之前提到过, 对于 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 我们总有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\le\min(m,n)$. 接下来, 我们引入满秩的概念.

**定义 4.5.23.** (1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}\in F^{m\times n}$. 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=m$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是**行满秩**的. 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=n$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是**列满秩**的.

(2) 可逆的方阵又称为**满秩矩阵**, 不可逆的方阵又称为**降秩矩阵**.

**例 4.5.24.** 设矩阵 $\boldsymbol{A}\in F^{m\times n}$ 是行满秩的, 即 $m=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\le n$. 证明: 存在矩阵 $\boldsymbol{B}\in F^{n\times m}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}_m$.

证明. 利用相抵标准形, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 满足 $\boldsymbol{PAQ}=(\boldsymbol{I}_m,\boldsymbol{O})$, 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{I}_m,\boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}^{-1}$, 那么可以取 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}$ 即可. □

**例 4.5.25.** 设 $\boldsymbol{A}\in F^{m\times k}$, $\boldsymbol{B}\in F^{k\times n}$ 都是列满秩的矩阵. 证明: $\boldsymbol{AB}$ 也是列满秩的矩阵.

证明. 由于列满秩的条件, 我们有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=k$, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})=n$. 另外, 利用 Sylvester 不等式, 我们有

$$n=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})-k\le\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\le\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})=n,$$

从而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=n$, 即 $\boldsymbol{AB}$ 列满秩. □

**例 4.5.26.** (1) (**矩阵的满秩分解定理**) 对于矩阵 $\boldsymbol{A}\in F^{m\times n}$, 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=r>0$, 则存在列满秩的矩阵 $\boldsymbol{G}\in F^{m\times r}$ 和行满秩的矩阵 $\boldsymbol{H}\in F^{r\times n}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{GH}$.

(2) 上面的分解定理反过来也成立, 即对于列满秩的矩阵 $\boldsymbol{G}\in F^{m\times r}$ 和行满秩的矩阵 $\boldsymbol{H}\in F^{r\times n}$, 我们有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{GH})=r$.

证明. (1) 由 $\boldsymbol{A}$ 的相抵标准形知存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}\in F^{m\times m}$ 和 $\boldsymbol{Q}\in F^{n\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

此时,

$$\boldsymbol{A}=\underbrace{\left(\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\right)}_{\boldsymbol{G}}\underbrace{\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\right)}_{\boldsymbol{H}}.$$

其中, 由于乘一个可逆矩阵不改变矩阵的秩, 我们有

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{G})=\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\right)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=r.$$

类似地, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{H})=r$.

(2) 一方面, 我们有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{GH})\le\operatorname{rank}(\boldsymbol{H})=r$. 另一方面, 由 Sylvester 不等式可知, 我们有

$$r=\operatorname{rank}(\boldsymbol{G})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{H})-r\le\operatorname{rank}(\boldsymbol{GH}).\qquad\square$$

**注 4.5.27.** *学生课后自学教材例题 4.5.5, 并注意到: 每个秩为 $r$ 的矩阵不能表示为少于 $r$ 个秩为 1 的矩阵的和.*

**习题 4.5.28.** 设方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\le 1$.

(1) 对于正整数 $s$, 求 $\boldsymbol{A}^s$. (提示: 用满秩分解定理)

(2) 求行列式 $\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})$. (提示: 用 *Sylvester* 行列式公式, 即教材习题 *#25*)

**习题 4.5.29.** 设矩阵 $\boldsymbol{A}\in F^{3\times 2}$ 和 $\boldsymbol{B}\in F^{2\times 3}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}$. 证明: $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}9&0\\0&9\end{pmatrix}$. (提示: 教材习题 *#42*)

# 第五章 线性空间

在这一章中 $F$ 总是一个数域, 例如 $F=\mathbb{Q}$ (有理数域), $\mathbb{R}$ (实数域) 或 $\mathbb{C}$ (复数域). 我们研究 $F$ 上的线性空间, 其中最简单的情形就是 $F$ 上的数组构成的空间.

## 5.1 数组空间及其子空间

正如在第一章中所约定的, $F^n \coloneqq \{\,(a_1,a_2,\dots,a_n) \mid a_i \in F\,\}$ 是 $F$ 上的 $n$ 维数组构成的集合, 其元素依照具体情形可以写成行向量或列向量的形式 (如果没有具体要求, 建议将之视为列向量). $F^n$ 中的加法与数乘是对应坐标的操作. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m \in F^m$, $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m \in F$, 则称 $\boldsymbol{\alpha} \coloneqq \sum_{i=1}^m \lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个**线性组合** (**线性表示**) (linear combination).

在本章中, 我们也会用 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 来不规范地表示**向量组** (list of vectors) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$. 相应地, 这儿的 $m$ 称为该向量组的**长度**; 注意, 这并不是指单个向量的长度 $n$. 更一般地, 我们引入如下的抽象概念.

**定义 5.1.1.** *设 $V$ 是 $F^n$ 的一个非空子集, 满足*

*(保加法) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in V$, 有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V$,*

*(保数乘) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$ 和任意的 $\lambda \in F$ 有 $\lambda\boldsymbol{\alpha} \in V$,*

*则称 $V$ 是 $F^n$ 的一个 (**线性**)**子空间** (subspace). 等价地, $F^n$ 的非空子集 $V$ 是一个**子空间**当且仅当对任意正整数 $m$, 对任意数组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和任意标量 $\lambda_1,\dots,\lambda_m \in F$, 有线性组合 $\sum_{i=1}^m \lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i \in V$.*

**例 5.1.2.** **零子空间**$\{\mathbf{0}=(0,0,\dots,0)\}$ 与**全空间** $F^n$ 是 $F^n$ 的两个**平凡子空间**.

从定义出发, 我们很容易验证以下的重要事实.

**例 5.1.3.** 给定 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$, 则可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示的向量的全体为

$$\operatorname{Span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m) = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle \coloneqq \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i \,\middle|\, \lambda_i \in F \right\}.$$

这是 $F^n$ 的一个线性子空间, 我们将称其为由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ **生成的子空间**或**张成的子空间** (*spanning subspace*), 并称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 为该子空间的一组**生成元**.

**例 5.1.4.** 在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 坐标轴和坐标平面都是子空间. 其中, $xy$ 坐标平面

$$Oxy \coloneqq \{ (x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

是由 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$ 生成的子空间.

**注 5.1.5.** (1) 由向量组生成子空间的生成元一般并不唯一. 例如, $Oxy$ 平面也可以由 $(1,0,0)$ 和 $(1,1,0)$ 生成. 另一方面, 可以证明, 任意的 $F^n$ 的子空间都可以由有限多个向量生成.

(2) 不难看出, 由生成元生成的子空间其实是包含这些生成元的最小的子空间, 并且任何子空间都包含零向量 $\mathbf{0}$. 由此, 我们约定: 零空间 $\{\mathbf{0}\}$ 是由零向量生成的, 也可以视作例 *5.1.3* 中 $m = 0$ 时的退化情形, 即零空间是由空集生成的子空间.

**例 5.1.6.** 考虑三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中满足 $x + y + z = 1$ 的点的集合 $V$. 几何上, 这是一个过 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ 这三个点的平面. 由于 $\mathbf{0} \notin V$, $V$ 不是一个子空间. 换一个角度, 由于向量的加法 $(1,0,0) + (0,1,0) \notin V$, 我们同样也看出 $V$ 不是一个子空间.

**例 5.1.7.** 在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的直线和平面是子空间的充要条件是它们过原点. 平凡子空间 (0 维和 3 维) 和过原点的直线 (1 维)、平面 (2 维) 是 $\mathbb{R}^3$ 中的所有子空间. 其中的维数的严格定义将在稍后的小节中给出.

## 5.2 线性相关与线性无关

**定义 5.2.1.** 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$. 若存在不全为零的标量 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$, 使得 $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}$, 则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ **线性相关** (*linearly dependent*); 否则, 称它们**线性无关** (*linearly independent*).

**注 5.2.2.** (1) 若 $m = 1$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$.

(2) 若 $m \geq 2$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$ 线性相关的充要条件是向量组中某个向量可以被剩下的向量组线性表示. 下面给出简要证明.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, $\sum_{i=1}^m \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}$, 其中 $\lambda_{i_0} \neq 0$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_{i_0} = -\sum_{i \neq i_0} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \boldsymbol{\alpha}_i$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_{i_0}$ 可以由其它向量线性表示.

反之, 在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中, 若某个 $\boldsymbol{\alpha}_{i_0}$ 可以由其它的向量线性表示: $\boldsymbol{\alpha}_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i$, 则 $\sum_{i=1}^m \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}$, 其中补充定义 $\lambda_{i_0} = -1$. 故, $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

**例 5.2.3.** 包含零向量的向量组一定线性相关, 这是因为向量组长度至少为 2 时该零向量是其余向量的以零为系数的线性组合即可, 而向量组长度为 1 时也是显然的.

**定义 5.2.4.** 线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 中的方程称为**线性相关** (或**线性无关**) 当且仅当其对应的增广矩阵 $(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b})$ 中对应的行向量组线性相关 (或线性无关).

故线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 中的方程线性相关的充要条件是该系统中有冗余的方程.

**定理 5.2.5.** 设向量组 $S_1 = \{\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_k}\}$ 是向量组 $S_2 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 的一个子集. 若 $S_1$ 线性相关, 则 $S_2$ 也线性相关; 等价地, 若 $S_2$ 线性无关, 则 $S_1$ 也线性无关. 教材定理 5.2.3

证明. 设 $S_1$ 线性相关, 则存在不全为零的标量 $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_k}$ 使得 $\sum_{j=1}^k \lambda_{i_j} \boldsymbol{\alpha}_{i_j} = \mathbf{0}$. 此时, 对于 $i \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, 补充定义 $\lambda_i = 0$. 于是 $\sum_{i=1}^m \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{j=1}^k \lambda_{i_j} \boldsymbol{\alpha}_{i_j} = \mathbf{0}$. 而 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 不全为零, 从而 $S_2$ 线性相关. □

**定义 5.2.6.** 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中的每一个向量都可以用向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell$ 线性表示, 则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell$ **线性表示**.

**定理 5.2.7.** (1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell$ 线性表示的充要条件是

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle \quad \subseteq \quad \langle \boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell \rangle. \tag{5.1}$$

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\ell$ 线性表示, 并且 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\ell$ 可以由 $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ 线性表示, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ 线性表示, 即, 向量组的线性表示具有传递性.

证明. (1) 假定包含关系 (5.1) 成立. 由于 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\} \subseteq \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle$, 而 $\langle \boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell \rangle$ 是可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell$ 线性表示的向量的全体, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell$ 线性表示.

反之, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell$ 线性表示. 从而, 存在 $\lambda'_{ij} \in F$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{j=1}^\ell \lambda'_{ij} \boldsymbol{\beta}_j$. 若 $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle$, 则 $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^m \lambda''_i, \boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性

表示, 其中 $\lambda_i'' \in F$. 此时, $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i'' \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{ij}' \boldsymbol{\beta}_j = \sum_{j=1}^{\ell} (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i'' \lambda_{ij}') \boldsymbol{\beta}_j$, 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell$ 线性表示, 等价地, $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell \rangle$. 由 $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle$ 的任意性知包含关系 (5.1) 成立.

(2) 假设设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell$ 线性表示, 从而等价地有包含关系 (5.1) 成立. 再假设 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell$ 可以由 $\boldsymbol{\gamma}_1, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_t$ 线性表示, 从而等价地有包含关系

$$\langle \boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_\ell \rangle \subseteq \langle \boldsymbol{\gamma}_1, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_t \rangle ,$$

于是有

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle \subseteq \langle \boldsymbol{\gamma}_1, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_t \rangle ,$$

从而等价地可知, $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\boldsymbol{\gamma}_1, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_t$ 线性表示. □

**定理 5.2.8.** 设 $m \geq 2$. 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in F^n$ 线性相关的充要条件是存在 $i_0 \in \{1, 2, \ldots, m\}$, 使得 教材定理 5.2.1

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_0-1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_0+1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle , \tag{5.2}$$

*即向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_0}$ 对于生成子空间 $\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle$ 是多余的.*

*证明.* 设向量组 $S_1 \coloneqq \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 线性相关, 因此存在某个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_0}$, 它可以由剩下的向量组 $S_2 \coloneqq \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_0-1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_0+1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 线性表示. 于是由定义, $S_1$ 可以被 $S_2$ 线性表示, 即

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle \subseteq \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_0-1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_0+1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle .$$

但是, $S_2$ 作为子集很明显可以被 $S_1$ 线性表示, 即

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle \supseteq \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_0-1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_0+1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle .$$

综上可知, 等式 (5.2) 成立.

反过来, 设存在 $i_0 \in \{1, 2, \ldots, m\}$, 使得等式 (5.2) 成立, 特别地, 包含关系 “$\subseteq$” 成立. 利用上面定义的 $S_1, S_2$, 我们看到 $S_1$ 可以被 $S_2$ 线性表示. 特别地, $S_1$ 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_0}$ 可以被 $S_2$ 线性表示. 这说明 $S_1$ 线性相关. □

**习题 5.2.9** (线性相关性引理)**.** *设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是一组线性相关的向量. 证明: 存在 $i_0 \in \{1, 2, \ldots, m\}$ 使得:*

(1) *$\boldsymbol{\alpha}_{i_0} \in \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_0-1} \rangle$, 并且*

(2) *$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_0-1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_0+1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle$.*

**定理 5.2.10.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量. 则以下三条等价: 教材定理 5.2.4

(1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关;

(2) (关于 $\lambda$ 的) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 有非零解;

(3) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不是列满秩的, 即, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<m$.

证明. 由定义可以看出, (1)$\Leftrightarrow$(2) 是显然的.

记 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)^{\mathsf{T}}$. 若 (2) 成立, 则 $\boldsymbol{\lambda}\neq\mathbf{0}$, 从而等价地, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\lambda})=1$. 由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}$, 由推论 4.5.17 中的 Sylvester 不等式可知,

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{\lambda})-m\leq\operatorname{rank}(\mathbf{0}),$$

即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\leq m-1$. 从而 (3) 成立.

反之, 若 (3) 成立, 我们记 $r=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<m$. 此时, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{PAQ}=\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{smallmatrix}\right)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的相抵标准形. 从而,

$$\boldsymbol{AQ}=\left(\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{O}_{n\times(m-r)}\right).$$

若我们设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 的列向量, 由于 $m>r$, 比较该等式的最后一列后我们得到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$. 另一方面, 由于 $\boldsymbol{Q}$ 可逆, $\boldsymbol{\beta}_m\neq\mathbf{0}$. 这说明 $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\beta}_m$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}$ 的一个非零解, 从而 (2) 成立. □

**推论 5.2.11.** 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\in F^n$, 而 $\boldsymbol{A}\in F^{n\times m}$ 是以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为列向量的矩阵.

(1) 若 $m>n$, 即向量组长度超过数组空间维数, 则 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\leq\min(m,n)=n<m$, 即 $\boldsymbol{A}$ 不是列满秩的, 故它的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

(2) 若 $m=n$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $m$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<m$ $\Leftrightarrow$ 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det(\boldsymbol{A})=0$.

注意到一组数组向量在将其写成列向量时是线性相关的, 当且仅当将其写成行向量时是线性相关的. 另一方面, 转置运算不改变矩阵的秩, 也不改变方阵的行列式. 于是我们同时有下面的推论.

**推论 5.2.12.** 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\in F^n$, 而 $\boldsymbol{A}\in F^{m\times n}$ 是以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为行向量的矩阵. 教材推论 5.2.1

(1) 若 $m > n$, 则 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \leq \min(m, n) = n < m$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

(2) 若 $m = n$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $m$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) < m \Leftrightarrow$ 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.