例 8.4.14. 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正定的实对称矩阵, 证明: $\det(\boldsymbol{A})\le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 教材习题 #17

证明. **(思路一)** 对阶数 n 作归纳, 并假定命题在 $n-1$ 时成立. 利用定理 8.4.11 中的记号, 我们可以将 $\boldsymbol{A}$ 写成分块矩阵并作初等列变换, 得到

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathsf{T}} & a_{nn}\end{pmatrix}\xrightarrow{-c_1\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{C}\to c_2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C}^{\mathsf{T}} & a_{nn}-\boldsymbol{C}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}.$$

这说明

$$\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{A}_{n-1})(a_{nn}-\boldsymbol{C}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{C}).$$

这其实是例 4.4.10 中的 Schur 行列式公式的特例

由归纳假设可知 $0<\det(\boldsymbol{A}_{n-1})\le a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}$. 另外, $\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}$ 是正定矩阵, 从而 $\boldsymbol{C}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{C}\ge 0$, 并因此有 $a_{nn}-\boldsymbol{C}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{C}\le a_{nn}$. 从而命题在 n 时也成立.

(思路二) 由于 $\boldsymbol{A}$ 正定, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{P}$. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{P}$ 的列向量组, 那么这组向量构成了欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 而标准内积在这组基下的度量矩阵恰为 $\boldsymbol{A}$. 在例 7.2.28 中, 我们证明了 $|\boldsymbol{A}|\le\|\boldsymbol{\alpha}_1\|^2\cdots\|\boldsymbol{\alpha}_n\|^2$. 此时, 只需注意到, 对 $i=1,2,\dots,n$, 我们有 $\|\boldsymbol{\alpha}_i\|^2=\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\alpha}_i=a_{ii}$. □

例 8.4.15. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称正定阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 为对称正定阵的充要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 教材习题 #24(2)

证明. 由于 $(\boldsymbol{AB})^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{BA}$, 这意味着 $\boldsymbol{AB}$ 为对称阵, 当且仅当 $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^{\mathsf{T}}$, 当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

我们先证明必要性. 显然, 若 $\boldsymbol{AB}$ 为对称的正定阵, 则其首先为对称阵, 从而 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

下面, 我们证明充分性. 于是, $\boldsymbol{AB}$ 为实对称阵.

(思路一) 由例 7.3.31 的结果 (可乘法交换的两个实对称阵可以同时正交相似对角化) 可知, 存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{AP}=\operatorname{diag}(\lambda_1',\dots,\lambda_n')$, 而 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{BP}=\operatorname{diag}(\lambda_1'',\dots,\lambda_n'')$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 正定, 这些 λ_i' 与 λ_i'' 皆大于 0. 此时, $\boldsymbol{PABP}^{\mathsf{T}}=(\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{BP})=\operatorname{diag}(\lambda_1'\lambda_1'',\dots,\lambda_n'\lambda_n'')$. 故 $\boldsymbol{AB}$ 的所有特征值为 $\lambda_1'\lambda_1'',\dots,\lambda_n'\lambda_n''$, 皆大于 0, 从而实对称阵 $\boldsymbol{AB}$ 是正定的.

(思路二) 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正定, 分别存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Q}$. 则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{PQ}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Q}$, 且 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{QP}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{PQ}^{\mathsf{T}}=(\boldsymbol{PQ}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{PQ}^{\mathsf{T}})>0$. 这说明, $\boldsymbol{AB}$ 与正定阵相似, 从而所有的特征值大于 0, 从而实对称阵 $\boldsymbol{AB}$ 是正定的.

(思路三) 任取实对称阵 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值 λ, 假设 $\boldsymbol{x}$ 是对应的一个特征向量: $\boldsymbol{ABx}=\lambda\boldsymbol{x}$. 从而 $\boldsymbol{Bx}=\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$, 故 $\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Bx}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$. 由于 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 而 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^{-1}$ 都是正定的, 故

$$\lambda=\frac{\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Bx}}{\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}}>0.$$

这说明实对称阵 $\boldsymbol{AB}$ 是正定的.

(思路四) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{AQ}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. 此时, $\boldsymbol{C}:=\boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{BQ}$ 是正定方阵, 并且实对称阵

$$\boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{AQ})(\boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{BQ})=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\boldsymbol{C}.$$

可以直接验证, $\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\boldsymbol{C}$ 的 k 阶顺序主子式恰为 $\lambda_1\cdots\lambda_k$ 倍的 $\boldsymbol{C}$ 的 k 阶顺序主子式, 从而大于零. 这说明实对称阵 $\boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{Q}$ 是正定的, 从而 $\boldsymbol{AB}$ 是正定的. □

定义 8.4.16 (与正定阵相关的定义)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵, 考虑二次型 $Q(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{AX}$.

(1) 称 Q 以及 $\boldsymbol{A}$ 为**半正定的** (*positive semidefinite*)* 当且仅当 Q 的负惯性指数 $s=0$, 即, 当且仅当对任意 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n$, 有 $Q(\boldsymbol{X})\geq 0$. 此时, 记 $\boldsymbol{A}\geq 0$.

(2) 称 Q 以及 $\boldsymbol{A}$ 为**负定的** (*negative definite*) 当且仅当 Q 的负惯性指数 $s=n$, 即, 当且仅当对任意 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}\in\mathbb{R}^n$, 有 $Q(\boldsymbol{X})<0$. 此时, 记 $\boldsymbol{A}<0$.

(3) 称 Q 以及 $\boldsymbol{A}$ 为**半负定的** (*negative semidefinite*) 当且仅当 Q 的正惯性指数 $r=0$, 即, 当且仅当对任意 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n$, 有 $Q(\boldsymbol{X})\leq 0$. 此时, 记 $\boldsymbol{A}\leq 0$.

(4) 称 Q 以及 $\boldsymbol{A}$ 为**不定的** (*indefinite*) 当且仅当 Q 处于其它情形, 即, 当且仅当 $r>0$ 且 $s>0$, 而这也当且仅当存在 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2\neq\boldsymbol{0}\in\mathbb{R}^n$, 有 $Q(\boldsymbol{X}_1)<0<Q(\boldsymbol{X}_2)$.

命题 8.4.17. *对实二次型* $Q(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{AX}$, *类似于定理 8.4.3, 我们有如下的等价刻划:*

这些性质也请牢记

(1) $\boldsymbol{A}\geq 0$;

(2) $\boldsymbol{A}$ *相合于它的相抵标准形* $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{A}$ *的特征值全为非负实数;*

---

*直接翻译的话, 应该称之为正半定的; 不过我们这儿不采取这样的说法.

(4) 存在 $m\times n$ 维矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{P}$; (可以由此推出, $m\geq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$)

(5) 存在 $m\times n$ 维矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{P}$, 其中 $m=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$;

(6) 存在 $n\times n$ 维矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{P}$;

(7) 所有的主子式皆非负.

证明. 这儿, 我们只证明 “(7)⇒(3)”, 其余的部分留作练习. 考虑特征多项式

$$p_{\boldsymbol{A}}(t)=|t\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0.$$

对于 $i=1,2,\ldots,n$, 我们熟知 $(-1)^i a_{n-i}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有 i 阶主子式之和, 而由条件可知其非负. 这说明, 此时, 当 $t<0$ 时, $(-1)^n p_{\boldsymbol{A}}(t)$ 为正数, 从而不可能为零. 换言之, 实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值皆非负. $\square$

例 8.4.18. 在命题 *8.4.17* 中, 若只有 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式非负, 不能推出 $\boldsymbol{A}\geq 0$. 例如, 考虑 $\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(1,0,-1)$.

例 8.4.19. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 维实矩阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$ 为半正定的实对称阵. 这是因为对任意的 m 维列向量 $\boldsymbol{X}$, 二次型 $Q(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{X}=\left\|\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{X}\right\|^2\geq 0$, 从而 Q 是半正定的二次型.

由此看出, $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})\geq 0$. 当然, 在 $m\geq n$ 时, 利用秩的性质, 我们很容易证明这一点. 在一般情形, 也可以采用 *Binet–Cauchy* 公式. 另外, 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 维复矩阵, 则 $\det(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathsf{T}})$ 为非负实数. 这儿的证明类似, 但是要用到酉空间的性质.

例 8.4.20. 设 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实矩阵, $\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}$ 的全部特征值为 $\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_n$. 证明: 如果 μ 是 $\boldsymbol{B}$ 的实特征值, 那么 $\sqrt{\lambda_1}\leq|\mu|\leq\sqrt{\lambda_n}$.

证明. 容易验证 $\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}$ 为半正定实对称阵, 从而 $\lambda_1\geq 0$. 设 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的属于 μ 的单位特征向量. 由例 8.2.7 (Rayleigh 原理) 有

$$\lambda_1\leq \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\leq\lambda_n.$$

但是 $\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})=(\mu\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}}(\mu\boldsymbol{x})=\mu^2\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}=\mu^2\left\|\boldsymbol{x}\right\|^2=\mu^2$. 化简即可. $\square$

例 8.4.21. 设 $n\geq 2$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定的实对称矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶半正定的实对称矩阵, 证明: $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\geq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.

证明. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是正定的, 由定理 8.4.5 可知, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$, 而 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\mu_1,\ldots,\mu_n)=:\boldsymbol{D}$. 由于 $\boldsymbol{B}$ 是半正定的, $\boldsymbol{D}$ 对角线上的元素 $\mu_1,\ldots,\mu_n$ 都是非负实数. 于是,

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|(\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}})^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{P}^{-1}|=|\boldsymbol{P}|^{-2}|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{D}|=|\boldsymbol{P}|^{-2}(1+\mu_1)(1+\mu_2)\cdots(1+\mu_n).$$

另一方面,

$$|\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}})^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{P}^{-1}|=|\boldsymbol{P}|^{-2},\qquad |\boldsymbol{B}|=|(\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}|=|\boldsymbol{P}|^{-2}\mu_1\mu_2\cdots\mu_n.$$

由此不难看出, $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\geq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$, 并且等号成立的条件是 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_n=0$, 即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. □

回忆. (1) 在欧氏空间 V 中, 我们有 $2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2$.

(2) 在 $\mathbb{R}^n$ 的标准内积中, 我们有 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y}$.

例 8.4.22. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正定对称矩阵, $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$. 求 n 元二次函数 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{b}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}$ 的最小值, 其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$.

解. 由于 $\boldsymbol{A}$ 正定, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{P}$. 此时, 设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$, 于是

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x})&=\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{b}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y}+2((\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y}\\&=\left\|y+(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}\right\|^2-\left\|(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}\right\|^2.\end{aligned}$$

这说明 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{y}=-(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}$, 即 $\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ 时, 取得最小值 $-\left\|(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}\right\|^2=-((\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b})^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. □

例 8.4.23. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是正定对称矩阵, $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$. 求 n 元线性函数 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}$ 在约束条件 $\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq 1$ 下的最大值, 其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$.

解. 由于 $\boldsymbol{A}$ 正定, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{P}$. 此时, 设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$, 于是 $f(\boldsymbol{x})=((\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y}$, 而 $\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y}=\|\boldsymbol{y}\|^2$. 此时, 由 Cauchy-Schwarz 不等式可知,

$$f(\boldsymbol{x})\leq\left\|(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}\right\|\|\boldsymbol{y}\|\leq\left\|(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}\right\|=\sqrt{\boldsymbol{b}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}},$$

其中等号在 $\boldsymbol{y}$ 为与 $(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}$ 同向的单位向量, 即

$$\boldsymbol{y}=\frac{1}{\|(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}\|}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}=\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{b}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

时取得. □

例 8.4.24. 证明: n 阶半正定的实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必满足 $\det(\boldsymbol{A}) \leq \left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\right)^n$. 教材习题 #27

证明. 由于 $\boldsymbol{A}$ 半正定, 它的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 皆为非负实数. 由于 $\det(\boldsymbol{A}) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, 而 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$, 欲证的不等式为熟知的算数平均–几何平均不等式. □

例 8.4.25. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶半正定实对称方阵. 证明:

$$\det(\boldsymbol{A})^{1/n}\det(\boldsymbol{B})^{1/n} \leq \frac{1}{n}\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}).$$

证明. 分别存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^\mathsf{T}\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^\mathsf{T}\boldsymbol{Q}$. 则

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{P}^\mathsf{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^\mathsf{T}\boldsymbol{Q}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^\mathsf{T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^\mathsf{T}).$$

另一方面,

$$0 \leq \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{P}^\mathsf{T})\det(\boldsymbol{P})\det(\boldsymbol{Q}^\mathsf{T})\det(\boldsymbol{Q}) = \det(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^\mathsf{T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^\mathsf{T}).$$

由于 $\boldsymbol{C} := \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^\mathsf{T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^\mathsf{T} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^\mathsf{T})^\mathsf{T}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^\mathsf{T})$ 为半正定对称阵, 故由例 8.4.24 可知

$$\det(\boldsymbol{C}) \leq \left(\frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{C})}{n}\right)^n.$$

化简即可. □