第9讲：多元函数的Taylor公式及其应用

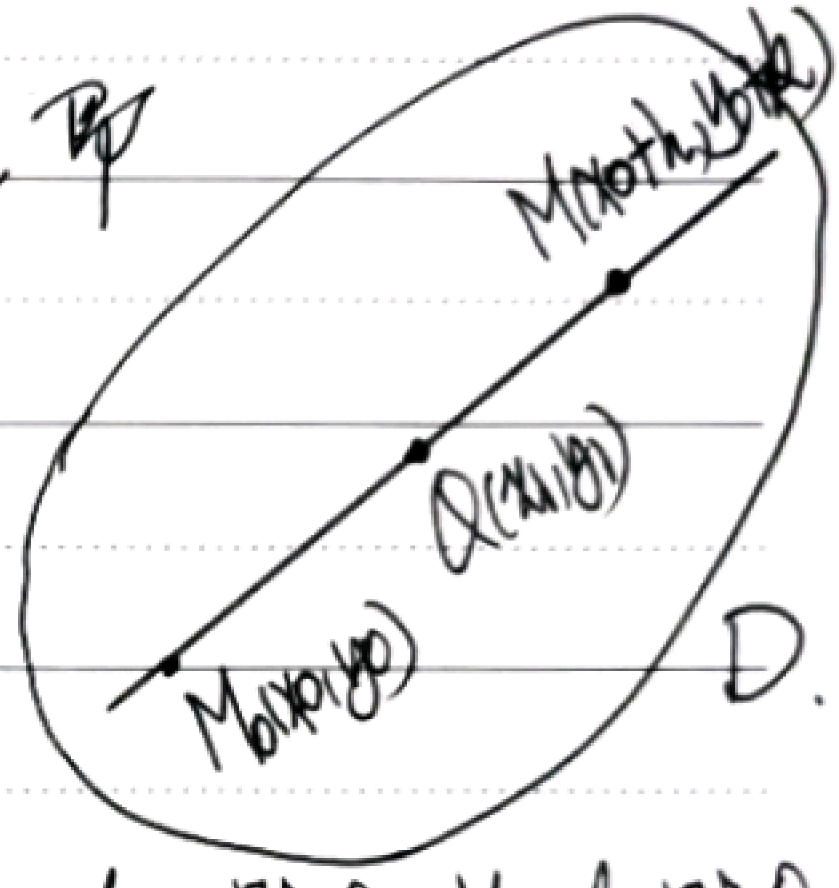
2023.3.24.

(一) 设 $D\subset R^2$，且D是凸区域，即D中任两点，都可用D中直线连接起来。$z=f(x,y)\in C^{n+1}(D)$，$M_0(x_0,y_0)$，$M(x,y)=M(x_0+h,y_0+k)\in D$，$Q(x_1,y_1)$是直线$M_0M$上任一点且$Q$位于$M_0$与$M$之间。由$\overrightarrow{M_0Q}\parallel\overrightarrow{M_0M}$，即

$(x_1-x_0,y_1-y_0)\parallel(h,k)\Leftrightarrow$

$\dfrac{x_1-x_0}{h}=\dfrac{y_1-y_0}{k}\triangleq t\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x_1=x_0+ht\\ y_1=y_0+kt,\end{cases}$ $t\in[0,1]$.



$t=0$时，$Q=M_0$，$t=1$时，$Q=M$.

$f(Q)=f(x_1,y_1)=f(x_0+ht,y_0+kt)\triangleq g(t)\in C^{n+1}[0,1]$，利用$g(t)$在$t=0$处的$n$阶Taylor公式：$g(t)=\sum\limits_{m=0}^{n}\dfrac{g^{(m)}(0)}{m!}t^m+\dfrac{g^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1}$，(※)

$t\in[0,1]$，$\theta\in(0,1)$。取$t=1$，则 $f(x_0+h,y_0+k)=\cancel{f(x_1,y_1)}=g(1)$

$f(x,y)$

$=\sum\limits_{m=0}^{n}\dfrac{g^{(m)}(0)}{m!}+\dfrac{g^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$ (※)

而 $g(0)=f(M_0)$，$g'(0)=\left(f'_x(x_0+ht,y_0+kt)h+f'_y(x_0+ht,y_0+kt)k\right)\Big|_{t=0}$
$=\left(h\dfrac{\partial f}{\partial x}+k\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{M_0}\triangleq\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f(M_0)$

(1).

$$g''(0)=\left(\frac{\partial^2 f(x_0+ht,y_0+kt)}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f(x_0+ht,y_0+kt)}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 f(x_0+ht,y_0+kt)}{\partial y^2}k^2\right)\Big|_{t=0}$$

$$=\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}k^2\right)f(x_0,y_0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(M_0),\cdots$$

$g^{(m)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(M_0)$，$m=0,1,2,\cdots n$. 代入(式2)：

$$f(x,y)\triangleq f(x_0+h,y_0+k)=g(1)=\sum_{m=0}^{n}\frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(M_0)}{m!}+R_n \quad (式3)$$

$R_n=\dfrac{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}}{(n+1)!}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$，其中 $\begin{cases}h=x-x_0\\ k=y-y_0\end{cases}$.

(式3)即为二元函数 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的 n 阶 Taylor 公式。

例1. 可微函数 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的 0 阶 Taylor 公式：

$$f(x,y)\xlongequal{n=0}f(x_0,y_0)+f'_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k)k+f'_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)h$$

$$\xlongequal[k=y-y_0]{h=x-x_0}f(x_0,y_0)+f'_x(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))(x-x_0)+$$

$$f'_y(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))(y-y_0)\iff$$

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=(x-x_0)f'_x(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))+(y-y_0)f'_y(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)) \quad (式4)$$

(式4)又称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的微分中值定理。 用(式4)可解C4P19习题/7, 8, 9, 10、小题.

例2. 设 $z=f(x,y)\in C^3(D)$. 则 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的二阶 Taylor 公式：

$f(x,y)=f(x_0,y_0)+(x-x_0)f'_x(M_0)+(y-y_0)f'_y(M_0)+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(M_0)(x-x_0)^2+2f''_{xy}(M_0)(x-x_0)$

$(y-y_0)+f''_{yy}(M_0)(y-y_0)^2]+o(\rho^2)$. $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{h^2+k^2}$.

设 $f'_x(M_0)=0=f'_y(M_0)$, $f''_{xx}(M_0)=A$, $f''_{xy}(M_0)=f''_{yx}(M_0)=B$,

$f''_{yy}(M_0)=C$. 则有:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2)+o(\rho^2)$$

$$=\frac{A}{2}\left[\left((x-x_0)+\frac{B}{A}(y-y_0)\right)^2+\frac{AC-B^2}{A^2}(y-y_0)^2\right]+o(\rho^2),\ (A\neq 5)$$

(1°) 当 $\begin{cases}A>0\\AC-B^2>0\end{cases}$ 时, $f(x,y)-f(x_0,y_0)\geq 0$ 恒成立 $\Rightarrow f(M_0)$ 为极小值.

(2°) 当 $\begin{cases}A<0\\AC-B^2>0\end{cases}$ 时, $f(x,y)-f(x_0,y_0)\leq 0$ 恒成立 $\Rightarrow f(M_0)$ 为极大值.

(3°) 当 $AC-B^2<0$ 时, $f(M_0)$ 不是 f 的极值。

Th1: 设 $z=f(x,y)\in C^2(D)$, D 是凸区域, $M_0(x_0,y_0)\in D$ 且 M_0 是 f 的驻点: $f'_x(M_0)=0=f'_y(M_0)$. 令 $Hf(M_0)=\begin{pmatrix}A & B\\B & C\end{pmatrix}$

称之为 f 在驻点 M_0 处的海森(Hessian)矩阵. 则

(1°) 当 $Hf(M_0)>0$ (正定), 即一切顺序主子式皆大于零时. $f(M_0)$ 为极小值;

即 $\begin{cases}A>0\\AC-B^2>0\end{cases}$ 时, $f(M_0)$ 为 f 的极小值.

(2°) 若 $H_f(M_0)<0$（负定）时，即 $\begin{cases}A<0\\AC-B^2>0\end{cases}$ 时，$f(M_0)$ 为 f 的一个极大值。

(3°) 若 $\Delta=AC-B^2<0$ 时，$f(M_0)$ 肯定不是 f 的极值。（第10讲中证给大家看，同学们可先思考一下）

(4°) 若 $\Delta=AC-B^2=0$ 时，$f(M_0)$ 是否为极值，需用更高阶的 Taylor 公式进行讨论才行。（例如，$f(x,y)=x^4+y^4$ 中，$f(0,0)=0$，$f'_x(0,0)=4x^3|_{x=0}=0$，$f''_{xx}(0,0)=12x^2|_{x=0}=0=A$，$f''_{xy}(0,0)=0=B$，$f'_y(0,0)=4y^3|_{y=0}=0$，$f''_{yy}(0,0)=12y^2|_{y=0}=0=C$．$\Delta=AC-B^2=0\cdot0-0^2=0$ 而 $f(0,0)=0$ 是 $f(x,y)=x^4+y^4$ 的极小值，也是最小值；又如 $f(x,y)=x^3+y^3$ 中，$f(0,0)=0$，$A=f''_{xx}(0,0)=0=f''_{yy}(0,0)=f''_{xy}(0,0)$，即 $A=B=C=0\Rightarrow$ $\Delta=AC-B^2=0$，但 $f(0,0)=0$ 不是 $f(x,y)=x^3+y^3$ 的极值。）

(三) 例题：

例1. 将 $f(x,y)=\frac{1}{1-x-y+xy}$ 在 $O(0,0)$ 处分别展成带皮亚诺余项的一阶、二阶、三阶、…、n 阶 Taylor 公式。

例2. 求 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的所有极值。

解例1：(1°) $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处的零阶 Taylor 公式：

$$f(x,y)=f(0,0)+(x-0)f'_x(0+\theta(x-0),0+\theta(y-0))+(y-0)f'_y(0+\theta(x-0),0+\theta(y-0))$$

$$=\overset{1}{\cancel{0}}+xf'_x(\theta x,\theta y)+yf'_y(\theta x,\theta y),\quad \theta\in(0,1).$$

记 $f(x,y)=\dfrac{1}{(1-x)(1-y)}$，$f'_x(\theta x,\theta y)=\dfrac{1}{(1-\theta x)^2}\dfrac{1}{1-\theta y}$，$f'_y(\theta x,\theta y)=\dfrac{1}{(1-\theta y)^2}\dfrac{1}{1-\theta x}$

$\therefore f(x,y)=\dfrac{1}{(1-x)(1-y)}=\overset{1}{\cancel{0}}+\dfrac{x}{(1-\theta x)^2}\dfrac{1}{1-\theta y}+\dfrac{y}{(1-\theta y)^2}\dfrac{1}{1-\theta x}$ 的零阶 Taylor 公式.

(2°) 利用 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3)$，$\dfrac{1}{1-y}=1+y+y^2+y^3+o(y^3)$

$=1+x+x^2+o(x^2)$　　$=1+y+y^2+o(y^2)$

$=1+x+o(x)$　　$=1+y+o(y)$

可得 $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处的一阶，二阶，三阶 Taylor 公式分别为：

$$f(x,y)=(1+x+o(x))(1+y+o(y))=1+x+y+R_1=1+(x+y)+R_1=1+\frac{x^2-y^2}{x-y}+R_1$$

$$f(x,y)=(1+x+x^2+o(x^2))(1+y+y^2+o(y^2))=1+x+y+x^2+xy+y^2+R_2$$

$$=1+(x+y)+\frac{x^3-y^3}{x-y}+R_2$$

$$f(x,y)=(1+x+x^2+x^3+o(x^3))(1+y+y^2+y^3+o(y^3))$$

$$=1+x+y+(x^2+y^2+xy)+(x^3+y^3+xy^2+yx^2)+R_3$$

$$=1+(x+y)+\frac{x^3-y^3}{x-y}+\frac{x^4-y^4}{x-y}+R_3.$$

即$f(x,y)$在$(0,0)$处的n阶Taylor公式为:

$$f(x,y)=1+\frac{x^2-y^2}{x-y}+\frac{x^3-y^3}{x-y}+\cdots+\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}+\underbrace{R_n}_{\text{余项}}.\quad (n\geq 1)$$

练习2:

(1°) 先求出$f(x,y)$的所有驻点:令 $\begin{cases} f'_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f'_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$

$\Rightarrow x=-3$或$x=1$; $y=0$或2. 组合成四个驻点: $M_1(1,0)$, $M_2(1,2)$, $M_3(-3,0)$, $M_4(-3,2)$.

(2°). 对每个驻点,计算海森矩阵的元素A,B,C. 再判断海森矩阵$Hf(M_0)$的正负定情况.

在$M_1(1,0)$处,由$f''_{xx}=6x+6$, $f''_{xy}\equiv 0$, $f''_{yy}=-6y+6$知 $\begin{cases} A=12>0 \\ B\equiv 0 \\ C=6 \end{cases}$

$\Delta=AC-B^2=72>0$. 即$Hf(M_1)>0$(正定). $\therefore f(M_1)=f(1,0)=-5$是$f$的一个极小值; 在$M_2(1,2)$处, $\begin{cases} A=12>0 \\ B\equiv 0 \\ C=-6 \end{cases}$

$\Delta=AC-B^2=-72<0$. $f(1,2)$不是极值;

在$M_3(-3,0)$处, $A=-12<0$, $B\equiv 0$, $C=6 \Rightarrow \begin{cases} A<0 \\ \Delta=AC-B^2<0 \end{cases}$.

$\therefore f(-3,0)$不是极值;

在$M_4(-3,2)$处，$A=-12<0$，$B=0$，$C=-6$，$\begin{cases} A<0 \\ \Delta=AC-B^2=72>0 \end{cases}$

H f(M_4)负定，∴ $f(-3,2)=31$是f的一个极大值。

㈢ 对称矩阵A的正定性与负定性：

设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，且$a_{12}=a_{21}$，$a_{13}=a_{31}$，$a_{23}=a_{32}$，则称

A是对称矩阵，此时，$A^T=A$。

(1°) 若A的所有顺序主子式全大于零，即$|a_{11}|=a_{11}>0$，

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0$，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=|A|>0$，则称A是正定矩阵。

(2°) 若A的奇数阶顺序主子式全小于零，偶数阶顺序主子式全大于零，即$|a_{11}|=a_{11}<0$，$|A|<0$，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0$，则称

A是负定矩阵。更高阶的对称矩阵的正负定情况同上述的三阶矩阵情况，在我们的ch8中详细讨论。

㈣ 作业：ex9.5：2(2)；3；4(1)，(3)，(7)；7(1)，(3)，(4)。