=ax+by$, $v=cx+dy$, 其中 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 是正交常数矩阵.

证明: 对平面上任意的光滑 (至少有二阶连续偏导数) 数量场 f, 有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

(2) 设变换 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 有二阶连续的偏导数. 已知对平面的任意光滑数量场 f, 下列等式成立

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

(a) 证明: 参数变换的 Jacobi 矩阵 $\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$ 是正交矩阵.

(b) 证明: $\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$ 是常值矩阵.

中国科学技术大学 2020–2021 学年第二学期
数学分析 (B2)　期末考试

2021 年 7 月 16 日

1. (6 分) 设 $I(u)=\int_{\sin u}^{\cos u}\mathrm{e}^{x^2-xu}\,\mathrm{d}x$, 求 $I'(u)$.

2. (12 分, 每小题 4 分) 设 $\boldsymbol{v}=\left(\frac{y}{z}-\frac{1}{y},\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},1-\frac{xy}{z^2}\right)$ $(y>0,z>0)$.

(1) 证明 $\boldsymbol{v}$ 是有势场;

(2) 求其全体势函数;

(3) 计算 $\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s$.

3. (20 分, 每小题 10 分)

(1) 计算曲线积分 $\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=4$, 直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限中所围图形边界.

(2) 设 $u(x,y)$ 在圆盘 $D:x^2+y^2\leqslant\pi$ 上有二阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin(x^2+y^2)$, $\boldsymbol{n}$ 为边界圆周 ∂D 的单位外法向, 计算曲线积分 $\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s$.

4. (12 分) 计算积分 $I=\iint_S 2(1+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是曲线 $y=\sqrt{x}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕 x 轴旋转生成的旋转面, 法向与 x 轴正向夹角为钝角.

5. (10 分) 记 $\boldsymbol{v}=(y^2+z^2)\boldsymbol{i}+(z^2+x^2)\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$, 计算曲线积分

$$I=\oint_L (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z,$$

其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 与柱面 $x^2+y^2=2x$ 的交线 $(z\geqslant 0)$, 从 z 轴的正向看去 L 沿顺时针方向.

6. (16 分, 第 1 小题 6 分, 第 2 小题 10 分)

(1) 将 $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$, $x\in[0,\pi]$ 展开成余弦级数;

(2) 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的和.

7. (16 分, 第 1 小题 4 分, 第 2, 3 小题 6 分)

(1) 求使积分 $\varphi(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛的参数取值范围;

(2) 收敛时, 利用 Euler 积分计算 $\varphi(\alpha)$;

(3) 证明: 含参变量广义积分 $\varphi(\alpha)$ 在区间 $[-\alpha_0,\alpha_0]$ 上一致收敛 $(0<\alpha_0<1)$.

8. (8 分) 设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且对任一点 (x_0,y_0) 为圆心, 任意 $r>0$ 为半径的半圆 $L:x=x_0+r\cos\theta$, $y=y_0+r\sin\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$, 恒有

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0,$$

证明: $P(x,y)=0$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=0$.

第 3 部分　数学分析 (B3)

中国科学技术大学 2020–2021 学年第一学期

数学分析 (B3)　期中考试

1. (15 分) 设 $\{\lambda_n\}$ 是一个正数列, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n=+\infty$, 数列 $\{x_n\}$ 收敛到实数 a. 求下面数列的极限:

$$y_n=\frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}.$$

2. (15 分) 设函数 f 是以 2π 为周期的 k 阶连续可微函数 ($k\geqslant 1$), a_n,b_n 是 f 的 Fourier 系数. 证明:

$$a_n=o\left(\frac{1}{n^k}\right),\quad b_n=o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

3. (20 分) 设 f 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数且 $f(a)=f(b)=1$.

(1) 证明: $f^{-1}(1)=\{x\in[a,b]|f(x)=1\}$ 是闭集;

(2) 证明: 集合 $D=[a,b]\setminus\{f^{-1}(1)\}$ 是开集;

(3) 设 D 分解为一列两两无交的开区间 (有限或者可数)$\{(a_n,b_n)|n=1,2,\cdots\}$ 的并集, 证明: 数集 $E=\{b_n-a_n|n=1,2,\cdots\}$ 有最大元.

4. (20 分) 设 f 是区间 $[0,1]$ 上的 Riemann 可积函数, 且 f 在 $x=0$ 处连续. 定义函数列 f_n 如下:

$$f_n(x)=\int_0^x f(t^n)\,\mathrm{d}t,\quad x\in[0,1],\quad n=1,2,\cdots.$$

(1) 求函数列 $\{f_n\}$ 的极限 (不需要证明);

(2) 证明: 函数列 $\{f_n\}$ 一致收敛.

5. (15 分) 设 $\{x_n\}$ 是一个有界数列, E 是它的极限点集. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, 证明: E 是一个闭区间 (包含独点集的情形).

6. (15 分) 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是 1, 且 $na_n\to 0$ ($n\to\infty$). 记 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, 证明: 若 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=A$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A$.

中国科学技术大学 2018–2019 学年第一学期
数学分析 (B3) 期末考试

2018 年 1 月 9 日

1. (12 分) 用 $\varepsilon - N$ 或 $\varepsilon - \delta$ 语言重新叙述如下命题:

(1) 实数列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列;

(2) 定义在 $[0,1]$ 上的实值函数 f 一致连续.

2. (12 分) 设 U 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开子集, ∂U 是 U 的边界集合, 并且 $K \subset U$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧致子集. 证明: ∂U 不是空集, 并且 $d(K, \partial U) := \inf\{|x-y| : x \in K, y \in \partial U\} > 0$.

3. (10 分) 设 f 是实直线 $\mathbb{R}$ 上的 2π 周期函数, f 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积, 且 $x_0 \in [-\pi,\pi]$. 证明: 如果 f 在 x_0 处连续, 那么 $\lim\limits_{N\to\infty} \sigma_N f(x_0) = f(x_0)$, 其中 $\sigma_N f(x)$ 是 $f(x)$ 与 Fejér 核

$$K_N(x) = \frac{1}{2(N+1)} \left(\frac{\sin \frac{N+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$$

的周期卷积.

4. (14 分) 设 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上的 Euclid 内积, 给定 $x', y' \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$.

(1) 设 $\phi(x,y,t) = (x + x', y + y', t + t' + \langle x, y' \rangle - \langle x', y \rangle)$, 其中 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. 证明: ϕ 为 $(2n+1)$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 到自身的 C^1 参数变换.

(2) 设 f 是 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 上具有紧致支集的连续函数. 证明:

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(\phi(x,y,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(x,y,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

5. (10 分) 设 f 与 g 为实直线 $\mathbb{R}$ 上的 C^1 实值函数, $f(1) = g(1) = 0$, 并且 $(f'(1))^2 \neq (g'(1))^2$. 定义映射

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto (f(xy) + g(yz), f(yz) + g(xy)).$$

证明: $F(x,y,z) = 0$ 在点 $(1,1,1)$ 附近有解 $(y,z) = (y(x), z(x))$.

6. (14 分) 设 $D = (0,1) \times (0,1)$, 称 $P = (x,y) \in D$ 为有理点, 如果它的两个坐标 x, y 都是有理数. 此时我们用既约分数表示有理点 $P \in D$ 的坐标 $P = \left(\dfrac{p}{q}, \dfrac{p'}{q'}\right)$, 其中 $(p,q) = (p',q') = 1$. 如下定义 Riemann 函数 f:

(a) 当 $P = \left(\dfrac{p}{q}, \dfrac{p'}{q'}\right)$ 为既约分数表示的有理点的时候, 定义 $f(P) = \dfrac{1}{qq'}$;

(b) 当 P 不是有理点时, 定义 $f(P) = 0$.

证明: f 在非有理点处连续, 并且 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$.

7. (14 分) 设 $T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \varphi(x,y,z) := (x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)^2 - 4R^2(x^2+y^2) = 0\right\}$, 其中 $R > r > 0$ 为常数.

(1) 证明: T 为 $\mathbb{R}^3$ 中的 C^1 曲面;

(2) 证明: 定义在 T 上的函数 $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ 能取到最大值, 并求出该值.

8. 设 $\{f_n\}$ 是有限闭区间 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数列, 且 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f.

(1) 证明: 数列 $\left\{a_n=\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right\}$ 收敛, 设其极限为 a;

(2) 证明: f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积并且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=a$.