第36讲 幂级数(power series)：$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$

(2023.5.31).

(一) Abel定理：

(1). 若 $x_0\neq 0$ 是 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的一个收敛点，则对 $\forall x$：$|x|<|x_0|$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 都绝对收敛；(2). 若 x_1 是 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的一个发散点，则对 $\forall x$：$|x|>|x_1|$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 都发散。

(二) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径与收敛区间：　radius：半径.

(1) 令 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho(x)<1\Longrightarrow|x|<\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}\triangleq R$

称 R 为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径，若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$，则 $R=+\infty$；若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=+\infty$，则 $R=0$. 此时 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 仅有一个收敛点 $x=0$。

(2). 称 $(-R,R)$ 为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 中内闭一致收敛 且在 $(-R,R)$ 中绝对收敛。

(三) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$，在 $(-R,R)$ 中的三个分析性质：

性质(1)：对$\forall x_0\in(-R,R)$，由a_nx^n在x_0处都C知$S(x)$

在x_0处也C，即$\lim\limits_{x\to x_0}S(x)=S(x_0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lim\limits_{x\to x_0}a_nx^n$，$\forall x_0\in(-R,R)$，R是收敛半径。

性质(2)：对$\forall x\in(-R,R)$，$\int_0^x S(x)dx=\int_0^x S(u)du=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nu^ndu$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nu^ndu=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}a_n$，且积分级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$的收敛

半径仍为R。

性质(3)：对$\forall x\in(-R,R)$，$S'(x)=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$，

(四)例题：

例1，利用$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n=1-x+x^2-x^3+\cdots=\frac{1}{1+x}$，$\forall x\in(-1,1)$，求证：

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$的和函数分别为$\ln(1+x)$、$\arctan x$.

例2，求下列幂级数的收敛域与和函数$S(x)$：

(1). $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$，(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$，(4). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(x+1)^{n-1}$

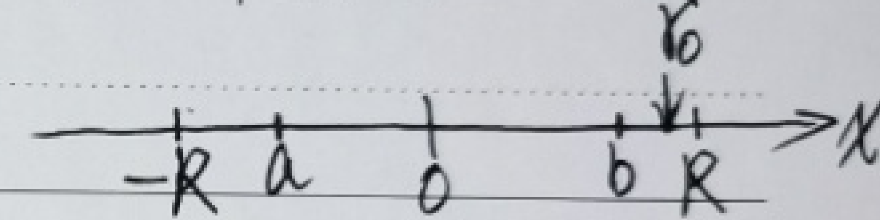
例3. 求下列数项级数的和S.

(1). $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}$，(2). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$，(3). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$.

四、作业：ex7.3：1/(2),(4),(5),(6)；3/(1),(2),(3)；4/(1),(4).

(六) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 中内闭一致收敛的

证明：



对 $\forall [a,b]\subset(-R,R)$，都存在 $0<r_0<R$，使 $[a,b]\subset[-r_0,r_0]\subset(-R,R)$

对 $\forall x\in[a,b]$，有 $|a_n x^n| = |a_n||x|^n \leq |a_n r_0^n|$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n r_0^n|$ 收敛.

综优级数判法：$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛。由 $[a,b]$ 在 $(-R,R)$ 中的任意性知，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $(-R,R)$ 中内闭一致收敛（而在 $(-R,R)$ 中绝对收敛）。故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在其收敛区间内具有非常优良的性质。

37

(七) 重点讲：$f(x)$ 的 Taylor 级数：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

第26讲(续)：

(二) 求下列幂级数的收敛半径R、收敛区间、收敛域I及和函数S(x)：

(1). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$，(2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(x+1)^{n-1}$.

(三) 求下列数项级数的和S：

(1). $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}$，(2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$，(3). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$.

解(二)(1). 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1\Rightarrow R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\frac{1}{1}=1$，

即收敛半径为$R=1$，且$x=\pm1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{n(n+1)}$绝对收敛（$\because \left|\frac{(\pm1)^n}{n(n+1)}\right|=\frac{1}{n(n+1)}\sim\frac{1}{n^2}$（$n\to\infty$）且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ conv）故收敛区间为$(-R,R)=(-1,1)$.

收敛域为$I=[-1,1]$，令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$，$x\in(-1,1)$

$F(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，$x\in(-1,1)$. 则 $\begin{cases}S(x)=\frac{1}{x}F(x), & x\neq0\\ S(0)=0, & x=0\end{cases}$

即 $F'(x)=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，$x\in(-1,1)\Rightarrow F'(0)=0$，

$F''(x)=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，$\forall x\in(-1,1)$

$\int_0^x F''(x)dx=\int_0^x F''(u)du=\int_0^x dF'(u)=\int_0^x \frac{1}{1+x}dx=\int_0^x \frac{du}{1+u}=-\int_0^x \frac{d(1-u)}{1-u}=-\ln(1-x)$

即 $F'(u)\Big|_0^x=F'(x)-F'(0)=-\ln(1-x)$，由 $F'(0)=0\Rightarrow F'(x)=-\ln(1-x)$，$|x|<1$

$\Rightarrow \int_0^x F'(u)du=-\int_0^x \ln(1-u)du \Rightarrow \int_0^x dF(u)=F(u)\Big|_0^x=F(x)-F(0)$ （※1）

而 $\int_0^x \ln(1-u)du=u\ln(1-u)\Big|_0^x-\int_0^x \frac{-u}{1-u}du=x\ln(1-x)+\int_0^x \frac{(u-1)+1}{1-u}du$

$=x\ln(1-x)-x+\int_0^x \frac{du}{1-u}=x\ln(1-x)-x-\int_0^x \frac{d(1-u)}{1-u}$

$=x\ln(1-x)-x-\ln(1-u)\Big|_0^x=x\ln(1-x)-x-\ln(1-x)$ 且 $F(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0^{n+1}}{n(n+1)}=$

0，故 $F(x)\overset{(※1)}{=}-\int_0^x \ln(1-u)du=-(x\ln(1-x)-x-\ln(1-x))=(1-x)\ln(1-x)+x$，$(x\neq0)$

故 $\begin{cases} S(x)=\frac{1}{x}F(x)=\frac{1}{x}[(1-x)\ln(1-x)+x]，& x\neq0 \\ S(0)=0 & ，x=0. \end{cases}$

解(一)/(2). ∵ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(x+1)^{n-1}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(\frac{x+1}{3}\right)^{n-1}\xrightarrow{\frac{x+1}{3}=u}\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n^2u^{n-1}$

令 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2u^{n-1}=F(u)$. 从 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2u^{n-1}\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1\Rightarrow$

$R=\left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)^{-1}=1$ 故 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2u^{n-1}$ 的收敛半径为 $R=1$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(x+1)^{n-1}$

的收敛半径为 $R=1$，当 $u=\pm1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}n^2u^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(\pm1)^{n-1}n^2$ div，$(a_n\not\to0)$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2u^{n-1}$ 的收敛区间为 $(-1,1)$，

(2)

但幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(x+1)^{n-1}$ 的收敛区间应从 $|u|=\left|\frac{x+1}{3}\right|<1$ 中解出

为：$-4<x<2$ 即 一(2)的收敛区间为 $(-4,2)$。

由 $F(u)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2u^{n-1}$，$u\in(-1,1)$ 两边在 $[0,u]$ 上积分：

$$\int_0^u F(v)dv=\int_0^u\sum_{n=1}^{\infty}n^2v^{n-1}dv=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\int_0^u v^{n-1}dv=\sum_{n=1}^{\infty}nu^n,\ u\in(-1,1)\quad (※2)$$

令 $A(u)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nu^n=u+2u^2+3u^3+4u^4+\cdots+nu^n+\cdots$

则 $uA(u)=\quad 0+u^2+2u^3+3u^4+4u^5+\cdots+(n-1)u^n+\cdots$

相减得 $(1-u)A(u)=u+u^2+u^3+u^4+\cdots+u^n+\cdots=\frac{u}{1-u}$，$\forall u\in(-1,1)$

$\therefore A(u)=\frac{u}{(1-u)^2}$ （这种求 $A(u)$ 的方法称为错位法（中学））

由(※2)可知 $\int_0^u F(v)dv=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nu^n=A(u)=\frac{u}{(1-u)^2}$，两边关于 u 求导得：

$$\left(\int_0^u F(v)dv\right)'_u=F(u)=\left(\frac{u}{(1-u)^2}\right)'_u=\frac{1\cdot(1-u)^2+2(1-u)u}{(1-u)^4}=\frac{1-u+2u}{(1-u)^3}=\frac{1+u}{(1-u)^3}$$

故 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(x+1)^{n-1}=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2u^{n-1}=\frac{1}{3}F(u)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1+u}{(1-u)^3}\Big|_{u=\frac{x+1}{3}}$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{9(x+4)}{(2-x)^3}=\frac{3(x+4)}{(2-x)^3}$，$\forall x\in(-4,2)$ 为所求和函数。

解 三(1) 利用 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)\Rightarrow e^1=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}$ (3)

而$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+2n+1}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)+1}{(n-1)!}+2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+2e+e=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}+3e=e+e+3e=5e$。

(注：$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}\overset{令n-2=m}{=\!=\!=\!=}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}=e$)

解(三)/(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}-\frac{1}{0!}=e-1$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m!}$

$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}-(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!})=e-2$ 故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=e-1-(e-2)=1$.

解(三)/(3)：考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{3n-2}}{3n-2}$，易知收敛半径$R=1$,

收敛区间$(-1,1)$，收敛域$(-1,1]$．令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{3n-2}}{3n-2}$，$x\in(-1,1)$

则$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}x^{3n-2}}{3n-2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{3n-3}=1-x^3+x^6-x^9+\cdots=\frac{1}{1+x^3}$，$x\in(-1,1)$

$\Rightarrow\int_0^x S'(u)du=\int_0^x\frac{du}{1+u^3}\Rightarrow S(u)\Big|_0^x=S(x)-S(0)=\int_0^x\frac{du}{(u+1)(u^2-u+1)}$，$S(0)=0$.

$\therefore S(x)=\frac{1}{3}\int_0^x\left(\frac{1}{u+1}+\frac{2-u}{u^2-u+1}\right)du=\frac{1}{3}[\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})$

$-\sqrt{3}\arctan(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}})]$，$\forall x\in(-1,1)$

又$S(x)$在$x=1$处左连续，故$S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}=\lim_{x\to1^-}S(x)=\frac{1}{3}(\ln2+\frac{2}{\sqrt{3}})$

(4).