第三周作业参考

王睿、胡铁宁

2023 年 3 月 28 日

目录

一点说明

(i) 作业讲义部分题过程可能有省略。如对作业仍有疑问可以在群里或答疑课上讨论。

(ii) **作业讲义会随时间更新。**

(iii) 请及时核对自己在 BB 系统里的分数，如有问题请向对应的助教反馈。

(iv) 附录里的内容仅供有兴趣的同学参考，有可能涉及之后才会学习或课外的知识，不要求在现阶段掌握。

(v) 讲义最好用电脑打开，文档内置了链接功能，复习或查看指定的作业很方便。

成绩说明：本周作业共 17 题 (每个小问算一题，证明有多个子问题算一题)，目前打算给 3 的容忍度。错 4-5 道题扣 0.5 分，错 6-7 道题扣 1 分，依此类推。对于一些不严格的证明，助教也会酌情给分。也意味着作业得到满分不代表作业没有问题，请认真查看自己的作业。

上述评分标准对每个助教都成立。

1　第三周作业

1.1　3 月 21 日布置的作业

习题 1 (教材 P113 习题 6). *举出满足下列条件的 2 阶实方阵* $\boldsymbol{A}$

$$(1)\ \boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};\ (2)\ \boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix};\ (3)\ \boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\text{且}\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{I}$$

解. 假设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，代入计算即得

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ca+dc&cb+d^2\end{pmatrix}$$

求解 4 个方程，即得

$$(1)\ \boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\varnothing$$

$$(2)\ \boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{A}=\pm\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

对

$$(3)\ \boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\text{且}\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{I}$$

化简有

$$\begin{cases}a^3+2abc+bcd=1\\b\left(a^2+ad+bc+d^2\right)=0\\c\left(a^2+ad+bc+d^2\right)=0\\abc+2bcd+d^3=1\end{cases}$$

若 $b=0$ 或 $c=0$，则可推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，可知 $a^2+ad+bc+d^2=0$，将 $bc=-(a^2+ad+d^2)$ 代回第一行或第四行，有 $(a+d)^3=-1$，保留 a,b 作为变量，可得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\-\frac{a^2+a+1}{b}&-1-a\end{pmatrix}$$

□

习题 2 (教材 P113 习题 7). *计算下列方阵的 k 次方幂，$k\geq 1$：*

$$(1)\ \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix};\ (2)\ \begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix};\ (3)\ \begin{pmatrix}1 & a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$(4)\ \begin{pmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 1\end{pmatrix}_{n\times n};\ (5)\ \begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}$$

解. (1) 计算矩阵的平方即得

$$\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}$$

，使用归纳法很容易得到原矩阵的 k 次幂为

$$\begin{pmatrix}\cos k\theta & \sin k\theta\\ -\sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}$$

事实上这个矩阵对应了 2 维平面上的逆时针旋转 $-\theta$（在日后基本不会涉及顺时针旋转），k 次幂对应旋转 k 次，相当于 1 次旋转了 $-k\theta$。

(2) 有一个非常取巧的方法，可以注意到 (2) 与 (1) 式形式相同，在 a, b 不同时为 0 时，

$$\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{pmatrix}$$

从而把 (2) 问题转化为 (1) 问题，而当 $a = b = 0$ 时结果显然是零矩阵。当然还可以使用

$$\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix} = a\boldsymbol{I} + b\boldsymbol{J}, \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

拆为单位阵和另一矩阵的和，且 $\boldsymbol{IJ} = \boldsymbol{JI} = \boldsymbol{J}$。因此在计算 $(a\boldsymbol{I} + b\boldsymbol{J})^k$ 时只需计算 $\boldsymbol{J}^r$，写出 $\boldsymbol{J}^r$ 的前几项

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{J}^2 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = -\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}^3 = (-\boldsymbol{I})\boldsymbol{J} = -\boldsymbol{J}, \boldsymbol{J}^4 = (-\boldsymbol{I})^2 = \boldsymbol{I}$$

因此

$$(a\boldsymbol{I} + b\boldsymbol{J})^k = \sum_{r=0}^{k} C_k^r\,(a\boldsymbol{I})^r\,(b\boldsymbol{J})^{k-r}$$

$$= \sum_{r=0}^{k} C_k^r a^r b^{k-r}\boldsymbol{I}\boldsymbol{J}^{k-r} = \sum_{r=0}^{k} C_k^r a^r b^{k-r}\boldsymbol{I}\boldsymbol{J}^{k-r \bmod 4}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

使用

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{J}, \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

拆为单位阵和另一矩阵的和，且 $\boldsymbol{IJ} = \boldsymbol{JI} = \boldsymbol{J}$。在计算 $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J})^k$ 时只需计算 $\boldsymbol{J}^r$，写出 $\boldsymbol{J}^r$ 的前几项

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{J}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{J}^3 = \boldsymbol{O}$$

因此

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J})^k = \sum_{r=0}^{k} C_k^r \boldsymbol{I}^r \boldsymbol{J}^{k-r} = \sum_{r=0}^{k} C_k^r \boldsymbol{I} \boldsymbol{J}^{k-r}$$

$$= C_k^{k-2} \boldsymbol{J}^2 + C_k^{k-1} \boldsymbol{J}^1 + C_k^k \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & ka & k & k(k-1)a \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & ka \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

使用

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = \boldsymbol{I}_{n\times n} + \boldsymbol{J}_{n\times n}, \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

拆为单位阵和另一矩阵的和，且 $\boldsymbol{IJ} = \boldsymbol{JI} = \boldsymbol{J}$。在计算 $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J})^k$ 时只需计算 $\boldsymbol{J}^r$，写出 $\boldsymbol{J}^r$ 的前几项可以发现每次乘 $\boldsymbol{J}$ 相当于将 1 的斜线向右上移动一格，因此使用归纳法证明。记 $\boldsymbol{J}^r$ 的矩阵元为 $c_{r,ij}$，满足

$$
c_{r,ij}=\begin{cases}1, & j=i+r\\ 0, & \text{others}\end{cases} \tag{1}
$$

则 $\boldsymbol{J}^{r+1}$ 的矩阵元为 $c_{r+1,ij}$ 满足

$$
c_{r+1,ij}=\sum_{k=1}^{n}c_{r,ik}c_{1,kj}=c_{r,i(i+r)}c_{1,(i+r)j}=\begin{cases}1, & j=i+r+1\\ 0, & \text{others}\end{cases}
$$

因此对 $r=1$，式(1)成立，可由归纳法知对 $\boldsymbol{J}^r$，式(1)也成立；另一方面，当 $r\geq n$ 时，不存在 i,j,s.t. $j=r+i\leq n$，此时 $\boldsymbol{J}^r$ 的每个矩阵元都为 0，即知 $\boldsymbol{J}^r=\boldsymbol{O},r\geq n$。回到本题，

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{J})^k&=\sum_{r=0}^{k}C_k^r\boldsymbol{I}^r\boldsymbol{J}^{k-r}=\sum_{r=0}^{k}C_k^r\boldsymbol{I}\boldsymbol{J}^{k-r}\\
&=C_k^k\boldsymbol{I}+C_k^{k-1}\boldsymbol{J}^1+C_k^{k-2}\boldsymbol{J}^2+\cdots+C_k^0\boldsymbol{J}^k
\end{aligned}
$$

$$
=\begin{cases}
\begin{pmatrix}
1 & C_k^{k-1} & C_k^{k-2} & \cdots & C_k^0 & & \\
 & 1 & C_k^{k-1} & C_k^{k-2} & \ddots & \ddots & \\
 & & 1 & C_k^{k-1} & C_k^{k-2} & \ddots & C_k^0\\
 & & & 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\
 & & & & \ddots & \ddots & C_k^{k-2}\\
 & & & & & \ddots & C_k^{k-1}\\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix} & k<n-1\\
\begin{pmatrix}
1 & C_k^{k-1} & C_k^{k-2} & \cdots & \cdots & C_k^{k-(n-1)}\\
 & 1 & C_k^{k-1} & C_k^{k-2} & \ddots & \vdots\\
 & & 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\
 & & & \ddots & \ddots & C_k^{k-2}\\
 & & & & \ddots & C_k^{k-1}\\
 & & & & & 1
\end{pmatrix} & k\geq n-1
\end{cases}
$$

(5)

$$
\begin{pmatrix}
a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\
a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n
\end{pmatrix}
$$

在上一次作业中，已经证明了

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

有

$$(\boldsymbol{AB})^k = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})^{k-1}\boldsymbol{B}$$

由于

$$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

即可得

$$(\boldsymbol{AB})^k = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})^{k-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^{k-1}\boldsymbol{B}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^{k-1}\boldsymbol{AB} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^{k-1}\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

□

同学作业点评 2.1. *在这道题中有不少同学计算了 $k = 1, 2, 3$ 的情形后直接写出了答案，这样不好，而应该使用数学归纳法或者其他严谨的方法证明之.*

习题 3 (教材 P114 习题 8)**.** 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称方阵，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$，证明 $\boldsymbol{AB}$ 也是对称方阵。

证明. 证明 $\boldsymbol{AB}$ 是对称方阵，就是证明 $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{AB}$，为此只需考虑

$$(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{AB}$$

从左至右等号分别使用了矩阵转置的性质、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 自身对称、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可交换。 □

习题 4 (教材 P114 习题 9). 证明：两个 n 阶上（下）三角形方阵的乘积仍是上（下）三角形方阵。

证明. 对一个 n 阶上三角形方阵，矩阵元素满足

$$a_{ij} = \begin{cases} a'_{ij}, & j \geq i \\ 0, & j < i \end{cases}$$

设两个 n 阶上三角形方阵分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$，则有

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=i}^{j} a_{ik} b_{kj} = \begin{cases} c'_{ij}, & j \geq i \\ 0, & j < i \end{cases}$$

因此 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ 也是上 n 阶上三角形方阵，下三角形方阵证明同理。 □

习题 5 (补充习题 1). 计算

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

的幂 $\boldsymbol{J}^t (t \geq 1)$, 并找出与 $\boldsymbol{J}$ 乘法可交换的所有矩阵.

证明. 我们在习题 7(4) 已经给出了证明，这里只给出结果。记 $\boldsymbol{J}^t$ 的矩阵元为 $c_{t,ij}$，满足

$$c_{t,ij} = \begin{cases} 1, & j = i + t \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

假设与 $\boldsymbol{J}$ 乘法可交换的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，矩阵元为 a_{ij}，满足

$$\boldsymbol{JA} = \boldsymbol{AJ} \Leftrightarrow (\boldsymbol{JA})_{ij} = (\boldsymbol{AJ})_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} c_{1,ik} a_{kj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} c_{1,lj} \Rightarrow c_{1,i(i+1)} a_{(i+1)j} = a_{i(j-1)} c_{1,(j-1)j} \quad i \neq n, j \neq 1$$

$$\Leftrightarrow a_{(i+1)j} = a_{i(j-1)} \quad i \neq n, j \neq 1 \Leftrightarrow a_{ij} = a_{(i-1)(j-1)}$$

$i = n$ 时，有

$$(\boldsymbol{JA})_{nj} = (\boldsymbol{AJ})_{nj}, (\boldsymbol{JA})_{nj} = \sum_{k=1}^{n} c_{1,nk} a_{kj} = 0$$

$$0 = (\boldsymbol{AJ})_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{nl} c_{1,lj} = \begin{cases} a_{n(j-1)} & 1 < j \leq n \\ 0 & j = 1 \end{cases} \Rightarrow a_{nj} = \begin{cases} 0 & 1 \leq j \leq n-1 \\ a'_{nn} & j = n \end{cases}$$

$j = 1$ 时，有

$$(\boldsymbol{J}\boldsymbol{A})_{i1} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{J})_{i1}\,, (\boldsymbol{A}\boldsymbol{J})_{i1} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{1,k1} = 0$$

$$0 = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{A})_{i1} = \sum_{l=1}^{n} c_{1,il} a_{l1} = \begin{cases} a_{(i+1)1} & 1 \le i < n \\ 0 \quad i = n \end{cases} \quad \Rightarrow a_{i1} = \begin{cases} 0 & 2 \le i \le n \\ a'_{11} & i = 1 \end{cases}$$

考虑到 $a_{ij} = a_{(i-1)(j-1)}$，以及矩阵最后一行除 a_{nn} 外均为 0，可知矩阵是上三角阵；同时，上三角的部分沿斜线元素的值相同。考虑 J^r 的形式，可知与 $\boldsymbol{J}$ 乘法可交换的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A} = f(\boldsymbol{J})$，$f(\boldsymbol{J})$ 是关于 $\boldsymbol{J}$ 的矩阵多项式。 □

习题 6 (补充习题 2)**.** *若有矩阵* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$*，以及矩阵* $\boldsymbol{B}$*，使得* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$*，求出这个矩阵* $\boldsymbol{B}$ *(提示：直接求解，或者参考讲义中的注 4.2.25 (5) 中的处理方法，或者利用教材中例 4.2.7 给出的公式)。*

解. 直接求解相当于设 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$；讲义中的注 4.2.25 (5) 是使用 Gauss 消元法求解矩阵的逆，教材中例 4.2.7 给出的公式给出了求解二阶矩阵的方法，这里使用教材中给出的公式。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

将 $\boldsymbol{A}$ 代入左边，有

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \times 5 - (-2) \times (-2)} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

上述事实上需要先证明 A 是可逆矩阵，但另一方面，如果“恰好”找到了一个矩阵，左乘右乘原方阵都为单位阵，那也可以知道它是原方阵的逆矩阵。由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

□

1.2 3 月 23 日布置的作业

习题 7 (教材 P113 习题 2)**.** *证明：每个方阵都可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和的形式.*

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵. 我们取 $\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}), \boldsymbol{C} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$. 于是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{C}$, 并且 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$. 即我们将 $\boldsymbol{A}$ 表示成了一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和的形式. □

习题 8 (教材 P114 习题 14)**.** 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}^3+5\boldsymbol{A}^4-6\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{O}$. 证明:$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆, 并求 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$.

证明. 根据题目条件的形式, 我们可以构造多项式 $f(x)=-6x^5+5x^4+4x^3-3x^2-2x+1$. 通过带余除法[1], 我们可以得到 $f(x)=(-x+1)\left(6x^4+x^3-3x^2+2\right)-1$. 然后在上式中用 $\boldsymbol{A}$ 代入 x, 可得 $f(\boldsymbol{A})=(-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\left(6\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{I}\right)-\boldsymbol{I}=0$. 故 $\boldsymbol{I}=(-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\left(6\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{I}\right)$. 这就说明了 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆, 并且 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=6\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{I}$. □

同学作业点评 8.1. 有一些同学在将 $\boldsymbol{A}$ 代入多项式时没有把常数项 2 变成 $2\boldsymbol{I}$, 应避免这种“低级错误”.

习题 9 (教材 P114 习题 15(1))**.** 求解矩阵方程:

$$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}-2&-2&1\\1&4&-3\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-3&2&5\\-1&5&4\end{pmatrix}.$$

解. 由于我们更习惯把未知数放在右边做乘法, 故令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ 并对方程两边进行转置[2]:

$$\begin{pmatrix}-2&1&1\\-2&4&-1\\1&-3&1\end{pmatrix}\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\-1&2&5\\3&5&4\end{pmatrix}.$$

令上式中 $\boldsymbol{Y}$ 左边的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 等号右边的矩阵为 $\boldsymbol{B}$. 受到老师讲义注 4.2.25 (5) 中处理方法的启发, 我们可以进行如下操作: 对矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 经过一系列初等行变换转化为约化标准形 (实际上我们做的题中 $\boldsymbol{A}$ 通常可逆, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 可以化为 $(\boldsymbol{I},\boldsymbol{C})$ 的形式) 再写出解来. 这道题具体过程如下, 但不标注初等行变换的具体方式.

$$\begin{pmatrix}-2&1&1&2&-3&-1\\-2&4&-1&-1&2&5\\1&-3&1&3&5&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-3&1&3&5&4\\-2&1&1&2&-3&-1\\-2&4&-1&-1&2&5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-3&1&3&5&4\\0&-5&3&8&7&7\\0&-2&1&5&12&13\end{pmatrix}\longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix}1&-3&1&3&5&4\\0&1&-\frac{3}{5}&-\frac{8}{5}&-\frac{7}{5}&-\frac{7}{5}\\0&0&-\frac{1}{5}&\frac{9}{5}&\frac{46}{5}&\frac{51}{5}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-3&0&12&51&55\\0&1&0&-7&-29&-32\\0&0&1&-9&-46&-51\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-9&-36&-41\\0&1&0&-7&-29&-32\\0&0&1&-9&-46&-51\end{pmatrix}.$$

于是解得 $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}-9&-36&-41\\-7&-29&-32\\-9&-46&-51\end{pmatrix}$, 即原矩阵方程有唯一解 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-9&-7&-9\\-36&-29&-46\\-41&-32&-51\end{pmatrix}$. 在计算结束之后, 不妨把结果回代一下验证是否正确.

事实上, 这就是用增广矩阵解线性方程组的推广, 同学们在掌握计算的同时也要理解原理. □

[1]这里并没有展示带余除法的详细过程, 但同学们一定要熟练掌握.

[2]当然也可以不转置, 可以思考这样又应该怎样解.

同学作业点评 9.1. 有同学先计算了 $\boldsymbol{A}$ 的逆, 然后计算 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$, 这样也是可行的; 在这里的方法中做初等行变换的计算会更复杂, 而若先求逆矩阵则还须多算一个矩阵乘法, 同学们可以自行对这两种方法进行取舍. 但是还有同学把 $\boldsymbol{X}$ 的 9 个分量全部设出来计算, 这样会过于繁琐.

习题 10 (教材 P114 习题 18)**.** 求所有满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{I}, \overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$ 的 2 阶复方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$.

解. 本题的做法和最终表达结果是多样的, 此处只展示一种.

(i) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$. 则由 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$ 可得 $\begin{cases} a_1^2 + a_2a_3 = 0, \\ a_1a_2 + a_2a_4 = 0, \\ a_1a_3 + a_3a_4 = 0, \\ a_2a_3 + a_4^2 = 0, \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a_1^2 + a_2a_3 = 0, \\ a_2(a_1 + a_4) = 0, \\ a_3(a_1 + a_4) = 0, \\ a_2a_3 + a_4^2 = 0. \end{cases}$

如果 $a_1 + a_4 \neq 0$, 则可知 $a_2 = 0, a_3 = 0$, 那么上面的方程组化简为 $\begin{cases} a_1^2 = 0, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0, \\ a_4^2 = 0. \end{cases}$ 因此 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

如果 $a_1 + a_4 = 0$, 则前面的方程组可以化简为 $\begin{cases} a_1^2 + a_2a_3 = 0, \\ a_1 = -a_4. \end{cases}$ 若 $a_2 \neq 0$, 则可设 $a_2 = a, a_1 = \lambda a$, 于是 $a_4 = -\lambda a, a_3 = -\lambda a^2$. 此时 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda a & a \\ -\lambda^2 a & -\lambda a \end{pmatrix}$. 若 $a_2 = 0$, 则易知 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

综上, 我们得到 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda a & a \\ -\lambda^2 a & -\lambda a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \end{pmatrix}$, 其中 $\lambda, a \in \mathbb{C}$.

(ii) 设 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$, 则由 $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{I}$ 可得 $\begin{cases} b_1^2 + b_2b_3 = 1, \\ b_1b_2 + b_2b_4 = 0, \\ b_1b_3 + b_3b_4 = 0, \\ b_2b_3 + b_4^2 = 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} b_1^2 + b_2b_3 = 1, \\ b_2(b_1 + b_4) = 0, \\ b_3(b_1 + b_4) = 0, \\ b_1^2 = b_4^2. \end{cases}$

如果 $b_1 + b_4 \neq 0$, 则上面的方程组可以化简为 $\begin{cases} b_1^2 + b_2b_3 = 1, \\ b_2 = 0, \\ b_3 = 0, \\ b_1 = b_4. \end{cases}$ 于是不难得到 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$.

如果 $b_1+b_4=0$, 则前面的方程组可以化简为 $\begin{cases} b_1^2+b_2b_3=1, \\ b_1+b_4=0. \end{cases}$ 令 $b_1=b$, 则 $b_4=-b_1$. 若 $b_3=0$, 则易知 $\boldsymbol{A}$ 具有形式 $\pm\begin{pmatrix} 1 & b'' \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, b''\in\mathbb{C}$. 若 $b_3\neq 0$, 则令 $b_3=b'$, 易解得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} b & \frac{1-b^2}{b'} \\ b' & -b \end{pmatrix}$, 其中 $b,b'\in\mathbb{C}, b'\neq 0$.

综上, 我们得到 $\boldsymbol{B}=\pm\boldsymbol{I}$ 或 $\pm\begin{pmatrix} 1 & b'' \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} b & \frac{1-b^2}{b'} \\ b' & -b \end{pmatrix}$, 其中 $b,b',b''\in\mathbb{C}, b'\neq 0$.

(iii) 令 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$, 于是由 $\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$ 可得[3] $\begin{cases} c_1\overline{c}_1+c_2\overline{c}_2=1, \\ c_1\overline{c}_3+c_2\overline{c}_4=0, \\ c_3\overline{c}_1+c_4\overline{c}_2=0, \\ c_3\overline{c}_3+c_4\overline{c}_4=1. \end{cases}$ 注意到上式中间两个式子是等价的 (因为互为复共轭), 故这个方程组可以等价地转化为 $\begin{cases} |c_1|^2+|c_2|^2=1, \\ c_1\overline{c}_3+c_2\overline{c}_4=0, \\ |c_3|^2+|c_4|^2=1. \end{cases}$

于是我们可以进行三角换元:

$$c_1=(\cos\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\quad c_2=(\sin\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2},\quad c_3=(\cos\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_3},\quad c_4=(\sin\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_4},$$

其中, $\alpha,\beta\in[0,\pi/2], \theta_j\in[0,2\pi), j=1,2,3,4$.

于是上面的方程组转化为

$$\cos\alpha\cos\beta\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_3)}+\sin\alpha\sin\beta\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_4)}=0,$$

即

$$\begin{cases} \theta_1-\theta_3=\theta_2-\theta_4+\pi+2k\pi, \text{其中} k=-2,-1,0,1, \\ \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=0(\text{即} \cos(\alpha+\beta)=0). \end{cases}$$

从而 $\theta_4=-\theta_1+\theta_2+\theta_3+(2k+1)\pi, \beta=\pi/2-\alpha$. 因此 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \cos\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} & \sin\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} \\ \sin\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_3} & -\cos\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta_1+\theta_2+\theta_3)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)} \end{pmatrix}$, 其中, $\alpha\in[0,\pi/2], \theta_j\in[0,2\pi), j=1,2,3$.

□

同学作业点评 10.1. 这道题的难点在于计算, 如果善于观察并合理地选取未知数会使计算变得更简单. 有许多同学遗漏情况, 应当对参数进行合适的分类讨论, 尽量让每一步的转化都是等价的.

[3] 由于笔者眼花, 建立方程使用的是 $\boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$, 不过幸运的是, 二者是等价的, 即 $\boldsymbol{C}$ 与 $\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}$ 互为逆矩阵.

习题 11 (教材 P114 习题 19). *证明: 不存在 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, 满足 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$.*

证明. 我们使用反证法. 假设存在 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, 满足 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$. 取等式两边的迹立即得到 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{I})=n$. 而上式左边为零, 矛盾. □

习题 12 (教材 P114 习题 20). *证明: 可逆上 (下) 三角形、准对角、对称、反对称方阵的逆矩阵仍然分别是可逆上 (下) 三角形、准对角、对称、反对称方阵.*

证明. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为可逆方阵, 其逆矩阵为 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$.

(i) 如果 $\boldsymbol{A}$ 为可逆上三角形方阵. 我们对 n 归纳. 当 $n=1$ 时, 结论显然. 假设结论对 $n-1$ 阶可逆上三角方阵成立, 下面考虑 n 阶可逆上三角形方阵方阵的情形. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & a_{nn}\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{0} & b_{nn}.\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}_1$ 为 $n-1$ 阶方阵. 于是由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}_n$ 可得 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{I}_{n-1}$, 所以 $\boldsymbol{B}_1$ 是 $\boldsymbol{A}_1$ 的逆矩阵. 由归纳假设知 $\boldsymbol{B}_1$ 为上三角形矩阵, 从而 $\boldsymbol{B}$ 是上三角形矩阵.

(ii) 如果 $\boldsymbol{A}$ 为可逆下三角形方阵, 对 $\boldsymbol{A}$ 进行转置即可化归为 (i) 的结论.

(iii) 如果 $\boldsymbol{A}$ 为准对角矩阵[4], 则可设 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_r), \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{r1} & \boldsymbol{B}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{rr}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{B}$ 的分块方式与 $\boldsymbol{A}$ 对应. 于是 $\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{1r}\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_r\boldsymbol{B}_{r1} & \boldsymbol{A}_r\boldsymbol{B}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{A}_r\boldsymbol{B}_{rr}\end{pmatrix}$. 从而 $\boldsymbol{A}_k$ 可逆且 $\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B}_{kk}=\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B}_{kl}=\boldsymbol{O}, k,l=1,\cdots,r, k\neq l$. 在 $\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B}_{kl}=\boldsymbol{O}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}_k^{-1}$ 即可得当 $k\neq l$ 时, $\boldsymbol{B}_{kl}=\boldsymbol{O}$. 因此 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 仍为准对角矩阵.

(iv) 当 $\boldsymbol{A}$ 为可逆对称方阵时, 有 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$ 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也为可逆对称方阵.

(v) 当 $\boldsymbol{A}$ 为可逆反对称方阵时, 有 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=-\boldsymbol{A}^{-1}$ 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也为可逆反对称方阵.

□

同学作业点评 12.1. *这是一道证明题. 通过作业反映的情况, 大部分同学的表现都不太好 (尤其是前两个小问). 笔者认为, 一个好的证明应该使用通顺的语句、自洽的语言、清晰的语义、恰当的数学符号进行书写, 并且能够体现作者的思路. 大家可以参考并模仿各种数学书上证明写作的方式.*

---

[4]这里默认对角块均为方阵.

习题 13 (补充习题 3)**.** *设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵, k 为某个正整数, 满足 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$. 若 $\lambda\in F=\mathbb{R}$, $\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{I}$ 是否可逆? 若可逆, 求出其逆矩阵; 若不可逆, 解释原因.*

解. (i) 当 $\lambda=0$ 时, 假如 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^k\boldsymbol{A}^k=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{k-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{k-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}=\cdots=\boldsymbol{I}.$$

这与 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$ 矛盾. 因此 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(ii) 当 $\lambda=-1$ 时, 设多项式 $f(x)=x^k$ 并做带余除法: $f(x)=(x-1)\left(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+1\right)+1$. 在上式中用 $\boldsymbol{A}$ 代入 x 可得 $\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\left(\boldsymbol{A}^{k-1}+\boldsymbol{A}^{k-2}+\cdots+\boldsymbol{I}\right)+\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$. 所以 $-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\left(\boldsymbol{A}^{k-1}+\boldsymbol{A}^{k-2}+\cdots+\boldsymbol{I}\right)=\boldsymbol{I}$, 故 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=-\left(\boldsymbol{A}^{k-1}+\boldsymbol{A}^{k-2}+\cdots+\boldsymbol{I}\right)$.

(iii) 当 λ 为一般的非零实数时, 令 $\boldsymbol{B}=-\lambda^{-1}\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{B}^k=\boldsymbol{O}$, 由 (ii) 可知 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})^{-1}=-\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{B}^i$, 即 $(-\lambda^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=-\sum_{i=0}^{k-1}(-\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^i$. 等号两边同乘 $-\lambda^{-1}$ 则可得 $(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{I})^{-1}=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\lambda^{-i-1}\boldsymbol{A}^i$.

综上可得, 当 $\lambda=0$ 时, $\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{I}$ 不可逆; 而当 $\lambda\neq0$ 时, $\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{I}$ 可逆且 $(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{I})^{-1}=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\lambda^{-i-1}\boldsymbol{A}^i$. □

习题 14 (补充习题 4)**.** *(i) 给定列向量 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n$, 假定 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=1$. 对于 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$ 以及 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}_n-2\boldsymbol{P}$, 证明: (a) $\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{P}$, (b) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}$, (c) $\boldsymbol{Q}^2=\boldsymbol{I}_n$.*

(ii) 在上面一小问中, 变换 $\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 被称作一个投影, 而 $\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ 被称作一个 Householder 反射. 为了理解这一点, 对于 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$, 分别计算 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 以及 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$. 用几何的语言来解释 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 的关系.

解. (i) (a) 容易按照定义计算得到 $\boldsymbol{P}^2=(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})^2=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{P}$.

(b) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{P}$.

(c) $\boldsymbol{Q}^2=(\boldsymbol{I}_n-2\boldsymbol{P})^2=\boldsymbol{I}_n-4\boldsymbol{P}+4\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{I}_n$.

(ii) 对于 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$, 容易计算得到 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$ 以及 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix}$. 用几何的语言来解释如下: 设 $\boldsymbol{u}$ 是以原点 O 为起点, 点 U 为终点的单位向量, $\boldsymbol{x}$ 是以原点 O 为起点, 点 A 为终点的向量. 过点 A 作直线 OU 的垂线, 垂足为 N, 并将 ON 倍长至点 M(即向量 $\overrightarrow{MA}$ 与向量 $\overrightarrow{OA}$ 关于直线 AN 对称). 而 $\boldsymbol{P}:\boldsymbol{x}\mapsto\overrightarrow{ON}$, $\boldsymbol{Q}:\boldsymbol{x}\mapsto\overrightarrow{MA}$ 分别是被 $\boldsymbol{u}$ 诱导的投影和反射.

□

致谢

感谢各位助教对本文档的校对工作和内容补充，感谢申伊塃老师以及同学对助教工作的支持。