第五次习题课

2023 年 5 月 28 日

目录

第五次习题课主要包含了期中考试讲解、第八、九次作业讲解。第八、九次作业主要注重线性空间、线性变换的定义，基变换与坐标变换，矩阵特征值的计算和性质。

1　期中考试试题选讲

一、(4)　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，而 $\boldsymbol{A}^*$ 是它的伴随矩阵，那么 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=$ __, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^*)=$ __

二、(3)　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个秩为 4 的矩阵，那么一定存在秩为 2 的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$.

二、(4)　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为二阶方阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$，那么 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

五、　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&a+1&a+2\\a+2&a&a+1\\a+1&a+2&a\end{pmatrix}$ 为三阶方阵，其中 $a\neq -1$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$

六、　设 $n\geq 2$ 为正整数，而 $a_1,\cdots,a_n$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 内的 n 个互异的数。用 V 表示次数小于 n 的全体复系数多项式构成的 $\mathbb{C}$ 上的线性空间。对于 $j=1,\cdots,n$，令 $f_j(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_{j-1})(x-a_{j+1})\cdots(x-a_n)$

(1) 证明：$f_1,\cdots,f_n$ 构成 V 的一组基。

(2) 对于 $j=1,\cdots,n$，设 $a_j=e^{i2\pi j/n}=\cos(2\pi j/n)+i\sin(2\pi j/n)$，即 $a_1,\cdots,a_n$ 为全体 n 此单位根。求从基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 到 $f_1,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵。

(3) 在（2）的条件下，求多项式 $1+x+\cdots+x^{n-1}$ 在 $f_1,\cdots,f_n$ 下的坐标。

七、

(1) 设 $\boldsymbol{C}\in F^{m\times n}$ 是一个行满秩的矩阵。证明一定存在矩阵 $\boldsymbol{D}\in F^{n\times m}$ 使得 $\boldsymbol{CD}=\boldsymbol{I}_m$ 为单位阵。

(2) 若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$，证明存在 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{A}$.（提示：利用 $\boldsymbol{A}$ 的相抵标准型）

2 第八次作业

证明 $\cdots$ 是线性空间和线性变换的题目几乎都是从定义出发来证明。我这里选择了一些基本的题目，这些题目是一定要掌握的。

2.1 4 月 23 日布置的作业

习题 1 (教材习题 P157 41). *已知 F^5 中向量 $\boldsymbol{\eta}_1 = (1,2,3,2,1)^T$ 及 $\boldsymbol{\eta}_2 = (1,3,2,2,1)^T$. 找一个齐次线性方程组，使得 $\boldsymbol{\eta}_1$ 与 $\boldsymbol{\eta}_2$ 为该方程组的基础解系。*

解. 这种问题有一般解法。原理是考虑该齐次方程组的约化标准型，不妨设为 $\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{0}, \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = 5-2 = 3$。因此 $\boldsymbol{A}$ 是个 3×5 的矩阵，包含 3 个线性无关的行向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$，满足 $\boldsymbol{\xi}_i\boldsymbol{\eta}_j^T = 0, i = 1,2,3, j = 1,2$。对 $\boldsymbol{\xi}_i\boldsymbol{\eta}_j^T = 0$ 作转置，有 $\boldsymbol{\eta}_j\boldsymbol{\xi}_i^T = 0$，可将 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 排列起来作为行向量，形成一个 2 秩的线性方程组，得到包含 3 个参量的通解，其中任选 3 个线性无关的解即可作为 $\boldsymbol{\xi}_1^T, \boldsymbol{\xi}_2^T, \boldsymbol{\xi}_3^T$，从而得到 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 \\ \boldsymbol{\xi}_2 \\ \boldsymbol{\xi}_3 \end{pmatrix}$。

但从考试解题的角度出发，我个人认为猜出解是更快速便捷的选择。如很容易发现两个通解都满足 $x_1 - x_5 = 0, x_4 - 2x_5 = 0$ 以及 $x_2 + x_3 = 5$。当然最后一个式子中 5 没有特别的含义，因为它只是表达了关于其他变量相对的大小，因此用其他变量的组合替换 5 即可得到 $x_2 + x_3 - 5x_5 = 0$，容易看到它们线性无关，说明这 3 个方程的秩为 3，解集空间的自由度为 2，$\boldsymbol{\eta}_1 = (1,2,3,2,1)^T$ 及 $\boldsymbol{\eta}_2 = (1,3,2,2,1)^T$ 恰满足这 3 个方程且彼此线性无关，说明我们已找到了想要的齐次线性方程组。

$$\begin{cases} x_1 - x_5 = 0 \\ x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

□

习题 2 (教材习题 P157 43). *判断下列集合关于规定的运算是否构成线性空间：*
(2)V 是所有满足 $f(-1) = 0$ 的实函数的集合，数域 $F = \boldsymbol{R}$. 定义加法为函数的加法，数乘为数与函数的乘法；
(3)V 是所有满足 $f(0) \neq 0$ 的实函数的集合，数域 $F = \boldsymbol{R}$. 定义加法为函数的加法，数乘为数与函数的乘法；
(4)V 是数域 F 上所有 n 阶可逆方阵的全体，加法为矩阵的加法，数乘为矩阵的数乘。

解. 验证加法与数乘的封闭性以及是否满足八条运算规律：加法结合律、加法交换律、加法零元素、加法负元素（A1-A4）；数乘结合律、乘法一元素（M1,M2）；乘法对向量加法的分配律、乘法对数加法的分配律（D1,D2），都需要验证。其中往往是封闭性和结合律最容易不满足线性空间的要求。
(2) 构成线性空间;

(3) 不构成线性空间，对加法不封闭;

(4) 不构成线性空间，对加法不封闭，即可逆矩阵的和未必可逆. □

习题 3 (教材习题 P157 44). 设 V 是所有实函数全体在实数域上构成的线性空间，判断 V 中下列函数组是否线性相关:

(2)$1, x, e^x$;

(3)$1, \cos 2x, \cos^2 x$;

(5)$\cos x, \cos 2x, \cdots, \cos(nx)$.

解. 证明只需按照定义。一个技巧是,**要证明一组函数线性无关,可在反证中若** $\forall x, \lambda_i f_i(x) = 0$**，则可以选择一些方便计算的** $x = a_0$ **推出某些函数的系数为 0，接下来选取** $x = a_1, a_2, \cdots$**，推出所有系数均为 0，从而推出矛盾**。一些其他的技巧还包括**积分**、**微分**等等，可以灵活使用。

(2) 线性无关. 设 $a_0 + a_1 x + a_2 e^x = 0$. 分别令 $x = 0, 1, -1$ 解得 $a_0 = a_1 = a_2 = 0$，从而函数组线性无关。

(3) 线性相关.$\cos x = 2\cos^2 x - 1$.

(5) 线性无关. 我们知道 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \ldots; k \neq n)$，这是傅里叶级数的基本公式，因此假设存在一组 λ_i 不全为 0，使得 $\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \cos 2x + \cdots + \lambda_n \cos nx = 0$。因此可以对左式乘 $\cos x$ 再在 $(-\pi, \pi)$ 上积分，得到 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot (\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \cos 2x + \cdots + \lambda_n \cos nx) dx = \lambda_1 \pi$，而等式右侧有 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot 0 dx = 0$，从而得到 $\lambda_1 = 0$，同样地取 $k = 1, \cdots, n$ 乘 $\cos kx$ 再在 $(-\pi, \pi)$ 上积分可得 $\lambda_k = 0$，从而得到 λ_k 不全为 0，矛盾。 □

2.2 4 月 25 日布置的作业

习题 4 (教材习题 P157 46). 设 $F^n[x]$ 是数域 F 上的次数小于或等于 n 的多项式全体构成的线性空间.

(1) 证明: $S = \{1, x-1, (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n\}$ 构成 $F^n[x]$ 的一组基;

(2) 求 S 到基 $T = \{1, x, \cdots, x^n\}$ 的过渡矩阵;

(3) 求多项式 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in F^n[x]$ 在基 S 下的坐标.

解. (1) 证明: 显然不存在不全为 0 的常数 $a_0, \cdots, a_n$，使 $a_0 + a_1(x-1) + \cdots + a_n(x-1)^n = 0$，$S$ 线性无关，即为 $F^n[x]$ 的一组基.(具体可见 [教材习题 44] 的方法)

(2) 设 S 到 T 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 $(1, x, \cdots, x^n) = (1, x-1, \cdots, (x-1)^n)\boldsymbol{A}$. 因为 $x^n = [(x-1)+1]^n = C_n^0 + C_n^1(x-1) + \ldots + C_n^n(x-1)^n$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \cdots & C_n^0 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^n \end{pmatrix}$$

(3) 易见多项式 $p(x)$ 在基 T 下的坐标为 $(a_0,\cdots,a_n)^T$，由坐标变换公式，在 S 下的坐标为 $\boldsymbol{A}(a_0,\cdots,a_n)^T$. □

习题 5 (教材习题 P189 1)**.** 判断下面所定义的变换，哪些是线性的，哪些不是线性的：
(1) 在 $\boldsymbol{R}^2$ 中，$\mathscr{A}(a,b)=(a+b,a^2)$;

解. 按照线性变换的定义进行验证，对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V,\lambda\in F$，有：

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\mathscr{A}(\boldsymbol{x})+\mathscr{A}(\boldsymbol{y}),\mathscr{A}(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda\mathscr{A}(\boldsymbol{x})$$

(1) 不是线性的。设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2),\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)$，则有 $\mathscr{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(x_1+x_2+y_1+y_2,(x_1+y_1)^2)\neq\mathscr{A}(\boldsymbol{x})+\mathscr{A}(\boldsymbol{y})=(x_1+x_2,x_1^2)+(y_1+y_2,y_1^2)=(x_1+x_2+y_1+y_2,x_1^2+y_1^2)$.

□

习题 6 (教材习题 P158 49)**.** $V=F^{n\times n}$ 是数域 F 上所有 n 阶矩阵构成的线性空间，令 W 是数域 F 上所有满足 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0$ 的 n 阶矩阵的全体，证明 W 是 V 的线性子空间，并求 W 的一组基与维数.

证明. 容易看到的是 W 的维数为 n^2-1。可以这样考虑：V 有 n^2 个自由度，W 需要满足 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0$，带来了一个约束，因此维数为 n^2-1。当然这只能作为猜测，严谨地证明则需要根据定义来证明。即选取 n^2-1 个线性无关的基，且 W 中任意元素可以表达为这 n^2-1 个基的线性组合。

首先验证 W 是线性空间.

对任意矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in W$ 满足 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})=0$，由 tr 的线性性质 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=0$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\in W$，另一方面，对任意 $\lambda\in F,\mathrm{tr}(\lambda\boldsymbol{A})=0$，则 $\lambda\boldsymbol{A}\in W$，即 W 是 V 的线性子空间。

设 E_{ij} 表示第 i,j 元为 1，其它元素为 0 的 $n\times n$ 单位矩阵，则 W 的基可以表示为

$$\{E_ij|i\neq j\}\cup\{E_{ii}-E_{i+1,i+1}|1\leq i<n\}.$$

$\dim(W)=n(n-1)+n-1=n^2-1$。容易验证他们线性无关且 W 中任意元素可以表达为这 n^2-1 个基的线性组合，因此是 W 的一组基。 □

2.3 4 月 27 日布置的作业

习题 7 (教材习题 P189 2)**.** 求下列线性变换在所指定的基下的矩阵：
(4) 给定 *2* 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$，求 *2* 阶实方阵构成的线性空间上的线性变换 $\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA}$ 在基

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

解. 借助教材 P163 的定义

$$
(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1), \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

(4) 不妨设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，根据定义有

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1) &= \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = -a_{12}\boldsymbol{e}_2 + a_{21}\boldsymbol{e}_3 \\
\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2) &= \begin{pmatrix} -a_{21} & a_{11} - a_{22} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix} = -a_{21}\boldsymbol{e}_1 + (a_{11} - a_{22})\boldsymbol{e}_2 + a_{21}\boldsymbol{e}_4 \\
\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_3) &= \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} - a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix} = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + (a_{22} - a_{11})\boldsymbol{e}_3 - a_{12}\boldsymbol{e}_4 \\
\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_4) &= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{21} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}\boldsymbol{e}_2 - a_{12}\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

因此

$$
\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4) \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & a_{11} - a_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} - a_{11} & -a_{12} \\ 0 & a_{21} & -a_{12} & 0 \end{pmatrix}
$$

□

习题 8 (教材习题 P190 4). 在 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 将

$$
\boldsymbol{\alpha}_1 = (0,0,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,1)^T
$$

变换到

$$
\boldsymbol{\beta}_1 = (2,3,5)^T, \boldsymbol{\beta}_2 = (1,0,0)^T, \boldsymbol{\beta}_3 = (0,1,-1)^T
$$

求 $\mathscr{A}$ 在自然基和 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵。

解. 注意到 $\det(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \neq 0$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的一组基。

先计算 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵。根据定义有，

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{A} = \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3 \end{pmatrix}
$$

可得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

容易看到自然基到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵为方阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}$（教材例 6.2.1），于是由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到自然基的过渡矩阵为 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}^{-1}$，则由教材定理 6.2.2，$\mathscr{A}$ 在自然基上的矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\1 & -3 & 3\\-1 & -5 & 5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

3 第九次作业

特征值和特征向量的定理很多，但一定要注意很多定理只有 $p \to q$ 而非 $p \leftrightarrow q$，一定不要乱用定理的结论，最好对每个定理的推理过程都充分理解。同时特征值和特征向量的计算也必须掌握。一般来说，凡是讲义中没有提到的定理基本是错的。

符号 $p \to q$ 表示若 p 为真，则 q 为真，也可理解为 p 推出 q。我将借助这些符号表达一些经典的错误。**经验之谈：大多数反例都可以在 Jordan 标准型中找到。**

- p_1: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似。
- p_2: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相同。
- p_3: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值一一对应相同。

$p_1 \to (p_2 \leftrightarrow p_3)$。

$p_2 \nrightarrow p_1$，如 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 特征多项式相同，但它们不相似。

- p_4:n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值。
- p_5:n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量。
- p_6:n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化。

$p_4 \to (p_5 \leftrightarrow p_6)$。若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ,则 λ 必至少对应 1 个特征向量:$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0 \Rightarrow \operatorname{rank}(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) < n$。

$p_6 \nrightarrow p_4 \Leftrightarrow \neg p_4 \nrightarrow \neg p_6$. 即若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在特征值彼此相同，不能说明 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化；若 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 特征值为 λ 的特征向量，也不能说明 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 线性相关。

- p_7:$\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量。
- p_8:$\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}^2$ 属于特征值 λ^2 的特征向量。

$p_7 \to p_8; p_8 \nrightarrow p_7$. 如 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

3.1 5 月 9 日布置的作业

习题 9 (教材习题 P191 13). *(1) 若* $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$*，证明* $\boldsymbol{A}$ *的特征值只能是* ± 1*.*
(2) 设 n *阶实方阵满足* $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$*，证明* $\boldsymbol{A}$ *的特征值为零或纯虚数.*

证明. (1) 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，对应非零特征向量 $\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{I}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x} \Rightarrow \lambda = \pm 1$. 即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 ± 1.
(2) 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，考虑 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^2$，对应非零特征向量 $\boldsymbol{x}$，则 $-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = -\lambda^2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0$；考虑到 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} \geq 0$，有 $\lambda^2 \leq 0 \Rightarrow \lambda$ 为零或纯虚数。 □

3.2 5 月 11 日布置的作业

习题 10 (教材习题 P191 16). *设* V *为次数不超过 2 的多项式构成的线性空间，线性变换* $\mathscr{A} : V \to V$ *满足:*

$$\mathscr{A}(1) = x^2 + x + 3, \quad \mathscr{A}(x) = 2x + 1, \quad \mathscr{A}(x^2) = 2x^2 + 3.$$

求 $\mathscr{A}$ *的特征值和特征向量.*

解. 取 V 的一组基 $1, x, x^2$，线性变换在这组基下的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 2)$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}, \lambda_3 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$.
对于 $\lambda = 2$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为 $c_1(0, 3, -1)^T, (c_1 \neq 0)$，对应于线性变换的特征向量在基下的坐标。则线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 3x - x^2$.
对于 $\lambda = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为 $c_2(1 + \sqrt{17}, 2, 2)^T, (c_2 \neq 0)$，对应线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征向量为 $1 + \sqrt{17} + 2x + 2x^2$.
对于 $\lambda = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为 $c_3(1 - \sqrt{17}, 2, 2)^T, (c_3 \neq 0)$，对应线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征向量为 $1 - \sqrt{17} + 2x + 2x^2$.

对上述过程的解释：$\mathscr{A}\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathscr{A}(1) & \mathscr{A}(x) & \mathscr{A}(x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}\boldsymbol{A}$。若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$，则有 $\mathscr{A}\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}$。因此我们知道 $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}$ 是线性变换 $\mathscr{A}$ 特征值为 λ 的特征向量。 □

致谢

感谢各助教对本文档的校对工作和内容补充，感谢申伊塃老师以及同学对助教工作的支持。