(周一)

Ex 7.1

T2 (8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n}{(n+\frac{1}{n})^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{n+\frac{1}{n}}=0<1$ 收敛

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3+(-1)^n}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{2}=\dfrac{1}{2}<1$ 收敛

(14) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^k}$ 与 $\int_3^{\infty}\dfrac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^k}dx$ 同敛散

由于 $\int_3^{\infty}\dfrac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^k}dx=\int_3^{\infty}\dfrac{1}{(\ln\ln x)^k}d(\ln\ln x)\overset{\ln\ln x=t}{=}\int_{\ln\ln 3}^{\infty}\dfrac{1}{t^k}dt$

∴ $k>1$ 时原级数收敛，$k\le 1$ 时原级数发散

(15) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\cos\frac{1}{n})^{n^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n^2\ln(\cos\frac{1}{n})}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\cos\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}}$

$(x\to 1,\ \ln x\sim x-1)$ $=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n^2}}}\overset{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}{=}e^{-\frac{1}{2}}<1$ 收敛

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{an}{n+1}\right)^n}=a$

∴ $0<a<1$ 时 收敛 $a>1$ 时 发散

当 $a=1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln\frac{n}{n+1}}{\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{e}\ne 0$ 发散

综上 $0<a<1$ 时 收敛. $a\ge 1$ 时 发散

T3 "⇒" $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 收敛

"⇍" 如 $a_n=(-1)^n$ 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=0$ 收敛 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 不收敛

"⇐" 若 $a_n>0$，反证，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

则由于 $a_n+a_{n+1}>a_n$. 由比较判别法 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 发散

矛盾！ 所以 $a_n>0$ 时，逆命题成立.

T11 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n| \le \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|) = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| + \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 绝对收敛

T12 (3) 对于 $a_n = \left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}\right| = \frac{\sqrt{n}}{n+100}$

当 $n\geq 100$ 时, $\frac{\sqrt{n}}{n+100} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+100}$ 发散，即原级数不绝对收敛

又由于 $\frac{\sqrt{n}}{n+100} = \frac{1}{\sqrt{n}+\frac{100}{\sqrt{n}}}$ $\Rightarrow$ 当 $n\geq 100$ 时 $1/\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+100}\downarrow$

$\therefore$ 由莱布尼兹判别法知原级数收敛

综上原级数条件收敛

(5) $\left|(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}\right| = \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ $(n\geq 3)$ $\Rightarrow$ 原级数不绝对收敛

令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

当 $x>e$ 时, $f'(x)<0$ $\Rightarrow$ 当 $n\geq 3$ 时 $\frac{\ln n}{n}\downarrow$ $\Rightarrow$ 原级数收敛

综上原级数条件收敛

(7) $|(-1)^n(e^{\frac{1}{n}}-1)| = e^{\frac{1}{n}}-1$ 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1$ $\xRightarrow{\text{比较判别法}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-1)$ 发散

又$\because$ $e^{\frac{1}{n}}-1\downarrow$ $\Rightarrow$ 原级数收敛

综上原级数条件收敛

T13 由推论7.16知 $S_n^+, S_n^- \to \infty$，而 $S_n^+ - S_n^- = \sum_{n=1}^{\infty}a_n = A$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n^+}{S_n^-} - 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{S_n^+-S_n^-}{S_n^-} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{S_n^+}{S_n^-} = 1$

(周三)

Ex 7.1 T2 (1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}} = \frac{1}{2} < 1$ 收敛

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000^{n+1}}{(n+1)!}\times\dfrac{n!}{1000^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000}{n+1}=0<1$ 收敛

(13) 令 $f(x)=\ln x-5x^{\frac{1}{5}}$

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-x^{-\frac{4}{5}}=\dfrac{1-x^{\frac{1}{5}}}{x}$，当 $x>1$ 时 $f'(x)<0$ $f(x)\downarrow$

$\therefore \ln n-5n^{\frac{1}{5}}\le f(1)<0 \Rightarrow \dfrac{\ln n}{n^{\frac{5}{4}}}\le 5\dfrac{1}{n^{\frac{21}{20}}}$ 收敛

T12 (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散

但 $\sin\frac{1}{n}\downarrow$ $\Rightarrow$ 原级数条件收敛

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 收敛，$p\le1$ 发散

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}$ 当 $p>0$ 时 收敛，$p\le0$ 时发散

综上 $p>1$ 时 绝对收敛，$0<p\le1$ 时条件收敛，$p\le0$ 时 发散

(9) $n\to\infty$ 时 $1-\cos\frac{p}{n}\sim\frac{1}{2}\left(\frac{p}{n}\right)^2$ 绝对收敛

(10) $n\to\infty$ 时 $\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p\sim\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]^p=\dfrac{1}{2^p}\dfrac{1}{n^{2p}}$

对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2p}}$ $2p\le1$ 发散，$2p>1$ 收敛

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p$ 在 $p>0$ 时收敛，在 $p\le0$ 时发散

综上原级数 $p>\frac{1}{2}$ 时 绝对收敛，$0<p\le\frac{1}{2}$ 时条件收敛，$p\le0$ 时发散

T15 (1) $x=2k\pi$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}=0$

$x\ne2k\pi$ 时 $\left|\sum\limits_{n=1}^{n}\sin nx\right|=\left|\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|$ 有界 且 $\frac{1}{n}\downarrow\to0$

由 Dirichlet 判别法知 收敛

(2) $\left|\sum_{n=1}^{N}\cos\frac{n\pi}{4}\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{N}{4}\pi+\frac{\pi}{8}\right)-\sin\frac{1}{8}\pi}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right|$ 有界 且 $\frac{1}{\ln n}\downarrow\to 0$

$\therefore$ 收敛

(4) $(-1)^n\frac{n-1}{n+1} = (-1)^n\left(1-\frac{2}{n+1}\right) = (-1)^n-(-1)^n\frac{2}{n+2}$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n+2}$ 收敛 $\Rightarrow$ 部分和有界 且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 部分和有界

$\therefore$ $\sum(-1)^n\frac{n-1}{n+1}$ 部分和有界

且 $\frac{1}{100\sqrt{n}}\downarrow\to 0$ $\therefore$ 收敛

周五

Ex 7.2

T2 (1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{ne^{-nx}} = e^{-x}<1 \Rightarrow x>0$

$x=0$ 时 级数显然发散

$\therefore$ 收敛域为 $(0,+\infty)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^{n^2}}{n}\right|} = |x|^n<1 \Rightarrow |x|<1$

当 $x=1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

当 $x=-1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^2}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛

$\therefore$ 收敛域为 $[-1,1)$

(3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|} = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1 \Rightarrow x>0$

当 $x=0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ 收敛

$\therefore$ 收敛域为 $[0,+\infty)$

(7) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{\cos nx}{e^{nx}}\right|} = \frac{1}{e^x} < 1 \Rightarrow x > 0$

当 $x=0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ 发散

$\therefore$ 收敛域为 $(0,+\infty)$

T4 (1) $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ 一致收敛

(2) $\frac{1}{2^n[1+(nx)^2]} < \frac{1}{2^n}$ 一致收敛

(3) $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-1,1)} |u_n(x)| \geq \lim_{n\to\infty} |u_n(x)|\Big|_{x=\frac{n}{n+1}}$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1} > 0$

由一致收敛的必要条件知此级数不一致收敛

(4) 由 $e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x) \geq \frac{1}{2}x^2 \quad x>0$ 时

$\frac{1}{e^{nx}} \leq \frac{1}{\frac{1}{2}(nx)^2} \Rightarrow \frac{x^2}{e^{nx}} \leq \frac{2}{n^2}$ 一致收敛

(5) $\forall \varepsilon>0$, $\exists N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$ 当 $n>N$ 时

$\frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall x\geq 0$ 成立 $\Rightarrow \frac{1}{x+n}$ 一致收敛于 0

而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 部分和有界 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{x+n}$ 一致收敛 $(x\geq 0)$