线性代数(B1) 第七次作业

请于2023年4月25日周二上课前在教室里交.

补充习题可视作思考题, 正常情况下不作要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

2023年4月18日布置的作业

教材习题. P155: #12(若正确, 简要证明一下; 若错误, 举出反例), #19(2)(找一个极大无关组即可), #21, #22, #23, #24.

补充习题 1. 设矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{3\times 2}$ 和 $\boldsymbol{B} \in F^{2\times 3}$ 满足 $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. 证明: $\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. (提示: 教材习题#42)

补充习题 2. (1) 设 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r. 任取 $\boldsymbol{A}$ 的 r 个线性无关的行和 r 个线性无关的列. 证明: 这 r 行和这 r 列交叉处的 r 阶子阵可逆.

(2) 若上题中的 $r < \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$, 则其结论不成立. 试给出反例.

(3) 证明: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式所在的行向量组和列向量组都是线性无关的.

(4) 上题的逆命题不成立, 即位于线性无关的行向量组和线性无关的列向量组交叉处的子式不一定非零. 试给出反例.

补充习题 3. (1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$ 的某个阶梯标准形的所有非零行的行向量, 证明这些向量生成了行空间 $\operatorname{Row}(\boldsymbol{A})$.

(2) 证明: 向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, -1, 3), \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 4, 1, -2), \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (3, 6, 3, -7)$$

与

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 2, -4, 11), \quad \boldsymbol{\beta}_2 = (2, 4, -5, 14)$$

等价.

2023年4月20日布置的作业

教材习题. P155-156: #20, #31, #34, #35.

补充习题 4. 设$\boldsymbol{A} \in F^{n\times m}$, $\boldsymbol{B} \in F^{m\times p}$. 若$m = \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})$, 证明: $m = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.

补充习题 5. 设$\boldsymbol{A}$为n 阶方阵, 并存在正整数 N 使得 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^N) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1})$. 证明: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^N) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+1}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{N+2}) = \cdots$. (提示: Frobenius 不等式)

补充习题 6. 设方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, 而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \le 1$.

(1) 对于正整数 s, 求 $\boldsymbol{A}^s$. (提示: 用满秩分解定理)

(2) 求行列式 $\det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A})$. (提示: 用教材 P115#25)

补充习题 7. 设$\boldsymbol{A}_n$为一个n 阶反对称方阵, 其主对角线的右上角的元素全是1. 计算$\boldsymbol{A}_n^*$. 比较复杂
(提示: 答案依赖于n的奇偶性. 若$n = 2k$, 由第四次作业中的思考题中的计算可知, $|\boldsymbol{A}_{2k}| = 1$. 于是$\boldsymbol{A}_{2k}^* = \boldsymbol{A}_{2k}^{-1}$. 当$n = 4$时,

$$\boldsymbol{A}_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

对于一般的$n = 2k$, $\boldsymbol{A}_n^{-1}$具有类似的形式.

对于$n = 2k+1$, $|\boldsymbol{A}_{2k+1}| = 0$. 从而由$\boldsymbol{A}_{2k+1}\boldsymbol{A}_{2k+1}^* = |\boldsymbol{A}_{2k+1}|\boldsymbol{I}$ 可知, $\boldsymbol{A}_{2k+1}^*$ 的每个列向量都是方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解. 可以解出该方程组的解的全体为$\boldsymbol{x} = \lambda(1, -1, 1, -1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in F$. 接下来利用 $\boldsymbol{A}_{2k+1}^*$的$(1,1)$位置的元素为$|\boldsymbol{A}_{2k}| = 1$, 以及$\boldsymbol{A}_{2k+1}^*$为一个对称矩阵, 可以推出 $\boldsymbol{A}_{2k+1}^* = ((-1)^{i+j})_{n\times n}$.)