内容回顾

定理 1

行列式函数满足以下的性质.

- ⓐ 设 $\boldsymbol{B}$ 由方阵 $\boldsymbol{A}$ 通过倍乘行的初等行变换得到: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\lambda r_i} \boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}_i(\lambda)\boldsymbol{A}$, 则 $\det(\boldsymbol{B}) = \lambda \det(\boldsymbol{A})$.
- ⓑ 若 $\boldsymbol{A}$ 的不同两行 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 对应成比例, 则 $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.
- ⓒ 设 $\boldsymbol{B}$ 由方阵 $\boldsymbol{A}$ 通过倍加的初等行变换得到: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\lambda r_j \to r_i} \boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)\boldsymbol{A}$, 则 $\det(\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A})$.
- ⓓ 设 $\boldsymbol{B}$ 由方阵 $\boldsymbol{A}$ 通过交换行的初等行变换得到: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_j \leftrightarrow r_i} \boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}_{ij}\boldsymbol{A}$, 则 $\det(\boldsymbol{B}) = -\det(\boldsymbol{A})$.
- ⓔ 这些性质若改成相应的列变换也成立.

定理 2

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为同阶的方阵，则 $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$. 特别地，$\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{BA})$.

推论 3

a. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \det(\boldsymbol{A})^{-1}$.
b. 对于同阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，我们有 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I} \Leftrightarrow \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$.
c. $\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})$.
d. 行列式可以按照任意行展开，也可以按照任意列展开.

行列式的全展开

1. 考察由两两不同的实数构成的一个有序数组 $s = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, 并称之为一个排列.
2. 对于该 s, 若 $i < j$ 而 $a_i > a_j$, 则数对 (a_i, a_j) 称为 (相对于 s 的) 一个逆序.
3. s 的逆序的个数称为 s 的逆序数, 记作 $\tau(s)$.

1. 考察由两两不同的实数构成的一个有序数组 $s = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, 并称之为一个排列.
2. 对于该 s, 若 $i < j$ 而 $a_i > a_j$, 则数对 (a_i, a_j) 称为 (相对于 s 的) 一个逆序.
3. s 的逆序的个数称为 s 的逆序数, 记作 $\tau(s)$.

1. 考察由两两不同的实数构成的一个有序数组 $s = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 并称之为一个排列.
2. 对于该 s, 若 $i < j$ 而 $a_i > a_j$, 则数对 (a_i, a_j) 称为 (相对于 s 的) 一个逆序.
3. s 的逆序的个数称为 s 的逆序数, 记作 $\tau(s)$.

定理 4

设方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 则行列式可以对称地按列的自然顺序展开成

$$\det(\boldsymbol{A})=\sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)\in\mathcal{S}_n}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\ldots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

还可以对称地按列的自然顺序展开成

$$\det(\boldsymbol{A})=\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in\mathcal{S}_n}(-1)^{\tau(i_1,i_2,\ldots,i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}.$$

Cramer 法则

之前我们已经引入了方阵的代数余子式 A_{ij} 的概念. 对于方阵 $\boldsymbol{A}$, 我们定义 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 (adjoint matrix) 为

$$\mathrm{adj}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^* := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots\cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots\cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots\cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

请特别注意其下标的排列顺序. 特别地, $\boldsymbol{A}^*$ 的第 (i,j) 元素为 $\boldsymbol{A}$ 的第 (j,i) 元素对应的代数余子式 A_{ji}. 不难看出

$$(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{\mathsf{T}}.$$

定理 5

对于方阵 $\boldsymbol{A}$, 我们有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{I}_n$.

定理 6

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \cdot \boldsymbol{A}^*$.

推论 7

对于 $n \geq 2$, 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 则 $\det(\boldsymbol{A}^*) = \det(\boldsymbol{A})^{n-1}$.

定理 5

对于方阵 $\boldsymbol{A}$, 我们有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{I}_n$.

定理 6

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \cdot \boldsymbol{A}^*$.

推论 7

对于 $n \geq 2$, 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 则 $\det(\boldsymbol{A}^*) = \det(\boldsymbol{A})^{n-1}$.

定理 5

对于方阵 $\boldsymbol{A}$, 我们有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{I}_n$.

定理 6

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \cdot \boldsymbol{A}^*$.

推论 7

对于 $n \geq 2$, 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 则 $\det(\boldsymbol{A}^*) = \det(\boldsymbol{A})^{n-1}$.

2023 年 4 月 6 日

定理 8 (Cramer 法则)

若 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 为可逆矩阵, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解. 该解满足 $x_i = |\boldsymbol{A}_i|/|\boldsymbol{A}|$, 其中 $\boldsymbol{A}_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列换成 $\boldsymbol{b}$ 后得到的新矩阵.

例

设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是互不相同的数. 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + \cdots + a_1^{n-1} x_n = 1, \\ x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_2^{n-1} x_n = 1, \\ \qquad \vdots \\ x_1 + a_n x_2 + \cdots + a_n^{n-1} x_n = 1. \end{cases}$$

初等变换

定理 9

对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 存在一系列的 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\ldots,\boldsymbol{P}_s$ 和 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\ldots,\boldsymbol{Q}_t$ 使得

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

问题: 这儿的 r 是什么?

推论 10

对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

定理 9

对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 存在一系列的 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\ldots,\boldsymbol{P}_s$ 和 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\ldots,\boldsymbol{Q}_t$ 使得

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

问题: 这儿的 r 是什么?

推论 10

对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

定理 9

对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，存在一系列的 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\ldots,\boldsymbol{P}_s$ 和 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\ldots,\boldsymbol{Q}_t$ 使得

$$\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

问题：这儿的 r 是什么？

推论 10

对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

求逆矩阵的初等变换法

考虑分块矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{等同于依次左乘了 } \boldsymbol{P}_1,\ldots,\boldsymbol{P}_s \\ \text{这些 } \boldsymbol{P}_i \text{ 是初等矩阵}}]{\text{假定存在一系列的初等行变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{X} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵. 那么 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{A}^{-1}$ 必可以通过这个方法求得. 另外, 对称地, 我们也可以有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{一系列的初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

考虑分块矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{等同于依次左乘了 } \boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_s \\ \text{这些 } \boldsymbol{P}_i \text{ 是初等矩阵}}]{\text{假定存在一系列的初等行变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{X} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵. 那么 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{A}^{-1}$ 必可以通过这个方法求得. 另外, 对称地, 我们也可以有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{一系列的初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

考虑分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{等同于依次左乘了 } P_1, \ldots, P_s \\ \text{这些 } P_i \text{ 是初等矩阵}}]{\text{假定存在一系列的初等行变换}} \begin{pmatrix} I_n & X \end{pmatrix},$$

其中 A 为 n 阶方阵. 那么 $X = A^{-1}$. 若 A 可逆, A^{-1} 必可以通过这个方法求得. 另外, 对称地, 我们也可以有

$$\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{一系列的初等列变换}} \begin{pmatrix} I_n \\ A^{-1} \end{pmatrix}.$$

考虑分块矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{等同于依次左乘了 } \boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_s \\ \text{这些 } \boldsymbol{P}_i \text{ 是初等矩阵}}]{\text{假定存在一系列的初等行变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{X} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵. 那么 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{A}^{-1}$ 必可以通过这个方法求得. 另外, 对称地, 我们也可以有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{一系列的初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

例

求可逆方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

例

考虑 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$ 的逆.

例

求可逆方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

例

考虑 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$ 的逆.

分块矩阵的初等行变换

1.
   i. 两个块行互换位置;
   ii. 用一个可逆矩阵左乘某一块行;
   iii. 用一个矩阵 P (不要求可逆)左乘某一块行加到另一块行上.
2. 分块矩阵的初等列变化.
3. 分块单位阵和分块初等矩阵.
4. 类似于之前的结果, 对于分块矩阵作初等行 (列) 变换等同于用一个相应的分块初等矩阵左乘 (右乘).

1.
   i. 两个块行互换位置;
   ii. 用一个可逆矩阵左乘某一块行;
   iii. 用一个矩阵 P (不要求可逆)左乘某一块行加到另一块行上.
2. 分块矩阵的初等列变化.
3. 分块单位阵和分块初等矩阵.
4. 类似于之前的结果, 对于分块矩阵作初等行 (列) 变换等同于用一个相应的分块初等矩阵左乘 (右乘).

1. 1. 两个块行互换位置;
   2. 用一个可逆矩阵左乘某一块行;
   3. 用一个矩阵 P (不要求可逆)左乘某一块行加到另一块行上.
2. 分块矩阵的初等列变化.
3. 分块单位阵和分块初等矩阵.
4. 类似于之前的结果, 对于分块矩阵作初等行 (列) 变换等同于用一个相应的分块初等矩阵左乘 (右乘).

1.
   i. 两个块行互换位置;
   ii. 用一个可逆矩阵左乘某一块行;
   iii. 用一个矩阵 P (不要求可逆)左乘某一块行加到另一块行上.
2. 分块矩阵的初等列变化.
3. 分块单位阵和分块初等矩阵.
4. 类似于之前的结果, 对于分块矩阵作初等行 (列) 变换等同于用一个相应的分块初等矩阵左乘 (右乘).

1.
   1. 两个块行互换位置;
   2. 用一个可逆矩阵左乘某一块行;
   3. 用一个矩阵 P (不要求可逆)左乘某一块行加到另一块行上.
2. 分块矩阵的初等列变化.
3. 分块单位阵和分块初等矩阵.
4. 类似于之前的结果, 对于分块矩阵作初等行 (列) 变换等同于用一个相应的分块初等矩阵左乘 (右乘).

1.
   1. 两个块行互换位置;
   2. 用一个可逆矩阵左乘某一块行;
   3. 用一个矩阵 P (不要求可逆)左乘某一块行加到另一块行上.
2. 分块矩阵的初等列变化.
3. 分块单位阵和分块初等矩阵.
4. 类似于之前的结果, 对于分块矩阵作初等行 (列) 变换等同于用一个相应的分块初等矩阵左乘 (右乘).

1.
   1. 两个块行互换位置;
   2. 用一个可逆矩阵左乘某一块行;
   3. 用一个矩阵 P (不要求可逆)左乘某一块行加到另一块行上.
2. 分块矩阵的初等列变化.
3. 分块单位阵和分块初等矩阵.
4. 类似于之前的结果, 对于分块矩阵作初等行 (列) 变换等同于用一个相应的分块初等矩阵左乘 (右乘).

例

在可逆的条件下求 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$ 的逆.

例

研究 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$.

1. 对于分块矩阵的倍加行 (列) 操作不改变相应矩阵的行列式.
2. 对于分块矩阵的另外两个类型的初等变换呢?
3. 若 $\boldsymbol{A}_{11}$ 为方阵, $\boldsymbol{A}_{22}$ 为方阵, 且 $\boldsymbol{A}_{11}$ 可逆, 那么我们Schur 行列式公式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_{11}| \cdot \left| -\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{22} \right|.$$

例

研究 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$.

1. 对于分块矩阵的倍加行 (列) 操作不改变相应矩阵的行列式.
2. 对于分块矩阵的另外两个类型的初等变换呢?
3. 若 A_{11} 为方阵, A_{22} 为方阵, 且 A_{11} 可逆, 那么我们Schur 行列式公式

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}| \cdot \left| -A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22} \right|.$$

例

研究 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$.

1. 对于分块矩阵的倍加行 (列) 操作不改变相应矩阵的行列式.
2. 对于分块矩阵的另外两个类型的初等变换呢?
3. 若 $\boldsymbol{A}_{11}$ 为方阵, $\boldsymbol{A}_{22}$ 为方阵, 且 $\boldsymbol{A}_{11}$ 可逆, 那么我们Schur 行列式公式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_{11}| \cdot \left| -\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{22} \right|.$$

例

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 证明:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| \cdot |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}| .$$

例

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 为 4 个 n 阶复方阵, 满足 $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA}$. 证明:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = \left|\boldsymbol{AD} - \boldsymbol{CB}\right|.$$