例 1

若 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 为正定的实对称矩阵, 证明: $\det(\boldsymbol{A}) \leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

例 2

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称正定阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 为对称正定阵的充要条件是 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

定义 3 (与正定阵相关的定义)

设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵, 考虑二次型 $Q(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

1. 称 Q 以及 $\boldsymbol{A}$ 为半正定的 (*positive semidefinite*)[a] 当且仅当 Q 的负惯性指数 $s = 0$, 即, 当且仅当对任意 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$, 有 $Q(\boldsymbol{X}) \geq 0$. 此时, 记 $\boldsymbol{A} \geq 0$.
2. 称 Q 以及 $\boldsymbol{A}$ 为负定的 (*negative definite*) 当且仅当 Q 的负惯性指数 $s = n$, 即, 当且仅当对任意 $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n$, 有 $Q(\boldsymbol{X}) < 0$. 此时, 记 $\boldsymbol{A} < 0$.
3. 称 Q 以及 $\boldsymbol{A}$ 为半负定的 (*negative semidefinite*) 当且仅当 Q 的正惯性指数 $r = 0$, 即, 当且仅当对任意 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$, 有 $Q(\boldsymbol{X}) \leq 0$. 此时, 记 $\boldsymbol{A} \leq 0$.
4. 称 Q 以及 $\boldsymbol{A}$ 为不定的 (*indefinite*) 当且仅当 Q 处于其它情形, 即, 当且仅当 $r > 0$ 且 $s > 0$, 而这也当且仅当存在 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2 \neq \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n$, 有 $Q(\boldsymbol{X}_1) < 0 < Q(\boldsymbol{X}_2)$.

[a] 直接翻译的话, 应该称之为正半定的; 不过我们这儿不采取这样的说法.

命题 4

对实二次型 $Q(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 我们有如下的等价刻划:

1. $\boldsymbol{A}\geq 0$;
2. $\boldsymbol{A}$ 相合于它的相抵标准形 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$;
3. $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为非负实数;
4. 存在 $m\times n$ 维矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$; (可以由此推出, $m\geq \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$)
5. 存在 $m\times n$ 维矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$, 其中 $m=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$;
6. 存在 $n\times n$ 维矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$;
7. 所有的主子式皆非负.

例 5

在命题 4 中，若只有 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式非负，不能推出 $\boldsymbol{A} \geq 0$. 例如，考虑 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(1, 0, -1)$.

例 6

若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 维实矩阵，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$ 为半正定的实对称阵. 这是因为对任意的 m 维列向量 $\boldsymbol{X}$，二次型 $Q(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{X} = \|\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{X}\|^2 \geq 0$，从而 Q 是半正定的二次型.

由此看出，$\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}) \geq 0$. 当然，在 $m \geq n$ 时，利用秩的性质，我们很容易证明这一点. 在一般情形，也可以采用 *Binet–Cauchy* 公式. 另外，若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 维复矩阵，则 $\det(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}^\mathsf{T})$ 为非负实数. 这儿的证明类似，但是要用到酉空间的性质.

例 7

设 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实矩阵, $\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}$ 的全部特征值为 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. 证明: 如果 μ 是 $\boldsymbol{B}$ 的实特征值, 那么 $\sqrt{\lambda_1} \leq |\mu| \leq \sqrt{\lambda_n}$.

例 8

设 $n \geq 2$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定的实对称矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶半正定的实对称矩阵, 证明: $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \geq |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$.

回忆

1. 在欧氏空间 V 中，我们有 $2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2$.
2. 在 $\mathbb{R}^n$ 的标准内积中，我们有 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$.

例 9

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正定对称矩阵，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$. 求 n 元二次函数 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 的最小值，其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$.

例 10

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正定对称矩阵，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$. 求 n 元线性函数 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 在约束条件 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq 1$ 下的最大值，其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$.

例 11

证明: n 阶半正定的实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必满足 $\det(\boldsymbol{A}) \leq \left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\right)^n$.

例 12

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶半正定实对称方阵. 证明:

$$\det(\boldsymbol{A})^{1/n}\det(\boldsymbol{B})^{1/n} \leq \frac{1}{n}\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}).$$