正定二次型

回忆

设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵当且仅当对任意的非零列向量 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$, 有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} > 0$. 此时, 我们将之简记为 $\boldsymbol{A} > 0$.

在这一节中, 我们所讨论的矩阵都约定为实矩阵.

定理 1

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵, 则以下几条等价:

1. $\boldsymbol{A} > 0$;
2. $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数 $r = n$, 即 $\boldsymbol{A}$ 的相合标准形中主对角元全大于零;
3. $\boldsymbol{A}$ 的负惯性指数 $s = 0$ 且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = n$;
4. $\boldsymbol{A}$ 相合于单位方阵, 即存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}$;
5. 存在可逆上三角矩阵 $\boldsymbol{R}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R}$;[a]
6. $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 (必为实数) 皆大于零;
7. 存在可逆上三角矩阵 $\boldsymbol{R}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}$, 其中 $\boldsymbol{R}$ 的对角线上的元素都是 1, 而 $\boldsymbol{D}$ 为对角矩阵, 其对角元素均为正的.

---

[a] 这称为正定矩阵的楚列斯基分解 (Cholesky decomposition).

在第七章中，我们曾提到：有限维欧氏空间的内积在任何一组基下的矩阵都是实对称的正定矩阵；反过来，给定一个 n 维实线性空间 V 和一个 n 阶的实对称正定矩阵 $\boldsymbol{A}$，那么我们可以赋予 V 以内积结构，使得该内积在某组基下的矩阵为指定的 $\boldsymbol{A}$。下面，我们再给一个相关的结果。

推论 2

设 V 为 n 维欧氏空间，$\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为正定矩阵。那么存在 V 的基 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ 使得内积在这组基下的度量矩阵为 $\boldsymbol{G}$。

定理 3

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵.

1. 设 $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶可逆方阵, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 则 $\boldsymbol{A}>0$ 当且仅当 $\boldsymbol{B}>0$.
2. 若 $\boldsymbol{A}>0$, 则 $\det(\boldsymbol{A})>0$ 且 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})>0$.
3. 若 $\boldsymbol{A}>0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是实对称的正定方阵.

例 4

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆实对称矩阵. 证明: $\boldsymbol{A}$ 是正定的充要条件是对于任意的同阶正定矩阵 $\boldsymbol{B}$, 有 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})>0$.

定理 5

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶实对称矩阵，其中 $\boldsymbol{A}$ 正定．则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}_n$，而 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$ 为对角阵．特别地，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可以同时相合对角化．

例 6

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶实对称的正定阵，若 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ 正定，证明：$\boldsymbol{B}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定阵．

例 7

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶实对称阵，且 $\boldsymbol{A}$ 正定．证明：当实数 t 充分大时，$t\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 也是正定阵．

定义 8

对于二次型 $Q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵, 则称 Q 为正定的 (*positive definite*).

例 9

$Q_1(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 是正定的二次型, 而当 $r<n$ 时,
$Q_2(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_r^2$ 不是正定的二次型, 这是因为
$Q(0,0,\dots,0,1)=0$.

推论 10

二次型经过可逆的线性变换, 其正定性不变.

研究二次型的正定性就是研究其对应矩阵的正定性，与之相关的最实用的条件是以下的定理.

定理 11

n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式均大于零，即对任意的 $r = 1, 2, \ldots, n$ 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0.$$

(注意：这儿只需验证 n 个子阵的行列式，不是所有的主子式.)

例 12

判断二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是否正定.

对上面的定理的必要性部分的证明稍作修改, 我们不难看出如下的结果.

推论 13

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶正定的实对称矩阵, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq n$, 那么由 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 行第 $i_1, i_2, \ldots, i_r$ 列元素构成的 r 阶主子阵 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}$ 是一个 r 阶的正定矩阵. 特别地, 它的行列式是正的.

例 14

若 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 为正定的实对称矩阵, 证明: $\det(\boldsymbol{A}) \leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

例 15

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称正定阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 为对称正定阵的充要条件是 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.