内容回顾

1. $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数称为 $\boldsymbol{A}$ 的秩 (rank), 记作 $r(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$. 约定: 零矩阵的秩为 0.
2. $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = r$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 r 阶非零子式, 且所有 $r+1$ 阶子式为 0.
3. 阶梯形矩阵的秩是它的非零行数.
4. 初等变换不改变矩阵的秩.
5. 我们会通过初等行变换, 将 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的非零行的行数 r 就是 $\boldsymbol{A}$ 的秩. 另外, 在求秩的时候, 没有必要计算其约化标准形, 阶梯标准形就够用了.

定义

若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 同为 $m \times n$ 矩阵, 且存在可逆的 m 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和可逆的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PAQ}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相抵 (也称为等价, *equivalent*). 不难验证, 相抵关系是一个等价关系, 即满足:

- (反身性) $\boldsymbol{A}$ 与自身相抵;
- (对称性) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵, 则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 也相抵;
- (传递性) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵, 且 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相抵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 也相抵.

所有的 $m \times n$ 矩阵依照相抵关系分为不同的相抵等价类 (同一相抵等价类的矩阵互相相抵, 两个不同相抵等价类的矩阵互不相抵). 每个相抵等价类里都存在唯一的相抵标准形, 形如 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

定理 1

同型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相抵的充要条件是 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.

对任意的矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$, 在运算允许的条件下, 我们有如下的公式.

1. $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.
2. $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \leq \min(\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}), \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}))$.
3.
   1. $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}) \geq= \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.
   2. $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}) \geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.
   3. $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}) \geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$.
4. $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) \geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$.
5. $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.

例 2 (Frobenius 不等式)

假定 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 分别为 $n \times m$, $m \times p$, $p \times q$ 矩阵. 试证:
$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{BC}) \leq \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC})$.

推论 3 (Sylvester 不等式)

假定 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别为 $n \times m$, $m \times p$ 矩阵. 那么有: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) \leq m + \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})$.

2023 年 4 月 13 日

对于 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 我们总有 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) \leq \min(m, n)$.

定义

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$. 若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩的. 若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = n$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩的.
2. 可逆的方阵又称为满秩矩阵, 不可逆的方阵又称为降秩矩阵.

例 4

设矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$ 是行满秩的, 即 $m = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) \leq n$. 证明: 存在矩阵 $\boldsymbol{B} \in F^{n\times m}$, 使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_m$.

例 5

设 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times k}$, $\boldsymbol{B} \in F^{k\times n}$ 都是列满秩的矩阵. 证明: $\boldsymbol{AB}$ 也是列满秩的矩阵.

例 6

1. (矩阵的满秩分解定理) 对于矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$, 若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = r > 0$, 则存在列满秩的矩阵 $\boldsymbol{G} \in F^{m\times r}$ 和行满秩的矩阵 $\boldsymbol{H} \in F^{r\times n}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{GH}$.
2. 上面的分解定理反过来也成立, 即对于列满秩的矩阵 $\boldsymbol{G} \in F^{m\times r}$ 和行满秩的矩阵 $\boldsymbol{H} \in F^{r\times n}$, 我们有 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{GH}) = r$.

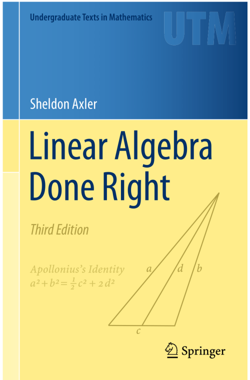
注

课后自学教材例题 4.5.5, 并注意到: 每个秩为 r 的矩阵不能表示为少于 r 个秩为 1 的矩阵的和.

数组空间及其子空间

有时间的同学可以多翻翻

《线性代数应该这样学》



1. F 总是一个数域, 例如 $F = \mathbb{Q}$ (有理数域), $\mathbb{R}$ (实数域) 或 $\mathbb{C}$ (复数域).
2. $F^n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in F\}$ 是 F 上的 n 维数组构成的集合.
3. 其元素依照具体情形可以写成行向量或列向量的形式 (如果没有具体要求, 建议将之视为列向量).
4. F^n 中的加法与数乘是对应坐标的操作.
5. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^m$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in F$, 则称 $\boldsymbol{\alpha} := \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个线性组合 (线性表示).
6. 我们也会用 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 来不规范地表示向量组 (list of vectors) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$. 相应地, 这儿的 m 称为该向量组的长度; 注意, 这并不是指单个向量的长度 n.

定义

设 V 是 F^n 的一个非空子集, 满足

- (保加法) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 有 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V$,
- (保数乘) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$ 和任意的 $\lambda \in F$ 有 $\lambda\boldsymbol{\alpha} \in V$,

则称 V 是 F^n 的一个(线性) 子空间. 等价地, F^n 的非空子集 V 是一个子空间当且仅当对任意正整数 m, 对任意数组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和任意标量 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$, 有线性组合 $\sum_{i=1}^m \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i \in V$.

例 7

零子空间$\{\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)\}$ 与全空间 F^n 是 F^n 的两个平凡子空间.

例 8

给定 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$, 则可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示的向量的全体为

$$\mathrm{Span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m) = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i \;\middle|\; \lambda_i \in F \right\}.$$

这是 F^n 的一个线性子空间, 我们将称其为由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的子空间或张成的子空间 (*spanning subspace*), 并称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 为该子空间的一组生成元.

例 9

在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 坐标轴和坐标平面都是子空间. 其中, xy 坐标平面

$$Oxy := \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

是由 $(1, 0, 0)$ 和 $(0, 1, 0)$ 生成的子空间.

注

1. 由向量组生成子空间的生成元一般并不唯一. 例如, Oxy 平面也可以由 $(1, 0, 0)$ 和 $(1, 1, 0)$ 生成. 另一方面, 可以证明, 任意的 F^n 的子空间都可以由有限多个向量生成.
2. 不难看出, 由生成元生成的子空间其实是包含这些生成元的最小的子空间, 并且任何子空间都包含零向量 $\mathbf{0}$. 由此, 我们约定: 零空间 $\{\mathbf{0}\}$ 是由零向量生成的, 也可以视作例 8 中 $m = 0$ 时的退化情形, 即零空间是由空集生成的子空间.

例 10

考虑三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中满足 $x+y+z=1$ 的点的集合 V. 几何上, 这是一个过 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ 这三个点的平面. 由于 $\mathbf{0} \notin V$, V 不是一个子空间. 换一个角度, 由于向量的加法 $(1,0,0)+(0,1,0) \notin V$, 我们同样也看出 V 不是一个子空间.

例 11

在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的直线和平面是子空间的充要条件是它们过原点. 平凡子空间 (0 维和 3 维) 和过原点的直线 (1 维)、平面 (2 维) 是 $\mathbb{R}^3$ 中的所有子空间. 其中的维数的严格定义将在稍后的小节中给出.

线性相关与线性无关

定义

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$. 若存在不全为零的标量 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$, 使得 $\sum_{i=1}^m \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}$, 则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关; 否则, 称它们线性无关.

注

1. 若 $m = 1$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$.
2. 若 $m \geq 2$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$ 线性相关的充要条件是向量组中某个向量可以被剩下的向量组线性表示.
3. 包含零向量的向量组一定线性相关.

定义

线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中的方程称为线性相关(或线性无关) 当且仅当其对应的增广矩阵 $(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})$ 中对应的行向量组线性相关 (或线性无关). 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中的方程线性相关的充要条件是该系统中有冗余的方程.

定理 12

设向量组 $S_1=\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{i_k}\}$ 是向量组 $S_2=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 的一个子集. 若 S_1 线性相关, 则 S_2 也线性相关; 等价地, 若 S_2 线性无关, 则 S_1 也线性无关.

定义

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中的每一个向量都可以用向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell$ 线性表示，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell$ 线性表示.

定理 13

1. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell$ 线性表示的充要条件是

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle \quad \subseteq \quad \langle \boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell \rangle .$$

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\ell$ 线性表示，并且 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\ell$ 可以由 $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ 线性表示，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ 线性表示，即，向量组的线性表示具有传递性.

定理 14

设 $m \geq 2$. 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$ 线性相关的充要条件是存在 $i_0 \in \{1, 2, \ldots, m\}$, 使得

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_0-1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_0+1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle,$$

即向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_0}$ 对于生成子空间 $\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle$ 是多余的.

定理 15

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n \times m$ 矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量. 则以下三条等价:

1. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关;
2. (关于 λ 的) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ 有非零解;
3. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不是列满秩的, 即, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) < m$.

推论 16

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$, 而 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times m}$ 是以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 为列向量的矩阵.

1. 若 $m > n$, 即向量组长度超过数组空间维数, 则 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) \leq \min(m, n) = n < m$, 即 $\boldsymbol{A}$ 不是列满秩的, 故它的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.
2. 若 $m = n$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ m 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) < m \Leftrightarrow$ 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.

一组数组向量在将其写成列向量时是线性相关的，当且仅当将其写成行向量时是线性相关的. 另一方面，转置运算不改变矩阵的秩，也不改变方阵的行列式.

推论 17

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$，而 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$ 是以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为行向量的矩阵.

1. 若 $m>n$，则 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \le \min(m,n) = n < m$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.
2. 若 $m=n$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ m 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) < m$ $\Leftrightarrow$ 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.