第六周作业参考

王睿、胡铁宁

2023 年 4 月 18 日

目录

一点说明

(i) 作业讲义部分题过程可能有省略。如对作业仍有疑问可以在群里或答疑课上讨论。

(ii) **作业讲义会随时间更新。**

(iii) 请及时核对自己在 BB 系统里的分数，如有问题请向对应的助教反馈。

(iv) 附录里的内容仅供有兴趣的同学参考，有可能涉及之后才会学习或课外的知识，不要求在现阶段掌握。

(v) 讲义最好用电脑打开，文档内置了链接功能，复习或查看指定的作业很方便。

成绩说明：成绩公式为

$$\text{score}=\begin{cases}10-k\cdot\max\{n-n_0,0\} & \text{未迟交}\\ 5 & \text{迟交}\end{cases}$$

其中 n 为错题数，n_0 为容忍度；k 为系数，取决于当周作业的题量。第六周不考虑补充题共 9 题，$n=9$，考虑到一些同学出现了计算失误、笔误、抄错题目等等情况，$n_0=2$；$k=0.5$。对于一些不严格的证明，助教也会酌情给分。也意味着作业得到满分不代表作业没有问题，请认真查看自己的作业。

上述评分标准对每个助教都成立。

1　第五周作业

1.1　4 月 11 日布置的作业

1.1.1　教材习题 P116:36,37,39,40,42

习题 1 (教材习题 36). 计算下列矩阵的秩

$$(1)\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}(2)\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & -5 \\ -7 & 9 & -3 & 1 \\ 1 & -7 & -11 & 7 \\ -5 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}(3)\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{pmatrix}$$

解. 矩阵的秩在初等行列变换下不变。利用这一性质，可将其化为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的形式得到矩阵的秩。实际上化为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_r & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 即可，其中 $\boldsymbol{A}_r$ 为对角元非 0 的上三角阵。由于初等行列变换的选取方式不同，最终得到的矩阵也不同。这里只给出结果。

(1)3.

(2)2.

(3)3. □

习题 2 (教材习题 37). 对于 a, b 的各种取值，讨论实矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & b & 9 \end{pmatrix}$ 的秩。

解. 通过初等行列变换下，可将其化为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & b-6 & \\ & & a-6 \end{pmatrix}$ 的形式得到矩阵的秩。因此当 $a = 6, b = 6$ 时，矩阵的秩为 1；当 $a = 6, b \neq 6$ 或 $a \neq 6, b = 6$ 时，矩阵的秩为 2；当 $a \neq 6, b \neq 6$ 时，矩阵的秩为 3。 □

习题 3 (教材习题 39). 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，证明 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n \\ 1, & \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n-1 \\ 0, & \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \leq n-2 \end{cases}$

证明. 根据矩阵非零子式的最大阶数等于矩阵的秩，因此当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \leq n-2$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶子式为 0，因此 $\boldsymbol{A}^*$ 的每一项都是 0，故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^*) = 0$。

由于 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \leq \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$（书 P112 例 4.5.7），有 $\operatorname{rank}([\det \boldsymbol{A}]\, \boldsymbol{I}_n) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{AA^*}) \leq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A^*})$。当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n$ 时，有 $\det \boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{PI}_n\boldsymbol{Q}) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rank}([\det \boldsymbol{A}]\, \boldsymbol{I}_n) = n$，则 $n = \operatorname{rank}(\boldsymbol{AA^*}) \leq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A^*})$，由于 $\boldsymbol{A^*}$ 的阶数为 n，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^*) \leq n$，可知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^*) = n$。

类似地,利用 Sylvester 不等式,当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n-1$ 时,有 $\det \boldsymbol{A} = \det\left(\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}\right) = 0$，有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^*) - n \le \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*) = \operatorname{rank}([\det \boldsymbol{A}]\,\boldsymbol{I}_n) = 0 \Rightarrow \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^*) \le 1$，又由于 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n-1$ 代表存在 $n-1$ 阶的非零子式不为 0，因此 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^*) \ge 1$，即得 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^*) = 1$. □

习题 4 (教材习题 40). 设 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$，证明：线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) < n$。

证明. 后续证明不妨假设 $m \ge n$，这是由于当 $m < n$ 时，对 $(\boldsymbol{A};\boldsymbol{0})$ 组成的 $m \times n+1$ 阶矩阵使用 Gauss 消元法一定有 $r \le m < n$，且 $\forall i, d_i = 0$，说明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有多解，此时同时有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \le \min(m,n) = m < n$。

(i) 充分性：即证 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) < n \Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解。设 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r < n$ 表明可以分解成 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$，则 $\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，将 $\boldsymbol{Q}$ 分块，有 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_{11,r\times r} & \boldsymbol{Q}_{12,r\times n-r}\\ \boldsymbol{Q}_{21,n-r\times r} & \boldsymbol{Q}_{22,n-r\times n-r}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12}\\ \boldsymbol{Q}_{21} & \boldsymbol{Q}_{22}\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{1,r}\\ \boldsymbol{x}_{2,n-r}\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$。根据矩阵标准形的结论，$r < n$，可知 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{1,r}\\ \boldsymbol{x}_{2,n-r}\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ 有非零解，也对应 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解。

(ii) 必要性：即证 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) < n \Leftarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解。$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解说明 $(\boldsymbol{A};\boldsymbol{0})$ 化成的约化标准型可化为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{1,r'\times n}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，且 $r' < n$，初等行变换对应可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，初等行变换不改变矩阵的秩，因此 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{1,r'\times n}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix} \le r' < n$。综上，充分性和必要性都证明完成，即说明线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) < n$。

□

习题 5 (教材习题 42). 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n \times m$ 阶矩阵，证明

$$m + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix} = n + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$$

证明. 证明是很明显的，由于 $m = \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_m), n = \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_n)$，因此证明方法是把 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}$ 化为对角阵。

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} &= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA} \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA} \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_m) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}) = m + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} &= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_n) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB}) = n + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB})
\end{aligned}
$$

□

1.1.2 补充习题 1,2,3

习题 6 (补充习题 1). 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$，若 $n = 2$ 或 3，分别计算 $\det(\lambda \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A})$，并将结果表示成关于 λ 的多项式。

解. **这是一个非常重要的计算**。这里先不假设具体的 n 的值，考虑 $\boldsymbol{A}$ 写为行向量 $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n)$，单位向量为 $\boldsymbol{e}_i = (0, 0, \cdots, 1_i, \cdots, 0)$，满足 $\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = 1$。此时 $\det(\lambda \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A})$ 可以表示为

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}) &= \det(\boldsymbol{\xi}_1 + \lambda \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{\xi}_2 + \lambda \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n + \lambda \boldsymbol{e}_n) \\
&= \det(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 + \lambda \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n + \lambda \boldsymbol{e}_n) + \det(\lambda \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{\xi}_2 + \lambda \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n + \lambda \boldsymbol{e}_n) \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

通过对每个行向量的展开，可以将 $\det(\lambda \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A})$ 拆为 2^n 项，每一项都是 $a_k \lambda^k$ 的形式，对 λ 的相同指数项前的系数求和，其中关于 λ 的最高次项为 $\det(\lambda \boldsymbol{e}_1, \lambda \boldsymbol{e}_2, \cdots, \lambda \boldsymbol{e}_n) = \lambda^n \det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = \lambda^n$，因此 $\det(\lambda \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}) = \varphi(\lambda)$ **是关于 λ 的 n 次多项式**。

接下来考虑 λ^n 的系数，在行拆分得到的 2^n 项中，只有一项与 λ^n 有关，需要在每次拆分都选择含 λ 的项，因此 λ^n 的系数只由一项贡献：$\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = 1$，说明 λ^n 系数为 1；对 $k = n - 1$，其系数来源于每次拆分选择 $n - 1$ 次含 λ 的项，即 $\sum_{j=1}^{n} \det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_j, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} = \operatorname{tr} \boldsymbol{A}$；类似地，考虑 λ^{n-k}，其系数来源于每次拆分选择 $n - k$ 次含 λ 的项，即 $\sum_{1\le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n} \det(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{j_1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = \sum_{1\le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$；对 λ^0，其系数要求在每次拆分都不选含 λ 的项，因此其系数为 $\det(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n) = \det \boldsymbol{A}$。因此由 $\det(\lambda \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A})$ 得到的关于 λ 的 n 次多项式可

以写为

$$\begin{aligned}\det(\lambda \boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}) = \lambda^n &+ \left(\sum_{j=1}^{n} a_{jj}\right)\lambda^{n-1} \\ &+ \left(\sum_{1\le j_1<j_2\le n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_1 & j_2\end{pmatrix}\right)\lambda^{n-2}+\cdots \\ &+ \left(\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\right)\lambda^{n-k}+\cdots \\ &+ \det \boldsymbol{A}\end{aligned}$$

回到本题，对 $n=2$，容易看到

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{A}) = \lambda^2+(\operatorname{tr}\boldsymbol{A})\,\lambda+\det\boldsymbol{A}$$

对 $n=3$，有

$$\begin{aligned}\det(\lambda \boldsymbol{I}_3+\boldsymbol{A}) &= \lambda^3+(\operatorname{tr}\boldsymbol{A})\,\lambda^2+\left(\sum_{1\le j_1<j_2\le 3} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_1 & j_2\end{pmatrix}\right)\lambda+\det\boldsymbol{A} \\ &== \lambda^3+(\operatorname{tr}\boldsymbol{A})\,\lambda^2+(\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^*)\,\lambda+\det\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

□

习题 7 (补充习题 2). 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶复方阵, 证明以下关于伴随矩阵的等式:
(1)$(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$
(2)$(\boldsymbol{XAX}^{-1})^*=\boldsymbol{XA}^*\boldsymbol{X}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{X}$ 为可逆的 n 阶方阵
(3) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}^*$

证明. (1)

$$\begin{cases}\boldsymbol{ABB}^*\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}\left(\det(\boldsymbol{B})\boldsymbol{I}_n\right)\boldsymbol{A}^*=\det(\boldsymbol{B})\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}_n=\det(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{AB}(\boldsymbol{AB})^*=\det(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{I}_n\end{cases}$$

当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆时，容易看到 $(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$；当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 至少有一个不可逆时，可构造 $t\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}, t\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{B}$，由于 $|t\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}|, |t\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{B}|$ 是关于 t 的最高 n 次多项式，因此至多有 n 个零点，选择一个不包含零点的无穷序列，在序列上 $t\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}, t\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{B}$ 均可逆，因此有 $[(t\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A})(t\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{B})]^*=(t\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{B})^*(t\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A})^*$，等式两侧均是关于 t 的多项式，在 $t\to 0$ 时化为 $(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$。

(2)$(\boldsymbol{XAX}^{-1})^*=\left(\boldsymbol{X}^{-1}\right)^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}^*=|\boldsymbol{X}^{-1}|\boldsymbol{XA}^*|\boldsymbol{X}|\boldsymbol{X}^{-1}=\boldsymbol{XA}^*\boldsymbol{X}^{-1}$

(3) 假设 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BAB}^{-1}$，两边取伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\left(\boldsymbol{BAB}^{-1}\right)^*=\boldsymbol{BA}^*\boldsymbol{B}^{-1}\Rightarrow \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}^*$；对 $\boldsymbol{B}$ 不可逆的情况，可类似地构造 $t\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{B}$ 可逆序列取极限证明。 □

习题 8 (补充习题 3). (1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{BA}$ 可逆，求矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}$ 的逆矩阵
(2) 在 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AB}$ 可逆的条件下重新求上面的 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵。
(3) 证明：$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AB}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{BA}$ 可逆。

解. (1) 类似教材习题 42，有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$ 都可逆，左右取逆，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{-1} \end{pmatrix}$$

移项有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} & -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{-1} \\ -(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} & (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{-1} \end{pmatrix}$$

(2) 同样地

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

左右取逆，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

移项有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} & -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} \\ -\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} & \boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A} \end{pmatrix}$$

(3) 教材习题 25 已经证明过。设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，证明：

$$\det(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}) = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \det(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式得到第一个等式（可参考补充习题 3），同理：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}$$

两边同时取行列式得到第二个等式，因此有 $\det(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$。因此 $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow \det(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}) \neq 0 \Leftrightarrow \det(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 可逆。 □

1.2 4 月 13 日布置的作业

1.2.1 教材习题 P155:3(2),4,10(2,4),13,14,15,16,17

习题 9 (教材习题 3(2)). *在 F^4 中, 判断向量 $\boldsymbol{b}$ 能否写成 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 的线性组合. 这里, $\boldsymbol{a}_1 = (3, -5, 2, -4)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_2 = (-1, 7, -3, 6)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_3 = (3, 11, -5, 10)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b} = (2, -30, 13, -26)^{\mathrm{T}}$.*

解. 设 $\boldsymbol{b}$ 可以写成 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 的线性组合: $\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3$, 其中, $x_1, x_2, x_3 \in F$. 我们将其写成等价的矩阵方程:

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b},$$

即

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -5 & 7 & 11 \\ 2 & -3 & -5 \\ -4 & 6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -30 \\ 13 \\ -26 \end{pmatrix}.$$

求得其通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t - 1 \\ -3t - 5 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in F \text{ 为自由变量.}$$

于是我们可以看出, $\boldsymbol{b}$ 能写成 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 的线性组合. □

习题 10 (教材习题 4). *设 $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, 0, 0), \boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 0, 0), \boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 1, 0), \boldsymbol{a}_4 = (1, 1, 1, 1)$. 证明: F^4 中任何向量都可以写成 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 的线性组合, 且表示唯一.*

证明. 设 F^4 中任何向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 可以写成 $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + k_3\boldsymbol{a}_3 + k_4\boldsymbol{a}_4$, 其中 $k_1, k_2, k_3, k_4 \in F$. 将其写成等价的矩阵方程:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

不难看出上面的系数矩阵有行列式 1, 是可逆矩阵. 所以这个关于 k_1, k_2, k_3, k_4 的线性方程组有唯一解. 因此, F^4 中任何向量都可以写成 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 的线性组合, 且表示唯一. □

注 10.1. *我们可以把 F^4 推广到 F^n. 对 F^n 中 n 个给定的行 (列) 向量 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$, F^n 中任何向量都可以写成 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合且表示唯一, 当且仅当, 以向量 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 为行 (列) 向量组的方阵行列式非零. 证明方法与本题一样.*

习题 11 (教材习题 10(2)(4)). 判断下列向量组是否线性相关:

(i) $\boldsymbol{a}_1=(3,1,2,-4),\boldsymbol{a}_2=(1,0,5,2),\boldsymbol{a}_3=(-1,2,0,3)$;

(ii) $\boldsymbol{a}_1=(1,-1,0,0),\boldsymbol{a}_2=(0,1,-1,0),\boldsymbol{a}_3=(0,0,1,-1),\boldsymbol{a}_4=(-1,0,0,1)$.

解. (i) 我们知道, $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 以向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 为行向量组的矩阵的秩小于 3. 下面, 我们就将这个矩阵通过初等行列变换化为阶梯形:

$$\begin{pmatrix}3&1&2&-4\\1&0&5&2\\-1&2&0&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&5&2\\0&1&-13&-10\\0&2&5&5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&5&2\\0&1&-13&-10\\0&0&31&25\end{pmatrix}.$$

故上面的矩阵秩为 3, 从而向量组线性无关.

(ii) 与 (i) 类似, 把以 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 为行向量组的矩阵通过初等行列变换化为阶梯形:

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\-1&0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

故上面的矩阵秩为 3, 从而向量组线性相关. 事实上, 不需要上面的过程, 我们也可以直接观察到 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{0}$, 从而直接得出结论.

□

习题 12 (教材习题 13, 更改表述). 若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s\in F^n$ 线性无关, 而 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s,\boldsymbol{b}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{b}$ 可以表示成 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 的线性组合, 且表示唯一.

证明. 我们只需按照定义证明.

因为 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s,\boldsymbol{b}$ 线性相关, 所以存在不全为零的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s,\mu\in F$, 使得 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 假如 $\mu=0$, 则 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 不全为零且 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$, 这与 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 线性无关矛盾. 所以 $\mu\neq 0$. 于是 $\boldsymbol{b}=-\mu^{-1}\lambda_1\boldsymbol{a}_1-\cdots-\mu^{-1}\lambda_s\boldsymbol{a}_s$. 因此, $\boldsymbol{b}$ 可以表示成 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 的线性组合.

再假设有两种线性表示: $\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{a}_s=l_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+l_s\boldsymbol{a}_s$. 从而 $(k_1-l_1)\boldsymbol{a}_1+\cdots+(k_s-l_s)\boldsymbol{a}_s=\boldsymbol{0}$. 再由 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 线性无关可得 $k_i-l_i=0$ 即 $k_i=l_i,i=1,\cdots,s$. 因此表示唯一. □

习题 13 (教材习题 14). 证明向量表示基本定理: 设 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n\in F^n$ 线性无关, 则任意向量 $\boldsymbol{b}\in F^n$ 可以表示为 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的线性组合, 且表示唯一.

证明. 由习题12, 我们只需证明 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}$ 线性相关. 更一般地, 下面只需对 F^n 中的任意 $n+1$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$, 证明它们线性相关. 现在, 我们利用线性方程组 (约化标准形) 的结论证明之.

我们要证明 F^n 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 线性相关, 只需证明存在 F 中的 $n+1$ 个不全为零的数 $x_1, \cdots, x_n$ 使得 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \mathbf{0}$. 我们将其写成矩阵方程:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n+1})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

注意到上面的系数矩阵有 n 行 $n+1$ 列, 故其约化标准形中至多有 n 个主元, 于是至少有 1 个自由元. 所以这个矩阵方程至少有一个非零解, 即向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 线性相关.

综上, 本题得证. □

另证. 我们可以不使用线性代数的任何结论证明: F^n 中的任意 $n+1$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 线性相关.

使用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时, 设 $a, b \in F$, 若 $a = 0$, 则 $1a + 0b = 0$; 若 $a \neq 0$, 则 $ba + (-a)b = 0$. 故 a, b 线性相关, $n = 1$ 时结论得证.

假设 n 时结论成立, 接下来考虑 $n+1$ 的情形, 即证: F^{n+1} 中的任意 $n+2$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n+2}$ 线性相关. 设

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_i &= (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}, a_{i,n+1}), \\ \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_i &= (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), \quad i = 1, 2, \cdots, n+2. \end{aligned}$$

则由归纳假设知, 存在不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}$ 以及不全为零的数 $\mu_1, \cdots, \mu_n, \mu_{n+2}$, 使得 $\lambda_1\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \lambda_2\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \cdots + \lambda_{n+1}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1} = \mathbf{0}$ 以及 $\mu_1\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \cdots + \mu_n\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_n + \mu_{n+2}\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{n+2} = \mathbf{0}$.(不妨设 λ_{n+1} 不为零) 又由 $n = 1$ 的情形知 $\lambda_1 a_{1,n+1} + \lambda_2 a_{2,n+1} + \cdots + \lambda_{n+1}a_{n+1,n+1}$ 与 $\mu_1 a_{1,n+1} + \cdots + \mu_n a_{n,n+1} + \mu_{n+2}a_{n+2,n+1}$ 线性相关, 故存在两个不全为零的数 λ, μ, 使得 $\lambda(\lambda_1 a_{1,n+1} + \lambda_2 a_{2,n+1} + \cdots + \lambda_{n+1}a_{n+1,n+1}) + \mu(\mu_1 a_{1,n+1} + \cdots + \mu_n a_{n,n+1} + \mu_{n+2}a_{n+2,n+1}) = 0$. 综上, 我们有 $\lambda(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_{n+1}\boldsymbol{\alpha}_{n+1}) + \mu(\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \mu_n\boldsymbol{\alpha}_n + \mu_{n+2}\boldsymbol{\alpha}_{n+2}) = \mathbf{0}$ 并且其中每个 α_i 前的系数不全为零. 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n+2}$ 线性相关. □

习题 14 (教材习题 15). *证明: 非零向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是, 每个 $\boldsymbol{\alpha}_i (1 < i \leqslant s)$ 都不能用它前面的向量线性表示.*

证明. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则其中任何一个向量都不能被其它向量线性表示. 由此可得必要性.

再反证充分性. 假设每个 $\boldsymbol{\alpha}_i (1 < i \leqslant s)$ 都不能用它前面的向量线性表示, 而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关. 则存在不全为零的数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$. 设 λ_k 为最后一个不为零的数, 则 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{0}$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_k = -\lambda_k^{-1}\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 - \cdots - \lambda_k^{-1}\lambda_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$. 故 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 可以被前面的向量线性表示, 矛盾. 充分性得证. □

习题 15 (教材习题 16). 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s$, 如果 $\lambda_i\neq 0$, 则用 $\boldsymbol{\beta}$ 代替 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 后, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证明. 我们只需利用定义. 设 F 中的 s 个数 $\mu_1,\cdots,\mu_s$ 满足 $\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\mu_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+\mu_i\boldsymbol{\beta}+\mu_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+\mu_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$. 把 $\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 代入这个等式, 得到

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant s,k\neq i}(\mu_i\lambda_k+\mu_k)\boldsymbol{\alpha}_k+\mu_i\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}. \tag{1}$$

又由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 故式(1)中的各系数均为零. 特别地, 由 $\mu_i\lambda_i=0$ 而 $\lambda_i\neq 0$ 可得 $\mu_i=0$. 于是式(1)化为

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant s,k\neq i}\mu_k\boldsymbol{\alpha}_k=0.$$

而上式的各系数又为零, 故 $\mu_k=0,k=1,\cdots,s$. 因此, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关. □

注 15.1. 事实上, 本题的结果可以加强: 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta}_i=\sum_{j=1}^{s}\lambda_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j$, $i=1,\cdots,s$, 其中, $(\lambda_{ij})\in F^{s\times s}$ 的行列式不为 0. 则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关.

习题 16 (教材习题 17). 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示, 则 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 也线性无关.

证明. 用反证法. 假设 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关, 则可不妨设 $\boldsymbol{\beta}_r$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r-1}$ 线性表示. 又由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示, 并注意到向量组的线性表示具有传递性, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r-1}$ 线性表示. 故可设

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{j=1}^{r-1}\lambda_{ij}\boldsymbol{\beta}_j,\quad i=1,\cdots,s. \tag{2}$$

我们想要推出矛盾 (即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关), 故只需证明下面的方程(3)有非零解.

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}. \tag{3}$$

把(2)代入(3)可得

$$(\lambda_{11}x_1+\cdots+\lambda_{r1}x_r)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(\lambda_{1,r-1}x_1+\cdots+\lambda_{r,r-1}x_r)\boldsymbol{\beta}_{r-1}=\mathbf{0}. \tag{4}$$

又注意到齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda_{11}x_1+\cdots+\lambda_{r1}x_r=0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ \lambda_{1,r-1}x_1+\cdots+\lambda_{r,r-1}x_r=0.\end{cases}$$

有非零解 (因为系数矩阵的行数小于列数, 从约化标准形中可以看出有自由元). 故方程(4)即(3)有非零解. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 矛盾. 习题得证. □

致谢

感谢各助教对本文档的校对工作和内容补充，感谢申伊塃老师以及同学对助教工作的支持。