线性代数 (B1) 第五次作业

请于 2023 年 4 月 11 日周二上课前在教室里交.

补充习题可视作思考题, 正常情况下不作要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

2023 年 4 月 4 日布置的作业

教材习题. P114-115: #21, #26(1), #34.

补充习题 1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots\ a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

求 $\det(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})$, 其中 $\lambda \in F$ 为标量.

补充习题 2. 在这里, 验证 Laplace 展开定理的一个特殊形式 (有困难的同学可以参考教材上的定理 4.3.1). 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, $1 < k \le n$. 对任意的 $1 \le i < j \le n$, 记 D_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 删去第 $1, k$ 行, 并删去第 i, j 列后得到的 $n-2$ 阶方阵的行列式. 证明:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{1\le i<j\le n} (-1)^{1+k+i+j} \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{ki} & a_{kj} \end{vmatrix} D_{ij}. \tag{1}$$

补充习题 3 (本题要求所有同学都完成)**.** 在这里, 再考虑 Laplace 展开定理的另外一种特殊形式. 事实上, Laplace 展开定理的 (复杂) 证明就是以讨论形如这样的结果开始的. 对于下面的分块矩阵, 证明相应的行列式公式, 其中 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times m}$, $\boldsymbol{D} \in F^{n\times n}$, $\boldsymbol{C} \in F^{n\times m}$, $\boldsymbol{B} \in F^{m\times n}$.

(i) $\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \det(\boldsymbol{A}).$ (ii) $\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \det(\boldsymbol{D}).$

(iii) $\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{D}) = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}.$

(提示: 在前两小问里分别对最后一行和第一行作展开, 在第三小问里可以利用前两小问的矩阵的乘法. 第三小问的公式要求熟记.)

补充习题 4. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有 2 阶代数余子式之和.

补充习题 5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 n 阶反对称方阵. 若 n 为奇数, 验证 $\boldsymbol{A}^*$ 是一个对称矩阵; 若 n 为偶数, 验证 $\boldsymbol{A}^*$ 是一个反对称矩阵.

2023 年 4 月 6 日布置的作业

教材习题. P115: #25, #27, #29, #31(1), #32, #35(2)(3)(4).