第30讲：场论初步及统一的Stokes公式

(2023.5.17)

(一) 设 Ω 是 R^3 中的曲面单连通域，即 Ω 中任一 考注

闭路 L，都可在 Ω 中张成一片以 L 为边界的曲面

的区域。且 $\vec{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\in C^1(\Omega)$，则

下列三个命题等价：

命题(I)：$\vec{A}(x,y,z)$ 是 Ω 中的无旋场，即 $\nabla\times\vec{A}(x,y,z)\equiv 0$。

命题(II)：$\vec{A}(x,y,z)$ 是 Ω 中的保守场，即对 Ω 中的

任意闭路 L，都有 $\oint_L \vec{A}\cdot\vec{\tau}\,ds=0$ 即 $\oint_L Pdx+Qdy$

$+Rdz=0$。即曲线积分 $\int_{L_{AB}} Pdx+Qdy+Rdz$ 与路径无关。

可表示为 $\int_A^B Pdx+Qdy+Rdz$。在 Ω 中取定一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，

则对 $\forall M(x,y,z)\in\Omega$，$\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz \triangleq \varphi(x,y,z)$

命题(III)：$\vec{A}(x,y,z)$ 是 Ω 中的有势场(梯度场)，即

$\exists\,\varphi(x,y,z)\in C^2(\Omega)$ 使 $d\varphi(x,y,z)=Pdx+Qdy+Rdz$。

此时，$\nabla\varphi=(\varphi'_x,\varphi'_y,\varphi'_z)=(P,Q,R)=\vec{A}(x,y,z)$，$(x,y,z)\in\Omega$。

故称 $\vec{A}(x,y,z)$ 是梯度场，且

$$\int_{L_{AB}}Pdx+Qdy+Rdz=\int_A^B d(\varphi(x,y,z))=\varphi(B)-\varphi(A). \quad (\ast1)$$

$(\ast1)$ 可称之为推广的 Newton–Leibniz 公式。

- 证明思路：$(\mathrm{I})\Rightarrow(\mathrm{II})\Rightarrow(\mathrm{III})\Rightarrow(\mathrm{I})$.

$1^\circ)$ $(\mathrm{I})\Rightarrow(\mathrm{II})$ 的证明：已知 $\nabla\times\vec{A}(x,y,z)\equiv0$，$\forall(x,y,z)\in\Omega$.

要证 $\oint_L\vec{A}\cdot\vec{\tau}ds=0$。$\because\Omega$ 是曲面单连通域，L 于 Ω 中

总能张一块以 L 为边界的有向曲面 Σ，设 Σ 的正侧

- 与 L 的正向服从右手法则。依 stokes 公式：

$$\oint_L\vec{A}\cdot\vec{\tau}ds=\iint_\Sigma(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{n}dS=\iint_\Sigma0\cdot\vec{n}dS=\iint_\Sigma0dS=0$$

故 $\vec{A}(x,y,z)$ 是 Ω 中的保守场；

$2^\circ)$ $(\mathrm{II})\Rightarrow(\mathrm{III})$ 的证明：由 (II) 可知

- 可令 $\varphi(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}Pdx+Qdy+Rdz$，$\begin{cases}(x,y,z)\in\Omega\\(x_0,y_0,z_0)\in\Omega\end{cases}$. (2)

则 $\varphi(x+\Delta x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x+\Delta x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz$

$$=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz+\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz$$

$\underline{\because dy=0,\ dz=0}$ (路后一个积分中) $=\varphi(x,y,z)+\int_{x}^{x+\Delta x} P(x,y,z)dx \Longrightarrow$ 积分中值定理,

$\varphi(x+\Delta x,y,z)-\varphi(x,y,z)=P(\xi,y,z)\Delta x$, ($x\le\xi\le x+\Delta x$)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x,y,z)-\varphi(x,y,z)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(\xi,y,z)=\lim_{\xi\to x}P(\xi,x,y)$$

即 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P(x,y,z)$. 同理, $\begin{cases}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q(x,y,z)\\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=R(x,y,z).\end{cases}$

$\therefore d\varphi(x,y,z)=\varphi'_x dx+\varphi'_y dy+\varphi'_z dz=Pdx+Qdy+Rdz$, $(x,y,z)\in\Omega$.

即 $\vec{A}(x,y,z)$ 是 Ω 中的有势场, 势(原)函数是

$\varphi(x,y,z)+C$, C 是任意常数. 故势函数不唯一!

(3) (四)$\Longrightarrow$(一)的证明: 已知 $\vec{A}(x,y,z)=(P,Q,R)$ 在 Ω 中有

势函数 $\varphi(x,y,z)\in C^2(\Omega)$, 要证 $\nabla\times\vec{A}(x,y,z)\equiv 0$, $(x,y,z)\in\Omega$.

$\because d\varphi(x,y,z)=Pdx+Qdy+Rdz \Rightarrow \varphi'_x=P,\ \varphi'_y=Q,\ \varphi'_z=R$

例1、证明 $\vec{A}(x,y,z)=(x^2-yz,\ y^2-xz,\ z^2-xy)$ 是有势场, 并求出

线积分: $\int_{(1,1,-1)}^{(2,3,4)}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$ 的值。

- 而 $\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix}$

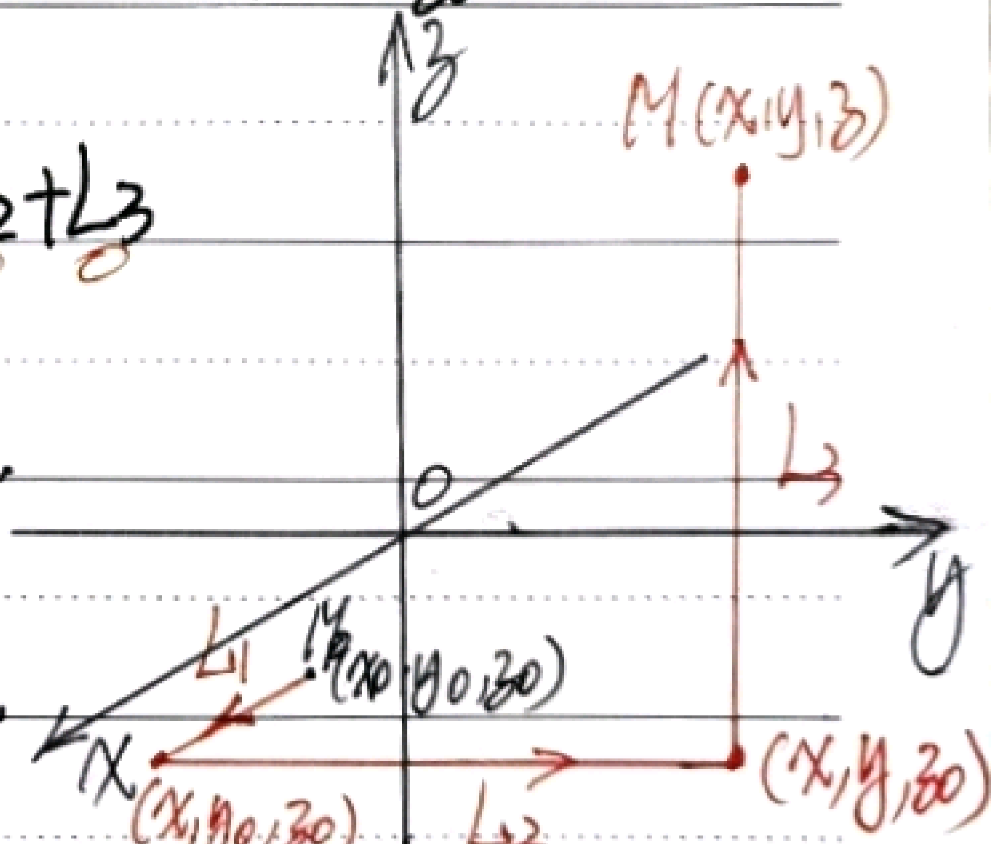
$=(\varphi''_{zy}-\varphi''_{yz})i+(\varphi''_{xz}-\varphi''_{zx})j+(\varphi''_{yx}-\varphi''_{xy})k\equiv 0$ $(\because \varphi\in C^2)$

故 $\vec{A}(x,y,z)$ 是 Ω 中的无旋场。

- 利用曲线积分与路径无关，可得：势函数

$$\varphi(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz$$



(只要在 Ω 中取折线路径 $L_1+L_2+L_3$

- 即可，在 L_1 上，$y\equiv y_0$，$z\equiv z_0$，$dy=0=dz$。

在 L_2 上，$z\equiv z_0$，$dx=0$，$dz=0$。在 L_3 上，

$dx=dy=0$，z 从 $z_0\to z$)

(三) 统一的 stokes 公式：$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}d\omega$

- 其中 ω 为微分形式，$d\omega$ 为微分形式的外微分运算结果。

五、积分关系图：

$$
\begin{tikzcd}
\text{三重积分} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Gauss}"] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{曲面积分}\left\{\begin{array}{l}\text{第一型的}\\ \text{第二型的}\end{array}\right. \arrow[dl, "\text{参数化}"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Stokes}"] \\
\text{二重积分} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Green}"] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{曲线积分}\left\{\begin{array}{l}\text{第一型的}\\ \text{第二型的}\end{array}\right. \arrow[dl, "\text{参数化}"'] \arrow[d, "\text{线积分与路径无关}"] \\
\text{定积分} &
\end{tikzcd}
$$

定积分 $\int_a^b dF(x) \xlongequal{N-L} F(b)-F(a)$ （F是势(原)函数）

上图中的积分之间的公式可统一为广义的Stokes公式：

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}d\omega \qquad (*2)$$

注：(1) 在Green公式：$\oint_{\partial D}Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$ 中，

令 $\omega=Pdx+Qdy$（将之视为一次微分形式），$D=\Omega$，则

$$d\omega=dPdx+dQdy=(P'_x dx+P'_y dy)dx+(Q'_x dx+Q'_y dy)dy$$

$$=0+\frac{\partial P}{\partial y}dydx+\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy+0=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$\therefore \oint_{\partial\Omega}\omega=\iint_{\Omega}d\omega$ 成立；

注(2) 在Stokes公式：$\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

中，令 $\Sigma=\Omega$，$\Gamma=\partial\Sigma=\partial\Omega$，$\omega=Pdx+Qdy+Rdz$

则 $d\omega = dP dx + dQ dy + dR dz = (P'_x dx + P'_y dy + P'_z dz)dx +$

$(Q'_x dx + Q'_y dy + Q'_z dz)dy + (R'_x dx + R'_y dy + R'_z dz)dz =$

$(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$

$= \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ $\therefore \oint_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$ 成立;

证(3). 在Gauss公式 $\oiint_{\partial\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz$

中，若令 $\omega = Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ (二次微分形式) 则

$d\omega = dP dydz + dQ dzdx + dR dxdy = (P'_x dx + P'_y dy + P'_z dz)dydz +$

$(Q'_x dx + Q'_y dy + Q'_z dz)dzdx + (R'_x dx + R'_y dy + R'_z dz)dxdy$

$= (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz$，即 $\oint_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$ 成立;

证(4) 在N—L公式：$\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ 中

令 $F(x) = \omega$，$[a,b] = \Omega$，则 $\partial\Omega$ 为 a, b，得

$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\partial[a,b]} \omega = F(x)\Big|_a^b = \int_{\Omega} d\omega = \int_{[a,b]} d\omega$ 成立

(三) 例题：证明线积分 $\int_{M_1(x_1,y_1,z_1)}^{M_2(x_2,y_2,z_2)} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 与路径无关，并求出积分值。此处，$\left\{ \begin{array}{l} M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2) \text{ 在} \\ \text{球面 } x^2+y^2+z^2=a^2 \text{ 上。} \end{array} \right.$

证法(一)：设 $\Omega = R^3 - O(0,0,0)$ 则 Ω 是 R^3 中的曲面单连通域。令 $g(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$(x,y,z)\in\Omega$，则 $dg(x,y,z)=$
$\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$(x,y,z)\in\Omega$。即向量场 $\vec{A}=\left(\frac{x}{\sqrt{\ }},\frac{y}{\sqrt{\ }},\frac{z}{\sqrt{\ }}\right)$

是 Ω 中的有势场，从而是 Ω 中的保守场。即线积分

$\int_{M_1}^{M_2} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 在 Ω 中与路径无关，且

$$\int_{M_1}^{M_2} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = g(M_2)-g(M_1) = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} = a-a=0.$$

证法(二)：令 $\vec{A}(x,y,z)=\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)$，$(x,y,z)\in\Omega=R^3-O(0,0,0)$

则 $\nabla\times\vec{A}=\left(-yz(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+yz(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)i+\left(-xz(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+xz(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)j$

$+\left(-xy(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+xy(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)k = 0i+0j+0k = 0$。$\forall (x,y,z)\in\Omega$。

$\because \vec{A}(x,y,z)$ 是 Ω 中的无旋场且 Ω 是曲面单连通域，故 $\vec{A}$

是 Ω 中的保守场。

(四) 作业：ex11.7/2；3(2)；4；5(2)；
6(5)，(6)；10；13.