例题 20.3.3 通过代换 $x=t, y=\dfrac{t}{1+tu}, z=\dfrac{t}{1+tv}$, 试把方程

$$x^2 z_x + y^2 z_y = z^2 \tag{20.17}$$

变为以 v 为因变量, t, u 为自变量的形式.

分析 题目的意思是有一个函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 (20.17), 作自变量代换

$$x=t, \quad y=\frac{t}{1+tu} \tag{20.18}$$

以及因变量代换

$$z=\frac{t}{1+tv} \tag{20.19}$$

得到函数 $v=v(t,u)$. 求 $v=v(t,u)$ 满足的方程.

解 1 直接从关系式 (20.19) 出发求 z_x 和 z_y:

$$z_x=\left(\frac{t}{1+tv}\right)_t t_x+\left(\frac{t}{1+tv}\right)_v (v_t t_x+v_u u_x), \tag{20.20}$$

$$z_y=\left(\frac{t}{1+tv}\right)_t t_y+\left(\frac{t}{1+tv}\right)_v (v_t t_y+v_u u_y). \tag{20.21}$$

由 (20.18) 得

$$t=x,\quad u=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}.$$

于是

$$t_x=1,\qquad t_y=0,$$

$$u_x=\frac{1}{x^2},\qquad u_y=-\frac{1}{y^2}.$$

将它们代入 (20.20), (20.21), 得到

$$z_x=\left(\frac{t}{1+tv}\right)_t+\left(\frac{t}{1+tv}\right)_v\left(v_t+\frac{1}{x^2}v_u\right),$$

$$z_y=-\left(\frac{t}{1+tv}\right)_v\frac{1}{y^2}v_u.$$

将以上式子代入 (20.17), 得到

$$x^2\left[\left(\frac{t}{1+tv}\right)_t+\left(\frac{t}{1+tv}\right)_v v_t\right]=z^2.$$

整理得

$$v_t=0.$$

□

解 2 从 (20.19) 中解出 v 得

$$v=\frac{1}{z}-\frac{1}{t},$$

于是

$$v_t=-\frac{1}{z^2}\left(z_x x_t+z_y y_t\right)+\frac{1}{t^2}, \tag{20.22}$$

$$v_u=-\frac{1}{z^2}\left(z_x x_u+z_y y_u\right). \tag{20.23}$$

由 (20.18) 得

$$x_t=1,\quad x_u=0,$$

$$y_t=\frac{1}{(1+tu)^2},\quad y_u=-\frac{t^2}{(1+tu)^2}.$$

将它们代入 (20.22), (20.23) 得

$$v_t=-\frac{1}{z^2}\left[z_x+\frac{1}{(1+tu)^2}z_y\right]+\frac{1}{t^2},$$

$$v_u=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{t^2}{(1+tu)^2}z_y.$$

由此解出 z_x, z_y, 得

$$z_x = z^2\left(\frac{1}{t^2} - v_t\right) - \frac{z^2}{t^2}v_u,$$

$$z_y = \frac{z^2(1+tu)^2}{t^2}v_u.$$

将它们代入原方程, 得

$$v_t = 0.$$

□