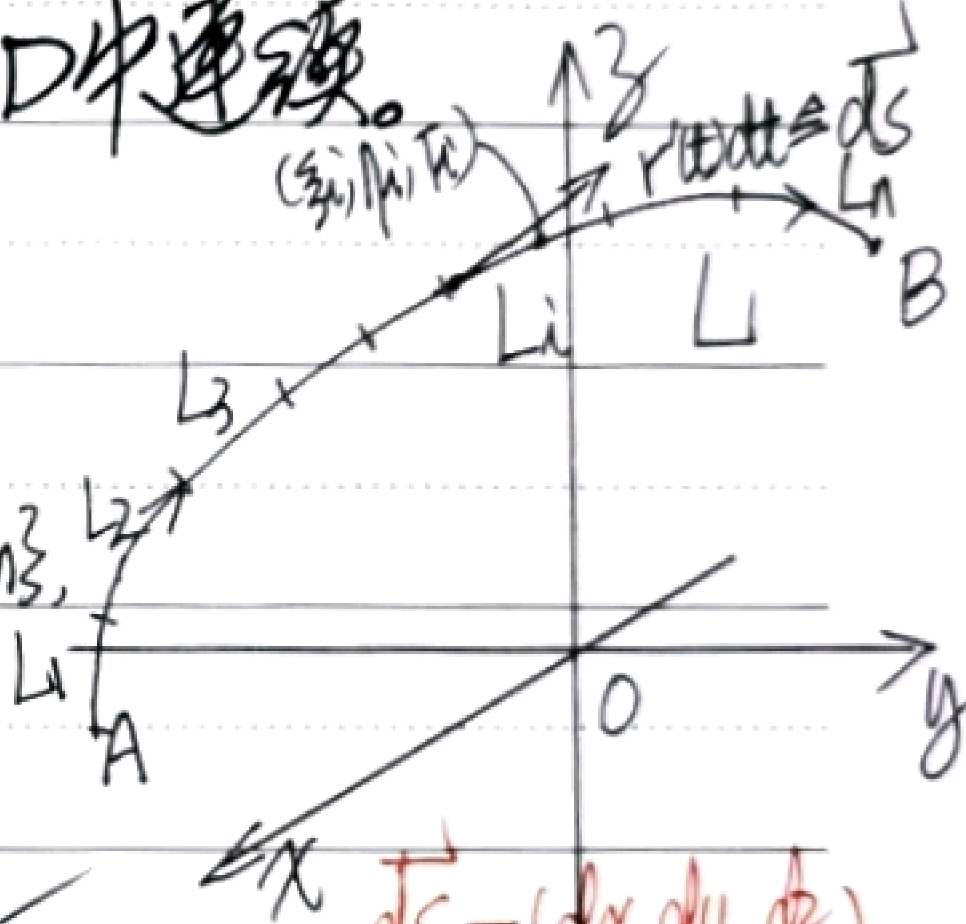
# 第25讲：第二型的曲线积分：$\int_L \vec{A}(x,y,z)\cdot d\vec{s}$

(2023.5.6)

(一) 概念与定理：

例1，求力场 $\vec{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 沿光滑曲线 $L: r(t)=(x(t),y(t),z(t))\in C^1[\alpha,\beta]$ 做的功 $W$.

其中 $L\subset D$，而 $\vec{A}(x,y,z)$ 在区域 $D$ 中连续。




(I) 分割：$L=L_1+L_2+\cdots+L_i+\cdots+L_n$

设 $\Delta s_i$ 为 $L_i$ 的弧长，$\lambda=\max\{\Delta s_1,\cdots,\Delta s_n\}$，

$\vec{\Delta s_i}=(\Delta x_i,\Delta y_i,\Delta z_i)$，$i=1,2,\cdots n$

$d\vec{s}=(dx,dy,dz)$

(II) 近似：任取 $(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\in L_i$，作内积：$\vec{A}(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\cdot\vec{\Delta s_i}$ (以直代曲)

(III) 求和：$\sum_{i=1}^{n} A(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\cdot\vec{\Delta s_i} \approx W$

(IV) 取极限：$\lim_{\lambda\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\vec{A}(\xi_i,\eta_i,\tau_i)\cdot\vec{\Delta s_i} \xlongequal{\text{存在且唯一}} W$

$$\triangleq \int_L \vec{A}(x,y,z)\cdot d\vec{s}=\int_L Pdx+Qdy+Rdz \quad (式1)$$

称 $d\vec{s}=(dx,dy,dz)=r'(t)dt$ 为有向弧长元。

主要性质：(设 $\vec{A}_1(x,y,z)$，$\vec{A}_2(x,y,z)\in C(D)$，$L\subset D$.

$C_1, C_2$为任意常数) 则

(1). $\int_L (C_1\vec{A}_1+C_2\vec{A}_2)\cdot d\vec{s} = C_1\int_L \vec{A}_1\cdot d\vec{s} + C_2\int_L \vec{A}_2\cdot d\vec{s}$

(2). $\int_{L_1+L_2}\vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_{L_1}\vec{A}\cdot d\vec{s} + \int_{L_2}\vec{A}\cdot d\vec{s}$

(3). $\int_{L_{AB}}\vec{A}\cdot d\vec{s} = -\int_{L_{BA}}\vec{A}\cdot d\vec{s}$ (第二型曲线积分具有方向性!)

(4) 设L是有向直线段，且位于x轴上的$[a,b]$，此时 $y=0, z=0 \Rightarrow dy=0, dz=0 \Rightarrow \int_L \vec{A}(x,y,z)\cdot d\vec{s} =$ $\int_L P(x,0,0)dx + Q(x,0,0)dy + R(x,0,0)dz = \int_a^b P(x,0,0)dx$

即第二型线积分是定积分的推广！

当L为闭曲线(有向)时，称 $\oint_L \vec{A}(x,y,z)\cdot d\vec{s}$ 为向量场$\vec{A}$沿L的环流量。当区域D总在$\partial D=L$的左侧时，称L为D的正向边界。当D是单连通区域，即D中任意闭路

若即可在D中缩成一点的区域时，$\partial D$的正向就是逆时针方向；当D是多连通区域，即D中有洞的区域时，$\partial D$的正向为外边界逆时针，内边界顺时针方向。

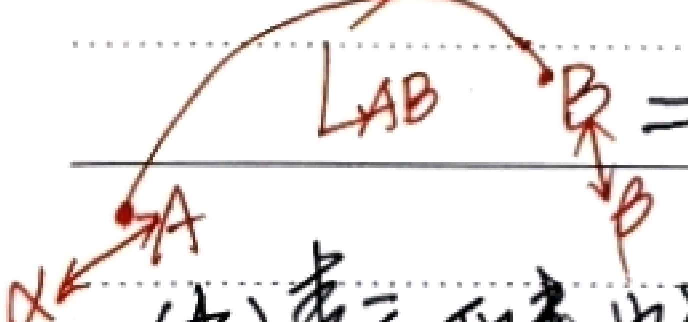

(三)计算方法：

利用 $|\vec{ds}| = |(dx,dy,dz)| = |(x'(t),y'(t),z'(t))dt| = |r'(t)|dt = ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1$

令 $\frac{dx}{ds}=\cos\alpha$，$\frac{dy}{ds}=\cos\beta$，$\frac{dz}{ds}=\cos\gamma$ 则 $\begin{cases} dx=\cos\alpha\, ds \\ dy=\cos\beta\, ds \\ dz=\cos\gamma\, ds \end{cases}$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是$(x,y,z)$的函数。$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为单位向量。

$$\int_{L_{AB}} \vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{ds} = \int_{L_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

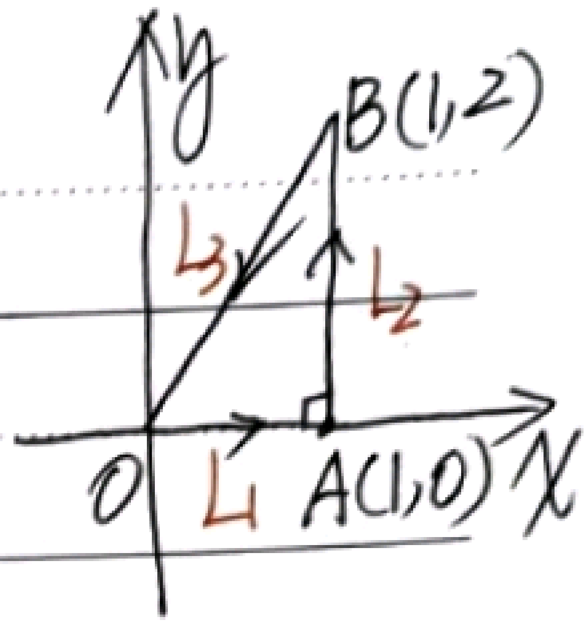



$$= \int_{L_{AB}} \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right) ds \quad (※)$$

(※)表示两类曲线积分可以互相转换。而(※)可化为参数t的定积分。因此，$\int_{L_{AB}} \vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{ds} = \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))\cos\alpha(t) +$ $Q(x(t),y(t),z(t))\cos\beta(t) + R(x(t),y(t),z(t))\cos\gamma(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$

其中$\alpha$对应起点A，$\beta$对应终点B！

例1. 设L为△OAB的正向边界如图所示:




$L=L_1+L_2+L_3$, $\begin{cases} L_1: 0\le x\le 1,\ y=0;\ x=x \\ L_2: 0\le y\le 2,\ x=1;\ y=y \\ L_3: \begin{cases} y=2x \\ x=x \end{cases},\ x:从1\to 0. \end{cases}$

计算 $I=\oint_L xy\,dx+x^2dy$

解: $I=\int_{L_1}xy\,dx+x^2dy+\int_{L_2}xy\,dx+x^2dy+\int_{L_3}xy\,dx+x^2dy$

而 $\int_{L_1}xy\,dx+x^2dy \xlongequal{y=0\Rightarrow dy=0} \int_0^1 x\cdot 0\,dx=0$; $\int_{L_2}xy\,dx+x^2dy \xlongequal[y=y]{x=1,\ dx=0}$

$\int_0^2 1^2dy=2$; $\int_{L_3}xy\,dx+x^2dy \xlongequal[x:\ 1\to 0]{\begin{cases}x=x\\ y=2x\end{cases}} \int_1^0 x\cdot 2x\,dx+x^2d(2x)=\int_1^0 4x^2dx$

$=-\frac{4}{3}$. $\therefore I=0+2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$, 即变力 $\vec{F}(x,y)=(xy,x^2)$ 沿闭路L

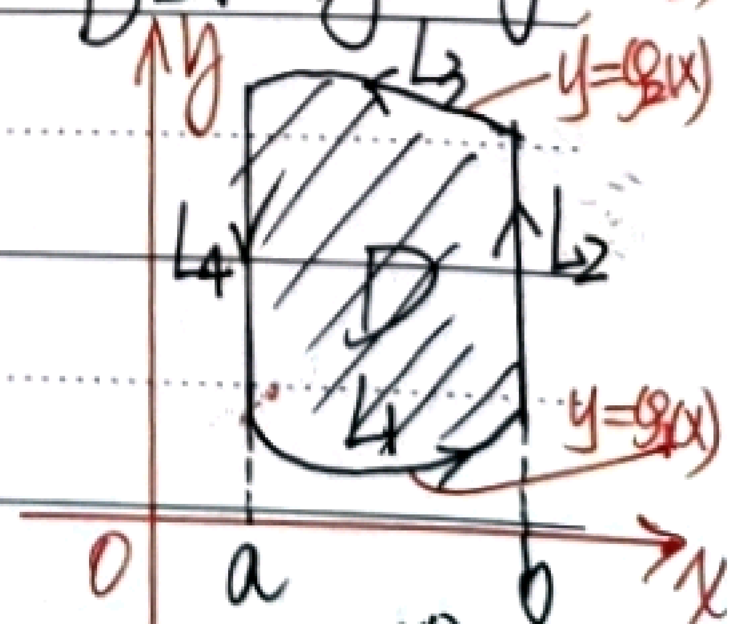
所做的功量为$\frac{2}{3}$。

例2. 设D是xoy平面中的区域, $P(x,y),Q(x,y)\in C^1(D)$, $L=\partial D$

是D的正向边界, 证明: $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$ (格林)

(格林)称为Green(格林)公式。

证: (I) 设D是X-型区域 $\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$




$L=\partial D=L_1+L_2+L_3+L_4$.

(4)

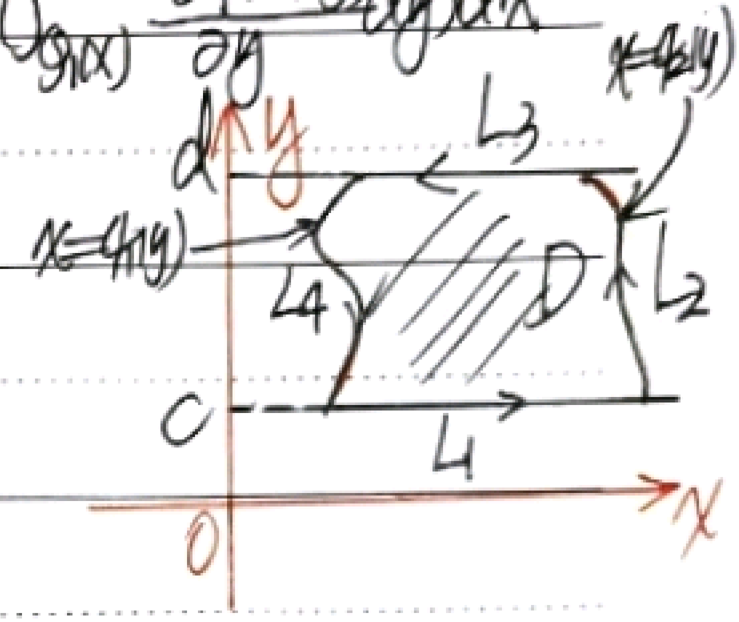
而 $\oint_L P(x,y)dx=\int_{L_1}Pdx+\int_{L_2}Pdx+\int_{L_3}Pdx+\int_{L_4}Pdx$ 且

$\int_{L_1}P(x,y)dx=\int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx$；$\int_{L_2}P(x,y)dx\xlongequal{x=b,\,dx=0}0$；$\int_{L_3}P(x,y)dx$

$=\int_b^a P(x,\varphi_2(x))dx=-\int_a^b P(x,\varphi_2(x))dx$；$\int_{L_4}Pdx\xlongequal{x=a,\,dx=0}0$.

$\therefore \oint_L P(x,y)dx=-\int_a^b[P(x,\varphi_2(x))-P(x,\varphi_1(x))]dx=-\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy\right)dx$

$=-\iint_D\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy$




(四) 设 D 是左右型区域 $\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$

$L=\partial D=L_1+L_2+L_3+L_4$ 如图. 则

$\oint_L Q(x,y)dy=\int_{L_1}Qdy+\int_{L_2}Qdy+\int_{L_3}Qdy+\int_{L_4}Qdy$

$\int_{L_1}Q(x,y)dy\xlongequal{y=c,\,dy=0}0$；$\int_{L_2}Q(x,y)dy=\int_c^d Q(\psi_2(y),y)dy$；$\int_{L_3}Qdy\xlongequal{y=d,\,dy=0}0$

$\int_{L_4}Q(x,y)dy=\int_d^c Q(\psi_1(y),y)dy=-\int_c^d Q(\psi_1(y),y)dy$

$\therefore \oint_L Q(x,y)dy=\int_c^d[Q(\psi_2(y),y)-Q(\psi_1(y),y)]dy=\int_c^d\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dxdy=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy$

(五) 若 D 既是上下型区域又是左右型区域时，(特别是圆域或矩形域) 有

"或曲边矩形域".

$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

特别地，当 $P(x,y)=-y$, $Q(x,y)=x$ 时 有

$$\oint_L -ydx+xdy=\iint_D[1-(-1)]dxdy=2S(D) \Longleftrightarrow$$

$$S(D)=\frac{1}{2}\oint_L -ydx+xdy \quad (公式)$$

例3. 求椭圆 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$ $\theta\in[0,2\pi]$ 的面积。

解：$S(D)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-b\sin\theta)d(a\cos\theta)+(a\cos\theta)d(b\sin\theta)$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab(\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}abd\theta=\pi ab.$$

例4. 计算：$I=\oint_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$，

L是正向圆周：$x^2+y^2=a^2$ ($a>0$, 常)

解：令 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$，

则 $\theta$ 从0到 $2\pi$.

$I=\int_0^{2\pi}\frac{(a\sin\theta)^2+(a\cos\theta)^2}{a^2}d\theta$

$=\int_0^{2\pi}1d\theta=2\pi.$

可以证明，当L是绕原点一周的任意正向曲线(光滑)时，恒有：

$$\oint_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=2\pi.$$

(三)作业：

EX11.3: 1/(1),(3),(4); 2; 3; 4/(1); 5/(1),(2).

即"単连通区域".

注：当平面区域D本身不是"类椭圆域"，但可分割为有限个"类椭圆域"时，可在每个"类椭圆域"上用Green公式，最后相加，仍可得到整个区域D上的Green公式，详见第26讲讲稿。