第七次习题课

胡铁宁

2023 年 7 月 4 日

目录

1 引言

本次习题课将会按照教材上相应知识点的顺序, 以做往年题的方式为同学们回顾后半学期的线性代数知识. 本讲义不涉及的 2020 年及之后的真题可供大家练手.

2 线性变换

在这一部分, 我们引入了线性变换的定义, 并学习了线性变换的矩阵表示. 接着, 我们研究了线性变换在不同基下的矩阵, 并定义了矩阵的相似. 最后学习了特征值、特征向量、相似对角化和上三角化. 特别是坐标变换和相似对角化的计算需要熟练掌握.

第一道题考察了坐标变换公式, 分别对应于教材上的式 5.18(P134) 和式 6.7(P164).

习题 1 (17–18 春 4[1]). 设 σ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换, 在基 (I): $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ -8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

[1]这表示 2017—2018 学年第二学期线性代数 (B1) 期末考试第 4 题.

(1) 求 σ 在基 (II): $\boldsymbol{\beta}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + 4\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵;

(2) 设向量 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\alpha}_1 + 6\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_3$, 求 $\sigma(\boldsymbol{\xi}), \sigma(\boldsymbol{\eta})$ 分别在基 (I) 下的坐标.

解. (1) 直接计算:

$$\begin{aligned}
\sigma(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) &= \sigma\left((\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \sigma(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ -8 & -7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ -8 & -7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix} 16 & -32 & -\frac{32}{3} \\ \frac{38}{3} & 18 & \frac{16}{3} \\ \frac{44}{3} & 16 & \frac{25}{3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

故 $\begin{pmatrix} 16 & -32 & -\frac{32}{3} \\ \frac{38}{3} & 18 & \frac{16}{3} \\ \frac{44}{3} & 16 & \frac{25}{3} \end{pmatrix}$ 即为所求.

(2) 直接计算:

$$\begin{aligned}
\sigma(\boldsymbol{\xi}) &= \sigma(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ -8 & -7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} -56 \\ -78 \\ -56 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 (I) 下的坐标为 $(-56,-78,-56)^{\mathrm{T}}$. 又由于

$$\begin{aligned}
\sigma(\boldsymbol{\eta}) &= \sigma(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\\
&= \sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\\
&= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\-8&-7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\\
&= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}9\\17\\32\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{\eta}$ 在基 (II) 下的坐标为 $(9,17,32)^{\mathrm{T}}$.

□

注 1.1. *在本题求解过程中, 并没有生硬地套用坐标变换公式, 而是相当于重新推导了一遍. 本题运算量很大 (尤其是第一问, 我也不知道算没算对), 可以看出运算能力也是极其重要的.*

下面一题考察了线性变换的定义以及线性变换特征值和特征向量的计算.

习题 2 (12–13 春 1 5[2])**.** *设 $V=\{(a_2x^2+a_1x+a_0)\mathrm{e}^x : a_2,a_1,a_0\in\mathbb{R}\}$, V 中元素按函数通常的数乘与加法构成的线性空间. 对任意 $p(x)\in V$, 定义 V 上的变换 $\mathscr{A}: p(x)\mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)$.*

(1) *证明: $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换;*

(2) *求 $\mathscr{A}$ 在基 $\mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^x, x^2\mathrm{e}^x$ 下的矩阵;*

(3) *求 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量.*

解. (1) 只需验证线性变换的定义, 即保加法和数乘运算. 由微分运算的线性性可知: 对任意的 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}, p_1(x),p_2(x)\in V$, 有

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(\lambda_1p_1(x)+\lambda_2p_2(x)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lambda_1p_1(x)+\lambda_2p_2(x))\\
&= \lambda_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p_1(x))+\lambda_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p_2(x))\\
&= \lambda_1\mathscr{A}(p_1(x))+\lambda_2\mathscr{A}(p_2(x)).
\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换.

[2]这里指 2012—2013 学年第二学期线性代数 (B1) 期末考试 1 第 5 题.

(2) 根据定义,

$$\mathscr{A}(\mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^x, x^2\mathrm{e}^x) = (\mathrm{e}^x, (x+1)\mathrm{e}^x, (x^2+2x)\mathrm{e}^x) = (\mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^x, x^2\mathrm{e}^x)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

所以 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 即为所求.

(3) 先把线性变换的特征值问题转化为矩阵的特征值问题. 令

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

则不难看出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,1,1$, 特征向量的一组基为 $(1,0,0)^{\mathrm{T}}$. 于是线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征值为 $1,1,1$, 特征向量的一组基为 $(\mathrm{e}^x, (x+1)\mathrm{e}^x, (x^2+2x)\mathrm{e}^x)(1,0,0)^{\mathrm{T}} = \mathrm{e}^x$, 所有特征向量为 $\lambda\mathrm{e}^x, \lambda \in \mathbb{R}$ 且 $\lambda \neq 0$.

□

习题 3 (16–17 秋 2(2))**.** *判断: 若 0 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 一定是奇异矩阵.*

习题 3 答案是正确, 可以直接利用特征值的定义或利用行列式与特征值的关系证明, 此处略去.

下面两题考察的知识点都是矩阵的特征值与迹、行列式之间的关系.

习题 4 (18–19 秋 1(4))**.** *设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵, 且存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1} + \boldsymbol{I}$. 如果 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个特征值, 则 $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i =$ ____.*

解. 答案为 n.

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i = \operatorname{tr}\boldsymbol{B} = \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1} + \boldsymbol{I}\right) = \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right) - \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\right) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{I}_n) = \operatorname{tr}\boldsymbol{I}_n = n.$$

□

习题 5 (17–18 春 1(3))**.** *若方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{3\times 3}$ 的特征值为 $1, -3, -4$ 则 $\det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}) =$ ____.*

解. 答案为 12.

只需注意到 $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2, -2, -3$. □

下面一题考察了复方阵可相似对角化的条件, 具体做法与讲义 20230511 例 6.4.17 相同, 此处仅叙述证明思路.

习题 6 (18–19 秋 6)**.** *设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 且 $\boldsymbol{A}^2 = 2\boldsymbol{A}$. 证明: $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵.*

证明思路. 先证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能有 $0,2$, 再证明两个特征值的特征子空间维数之和为 n. □

习题 7 (12–13 春 2 6)**.** *设* $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ *均为* n *阶方阵,* $\boldsymbol{A}$ *有* n *个互异的特征值, 且* $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$*. 证明:*

(1) $\boldsymbol{B}$ *相似于对角阵;*

(2) *存在唯一的次数不超过* $n-1$ *的多项式* $f(x)$*, 使得* $\boldsymbol{B}=f(\boldsymbol{A})$*.*

证明. (1) 见 hw_ans_10 习题 2.

(2) 由上一问的证明的过程知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可以同时对角化, 即存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\operatorname{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)$. 由 hw_ans_5 习题 13 可知, 存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $f(\lambda_i)=\mu_i,i=1,\cdots,n$. 不难验证 $f(x)$ 即为所求. □

注 7.1. *本习题有不少跳跃的步骤, 用到了多个习题的结论. 可见我们做过的习题的重要性.*

下一题考察了 Schur 定理 (见讲义 20230516 定理 6.4.22, 类似于教材上的定理 6.4.3).

习题 8 (12–13 秋 2(2))**.** *判断: 设* $\boldsymbol{A}$ *为 3 阶实方阵; 若* $\boldsymbol{A}$ *不实相似于上三角阵, 则* $\boldsymbol{A}$ *不复相似于对角阵.*

解. 答案是错误. 考虑方阵 $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$, 则它有复特征值 $0,\mathrm{i},-\mathrm{i}$, 构成反例. □

3 欧几里得空间

在这一部分, 我们讨论欧氏空间. 其中, Schmidt 正交化是一个计算的重点. 然后, 我们研究了正交变换以及对称变换. 最后, 我们证明了实对称矩阵可以正交相似对角化, 相关的计算也极其重要.

习题 9 (18–19 春 6)**.** *设* V *为* n *维欧式空间,* $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\in V$*, 对于* s *阶矩阵* $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{s\times s}$*, 其中* $a_{ij}=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)$*, 证明: 矩阵* $\boldsymbol{A}$ *的秩等于向量组* $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ *的秩.*

证明. 见 hw_ans_11 习题 8. □

习题 10 (17–18 秋 2(3))**.** *判断: 设* $\mathbb{R}^n$ *中,* $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ *为正交向量组. 若* $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ *线性无关, 且* $\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ *也线性无关, 则有* $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ *线性相关.*

解. 答案是错误. 反例: $n=2,\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0),\boldsymbol{\beta}=(0,1),\boldsymbol{\gamma}=(1,1)$. □

习题 11 (16–17 秋 4)**.** 设 $V = \{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2\}$ 为次数不超过 2 的实系数多项式构成的线性空间.

(1) 证明: $(f(x), g(x)) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$ 定义了 V 上的一个内积.

(2) 应用 *Schmidt* 正交化方法将向量组 $\{1, x\}$ 改造成相对 (1) 中所定义内积的标准正交向量组.

解. (1) 逐条验证内积的三条定义即可, 这里略去.

(2) 记 $\boldsymbol{\alpha}_1 = 1, \boldsymbol{\alpha}_2 = x$. 令 $\boldsymbol{\beta}_1 = 1$. 再令

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = x - 1.$$

进行单位化, 则

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)$$

为所求.

□

习题 12 (13–14 秋 1(5))**.** 设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 均为 n 维欧氏空间 V 上的线性变换, 且对 V 中任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 都有 $(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{B}(\boldsymbol{\beta}))$; 如果 $\mathscr{A}$ 在 V 的标准正交基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则 $\mathscr{B}$ 在此标准正交基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的矩阵为 ____.

证明. 答案为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

记 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, 则利用简单的定义和性质可得, 对任意 $i = 1, \cdots, n$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}\boldsymbol{e}_i &= \sum_{k=1}^{n} (\mathscr{B}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\mathscr{A}\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i\right)\boldsymbol{e}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\boldsymbol{e}_k.
\end{aligned}$$

□

下一题需要熟悉正交变换的定义和等价条件 (见教材定义 7.3.1、定理 7.3.1 和 7.3.2).

习题 13 (13–14 春 6)**.** 在 $\mathbb{R}^2$ 上定义内积如下:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1,$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求度量矩阵 $\boldsymbol{G}$ 使得

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G} \boldsymbol{y};$$

(2) 用 *Schmidt* 正交化方法从基 $\{(1,0)^{\mathrm{T}}, (0,1)^{\mathrm{T}}\}$ 构造一组标准正交基;

(3) 证明: $\mathbb{R}^2$ 上线性变换 $\mathscr{A}$ 是正交变换, 当且仅当 $\mathscr{A}$ 在基 $\{(1,0)^{\mathrm{T}}, (0,1)^{\mathrm{T}}\}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{G}$.

解. (1) $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) 过程略. 答案为 $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \right\}$.

(3) 由题可知, 线性变换 $\mathscr{A}$ 在标准正交基 $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \right\}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}.$$

于是, $\mathscr{A}$ 是正交变换当且仅当 $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$ 是正交矩阵. 利用正交矩阵的定义不难计算得到欲证明的结论 (这里略去).

□

习题 14 (18–19 春 2(2)). 判断: 若两个同阶实对称矩阵具有相同的特征多项式, 则这两个方阵相似.

解. 正确.(注意到实对称矩阵可以正交相似对角化) □

习题 15 (13–14 春 5). 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称方阵, 其特征值分别为 $5, -1, -1$, 且特征值 5 所对应的特征向量为 $(1,1,1)$.

(1) 设 V 为特征值 -1 所对应的特征子空间, 求 V 的一组标准正交基;

(2) 利用 (1) 确定矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解. (1) 注意到实对称矩阵可以相似对角化并且属于不同特征值的特征向量相互垂直, 我们可以看出 -1 所对应的特征子空间为 $V = \langle (1,-1,0), (1,0,-1) \rangle$, 并不难得到 V 的一组标准正交基为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$.

(2) 由 (1) 可得

$$\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathrm{diag}(5, -1, -1) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$.

□

习题 16 (16–17 秋 5). 设 $\boldsymbol{M}$ 是 $2n$ 阶方阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{A}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$ 的 n 阶对称实方阵.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的所有特征值;

(2) 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

解. (1) 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征多项式为

$$\det\begin{pmatrix}(\lambda-1)\boldsymbol{I}&-\boldsymbol{A}\\-\boldsymbol{A}&(\lambda-1)\boldsymbol{I}\end{pmatrix}\xlongequal{(\lambda-1)\boldsymbol{A}r_1\to r_2}\det\begin{pmatrix}(\lambda-1)\boldsymbol{I}&-\boldsymbol{A}\\\lambda(\lambda-2)\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

可见 $\boldsymbol{M}$ 的所有特征值为 $0,2$.

(2) 先解方程 $\begin{pmatrix}-\boldsymbol{I}&-\boldsymbol{A}\\-\boldsymbol{A}&-\boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$. 对系数矩阵做初等行变换:

$$\begin{pmatrix}-\boldsymbol{I}&-\boldsymbol{A}\\-\boldsymbol{A}&-\boldsymbol{I}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{A}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

不难看出该齐次线性方程组的解空间就是 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\-\boldsymbol{I}\end{pmatrix}$ 的列空间. 类似地, 齐次线性方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&-\boldsymbol{A}\\-\boldsymbol{A}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$ 的解空间是 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{I}\end{pmatrix}$ 的列空间. 故 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}$.

□

4 实二次型

这一部分讨论了实二次型的分类, 并详细研究了 (半) 正定二次型.

下面一题考察了正交相似.

习题 17 (18–19 秋 5). 设实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$. 可以经过正交变换 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$ 化为标准形 $y_2^2+2y_3^2$.

(1) 确定 a 和 b 的取值.

(2) 求出满足题设条件的一个正交变换.

解. (1) 先写出该二次型的矩阵, 记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{pmatrix}.$$

由题目给出的标准形知上面的矩阵的特征值为 $0,1,2$, 并将其代入 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式解得 $a=b=0$.

(2) 答案可以是 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. □

下一题考察了正、负惯性指数. 同学们应灵活应用三种化二次型为标准形的方法 (正交相似、配方、初等变换).

习题 18 (13–14 秋 1(4))**.** 若二次型 $x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的正惯性指数是 2, 则 a 的取值范围是 ____.

解. 答案为 $-2<a<2$. □

习题 19 (15–16 秋春 5)**.** 给定直角坐标系中二次曲面的方程 $xy+2xz+2y+2z-1=0$. 通过变量的线性变换及坐标系的平移将其化为标准型, 并确定该二次曲面的类型.

解. 作变换 $(x,y,z)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})^{\mathrm{T}}$ 得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y}^2-\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{z}^2+\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x}+\sqrt{10}\tilde{y}+\sqrt{10}\tilde{z}-1=0,$$

即 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{y}+\sqrt{5})^2-\frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{z}-\sqrt{5})^2+\frac{2\sqrt{5}}{5}\tilde{x}-1=0$. 再令 $x'=\frac{2\sqrt{5}}{5}\tilde{x}-1, y'=\tilde{y}+\sqrt{5}, z'=\tilde{z}-\sqrt{5}$ 就得到标准形

$$\frac{\sqrt{2}}{2}y'^2-\frac{\sqrt{2}}{2}z'^2+x'=0.$$

类型为双曲抛物面. □

最后几题均与正定矩阵有关, 此处结论很多, 须牢记. 此外, (半) 负定矩阵和半正定矩阵也须熟悉.

习题 20 (17–18 秋 1(6))**.** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=(t\boldsymbol{I}_3+\boldsymbol{A})^2, t\in\mathbb{R}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 正定当且仅当 t 满足 ____.

解. 答案是 $t \neq 0$ 且 $t \neq 2$. 计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0,2,2$. 故 $\boldsymbol{B}$ 的所有特征值为 $t^2,(t+2)^2,(t+2)^2$, 它们均大于零. 然后解得答案. □

习题 21 (18–19 秋 7)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 s 个非零向量, 且满足 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=0, 1\leqslant i<j\leqslant s$. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证明. 设有 s 个实数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 满足 $\sum_{i=1}^s \lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}$. 则

$$0=\left(\sum_{i=1}^s \lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=\sum_{i=1}^s \lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=\lambda_j\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j,\quad j=1,\cdots,s.$$

由正定矩阵的定义可知 $\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j>0$, 故 $\lambda_j=0, j=1,\cdots,s$. 因此, $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关. □

注 21.1. 也可设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 再考虑 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}_i, 1\leqslant i\leqslant s$.

习题 22 (17–18 春 6)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵, 且 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$.

(1) 请给出 $\boldsymbol{A}$ 的可能的全部互异特征值.

(2) 试证明: 当 n 为奇数时, $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 正定.

解. (1) 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 其对应一个特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$. 则

$$\mathbf{0}=(\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}=(\lambda^2+3\lambda+2)\boldsymbol{\alpha}.$$

故 $\lambda^2+3\lambda+2=0$, 解得 $\boldsymbol{A}$ 的可能的全部互异特征值为 $-1,-2$.

(2) 由题可知 $\boldsymbol{A}^*=(\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}$ 为实对称矩阵且特征值为 $-\det\boldsymbol{A}>0$ 或 $-\frac{1}{2}\det\boldsymbol{A}>0$(因为 $\det\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值之乘积, 小于零), 所以 $\boldsymbol{A}^*$ 正定.

□

习题 23 (17–18 秋 6)**.** 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正定矩阵, d_{n-1} 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶顺序主子式. 证明: $\det\boldsymbol{A}\leqslant a_{nn}d_{n-1}$.

证明. 利用讲义 20230615 例 8.4.14 思路一的做法. 略. □

5 结语

根据上面的往年题目, 我们可以总结: 复习时多看教材、讲义和作业题, 考场上一定会遇见惊喜. 预祝各位取得理想的成绩!