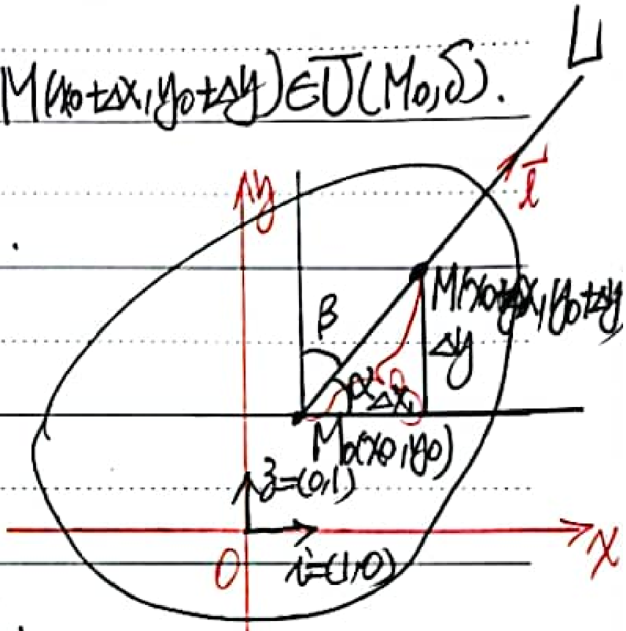
第7讲：方向导数与梯度(gradient)

(一) 函数 $u=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数：$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0}$

设 $u=f(x,y)$ 定义在 $U(M_0,\delta)$ 中，$M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in U(M_0,\delta)$.

以 M_0 为起点作射线 L 过 M 点.



记 $\rho=\rho(M_0,M)=|M_0M|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,

记 $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{f(M)-f(M_0)}{|MM_0|}=\dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0}=\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0}$.

$\rho=|M_0M|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

称 $\dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{\rho}$

$\Delta x=\rho\cos\alpha$, $\Delta y=\rho\sin\alpha$

$\vec{l}^0=(\cos\alpha,\cos\beta)$, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$,

$=(\cos\alpha,\sin\alpha)$.

是函数 $u=f(x,y)$ 在点 M_0 处沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数，表示 u 关于 $\vec{l}$ 方向在 M_0 处的变化率。

例1. 若 $f_x(M_0)=f_x(x_0,y_0)$ 存在，则 $u=f(x,y)$ 在 M_0 处沿 x 轴正向 $\vec{i}=(1,0)$ 的方向导数为 $\dfrac{\partial u}{\partial i}\Big|_{M_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=f_x(x_0,y_0)$；而 $u=f(x,y)$ 在 M_0 处沿

x 轴的负向：$\vec{l}=(-1,0)=-\vec{i}$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial(-\vec{i})}\right|_{M_0}=$

$\lim\limits_{-\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{-\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=-f'_x(M_0)$

同理，当 $f'_y(x_0,y_0)=B$（常数）时，$u=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处沿 y 轴

正负向的方向导数都存在，且 $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{j}}\right|_{M_0}=f'_y(M_0)$，$\left.\frac{\partial u}{\partial(-\vec{j})}\right|_{M_0}=-f'_y(M_0)$.

这里 $\vec{j}=(0,1)$，$-\vec{j}=(0,-1)$ 分别为 y 轴的正、负向。

例 2. $u=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $O(0,0)$ 处 C 但 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 都

不存在，从而不可微。但 $u=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $O(0,0)$ 处沿任何方向

$\vec{l}^0=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}^0}\right|_{O(0,0)}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\frac{f(0+\rho\cos\alpha,0+\rho\sin\alpha)-f(0,0)}{\rho}$

$=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\frac{\sqrt{(\rho\cos\alpha)^2+(\rho\sin\alpha)^2}-0}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\frac{\rho}{\rho}\equiv 1.$

例 3. 设 $u=f(x,y,z)$ 定义在 $U(M_0,\delta)$ 中，$M_0(x_0,y_0,z_0)$，$M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$

$\in U(M_0,\delta)$，$\rho=\rho(M_0,M)=|M_0M|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}>0$，$\begin{cases}\Delta x=\rho\cos\alpha\\ \Delta y=\rho\cos\beta\\ \Delta z=\rho\cos\gamma\end{cases}$

$\vec{l}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 已知，则定义

$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\frac{f(M)-f(M_0)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\cos\beta,z_0+\rho\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$

扫描全能王 创建

当偏导数 $f'_x(x_0,y_0,z_0)=A$(常数时)，$u=f(x,y,z)$ 在 M_0 处沿 x 轴正向 $\vec{i}=(1,0,0)$，负向 $-\vec{i}=(-1,0,0)$ 的方向导数都存在，且 $\frac{\partial u}{\partial \vec{i}}\Big|_{M_0}=A$，$\frac{\partial u}{\partial(-\vec{i})}\Big|_{M_0}=-A$。余类推。

例4. 当 $u=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微时，u 在点 M_0 处沿任何方向 $\vec{e^0}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial \vec{e^0}}\Big|_{M_0}$ 都存在，且

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e^0}}\Big|_{M_0}=f'_x(M_0)\cos\alpha+f'_y(M_0)\sin\alpha=f'_x(M_0)\cos\alpha+f'_y(M_0)\cos\beta,\ (\alpha+\beta=\frac{\pi}{2})$$

(*)

证：设 $M_0(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in U(M_0,\delta)$，则

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f'_x(M_0)\Delta x+f'_y(M_0)\Delta y+o(\rho),\ \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}=f'_x(M_0)\frac{\Delta x}{\rho}+f'_y(M_0)\frac{\Delta y}{\rho}+\frac{o(\rho)}{\rho}$$

$$=f'_x(M_0)\cos\alpha+f'_y(M_0)\sin\alpha+\frac{o(\rho)}{\rho}.$$

令 $\rho\to0^+$ 得：$\frac{\partial u}{\partial \vec{e^0}}\Big|_{M_0}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}=f'_x(M_0)\cos\alpha+f'_y(M_0)\sin\alpha$

同理，当 $u=f(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微时，u 在点 M_0 处沿任意方向 $\vec{e^0}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial \vec{e^0}}\Big|_{M_0}$ 都存在

扫描全能王 创建

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}^{0}}\right|_{M_0}=f'_x(M_0)\cos\alpha+f'_y(M_0)\cos\beta+f'_z(M_0)\cos\gamma \quad (\text{式}1)$$

在(式)中称向量 $(f'_x(M_0), f'_y(M_0))$ 为函数 $u=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的梯度；在(式1)中，称向量 $(f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0))$ 为函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 M_0 处的梯度，记作：

$\text{grad} f(x_0,y_0)=(f'_x(M_0), f'_y(M_0))$；$\text{grad} f(x_0,y_0,z_0)=(f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0))$.

也可记作：$\text{grad} f(x_0,y_0)=\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|_{M_0}$，$\text{grad} f(x_0,y_0,z_0)=\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right|_{M_0}$

$u=f(x,y,z)$ 在 $U(M_0,\delta)$ 中任意一点 M 的梯度则记作

$$\text{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)u=\nabla u.$$

其中 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ 称为微分向量算子，也称为Hamilton算子.

这样(式1)可改写为：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=(f'_x(M_0), f'_y(M_0), f'_z(M_0))\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\nabla u|_{M_0}\cdot\vec{e}^{0} \quad (\text{式}2)$$

$$=\text{grad} f(x_0,y_0,z_0)\cdot\vec{l}^{0}=|\text{grad} f(M_0)|\cdot|\vec{l}^{0}|\cos(\text{grad} f(M_0),\widehat{\ }\vec{l}^{0}) \quad (\text{式}3)$$

$$\le|\text{grad} f(M_0)|=|\nabla u(M_0)|$$

等号当且仅当 $\vec{l}^{0}$ 与 $\text{grad} f(M_0)$ 一致时取到。 (4).

(三) 函数的梯度(旋度、散度):

设 $u=f(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，则 $f(x,y,z)$ 在 M_0 处的梯度 $\mathrm{grad} f(x_0,y_0,z_0)=\{f'_x(M_0),f'_y(M_0),f'_z(M_0)\}$ 是一个向量.

此向量的模 $|\mathrm{grad} f(x_0,y_0,z_0)|$ 是 $f(x,y,z)$ 在点 M_0 处所有方向的方向导数中的最大值，而梯度的方向即是 $f(x,y,z)$ 在点 M_0 处的方向导数取最大值的方向。

从 $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0}=\mathrm{grad} f(M_0)\cdot\vec{e}^0=|\mathrm{grad} f(M_0)|\cos(\widehat{\mathrm{grad} f(M_0),\vec{e}^0})\le|\mathrm{grad} f(M_0)|$

可知，方向 l 与 $\mathrm{grad} f(M_0)$ 一致时，$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0}$ 取最大值 $|\mathrm{grad} f(M_0)|$

而方向 l 与 $\mathrm{grad} f(M_0)$ 相反时，$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0}$ 取最小值 $-|\mathrm{grad} f(M_0)|$

即 $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0}\right)_{max}=|\mathrm{grad} f(M_0)|$，$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0}\right)_{min}=-|\mathrm{grad} f(M_0)|$. (式4)

换言之，在点 M_0 处，沿梯度 $\mathrm{grad} f(M_0)$ 的方向，$f(x,y,z)$ 的变化率是最大的，而沿 $-\mathrm{grad} f(M_0)$ 的方向，$f(x,y,z)$ 的变化率最小：$-|\mathrm{grad} f(M_0)|\le\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0}\le|\mathrm{grad} f(M_0)|$. (式5)

扫描全能王 创建

因 $\operatorname{grad} f(M_0)=\nabla u(M_0)\triangleq\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{M_0}$，从而有

$$-|\nabla u(M_0)|\le\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0}\le|\nabla u(M_0)|$$

梯度或数量场的梯度是一种特定的微分运算。

设 $u_1=f_1(x,y,z)$，$u_2=f_2(x,y,z)$ 皆可微，或 $f_1,f_2\in C^1$，则如有

(1). $\nabla(C_1u_1+C_2u_2)=C_1\nabla u_1+C_2\nabla u_2$，$C_1,C_2$ 为任意常数；

(2). $\nabla(u_1u_2)=u_2\nabla u_1+u_1\nabla u_2$；

(3). $\nabla f(u)=f'(u)\nabla u$，$\forall f\in C^1$.

证(1)：$\because C_1,C_2$ 为常数，而 $\nabla(C_1u_1+C_2u_2)\triangleq((C_1u_1+C_2u_2)'_x,(C_1u_1+C_2u_2)'_y,$

$(C_1u_1+C_2u_2)'_z)=(C_1u'_{1x}+C_2u'_{2x},C_1u'_{1y}+C_2u'_{2y},C_1u'_{1z}+C_2u'_{2z})$

$=C_1(u'_{1x},u'_{1y},u'_{1z})+C_2(u'_{2x},u'_{2y},u'_{2z})=C_1\nabla u_1+C_2\nabla u_2$

证(3)：已知 $f\in C^1$，$u\in C^1$ 或 u 可微，而 $\nabla f(u)\triangleq((f(u))'_x,(f(u))'_y,(f(u))'_z)$

$=(f'(u)u'_x,f'(u)u'_y,f'(u)u'_z)=f'(u)(u'_x,u'_y,u'_z)=f'(u)\nabla u$.

从上述(1),(2),(3)可知，哈密顿算子 ∇ 与微分算子 d 的规律类似。

例5. 求解下列各题:

(1). 求 $z=x^2+y^2$ 在点 $M_0(1,2)$ 处, 沿从 $(1,2)$ 到 $(2,2+\sqrt{3})$ 方向的方向导数, 并求 $\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{M_0(1,2)}$ 的最大值与最小值。

(2). 求 $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $M_0\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处, 沿曲线 $L: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法线方向的方向导数。

(3). 求数量场 $\frac{m}{r}$ 所产生的梯度场 $\nabla\frac{m}{r}$, 其中 $m>0$ 为常数, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 是向径 (x,y,z) 的模。

解(1)/(i). $\vec{l}$ 方向为 $(2-1,2+\sqrt{3}-2)=(1,\sqrt{3})\triangleq\vec{l} \Rightarrow \vec{l}^0=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta)$. 而 $\nabla z(M_0)=(z_x(M_0),z_y(M_0))=(2x,2y)\big|_{M_0(1,2)}=(2,4)$.

故 $\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{M_0}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0}\cdot\cos\beta=2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1+2\sqrt{3}$.

(ii). $\because |\nabla z(M_0)|=|(2,4)|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. $\therefore$ $-2\sqrt{5}=-|\nabla z(M_0)|\le\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{M_0}\le|\nabla z(M_0)|=2\sqrt{5}$. 即 $\begin{cases}\left(\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{M_0}\right)_{max}=2\sqrt{5},\\ \left(\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{M_0}\right)_{min}=-2\sqrt{5}.\end{cases}$

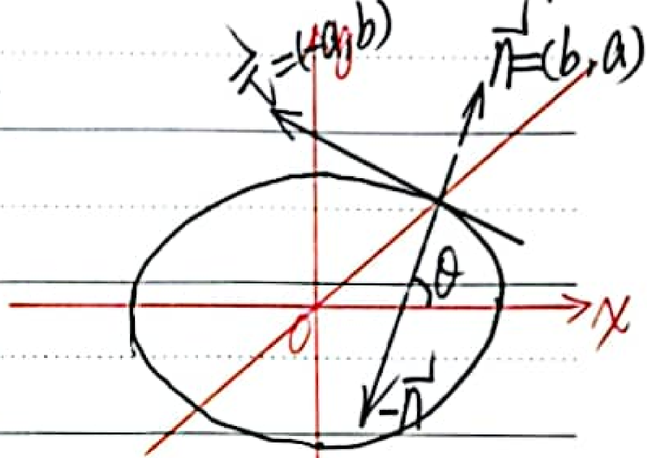
解(2)/(i). L的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t,\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$,

扫描全能王 创建

L也可表示为 $r(t)=(x(t),y(t))=(a\cos t, b\sin t)$. $t\in[0,2\pi]$, $t_0=\frac{\pi}{4}$,

$r'(t)=(x'(t),y'(t))\big|_{M_0}=(-a\sin t, b\cos t)\big|_{M_0(\frac{a}{\sqrt2},\frac{b}{\sqrt2})}=(-a\sin t, b\cos t)\big|_{t_0=\frac{\pi}{4}}$

$=(-\frac{\sqrt2}{2}a, \frac{\sqrt2}{2}b)$. 可取切向量 $\vec{\tau}=(-a,b)$. 此时过 M_0 的外



法向量为 $\vec{n}=(b,a)$, 因此过 M_0 的

内法向量 $\vec{l}=-\vec{n}=(-b,-a) \Rightarrow$

$\vec{l^0}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-b,-a)=(\cos\alpha,\cos\beta)$

(0) $z'_x(M_0)=-\frac{2x}{a^2}\Big|_{M_0}=\frac{-2}{a^2}\frac{a}{\sqrt2}=-\frac{\sqrt2}{a}$, $z'_y(M_0)=-\frac{2y}{b^2}\Big|_{M_0}=\frac{-2}{b^2}\frac{b}{\sqrt2}=-\frac{\sqrt2}{b}$.

故 $\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{M_0}=z'_x(M_0)\cos\alpha+z'_y(M_0)\cos\beta=(-\frac{\sqrt2}{a})(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}})+(-\frac{\sqrt2}{b})(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$

$=\frac{\sqrt2}{\sqrt{a^2+b^2}}(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{ab}$.

Sol(3): $\nabla(\frac{m}{r})=((\frac{m}{r})'_x, (\frac{m}{r})'_y, (\frac{m}{r})'_z)$

而 $(\frac{m}{r})'_x=m(\frac{1}{r})'_x=-\frac{m}{r^2}r'_x=-\frac{m}{r^2}\frac{x}{r}=-\frac{mx}{r^3}$, 由对称性

$(\frac{m}{r})'_y=-\frac{my}{r^3}$, $(\frac{m}{r})'_z=-\frac{mz}{r^3}$. 故 $\nabla(\frac{m}{r})=-\frac{m}{r^3}(x,y,z)$

令 $\vec{r^0}=\frac{(x,y,z)}{r}$, 则 $\nabla(\frac{m}{r})=\frac{-m\vec{r^0}}{r^2}=-\frac{m\cdot 1}{r^2}\vec{r^0}$ (终)

扫描全能王 创建

(续) 右端项的物理解释为：位于原点$O(0,0,0)$质量为m的质点，对位于点$M(x,y,z)$且质量为1的质点的引力：该引力的大小与质量的乘积成正比，而与它们的距离平方成反比。且这引力的方向由点M指向原点。称 $\nabla\left(\frac{m}{r}\right) = \frac{m\cdot 1}{r^2}(-\vec{r})$ 为引力场，而称 $\frac{m}{r}$ 为对应的引力势函数。

(三) 作业：ex9.12/21, 22; 23; 24; 36/(2),(5); 38、

(四) 第8讲：多元函数微分学的几何应用 (2023.3.22)、

注：方向导数：directional derivative
梯度(陡度)：gradient

扫描全能王 创建