例 4.2.48. 设有分块矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_{11}\in F^{p\times p}$, $\boldsymbol{A}_{22}\in F^{q\times q}$. 证明: $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}_{11}$ 和 $\boldsymbol{A}_{22}$ 都是可逆的.

证明. 先设 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 从而矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{I}_{p+q}$ 有解. 我们可以对 $\boldsymbol{X}$ 做相同的分块: $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12}\\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{X}_{11}\in F^{p\times p}$, $\boldsymbol{X}_{22}\in F^{q\times q}$. 于是方程化为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12}\\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_p & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_q\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{X}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{X}_{21}&=\boldsymbol{I}_p,\\ \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{X}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{X}_{22}&=\boldsymbol{O},\\ \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{X}_{21}&=\boldsymbol{O},\\ \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{X}_{22}&=\boldsymbol{I}_q.\end{aligned}$$

由此不难依次看出, $\boldsymbol{A}_{22}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{X}_{22}=\boldsymbol{A}_{22}^{-1}$; $\boldsymbol{X}_{21}=\boldsymbol{O}$; $\boldsymbol{A}_{11}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{X}_{11}=\boldsymbol{A}_{11}^{-1}$; $\boldsymbol{X}_{12}=-\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}$. 从而 $\boldsymbol{A}$ 的逆 $\boldsymbol{X}$ 具有指定的形式.

反之, 若 $\boldsymbol{A}_{11}$ 和 $\boldsymbol{A}_{22}$ 可逆, 则上面给出的 $\boldsymbol{X}$ 显然满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{I}$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 可逆. □

习题 4.2.49. 对于分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1\ \boldsymbol{A}_2)\in F^{m\times(m+n)}$, 若方阵 $\boldsymbol{A}_1$ 可逆, 求出所有的 $\boldsymbol{B}\in F^{(m+n)\times m}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}_m$.

4.3 行列式

行列式的定义 从这一节开始, 每一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 都可以和一个称为矩阵的的行列式的标量相对应. 这个数值是否为零, 将告诉我们矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否为可逆矩阵. 另外, 行列式的几何意义是这个矩阵的 n 个列向量 (或等价地, 它的 n 个行向量) 在 n 维空间中张成的平行多面体的有向体积.

对于方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 它的**行列式** (determinant) 将被记作 $\det(\boldsymbol{A})$ 或 $|\boldsymbol{A}|$ 或

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n}\\ \vdots & \vdots \qquad \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn}\end{vmatrix}.$$

行列式的概念是由解方程组而引入的.

(1) 考虑方程 $ax = b$, 显然当 $a \neq 0$ 时, 方程有唯一解 $x = \frac{b}{a}$. 由此, 对于 1×1 的矩阵 $\boldsymbol{A} = a$ (标量), 我们定义 $\det(\boldsymbol{A}) = a$. 此时为了避免与实数的绝对值或复数的模相混淆, 我们一般不写成 $|a|$, 但是允许写成 $|\boldsymbol{A}|$.

(2) 考虑含两个未知元 x_1 与 x_2 的两个线性方程构成的方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 不难看出该方程组有唯一的解:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \tag{4.2}$$

考虑其系数矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix}$. 对于这样的 2 阶方阵, 我们定义其**行列式**为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

于是, (4.2) 中的解可以用较为规律的形式表示出来:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{4.3}$$

(3) 类似地, 我们可以考虑含三个未知元 x_1, x_2 与 x_3 的三个线性方程构成的方程组:

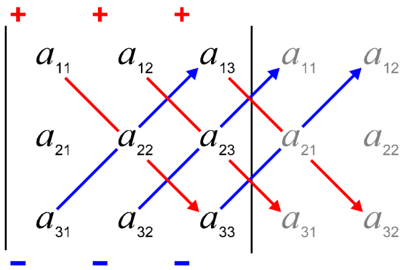
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{4.4}$$

考虑其系数矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. 对于这样的 3 阶方阵, 我们定义其**行列式为**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}.$$

下面的图 (来自维基百科) 在一定程度上可以帮助记忆, 方便直接写出三阶行列式的值.



在系数矩阵的行列式不为零的条件下, 不难验证 (留作练习), 线性方程组 (4.4) 有唯一解:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \tag{4.5}$$

注 4.3.1. *对于由含 n 个未定元的 n 个线性方程构成的方程组, 在其系数矩阵的行列式不为零的条件下, 我们可以证明其存在唯一的解, 而其解可以用类似于公式 (4.3) 和 (4.5) 的方法轻松写出; 这是克莱姆 (Cramer) 法则的主要内容. 在本节稍后的位置会学习到.*

习题 4.3.2. *令 $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中为了讨论的方便, 可以假定 a, b, c 皆为正数. 利用初等的方法, 计算由 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{0}$ 为顶点构成的平行四边形的面积. 再利用定义分别计算 2 阶方阵 $(\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v})$ 和 $(\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{u})$ 的行列式. 解释一下你的 “发现”.*

上面从 $n = 2$ 到 $n = 3$ 的讨论, 实际上反映了一种递归定义的方法. 下面来详细阐述.

对于方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 $n > 1$, 对于 $1 \le i, j \le n$, 我们暂时记 M_{ij} 为由 $\boldsymbol{A}$ 删去包含 a_{ij} 所在的行和列后得到的 $(n-1) \times (n-1)$ 方阵的行列式 (由于我们在递归地考虑阶数为 n 的情形, 因此此时可以假定 $n-1$ 阶方阵的行列式已经有了恰当的定义). 例

如, 在上面 $n=3$ 的情形中, 我们有

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

M_{ij} 将被称为行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ 关于元素 a_{ij} (强调的是其位置 (i,j)) 的**余子式** (minor), 而 $A_{ij}:=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 将被称为行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ 关于元素 a_{ij} 的**代数余子式** (cofactor). 此时, 对于 $n\geq 2$, 我们递归地定义:

我们这儿的定义与教材上略有不同, 但是不用担心.

$$\det(\boldsymbol{A}):=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}a_{r1}M_{r1}=\sum_{r=1}^{n}a_{r1}A_{r1}. \tag{4.6}$$

该定义中的求和式在之后将被称为**按第一列展开**来求行列式.

例 4.3.3. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为**上三角方阵**, 即对任意的 $1\leq j<i\leq n$, 有 $a_{ij}=0$. 我们来验证 $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对角线元素的乘积. 这是因为

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{A}) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}M_{k1} \qquad (\text{其中对于 } k\geq 2,\ \text{有 } a_{k1}=0) \\ &= a_{11}M_{11}=a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0\cdots 0 & & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{仍为上三角方阵的行列式}} \xlongequal[\text{关于阶数 } n]{\text{归纳法}} a_{11}(a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}).\end{aligned}$$

行列式的常用基本性质 这儿, 我们先简单地列举一些行列式的常用性质. 其证明留到稍后的位置再展开.

定理 4.3.4. *n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式可以按任意的行或列展开来计算:*

$$\det(\boldsymbol{A}) \xlongequal{\text{按第 } i \text{ 行展开}} \sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik} \xlongequal{\text{按第 } j \text{ 列展开}} \sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}.$$

定理 4.3.5 (行列式的基本性质)**.**

教材定理 4.3.2

(1) 交换方阵 $\boldsymbol{A}$ 的两行得到方阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $\det(\boldsymbol{B})=-\det(\boldsymbol{A})$.

(2) 将方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 行乘以标量 λ 后得到方阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $\det(\boldsymbol{B})=\lambda\det(\boldsymbol{A})$. 特别地, $\det(\lambda\boldsymbol{A})=\lambda^n\det(\boldsymbol{A})$.

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 的某一个行向量是两个向量的和, 则 $\det(\boldsymbol{A})$ 可以拆成两个行列式之和. 例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a'_{22}+a''_{22} & a'_{23}+a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a''_{22} & a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(4) 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的两行相同, 则 $\det(\boldsymbol{A}) = 0$. 等价地, 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的两行成比例, 则 $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.

(5) 将方阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一行的常数倍加到该矩阵的另一行后得到方阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $\det(\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A})$.

定理 4.3.6. *转置运算不改变方阵的行列式:* $\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})$. 教材定理 4.3.4

推论 4.3.7. *定理 4.3.5 中的行操作也可以改为相应的列操作.*

定理 4.3.8. *设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为同阶的方阵, 则 $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$. 特别地, $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{BA})$.* 教材定理 4.3.6

行列式的计算　关于一般行列式的计算, 我们最基本的技巧是用 "Gauss 消元法" 将方阵化为上三角或下三角的形式. 这儿需要非常熟悉三种行 (列) 初等变换操作带来的行列式的变化.

$$\begin{aligned} &r_i \leftrightarrow r_j, \qquad \lambda r_i, \qquad \lambda r_i \to r_j, \\ &c_i \leftrightarrow c_j, \qquad \lambda c_i, \qquad \lambda c_i \to c_j. \end{aligned}$$

例 4.3.9. 求解行列式

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$$

解. 这儿可以用 $(1,1)$ 位置的 -1 消去第一行或第一列的其它元素, 但是不要混合行与列的操作.

$$D \xlongequal[\substack{c_1\to c_3 \\ c_1\to c_4}]{c_1\to c_2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 1 行来展开}} (-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{或直接展开}]{\text{可以对该 3 阶行列式继续作类似操作}} (-1)\cdot 64 = -64.$$

□

指明教材中例题 4.3.10 中的行列式为

$$M_{kn} = \left|\begin{array}{ccc:ccc} x & & & & & \\ -1 & \ddots & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & -1 \quad x & & & \\ \hdashline & & & -1 & x & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & x \\ & & & & & -1 \end{array}\right|,$$

其左上角为 $k-1$ 阶方阵, 右下角为 $n-k$ 阶方阵.

学生课后自学教材 §4.3.3 中的例题, 其中例 4.3.11 中关于 Vandermonde 行列式的公式必须牢记.*

习题 4.3.10. 设 $p_i(x)$ 是关于变元 x 的 i 次多项式, 其 x^i 前的系数为 c_i. 证明:

$$\begin{vmatrix} p_0(x_1) & p_1(x_1) \cdots\cdots p_{n-1}(x_1) \\ p_0(x_2) & p_1(x_2) \cdots\cdots p_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ p_0(x_n) & p_1(x_n) \cdots\cdots p_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = c_0c_1\cdots c_{n-1}\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

例 4.3.11. 设 $A = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, 而 M_{ij} 是其中 (i,j) 元素所对应的余子式, 求 $-M_{41}+M_{42}-M_{43}+M_{44}$.

解. **(解法一)** 可以直接计算 $M_{41}=-7$, $M_{42}=-1$, $M_{43}=-6$, $M_{44}=-6$. 因此, 所求为 $7-1+6-6=6$.

---

*克莱因所著的《古今数学思想》里介绍: 范德蒙德 (Vandermonde) 是第一个对行列式理论做出连贯的逻辑的阐述 (即把行列式理论与线性方程组求解相分离) 的人, 虽然他也把它应用于解线性方程组. 他还给出了一条法则, 用二阶子式和它们的余子式来展开行列式. 从集中到对行列式本身进行研究这一点来说，他是这门理论的奠基人.

(解法二) 若 A_{ij} 为对应的代数余子式, 则

$$\text{所求} = A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44} = 1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+1\cdot A_{44}$$

$$\xlongequal[\text{沿第四行}]{\text{反用行列式的展开}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{-r_4\to r_2 \\ -r_4\to r_3}]{-r_4\to r_1} \begin{vmatrix} 0 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一列展开}} 1\cdot(-1)^{4+1}\cdot \begin{vmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(-6)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\cdot 1 = 6. \qquad \square$$

例 4.3.12. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \cdots\cdots a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \cdots\cdots a_2+b_n \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 \cdots\cdots a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

解.

$$\text{原式} \xlongequal{\text{按第一列分开}} \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 \cdots\cdots a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 \cdots\cdots a_2+b_n \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_n & a_n+b_2 \cdots\cdots a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 \cdots\cdots a_1+b_n \\ b_1 & a_2+b_2 \cdots\cdots a_2+b_n \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ b_1 & a_n+b_2 \cdots\cdots a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\text{第二个行列式} \\ \text{第一列提出 } b_1}]{\substack{\text{第一个行列式} \\ -c_1\to c_2 \\ -c_1\to c_3 \\ \vdots \\ -c_1\to c_n}} \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \cdots\cdots b_n \\ a_2 & b_2 \cdots\cdots b_n \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_n & b_2 \cdots\cdots b_n \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} 1 & a_1+b_2 \cdots\cdots a_1+b_n \\ 1 & a_2+b_2 \cdots\cdots a_2+b_n \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 1 & a_n+b_2 \cdots\cdots a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\text{第二个行列式} \\ (-b_2)c_1\to c_2 \\ \vdots \\ (-b_n)c_1\to c_n}]{\substack{\text{第一个行列式} \\ \text{第 2 列提出 } b_2 \\ \vdots \\ \text{第 } n \text{ 列提出 } b_n}} b_2b_3\cdots b_n \begin{vmatrix} a_1 & 1 \cdots\cdots 1 \\ a_2 & 1 \cdots\cdots 1 \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_n & 1 \cdots\cdots 1 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} 1 & a_1 \cdots\cdots a_1 \\ 1 & a_2 \cdots\cdots a_2 \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ 1 & a_n \cdots\cdots a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[n\geq 3?]{\substack{\text{需要依据 } n \text{ 判断} \\ \text{是否有相同的列}}} \begin{cases} a_1+b_1, & \text{若 } n=1, \\ b_2\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = b_2a_1 - b_2a_2 + b_1a_2 - b_1a_1, & \text{若 } n=2, \\ 0, & \text{若 } n\geq 3. \end{cases} \qquad \square$$

例 4.3.13 (利用加边来计算行列式)**.** 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}_{n\times n},$$

其中每个 $\lambda_i \neq 0$.

解. **(解法一)**

$$D_n = \left|\begin{array}{c:cccc} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hdashline 0 & a_1+\lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{array}\right|_{(n+1)\times(n+1)} \xlongequal[\substack{\vdots \\ 1\to r_{n+1}}]{\substack{-r_1\to r_2 \\ -r_1\to r_3}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & \lambda_1 & & & \\ -1 & & \lambda_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\frac{1}{\lambda_n}c_{n+1}\to c_1]{\substack{-\frac{1}{\lambda_1}c_2\to c_1 \\ \vdots}} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i} & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{上三角矩阵}} \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\left(1+\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}\right).$$

若将上面的计算结果展开, 可以得到一个不显式含分母项的多项式. 它是 D_n 在允许 $\lambda_i = 0$ 时的计算结果; 这一点很容易直接验证.

(解法二)

$$D_n = \left|\begin{array}{c:cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 1 & a_1+\lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{array}\right|_{(n+1)\times(n+1)} \xlongequal[-a_nc_1\to c_{n+1}]{\substack{-a_1c_1\to c_2 \\ -a_2c_1\to c_3 \\ \vdots}} \cdots. \qquad \square$$

例 4.3.12 也可以用加边的方法帮助快速讨论.

习题 4.3.14. 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & \lambda-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda-a_n^2 \end{vmatrix}.$$

例 4.3.15 (递归公式法)**.** 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 2 \\ & & & 1 & 3 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

解. 按第一行展开, 我们得到递推公式

$$D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}, \qquad n \geq 3.$$

此时, **推荐**用例 4.2.17 中提到的特征方程法来求解. 不过这儿, 我们可以直接计算,

$$D_n - 2D_{n-1} = D_{n-1} - 2D_{n-2} = \cdots = D_2 - 2D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\cdot 3 = 7 - 6 = 1.$$

故

$$D_n + 1 = 2(D_{n-1}+1) = 2^2(D_{n-2}+1) = \cdots = 2^{n-1}(D_1+1) = 2^{n-1}\cdot 4.$$

这说明 $D_n = 2^{n+1} - 1$. □

习题 4.3.16. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & & \\ b & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a \\ & & & b & a+b \end{vmatrix}_{n\times n}.$$