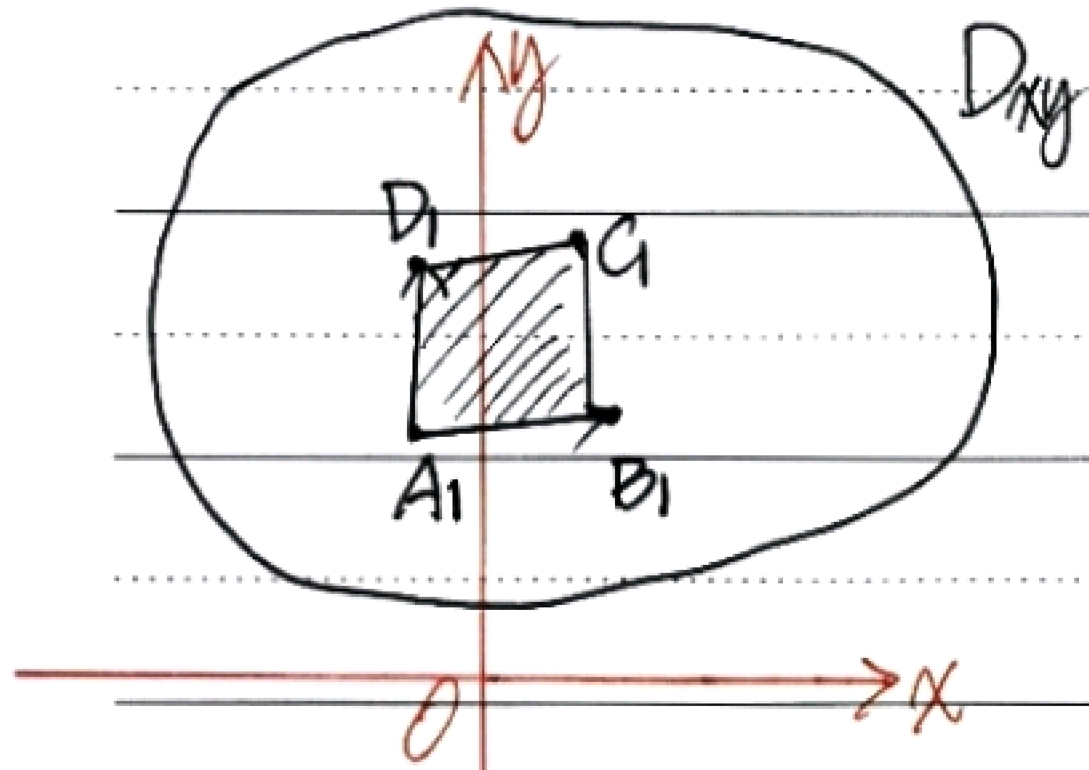
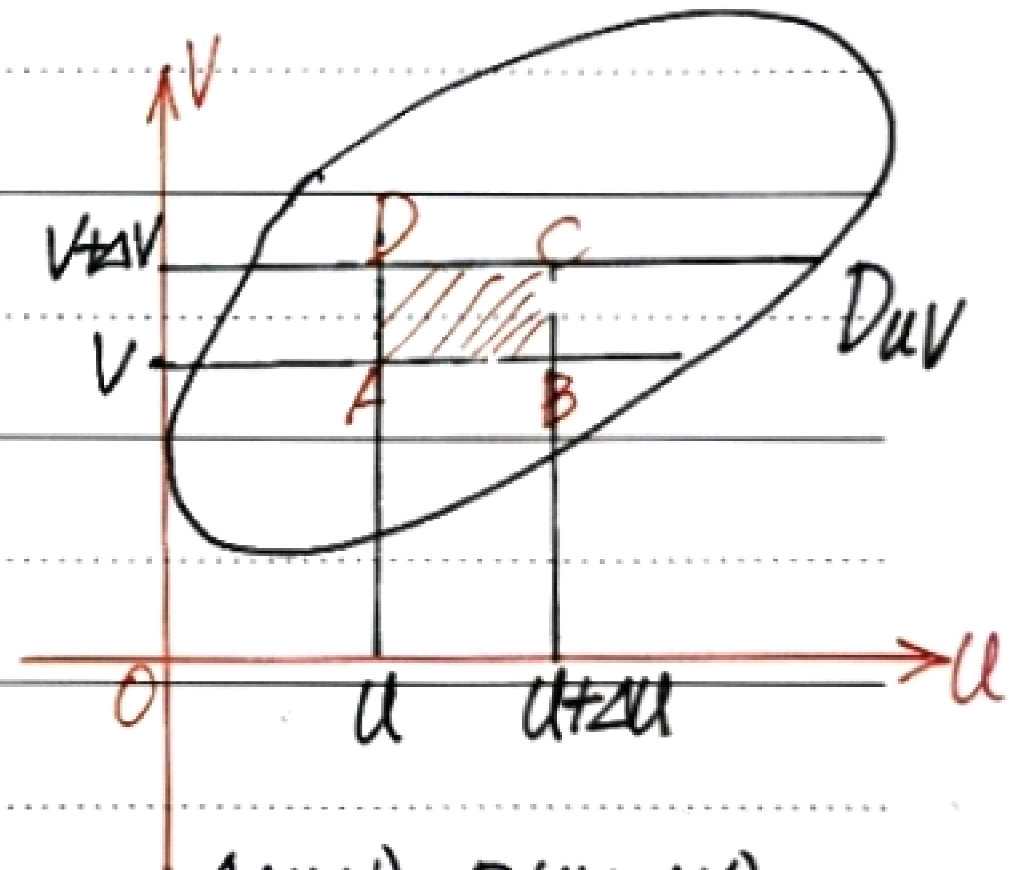
第16讲：二重积分的一般变量代换　2023.4.12

(一) 二重积分 $\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)\,dxdy$ 一般的变量代换：$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$

为了使变量代换 $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$ $(u,v)\in D_{uv}$，D_{uv} 是区域.

是可逆的，通常要求 $x(u,v),y(u,v)\in C^1(D_{uv})$ 且 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\neq 0$.





$A_1(x(u,v),y(u,v))$，$B_1(x(u+\Delta u,v),y(u+\Delta u,v))$

$D_1(x(u,v+\Delta v),y(u,v+\Delta v))$

$A(u,v)$，$B(u+\Delta u,v)$，

$D(u,v+\Delta v)$.

$\overrightarrow{A_1B_1}=(x(u+\Delta u,v)-x(u,v),\ y(u+\Delta u,v)-y(u,v))=(x'_u(u+\theta_1\Delta u,v)\Delta u,\ y'_u(u+\theta_2\Delta u,v)\Delta u)$

$\approx(x'_u(u,v),y'_u(u,v))\Delta u=(x'_u(u,v),y'_u(u,v))du$

$\overrightarrow{A_1D_1}\doteq(x'_v(u,v),y'_v(u,v))\Delta v=(x'_v(u,v),y'_v(u,v))dv$

于是，有

$d\sigma = dxdy = |\overrightarrow{A_1B_1} \times \overrightarrow{A_1D_1}| = \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ x'_u & y'_u & 0 \\ x'_v & y'_v & 0 \end{vmatrix} \right\| dudv = \left\| \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \right\| dudv$

$= \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$. 此时，所求的二重积分变为：

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy \xlongequal[y=y(u,v)]{x=x(u,v)} \iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv \quad (\text{式}_1)$$

例1. 若作极坐标变换 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，则 $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| =$

$\left\| \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \right\| = |r| = r > 0$. 从而 $dxdy = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| drd\theta$

$= rdrd\theta$. 此时，有

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy \xlongequal[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta} \iint\limits_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdrd\theta \quad (\text{式}_2)$$

当积分区域 D_{xy} 是部分圆域时，特别是 $f(x,y)$ 中含有 x^2+y^2 的项时，常常使用极坐标变换(式2).

例2. 若作广义极坐标变换 $\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases}$，$(a>0, b>0$, 常数$)$

(2)

则 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \left|\begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix}\right| = |abr| = abr$，这时，

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy \xlongequal[y=br\sin\theta]{x=ar\cos\theta} \iint_{D_{r\theta}} f(ar\cos\theta, br\sin\theta)\,abr\,dr\,d\theta \text{，(公式3)}$$

当积分域D_{xy}是部分椭圆域，特别是$f(x,y)$含有$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$的部分时，常采用（公式3）作为广义极坐标变换。

(三) 二重积分的奇偶对称性：(设 $I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$)

(1) 若$f\in C(D)$且f关于x是奇函数，且D关于y轴对称，

则 $I=\int_c^d\left(\int_{-\psi_1(y)}^{\psi_1(y)} f(x,y)\,dx\right)dy=\int_c^d 0\,dy=0$；

(2) 若$f\in C(D)$，f关于y是奇函数，且D关于x轴对称，

则 $I=\int_a^b\left(\int_{-\varphi_1(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)\,dy\right)dx=\int_a^b 0\,dx=0$；

(3) 若$f\in C(D)$，f关于x是偶函数且D关于y轴对称，则

$I=\int_c^d\left(\int_{-\psi_1(y)}^{\psi_1(y)} f(x,y)\,dx\right)dy=2\int_c^d\int_0^{\psi_1(y)} f(x,y)\,dx\,dy=$

$=2\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy$，$D_1$是$D$位于$y$轴右侧部分。

(4). 若$f \in C(D)$，f关于y是偶函数且D关于x轴对称，则 $I=\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D_0} f(x,y)dxdy$，$D_0$是$D$位于$x$轴上方部分或下方部分。

(5). 若$f \in C(D)$，f关于x、y分别是偶函数，且D关于两坐标轴都对称，则 $I = 4\iint_{D_0} f(x,y)dxdy$，$D_0$是$D$位于第一象限部分。

(三) 例题：

(1). 计算 $I=\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}dxdy$，$D: x^2+y^2 \le x$.

(2). 计算 $I=\iint_D xy\,dxdy$，D是第一象限中：$xy=a$，$xy=b>a>0$，$y^2=cx$，$y^2=dx$ $(d>c>0)$ 围成的区域.

(3). 计算 $I=\iint_D 4xy\,dxdy$，D由$x^4+y^4\le 1$，$x\ge 0$，$y\ge 0$围成.

(4). 计算 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dxdy$.

(5). 证明：$I=\iint_{|x|+|y|\le 1} f(x+y)dxdy = \int_{-1}^{1} f(t)dt$，$f\in C([-1,1])$

解(1)：因积分区域是部分圆域，且被积函数 $f(x,y)$ 中含有 x^2+y^2，故尝试用极坐标变换：$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，则

$dxdy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|drd\theta=rdrd\theta$，且 $\begin{cases} r^2\le r\cos\theta \\ \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\le r\le\cos\theta \\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$，

$$\Rightarrow I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\frac{(r\cos\theta)^2}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}rdr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}r\cos^2\theta dr$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\cos\theta}\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{1}{2}\times2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=\frac{3!!}{4!!}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\times1}{4\times2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi.$$

解(2)：令 $\begin{cases} xy=u \\ \frac{y^2}{x}=v \end{cases}$，则 $\begin{cases} a\le u\le b \\ c\le v\le d \end{cases}$ 且 $dxdy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$

$$=\frac{dudv}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|}=\frac{dudv}{\left|\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix}\right|}=\frac{dudv}{\left|3\frac{y^2}{x}\right|}=\frac{dudv}{3v}$$

原积分 $I=\iint\limits_{\substack{a\le u\le b \\ c\le v\le d}}u\frac{dudv}{3v}=\left(\int_a^b udu\times\int_c^d\frac{dv}{3v}\right)=\frac{b^2-a^2}{6}\ln\frac{d}{c}.$

解(3)：设 $\begin{cases} x=\sqrt{r\cos\theta} \\ y=\sqrt{r\sin\theta} \end{cases}$ 则 $dxdy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|drd\theta=\frac{drd\theta}{4\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}.$

且 $\begin{cases} x^4+y^4=r^2\le 1 \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow D_{r\theta}:\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

$\therefore I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 \frac{4r\sqrt{\cos\theta\sin\theta}}{4\sqrt{\cos\theta\sin\theta}}dr=\frac{\pi}{2}\int_0^1 rdr=\frac{\pi}{4}$.

解(4)：设 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$. 则 $dxdy=rdrd\theta$ 且 $D_{r\theta}:\begin{cases}0<r<+\infty\\ 0\le\theta\le2\pi\end{cases}$.

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-r^2}(\cos r^2)rdr=\left(\int_0^{+\infty}(\cos r^2)de^{-r^2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)$

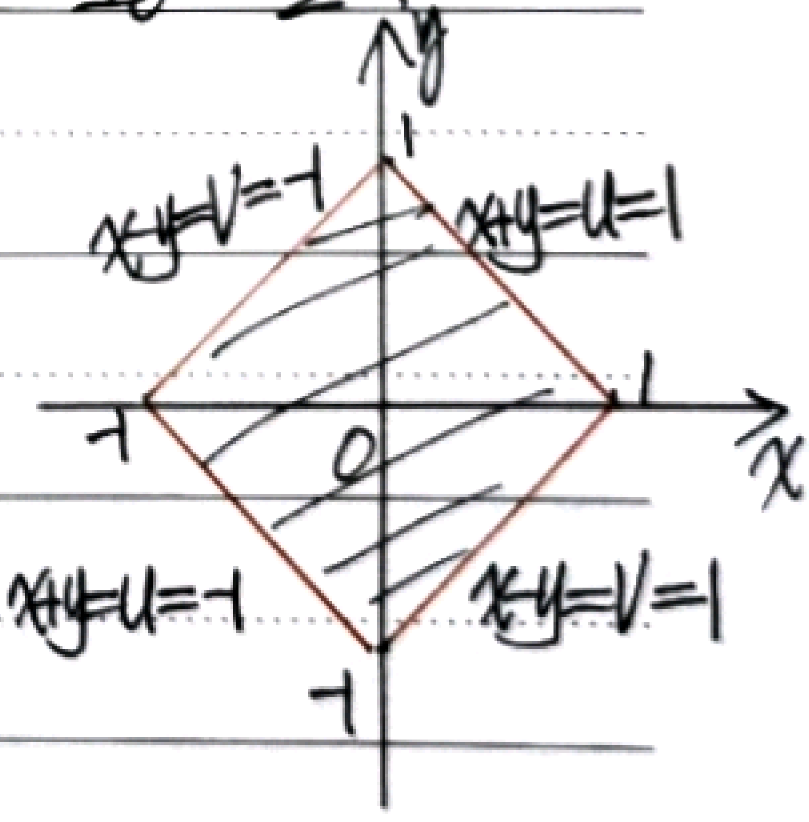
$=-\pi I_0$, 其中, $I_0=\int_0^{+\infty}\cos r^2de^{-r^2}\xlongequal[\text{积分}]{\text{分部}}\frac{\cos r^2}{e^{r^2}}\Big|_0^{+\infty}+$

$\int_0^{+\infty}e^{-r^2}(\sin r^2)2rdr=0-1+\left(\int_0^{+\infty}\sin r^2de^{-r^2}\right)(-1)$

$=-1+\frac{(-\sin r^2)}{e^{r^2}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-r^2}(\cos r^2)(2r)dr$

$=-1+0-\int_0^{+\infty}\cos r^2de^{-r^2}=-1-I_0\Rightarrow I_0=-\frac{1}{2}$.

故 $I=-\pi I_0=\frac{\pi}{2}$.



解(5)：令 $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}$, 则 $\begin{cases}-1\le u\le1\\ -1\le v\le1\end{cases}$

且 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}(u+v)\\ y=\frac{1}{2}(u-v)\end{cases}$, $dxdy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$

$=\frac{1}{2}dudv$

$\iint\limits_{|x|+|y|\le1}f(x+y)dxdy=\int_{-1}^1du\int_{-1}^1f(u)\frac{1}{2}dv=\left(\int_{-1}^1f(u)du\right)\left(\int_{-1}^1\frac{1}{2}dv\right)$

$=\int_{-1}^1f(u)du=\int_{-1}^1f(t)dt$

(四). 关于 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$ 的证明：

证：当 $x=x(u,v)\in C^1$，$y=y(u,v)\in C^1$ 且 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$ 时，方程组

$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$ 可唯一确定反函数组：$\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$.

先对方程组 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$ 两边关于 x 求偏导：得

$\begin{cases} 1=x'_u\cdot u'_x+x'_v\cdot v'_x \\ 0=y'_u\cdot u'_x+y'_v\cdot v'_x \end{cases}$；再对方程组 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$ 两边关于 y 求

偏导得 $\begin{cases} 0=x'_u\cdot u'_y+x'_v\cdot v'_y \\ 1=y'_u\cdot u'_y+y'_v\cdot v'_y \end{cases}$，于是

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\left|\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} x'_u u'_x+x'_v v'_x, & x'_u u'_y+x'_v v'_y \\ y'_u u'_x+y'_v v'_x & y'_u u'_y+y'_v v'_y \end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}.$$

(五) 作业：ex10.1：1/(4),(6)；2/(6)(8)；

ex10.2：2/(3),(4),(7),(9)；3/(3)；5.