Ex9.5 7(2)(5);8;11(2)(4);17, ch9综 6;14

Ex9.5

7.求下列函数的极值：

(2) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$

$f'_x=4-2x=0, f'_y=-4-2y=0$

$x=2, y=-2$

极大值8，无极小值。

(5) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$，求$z=z(x,y)$的极值

$F(x,y,z,\lambda)=z+\lambda(x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10)$

$F'_x=\lambda(2x-2)=0$

$F'_y=\lambda(2y+2)=0$

$F'_z=1+\lambda(2z-4)=0$

$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$

得$x=1, y=-1, z=6或-2$

极大值6，极小值-2

8.求一个三角形，使得它的三个角的正弦乘积最大。

$maximize \sin a\sin b\sin c$，$a+b+c=\pi$

$F(a,b,c,\lambda)=\sin a\sin b\sin c+\lambda(a+b+c-\pi)$

$F'_a=\cos a\sin b\sin c+\lambda=0$

$F'_b=\cos b\sin a\sin c+\lambda=0$

$F'_c=\cos c\sin a\sin b+\lambda=0$

$a+b+c=\pi$

$a=b=c=\frac{\pi}{3}$

11.求下列函数在指定范围内的最大值与最小值。

(2)$z=x^2-xy+y^2, \{(x,y)||x|+|y|\le 1\}$

先考虑极值点$z'_x=2x-y=0, z'_y=2y-x=0$，得$x=0, y=0$，此时为极小值0

在边界上，$|x|+|y|=1$，所以$x^2+y^2+2|xy|=1, x^2+y^2=1-2|xy|$

$z=1-xy-2|xy|$,$xy\in[-1/4,1/4]$,$z\in[\frac{1}{4},1]$

因此最大值为1，最小值为0

(4)$z=x^2y(4-x-y), \{(x,y)|x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 6\}$

先考虑极值点$z'_x=2xy(4-x-y)-x^2y=0, z'_y=x^2(4-x-y)-x^2y=0$得$x=2,y=1$，此时为极大值4

在边界上:

$x=0,y\in[0,6],z=0$

$y=0,x\in[0,6],z=0$

$x+y=6$，则$z=-2x^2(6-x)$，其最小值为$x=4$时取到-64，最大值为0、

综上最大值为4，最小值为-64

17在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上求一点$M(x,y)(x,y\geq 0)$，使椭圆在该点的切线与坐标轴构成的三角形面积最小，并求其面积。

在(x_0,y_0)处切线$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，$y=0$，$x=\frac{a^2}{x_0}$，$x=0$，$y=\frac{b^2}{y_0}$

对称性不妨设$x_0,y_0\geq 0$，$S=\frac{a^2b^2}{2x_0y_0}$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\geq 2\frac{xy}{ab}$

$xy\leq\frac{ab}{2}$

$S=\frac{a^2b^2}{2x_0y_0}\geq ab$

因此最小面积ab，此时$x=\frac{\sqrt{2}}{2}a, y=\frac{\sqrt{2}}{2}b$

ch9综

6.证明：不等式$\frac{x^2+y^2}{4}\leq e^{x+y-2}(x\geq 0,y\geq 0)$

$F(x,y)=e^{x+y-2}-\frac{x^2+y^2}{4}$

$F'_x=e^{x+y-2}-\frac{x}{2}=0, F'_y=e^{x+y-2}-\frac{y}{2}=0$

$x=y$，所以限制在$y=x$上进行考虑$g(x)=F(x,x)=e^{2x-2}-\frac{x^2}{2}$

$g'(x)=2e^{2x-2}-x$，$g''(x)=4e^{2x-2}-1=0$,$x=1-\ln 2$，此时$g'(x)=\frac{1}{2}-(1-\ln 2)>0$

所以$g(x)\geq g(0)=\frac{1}{e^2}$

所以$F(x,y)\geq 0$

14.求函数$f(x,y)=x^2+xy^2-x$在区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 2\}$上的最大值和最小值。

先考虑极值点$f'_x=2x+y^2-1=0, f'_y=2xy=0$

$y=0,x=\frac{1}{2}$，$f''_{xx}=2, f''_{yy}=1, f''_{xy}=0$，极小值点，$f=-\frac{1}{4}$

$x=0,y=1/-1$，此时$f=0$

再考虑边界点$x^2+y^2=2, y^2=2-x^2, f=x^2+x(2-x^2)-x=-x^3+x^2+x, x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

$f'=-3x^2+2x+1=(-3x-1)(x-1)$

考虑$x=-\sqrt{2},-\frac{1}{3},1,\sqrt{2}$，$f=2+\sqrt{2},-\frac{5}{27},1,2-\sqrt{2}$

所以最小值$-\frac{1}{4}$，最大值$2+\sqrt{2}$

Ex9.5 12;15;18;19;20

Ex9.5

12.在平面$3x-2z=0$上求一点，使它与点$A(1,1,1)$和$B(2,3,4)$的距离平方和最小

设$(2t,s,3t)$，则平方和
$F(s,t)=(2t-1)^2+(s-1)^2+(3t-1)^2+(2t-2)^2+(s-3)^2+(3t-4)^2=26t^2-42t+2s^2-8s+32$

配方后显然距离平方和最小的点是$(\frac{21}{13},2,\frac{63}{26})$

15.一帐篷的下部为圆柱形，上部盖以圆锥形的顶篷，设帐篷的容积为一定数V_0。试证：当$R=\sqrt{5}H,h=2H$时（其中R,H各为圆柱形的底半径和高，h为圆锥形的高），所用篷布最省。

$V_0=\pi R^2H+\frac{1}{3}\pi R^2h$

$S=\pi R^2+2\pi RH+\pi R\sqrt{R^2+h^2}$

$F(R,H,h)=\pi R^2+2\pi RH+\pi R\sqrt{R^2+h^2}-\lambda(\pi R^2H+\frac{1}{3}\pi R^2h-V_0)$

$F_H'=2\pi R-\lambda\pi R^2=0$

$F_R'=2\pi R+\pi l+\pi\frac{R^2}{l}-2\lambda\pi RH-\frac{2}{3}\lambda\pi Rh=0$

$F_h'=\pi R\frac{h}{l}-\frac{1}{3}\lambda\pi R^2=0$

于是$\lambda=\frac{2}{R}$，代入下面两式，得：

$2Rl+l^2+R^2-4Hl-\frac{4}{3}hl=0$

$\frac{h}{l}=\frac{2}{3}$

代入即可。

18.求平面上一点(x_0,y_0)，使其到n个定点$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$的距离的平方和最小。

$D(x_0,y_0)=\sum_{i=1}^n(x_0-x_i)^2+\sum_{i=1}^n(y_0-y_i)^2=nx_0^2-2x_0\sum_{i=1}^n x_i+ny_0^2-2y_0\sum_{i=1}^n y_i+\sum_{i=1}^n x_i^2+\sum_{i=1}^n y_i^2$

显然极值点为$(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n})$

19.椭球体$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$的内接长方体中，求体积最大的长方体的体积。

设其中一点(x_0,y_0,z_0)，$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1\ge 3\sqrt[3]{\frac{x_0^2y_0^2z_0^2}{a^2b^2c^2}}$

$x_0^2y_0^2z_0^2\le\frac{1}{27}a^2b^2c^2$

$V=8|x_0y_0z_0|\le\frac{8}{3\sqrt{3}}abc$

20.在旋转椭球面$\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$上求距平面$x+y+2z=9$最远和最近的点。

相切时：$\frac{x_0x}{4}+y_0y+z_0z=1$，$x_0/4=y_0=z_0/2$

代入得到两点$(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$，$(-\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$

前者是最近的点($\sqrt{6}$)，后者是最远的点($2\sqrt{6}$)。

Ex9.5 5;7(4);16;20;21, ch9综 10;13;16

Ex9.5

5.设$z=z(x,y)$是由方程$z^3-2xz+y=0$所确定的隐函数，当$x=1,y=1$时$z=1$，试按$x-1$和$y-1$的乘幂展开函数z至二次项为止。

讲义已解。

答案为$z(x,y)=1+2(x-1)-(y-1)-8(x-1)^2+10(x-1)(y-1)-3(y-1)^2+o(\rho^2)$

7(4)
$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$，求隐函数$y=y(x)$的极值。

讲义已解。

答案为极大值6，极小值-2。

16.已知平行六面体所有棱长之和为$12a$，求其最大体积。

讲义已解。

答案为a^3，且在$|x|=|y|=|z|=a$时成立。

20.

重复题。

21.设曲面S: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}(a>0)$

（1）证明：S上任意点处的切平面与各坐标轴的截距之和等于a。

（2）在S上求一切平面，使此切平面与三坐标面所围成的四面体体积最大，并求四面体体积的最大值。

(1)(x_0,y_0,z_0)处的切平面$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{a}$

$x=0,y=0$时，$z=\sqrt{az_0}$

$x=0,z=0$时，$y=\sqrt{ay_0}$

$y=0,z=0$时，$x=\sqrt{ax_0}$

$x+y+z=a$

(2)$V=\frac{1}{6}xyz\le\frac{1}{6}(\frac{a}{3})^3=\frac{1}{162}a^3$

ch9综

10.设$f(x,y)$在(x_0,y_0)的某个领域U上有定义，$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$在$U$上存在。求证：如果$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$中有一个在$(x_0,y_0)$处连续，那么$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$处可微。

不妨设$\frac{\partial f}{\partial x}$在$(x_0,y_0)$处连续。

$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)=hf'_x(x_0+\theta h,y_0+k)$

$f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)k+o(k)=f'_y(x_0,y_0)k+o(\rho)$

另一方面由于f'_x在(x_0,y_0)处连续，所以

$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0+\theta h,y_0+k)h+f'_y(x_0,y_0)k+o(\rho)$

同时$|\frac{f'_x(x_0+\theta h,y_0+k)h-f'_x(x_0,y_0)h}{\rho}|\leq|f'_x(x_0+\theta h,y_0+k)-f'_x(x_0,y_0)|\rightarrow 0$

所以$\frac{f'_x(x_0+\theta h,y_0+k)h-f'_x(x_0,y_0)h}{\rho}=o(\rho)$

综上$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)h+f'_y(x_0,y_0)k+o(\rho)$

13.设$f(x,y,z)$在$\mathbb{R}^3$上有一阶连续偏导数，且满足$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}$.如果$f(x,0,0)>0$对任意的$x\in\mathbb{R}$成立，求证：对任意的$(x,y,z)\in\mathbb{R}$，也有$f(x,y,z)>0$。

讲义已解。通过证明$f(x+y+z,0,0)=f(x,y,z)$即可。

16.设$a_i\geq 0(i=1,2,\cdots,n),p>1$.证明：

$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leq(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n})^{\frac{1}{p}}$

并讨论等号成立的条件。

讲义已解。

等号成立条件为$a_1=a_2=\cdots=a_n$