# 补充题

## 二重积分

首先不加证明的介绍一个定理：

`可积函数判定：`

设$D$为可求面积的有界闭区域，$f$是定义在$D$上的有界函数，则$f$在$D$上可积的充分必要条件是$f$在$D$上的所有不连续点的集合是一个零测集。

~~这个定理应该老师大概没讲过所以不建议用，并且一般来说事实上判断零测集也不算是个简单的事儿，所以这一个主要是自己判断函数可不可积用。~~

### 积分区域的分解

**例题 22.2.3** 设区域 $D=\{(x,y)\mid 2y\leqslant x^2+y^2\leqslant 4y, x\geqslant 0\}$. 分别将 $D$ 表示为 $x$ 型区域和 $y$ 型区域.

$x$型区域：

$$D_1=\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-\sqrt{4-x^2}\leqslant y\leqslant 1-\sqrt{1-x^2},\end{cases}$$

$$D_2=\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{4-x^2},\end{cases}$$

$$D_3=\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2-\sqrt{4-x^2}\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{4-x^2}.\end{cases}$$

$y$型区域：

$$E_1=\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 2,\\ \sqrt{2y-y^2}\leqslant x\leqslant \sqrt{4y-y^2},\end{cases}\quad E_2=\begin{cases}2\leqslant y\leqslant 4,\\ 0\leqslant x\leqslant \sqrt{4y-y^2}.\end{cases}$$

**换元法**

$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv$

$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdrd\varphi$

这一块的内容还是以计算为主，所以下面我们直接开算！虽然习题课讲义提前发群里了但是希望大家先不要看，自己算完之后核对答案的一刻可以感受到一种~~丰收的喜悦~~。

1.作极坐标变换，将二重积分$\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$化为定积分，其中$D=\{(x,y)|0\le y\le x\le 1\}$

**解** 令 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, 则

$$\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{\pi/4}f(r)r\,\mathrm{d}\varphi+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{\arccos(1/r)}^{\pi/4}f(r)r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1 f(r)r\,\mathrm{d}r+\int_1^{\sqrt{2}}(\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r})f(r)r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{2}}f(r)r\,\mathrm{d}r-\int_1^{\sqrt{2}}\arccos\frac{1}{r}f(r)r\,\mathrm{d}r.\quad\Box$$

2.求由曲线$(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$所围的面积。

**解** 应用广义极坐标变换

$$x=a\rho\cos\theta,\quad y=b\rho\sin\theta,$$

则 $J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=ab\rho$, 所围成积分区域的曲线变为 $\rho^2=\cos 2\theta$ (双纽线), 于是所求的面积

$$S=\iint\limits_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}ab\rho\,\mathrm{d}\rho=ab.\quad\Box$$

3.求$\iint_D(\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{x-c}{b}})dxdy$，其中$D$由曲线$\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{x-c}{b}}=1$和$x=c$，$y=c$所围成，并且$a,b,c>0$

**解** 见图 22.5, 被积函数与积分区域的部分边界具有相同的形式, 因此要设法把被积函数表达式化成简单的形式.

令

$$x = c + a\rho\cos^4\theta, \quad y = c + b\rho\sin^4\theta,$$

则

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = 4ab\rho\cos^3\theta\sin^3\theta.$$

而积分区域变为 $\{0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \rho \leqslant 1\}$, 于是

$$\iint\limits_D \left(\sqrt{\frac{x-c}{a}} + \sqrt{\frac{y-c}{b}}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^1 4ab\rho\cos^3\theta\sin^3\theta\sqrt{\rho}\,\mathrm{d}\rho = \frac{2ab}{15}. \quad \square$$

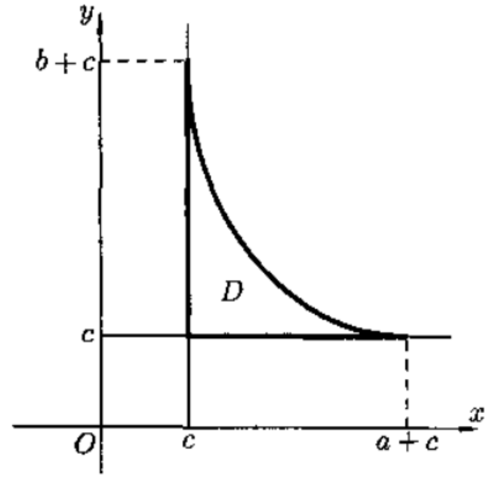


图 22.5

4.

求 $\iint\limits_D \ln\frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D$ 是由 $y = x$, $y = 1$, $x = 2$ 围成的三角形.

$\ln\frac{x}{y^2} = \ln x - 2\ln y$

$\iint_D \ln\frac{x}{y^2} dxdy = \int_1^2 dx \int_1^x (\ln x - 2\ln y)dy = \int_1^2 dx(y\ln x - 2y(\ln y - 1))|_1^x$

$= \int_1^2 dx(2x - x\ln x - (\ln x + 2)) = x^2 - 2x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 - x\ln x + x|_1^2$

$= -4\ln 2 + 3 - \frac{1}{4} = -4\ln 2 + \frac{11}{4}$

5.

12. 求 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D$ 由 $xy = 1, x^2 + y^2 = 4$ 围成.

由对称性，$\iint_D xdxdy = 0$