例

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 为 4 个 $n$ 阶复方阵, 满足 $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA}$. 证明:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = \left| \boldsymbol{AD} - \boldsymbol{CB} \right|.$$

# 秩与相抵

## 定义

1. 对于矩阵 $\boldsymbol{A}$, 我们仍然用 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$ 来表示由 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ 行、第 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ 列元素构成的 $r$ 阶子阵, 其行列式称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $r$ 阶子式.
2. $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数称为 $\boldsymbol{A}$ 的秩 (*rank*), 记作 $r(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$. 约定: 零矩阵的秩为 0.

## 例

研究矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**注**

1. 若 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$, 则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) \le \min(m,n)$.
2. $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = r$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 $r$ 阶非零子式, 且所有 $r+1$ 阶子式为 $0$ (若 $r=\min(m,n)$, 最后一条视为自动成立).
3. $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$.
4. 对于 $\lambda \neq 0$, 有 $\mathrm{rank}(\lambda\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$.
5. $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$. 若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = 1$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的各个行向量互成比例, 其各个列向量也互成比例.

## 例 (阶梯形矩阵的秩是它的非零行数)

考虑阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots\cdots & 0 & a_{1j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2j_2} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{rj_r} \cdots & a_{rn} \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix},$$

其中 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$, 并且对于 $i = 1, 2, \ldots, r$ 有 $a_{ij_i} \neq 0$.

**定理 1**

初等变换不改变矩阵的秩.

**推论 2**

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为 $m$ 阶可逆矩阵, $\boldsymbol{Q}$ 为 $n$ 阶可逆矩阵, 则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{PAQ}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.

# 求矩阵的秩的常用方法

一般地，我们会通过初等行变换，将 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的非零行的行数 $r$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的秩. 另外，在求秩的时候，没有必要计算其约化标准形，阶梯标准形就够用了.

**例**

研究 $4\times 5$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 0 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

# 矩阵的相抵等价

**定义**

若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 同为 $m \times n$ 矩阵, 且存在可逆的 $m$ 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和可逆的 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PAQ}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相抵 (也称为等价, *equivalent*). 不难验证, 相抵关系是一个等价关系, 即满足:

- (反身性) $\boldsymbol{A}$ 与自身相抵;
- (对称性) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵, 则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 也相抵;
- (传递性) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵, 且 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相抵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 也相抵.

所有的 $m \times n$ 矩阵依照相抵关系分为不同的相抵等价类 (同一相抵等价类的矩阵互相相抵, 两个不同相抵等价类的矩阵互不相抵). 每个相抵等价类里都存在唯一的相抵标准形, 形如 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

**定理 3**

同型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相抵的充要条件是 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.

**例**

检验矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

是否相抵.

## 例

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为任意矩阵, 证明:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}).$$

**例**

对于矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

若已知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 3$, 求出 $a$ 和 $b$.

**例**

对于矩阵 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in F^{n\times p}$, 证明:

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \leq \min(\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}), \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})).$$

例 (教材 P116, 作业题 #41, 公式需要牢记)

1. 
   1. $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}) \geq= \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.
   2. $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}) \geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.
   3. $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}) \geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$.
2. $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) \geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$.
3. $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$.

### 例 (Frobenius 不等式)

假定 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 分别为 $n \times m$, $m \times p$, $p \times q$ 矩阵. 试证: $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{BC}) \le \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC})$.

### 推论 4

假定 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 分别为 $n \times m$, $m \times p$, $p \times q$ 矩阵.

1. (Sylvester 不等式): $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) \le m + \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})$.
2. 当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$ 时, 有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{BC}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{ABC})$.

**例**

设 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为幂等矩阵, 即 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$. 证明: $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.

**例**

对于 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 证明:

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = n.$$

**例**

设 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为对合矩阵, 即 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$. 求方阵 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 的相抵标准形.