第13章第4讲：几个重要的反常积分

即第47讲

~~2020.6.8.~~

2023.6.26

(一) 证明 Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

证法(一)：利用 Fourier 变换法。取 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leq 1\\ 0 & |x|>1.\end{cases}$

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛。且

在任意有限区间中分段光滑，因此可对 $f(x)$ 取 Fourier 变换.

$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt=\int_{-1}^{1}1(\cos\lambda t-i\sin\lambda t)dt=\int_{-1}^{1}\cos\lambda t\,dt$

$=\frac{2\sin\lambda}{\lambda}$，当 $|x|\neq 1$ 时，$f(x)$ 处处连续，故有付氏逆变换：

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\lambda}{\lambda}(\cos\lambda x+i\sin\lambda x)d\lambda$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda+0=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda=\begin{cases}f(x), & |x|\neq 1\\ \frac{1}{2}, & |x|=1.\end{cases}$

特别地，取 $x=0$，则有 $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda=f(0)=1\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

由此，可以推出：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & ,\beta>0\\ 0 & ,\beta=0\\ -\frac{\pi}{2}, & \beta<0\end{cases}$. (练1)

事实上，$\beta=0$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin 0x}{x}dx=0$.

(1)

当$\beta>0$时，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{\beta x}d(\beta x)\xlongequal{\beta x=u}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du$ $=\frac{\pi}{2}$；当$\beta<0$时，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{\beta x}d(\beta x)\xlongequal{\beta x=u}$ $\int_0^{-\infty}\frac{\sin u}{u}du\xlongequal{v=-u}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(-v)}{-v}(-dv)=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin v}{v}dv=-\frac{\pi}{2}$.

通过(*1)式，可把sgn x这个不连续函数用含参积分表示出来：

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx,\ \beta\in R.$$ (*2)

证法二：Fourier积分法：令取$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1.\end{cases}$

则f(x)的连续点处，有

$$f(x)=\int_0^{+\infty}[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda \quad (*3)$$

其中，$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}1\cos\lambda t\,dt=\frac{2}{\pi}\frac{\sin\lambda}{\lambda}$,

$B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}1\sin\lambda t\,dt=0.$

故$|x|\ne1$时，有 $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$ (*4)

取$x=0$时，有 $f(0)=1=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda\Leftrightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

(2)

证法(三)：利用一致收敛反常积分的分析性质换元法.

考察含参反常积分：$g(u)=\int_0^{+\infty}e^{-ux}\frac{\sin x}{x}dx$，$(u\geq 0)$.

$\because\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ con 且不含参变量 u，$\therefore\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 在 $u\in[0,+\infty)$ 上

是一致 con 的. 且 $h(x,u)=e^{-ux}$ 关于 x 单减 且关于 u 一致有界：

$|e^{-ux}|\leq e^0=1=M$，此 M 与 u 无关。依一致收敛的 Abel 判别法，

反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ux}\frac{\sin x}{x}dx$ 在 $u\in[0,+\infty)$ 中一致收敛。再从

$e^{-ux}\frac{\sin x}{x}$ 关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上连续 $\Longrightarrow g(u)$ 在 $[0,+\infty)$ 中

连续. 特别地，在 $u=0$ 处右连续：$g(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim\limits_{u\to 0^+}g(u)$

因此，只要求出 $u>0$ 时的 $g(u)$ 表达式即可。

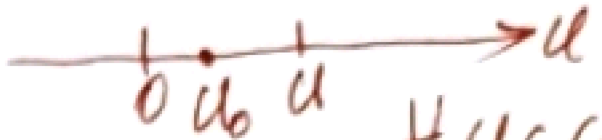
利用 $u>0$ 时，$g'(u)=\left(\int_0^{+\infty}e^{-ux}\frac{\sin x}{x}dx\right)'_u=\int_0^{+\infty}\left(e^{-ux}\frac{\sin x}{x}\right)'_u dx$

$=-\int_0^{+\infty}\sin x\, e^{-ux}dx=\frac{-1}{1+u^2}\Rightarrow g(u)=-\arctan u+C_0$

再从 $|g(u)|\leq\int_0^{+\infty}e^{-ux}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\leq\int_0^{+\infty}e^{-ux}dx=\frac{1}{u}\xrightarrow{u\to+\infty}0$

可知：$0=g(+\infty)=-\arctan(+\infty)+C_0\Rightarrow C_0=\arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}$.

(3).



$\forall u\in(0,+\infty)$, $\exists u_0>0$

故 $g(u)=-\arctan u+\frac{\pi}{2}$, $u\in(0,+\infty)$. $\exists$ $u_0<u<+\infty$.

因此, $g(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim\limits_{u\to0^+}g(u)=\lim\limits_{u\to0^+}(-\arctan u+\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$.

至于 $\left(\int_0^{+\infty}e^{-ux}\frac{\sin x}{x}dx\right)'_u=\int_0^{+\infty}\left(e^{-ux}\frac{\sin x}{x}\right)'_u dx$ 这一步之所以成立，是因为 $\int_0^{+\infty}\left(e^{-ux}\frac{\sin x}{x}\right)'_u dx=-\int_0^{+\infty}\sin x\, e^{-ux}dx$ 在 $[u_0,+\infty)$ 上一致收敛，($\forall u_0>0$) $\because$ $|\sin x\, e^{-ux}|\le e^{-u_0x}$, $\forall u_0\le u<+\infty$, $\forall x>0$. 且 $\int_0^{+\infty}e^{-u_0x}dx=\frac{1}{u_0}$ 知, $\int_0^{+\infty}e^{-u_0x}dx$ 是 $\int_0^{+\infty}\left(e^{-ux}\frac{\sin x}{x}\right)'_u dx$ 的优积分，依优积分判法即知 $-\int_0^{+\infty}\sin x\, e^{-ux}dx$ 在 $[u_0,+\infty)$ 上一致收敛。

(三) 证明 Poisson 积分(即概率积分):

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}, \text{ 或 } \int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{熟})$$

证: 利用 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy\Rightarrow$

$$I^2=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy\ \overset{x=r\cos\theta}{\underset{y=r\sin\theta}{=\!=\!=}}\ \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{+\infty}e^{-r^2}r\,dr\right)d\theta$$

(4).

$=2\pi\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\frac{d(-r^2)}{-2} = -\pi e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty} = \pi$. 且 $I>0$，

故 $I=\sqrt{\pi}$.

如果局限于 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 本身的计算，则无法进行！原因是 e^{-x^2} 的原函数存在，为 $\int_0^x e^{-t^2}dt$，但这个原函数是一个无法用初等表示的非初等函数。因此，牛顿—莱布尼茨公式无法应用。刚才将一重反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 归结为二重反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ 的计算，是将低维问题高维化思想的应用实例。这种思想在数学物理方程课程中求二维波动方程的初值问题时，还会遇到。到时，我们就将二维问题看作是一个特殊的三维问题来求解。低维问题放到一个更大背景下考察，或许就变成一个简单问题。$\left(\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}du \xlongequal[du=\frac{dv}{\sqrt{t}}]{\sqrt{t}u=v} \int_0^{+\infty} e^{-v^2}\frac{dv}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}e^{-v^2}dv = \frac{1}{\sqrt{t}}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}du = \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

(5). (补充：计算 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2\beta x\,dx$，($\beta\in R$)（答案：$\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\beta^2}$）

过程见后面

2) $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2+y^2)dxdy=\pi=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2+y^2)dydx$ (交换即可)

(三). 证明 Fresnel(菲涅耳)积分: (3) $\iint_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2+y^2)dxdy$ div

(见某讲义例 7.2.30)

①. $\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\int_0^{+\infty}\cos x^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (答6)

证: 设 $I=\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$, 且 $x^2=t$, 则 $x=\sqrt{t}$, $dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$, 利用 poisson 积分: $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Rightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}du\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}du)\sin t\,dt$

$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}(\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\sin t\,du)dt\xlongequal{\text{交换积分次序}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}(\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\sin t\,dt)du$

$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^4+1}$, (由两次分部积分再移项可得: $\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\sin t\,dt=\frac{1}{u^4+1}$)

而 $\int\frac{du}{u^4+1}=\frac{1}{2}\int\frac{u^2+1}{u^4+1}du+\frac{1}{2}\int\frac{1-u^2}{u^4+1}du$

$=\frac{1}{2}\int\frac{(1+\frac{1}{u^2})du}{u^2+\frac{1}{u^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{(1-\frac{1}{u^2})du}{u^2+\frac{1}{u^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(u-\frac{1}{u})}{(u-\frac{1}{u})^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{d(u+\frac{1}{u})}{(u+\frac{1}{u})^2-2}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{u^2+\sqrt{2}u+1}{u^2-\sqrt{2}u+1}+C$.

故 $\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{u^2+\sqrt{2}u+1}{u^2-\sqrt{2}u+1}\Big|_0^{+\infty}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2})+\frac{1}{4\sqrt{2}}(0-0)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

故 $I=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^4+1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$.

(6).

同理: $\int_0^{+\infty}\cos x^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$. (式7)

交换积分次序之所以能顺利进行，是因为引进了一个收敛因子 e^{-vt} ($v>0$) 后，$\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+v)}\sin t\,dt$ 关于 u 在 $[0,+\infty)$ 中一致收敛，$\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+v)}\sin t\,du$ 关于 t 在 $[0,+\infty)$ 中也一致收敛且 $\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+v)}|\sin t|\,dt$ 收敛这三个条件都成立。而且

$$\lim_{v\to0^+}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+v)}\sin t\,dt\,du=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\sin t\,dt\,du$$ 成立。

Fresnel积分在光学理论中常用到。它的计算方法是将物理问题高维化的又一个成功案例。

(四) 证明: $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}$ $(\alpha>0,\beta\geq0)$, (式8)

$J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}$ $(\alpha>0,\beta>0)$ (式9)

(式8), (式9) 两个含参积分统称为Laplace积分。

证(1°). $\because\left|\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\right|\leq\frac{1}{\alpha^2+x^2}$, $\forall\beta\in[0,+\infty)$, $\forall x\in[0,+\infty)$

且 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{\pi}{2\alpha}$，故依一致收敛的Weierstrass判别法，含参

反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx$ 在 $[0,+\infty)$ 中关于 β 一致收敛。

而在反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx$ 中，对于 $\beta_0>0$，设 $\forall b>0$，

积分 $\left|\int_0^b\sin\beta x\,dx\right|=\left|\frac{1-\cos b\beta}{\beta}\right|\leqslant\frac{2}{\beta_0}$，$\forall\beta\in[\beta_0,+\infty)$。且

$\frac{x}{\alpha^2+x^2}$ 关于 x 单调递减且当 $x\to+\infty$ 时，一致趋零。即积分

$\int_0^b\sin\beta x\,dx$ 在 $[\beta_0,+\infty)$ 中关于参数 β 一致有界，且 $\frac{x}{\alpha^2+x^2}$ 中

无参数 β，故 $\frac{x}{\alpha^2+x^2}$ 当 $x\to+\infty$ 时为一致趋零。利用一致收敛

的Dirichlet判别法，$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=-\int_0^{+\infty}\left(\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\right)'_\beta dx$

在 $[\beta_0,+\infty)$ 中一致收敛。根据一致收敛的性质Th3，求导与

积分可以交换顺序：

$J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=-\left(\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx\right)'_\beta=-I'(\beta)$ （式10）

从Dirichlet积分可知，$\beta>0$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，$\Rightarrow$

$I'(\beta)+\frac{\pi}{2}=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx+\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\alpha^2\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x(\alpha^2+x^2)}dx$

(8)，

同理，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x(\alpha^2+x^2)}dx$ 在 $[\beta_0,+\infty)$ 中关于 β 的求导号与积分号也可以交换：$\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x(\alpha^2+x^2)}dx\right)'_\beta=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\beta x}{x(\alpha^2+x^2)}\right)'_\beta dx$

$=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=I(\beta)$. 即有：

$I''(\beta)=\alpha^2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=\alpha^2 I(\beta)$，解二阶常系数线性微分方程：$I''(\beta)-\alpha^2 I(\beta)=0$ 得通解：

$I(\beta)=C_1e^{\alpha\beta}+C_2e^{-\alpha\beta}$.　　(*1)

利用 $|I(\beta)|\leq\int_0^{+\infty}\left|\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\right|dx\leq\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{\pi}{2\alpha}$ 知 $I(\beta)$ 是 β 的有界函数，故 $C_1=0$，否则，$I(\beta)$ 无界。$\Rightarrow I(\beta)=C_2e^{-\alpha\beta}$.

前面已经证明了 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx$ 在 $[0,+\infty)$ 中关于 β 一致收敛，因此 $I(\beta)$ 在 $[0,\beta)$ 中连续，特别地在 $\beta=0$ 处连续，故 $I(0)=\lim_{\beta\to0^+}I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2\alpha}=C_2e^0=C_2$.

即 $C_2=\frac{\pi}{2\alpha}$，故 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}$.

而 $J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=-I'(\beta)=-\left(\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}\right)'_\beta=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}$.

(9).

(五). 设a,b,c均为常数，且$a>0$，计算反常积分：

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2+bx+c}dx.$$ (概率论中常见的积分)

解：指数部分配方得：

$$-ax^2+bx+c=-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac+b^2}{4a}\Rightarrow$$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{4ac+b^2}{4a}}\cdot e^{-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2}dx=e^{\frac{4ac+b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2}dx$$

$$\xlongequal[\text{则 } dx=\frac{1}{\sqrt{a}}du]{\text{令 }\sqrt{a}\left(x-\frac{b}{2a}\right)=u} e^{\frac{4ac+b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\frac{1}{\sqrt{a}}du=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{4ac+b^2}{4a}}.$$

重要的含参反常积分还有Euler积分。分别是：

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt,\quad B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

下一讲，即ch13第5讲中详细介绍。

(六) 作业：习题13.2/1(2),(3).

习题13.4/6，8/(2),(4),(6).

下一讲：Γ函数与B函数。(第48讲)

Γ函数是一个神奇的函数，概率论统计中的正态分布，χ^2分布，t分布，F分布都和Γ函数有关！

(10).