第一章　向量与复数

1.1　高维数组向量

定义 1.1.1. 一个 n **维数组向量** $\boldsymbol{a}$ 是一个有序 n 元数组 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. 其中, a_i 是 $\boldsymbol{a}$ 的第 i 个分量. 这是向量写成行的形式, 称为一个**行向量**. 我们也可以写成列的形式, 得到一个列向量 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$. 需要指出的是, 有的教材里对于数组向量的记号会略有不同, 例如, 它们会将列向量记作 $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$. 当然, 这没有任何本质的区别.

关于数组向量 (以下简称为**向量**), 我们有如下的**性质与运算**:

(1) 两个 n 维**向量相等**当且仅当对应的分量相等.

(2) **零向量**: 所有分量为 0 的向量, 有时会用 $\mathbf{0}$ 来表示.

(3) 两个**向量的加法**为对应分量相加, 即,

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n)+(b_1,b_2,\ldots,b_n)\coloneqq(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n).$$

这是一个数组向量. 而这儿的符号 $\coloneqq$ 用语言表述就是 "定义为". 在二维平面或者三位立体空间中, 我们可以用大家熟知的平行四边形法则或者等价的三角形法则来理解向量的加法.

(4) 对一个**向量的数乘** (**向量的标量乘法**) 为对其对应分量的乘法, 即, 若 λ 是一个数, 则

$$\lambda(a_1,a_2,\ldots,a_n)\coloneqq(\lambda a_1,\lambda a_2,\ldots,\lambda a_n).$$

这是一个数组向量. 对于 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_n)$, 我们会将 $(-1)\boldsymbol{a}=(-a_1,\ldots,-a_n)$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**, 并且简记为 $-\boldsymbol{a}$.

(5) 提醒一下, 如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 都是同维数组向量, 而 λ,μ 都是标量的话, 我们很容易验证如下的简单性质:

- $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,
- $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$,
- $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$,
- $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$,
- $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,
- $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$,
- $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,
- $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

(6) 两个**向量的点乘**(**内积**):

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot(b_1,b_2,\ldots,b_n)\coloneqq a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

这仅仅是一个数 (标量).

(7) **基本向量** $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$, 其中 $\boldsymbol{e}_i$ 是 n 维向量 $\boldsymbol{e}_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, 该向量仅仅第 i 个分量为 1, 其它分量都是 0.

(8) 形如 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m$ 的数组向量称为 n 维数组向量向量 $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ 的一个**线性组合**, 其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ 为数.

例 1.1.2. $c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c+2d\\c+3d\end{pmatrix}$ 是 2 维数组向量 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ 的一个线性组合.

例 1.1.3. 任何一个 n 维数组向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ 都可以写成

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n,$$

其中 $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ 为上面提到的基本向量. 即, 任何 n 维数组向量都是基本向量 $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ 的线性组合. 另外, 不难看出这样的线性表示是唯一的, 即, 若

$$\boldsymbol{a}=a_1'\boldsymbol{e}_1+a_2'\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n'\boldsymbol{e}_n,$$

则对于每个 i 皆有 $a_i=a_i'$.

例 1.1.4 (向量内积的几何意义)**.** 对于 n 维数组向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_n)$ 与 $\boldsymbol{b}=(b_1,\dots,b_n)$, 我们首先注意到 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geq 0$, 于是可以定义 $|\boldsymbol{a}|\coloneqq\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\geq 0$, 并称之为 $\boldsymbol{a}$ 的**长度**或者**模长**. 显然, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 当且仅当 $|\boldsymbol{a}|=0$. 另外, 利用勾股定理可知, 若 $n=2$ 或者 3, 我们确实看到 $|\boldsymbol{a}|$ 就是直角坐标系中向量 $\boldsymbol{a}$ 我们所熟知的长度.

接下来, 我们假定 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{b}$, 即 $|\boldsymbol{a}|\neq 0\neq|\boldsymbol{b}|$. 由著名的 *Cauchy* 不等式 (证明留作作业) 可知,

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leq(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$

这说明

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\leq|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2.$$

此时,

$$-1\leq\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\leq 1,$$

于是存在唯一的 $\theta\in[0,\pi]$, 使得 $\cos(\theta)=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$. 利用解析几何的方法, 可以证明 θ 恰好是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角. 我们这儿在 $n=2$ 的情形下简要地证明这一结果. 不妨设以原点为中心, 从 x 轴正方向开始作逆时针旋转, 需要 α 角到 $\boldsymbol{a}$, 然后再需要 θ 角到 $\boldsymbol{b}$. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量长度分别为 A 与 B, 于是 $\boldsymbol{a}=(A\cos(\alpha),A\sin(\alpha))$, 而 $\boldsymbol{b}=(B(\cos(\alpha+\theta),B\sin(\alpha+\theta)))$. 此时, 我们可以直接看到确实有

$$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{A\cos(\alpha)B\cos(\alpha+\theta)+A\sin(\alpha)B\sin(\alpha+\theta))}{AB}=\cos(\theta).$$

$n=3$ 的情形也是类似的, 不过证明稍微复杂一些.

习题 1.1.5. 阅读教材第一章的内容, 重点学习第 *1*、*2*、*3*、*6*、*7* 小节, 第 *5* 小节可以略去.

习题 1.1.6. 证明如下形式的 ***Cauchy* 不等式***:* 若 $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}$, 则必有

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leq(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$

习题 1.1.7. 设三维空间中有向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, 它们的长度相同, 两两之间的夹角相等. 若 $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$, $\boldsymbol{b}=(0,1,1)$, 求出 $\boldsymbol{c}$.

第三章　线性方程组

3.1　基本概念

线性代数来源于解线性方程组.

什么是线性方程? 形如

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

的方程称为含有 n 个未知元的 **(线性) 方程**, 其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 和 b (暂时) 为实数, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 称为**变量**或**未知元**.

含有 m 个方程和 n 个未知元的线性方程组 (linear system of equations) 的**标准形式**为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_m + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 a_{ij} 与 b_i 皆为实数[*]. 若 $b_1, b_2, \ldots, b_m$ 不全为 0, 这样的方程组 (3.1) 通常被称为 $m \times n$ **的非齐次线性方程组**; 否则, 称之为 $m \times n$ **的齐次线性方程组**. 齐次方程组一定有**零解** $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, 不全为零的解称为**非零解**.

若方程组 (3.1) 为非齐次的线性方程组, 我们也称齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

为原方程组 (3.1) 的**导出组**.

[*]这儿的系数 a_{ij} 有时也记作 $a_{i,j}$; 后者无疑更为准确, 不容易引起歧义, 但是书写起来不够简便.