关于ex11.5第8题的参考解法:

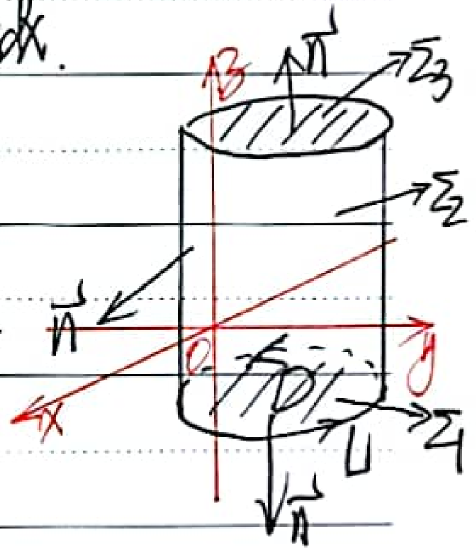
(1°) ∵ $\vec{V}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}+0\vec{k}$，∴ 在立体V上的Gauss

公式为: $\oiint\limits_{\partial V} P(x,y)dydz+Q(x,y)dzdx+0dxdy=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+0\right)dxdydz$. 此

(2°) 上式右边 $=\int_0^1\iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdydz=\iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy$.

(∵ $\iint\limits_D\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right)dxdy$ 与 z 无关)

且(*)的左边 $=\oiint\limits_{\partial V}P(x,y)dydz+\oiint\limits_{\partial V}Q(x,y)dzdx$.



在 $\oiint\limits_{\partial V}P(x,y)dydz$ 中: 设 $\partial V=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$,

其中 $\Sigma_1: z=0$, $\Sigma_3: z=1$, 此时 $\cos\alpha=\cos\frac{\pi}{2}$

$=0\Rightarrow dydz=\cos\alpha\, dS=\cos\frac{\pi}{2}dS=0$.

从而, $\oiint\limits_{\partial V}P(x,y)dydz=\iint\limits_{\Sigma_1}P(x,y)dydz+\iint\limits_{\Sigma_2}P(x,y)dydz+\iint\limits_{\Sigma_3}P(x,y)dydz$

$$=0+\iint\limits_{\Sigma_2}P(x,y)dydz+0$$

设 Σ_2 由柱面 $\Sigma_4: x=g_1(y)$ 方向朝左, 与 $\Sigma_5: x=g_2(y)$, 方向朝右,

$y\in[c,d]$ 组成. 则 $\iint\limits_{\Sigma_2}P(x,y)dydz=(+1)\iint\limits_{D_{yz}}P(g_2(y),y)dydz+$

$+(-1)\iint_{D_{yz}} P(g_1(y),y)dydz = \int_0^1\left(\int_c^d P(g_2(y),y)dy\right)dz - \int_0^1\left(\int_c^d P(g_1(y),y)dy\right)dz$

$= \int_c^d P(g_2(y),y)dy - \int_c^d P(g_1(y),y)dy = \oint_L P(x,y)dy$

同理，$\oiint_{\partial V} Q(x,y)dzdx = \iint_{\Sigma_1} Q(x,y)dzdx + \iint_{\Sigma_2} Q(x,y)dzdx + \iint_{\Sigma_3} Q(x,y)dzdx$

其中 $\Sigma_1: z=0$，$\Sigma_3: z=1$，此时 $\cos\beta = \cos\frac{\pi}{2} = 0$，$dzdx = \cos\beta dS$ $=0$，∴ $\oiint_{\partial V} Q(x,y)dzdx = \iint_{\Sigma_2} Q(x,y)dzdx \xlongequal{dzdx=-dxdz} -\iint_{\Sigma_2} Q(x,y)dxdz$.

同样可推出 $\iint_{\Sigma_2} Q(x,y)dxdz = \oint_L Q(x,y)dx$ 即

$\oiint_{\partial V} Q(x,y)dzdx = -\iint_{\Sigma_2} Q(x,y)dxdz = -\oint_L Q(x,y)dx$，从而 (*)式

左边 $= \oint_L -Q(x,y)dx + P(x,y)dy$ = (*)式右边 $= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy$.

(3) 取 $\tilde{P}(x,y) = -Q(x,y)$，$\tilde{Q}(x,y) = P(x,y)$，则有

$\oint_L \tilde{P}(x,y)dx + \tilde{Q}(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial \tilde{Q}(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}(x,y)}{\partial y}\right)dxdy$ (*1)

(*1) 即是Green公式。其中 $L=\partial D$，是D的正向边界。

(2).