P63 14 (10) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$

$$\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y} = \frac{xy}{(x+y)(\sqrt{xy+1}+1)} = \frac{1}{\underbrace{(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})}_{A}\underbrace{(\sqrt{xy+1}+1)}_{2}}.$$

由此看出确定 $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$ 的极限即可，但若 y, x 关系不一样，则显然极限不同，无法比较阶

① $\frac{1}{y}=\frac{1}{x}$，则 $y=x$，满足 $x\to0, y\to0$ A极限为 $+\infty$ $\Rightarrow$ 原式 $\to 0$.

② $\frac{1}{y}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$，则 $y=x(x-1)$，满足 $x\to0, y\to0$，A极限为 -1 $\Rightarrow$ 原式 $\to -\frac{1}{2}$

∴ 极限不存在

(12) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$

$$(1+xy)^{\frac{1}{x+y}} = (1+xy)^{\frac{1}{xy}\cdot\frac{xy}{x+y}} = \underbrace{(1+xy)^{\frac{1}{xy}}}_{e}\cdot\left(\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}_{\text{主要部分 同上理}}}\right)$$

~~20.~~ ~~23.~~ ~~f(x,y), (x,y)~~

23. $f(x,y)=\frac{1}{1-xy}$，$(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ 记D，$(x,y)\neq(1,1)$，证明 $f(x,y)$ 连续但不一致连续.

(不一致连续的命题，类似单变量函数)

$\exists \varepsilon_0>0, \forall\delta, \exists (x_1,y_1), (x_2,y_2)\in D$ 满足 $|x_1-x_2|<\delta$, $|y_1-y_2|<\delta$，但 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\geq\varepsilon_0$.

这里取 $\varepsilon_0=1$ $\forall\delta$，取 $n>\frac{1}{\sqrt{\delta}}$ ~~$x_1=(1, 1-\frac{1}{n})$, $y_1=(1, 1-\frac{1}{n+1})$~~ $(x_1,y_1)=(1, 1-\frac{1}{n})$ $(x_2,y_2)=(1, 1-\frac{1}{n+1})$

此时满足 $|x_1-x_2|<\delta$，$|y_1-y_2|=\frac{1}{n(n+1)}<\delta$ 但 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|=|n-(n+1)|=1=\varepsilon_0$

∴ 不一致连续.

补充题

T_1：课本P12 6.

证明：集合 $E=\{(x,y)\mid y=\sin\frac{1}{x},\ 0<x\le\frac{2}{\pi}\}\cup\{(0,y)\mid 0\le y\le 1\}$ 是连通的但不是道路连通的

$\qquad\qquad\qquad\qquad B \qquad\qquad\qquad\qquad A$

此曲线称为拓扑学家的曲线。

证明：记 $E=A\cup B$，显然 $A.B$ 都是道路连通的，故连通。

假设 E 不连通，则 $A.B$ 是它的两个连通分支，因此 $A.B$ 既开又闭.（拓扑中的结论）

但这不可能，A 中 $(0,0)$ 点是 B 的聚点，B 不可能闭 $\Rightarrow$ E 连通。

下证不是道路连通.

若 E 道路连通，$\exists\ \gamma$ 连接 $(0,0)$ 与 $(\frac{2}{\pi},1)$，$\gamma(t)=(x(t),y(t))$，$\gamma(0)=(0,0)$，$\gamma(1)=(\frac{2}{\pi},1)$

此时 $\gamma(t)$，$x(t)$，$y(t)$ 均连续。取点列 $t_k=\frac{2}{(2k+1)\pi}(k=0,1\cdots)$.

显然 $t_k\to0\ (k\to\infty)$ $\therefore$ 由 $\gamma(t)$ 连续性，$\lim\gamma(t_k)=\gamma(\lim t_k)=\gamma(0)=(0,0)$ 存在.

但事实 $\gamma(t_k)=(x(t_k),y(t_k))=(\frac{2}{(2k+1)\pi},(-1)^k)$ 无极限 $\Rightarrow$ 不是道路连通的.

T_2.

注意：一个多元函数如果对每个变元都连续，则并不能推出它是一个多元连续函数.

例：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\ne(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

令 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+xy)}{x} & x\ne0\\ y & x=0\end{cases}$，证明其在定义域上是连续的.

证明：首先观察其定义域为 $xy>-1$（如图阴影部分面积

在 $x\ne0$ 处显然连续. 所以只须证明 $f(x,y)$ 作为二元函数在 y 轴上的每一点处连续

① 在 $(0,0)$ 点. 由于 $f(0,0)=0$.，$x\ne0$ 时 $f(x,y)\begin{cases}0 & y=0\\ y\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}} & y\ne0\end{cases}$

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=1$

从而 $\exists\ \delta_1>0$. $0<|x|<\delta_1$，$0<|y|<\delta_1$ 时

$\left|\frac{\ln(1+xy)}{x}\right|\le|y|\cdot\left|\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right|\le2|y|$

由 $f(x,y)$ 的表达式知只要 $|x|<\delta_1$, $|y|<\delta_1$, 无论 $x=0$, or $x\neq 0$, 都有 $|f(x,y)|\leq 2|y|$

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$

(2) 在点 $(0,y_0)$, $y_0\neq 0$ 时

当 $x\neq 0$ 时

$$|f(x,y)-f(0,y_0)|=|y\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}-y_0|=|y[\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}-1]+(y-y_0)|$$

$$\leq |y|\,|\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}-1|+|y-y_0|$$

而当 $x=0$ 时. $|f(x,y)-f(0,y_0)|=|y-y_0|$.

由于当 $y_0\neq 0$ 时 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} \ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=1$

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} (f(x,y)-f(0,y_0))=0$ $\Rightarrow$ 连续. 并.

T3. 设 $f(x,y)$ 是区域 D: $|x|\leq 1$, $|y|\leq 1$ 上的有界 k 次齐次函数 $(k\geq 1)$, 问极限

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \{f(x,y)+(x-1)e^y\}$ 是否存在, 若存在, 试求其值.

证明: 因 f 为 k 次齐次函数, $\therefore \forall t\in\mathbb{R}$ 有 $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$

$\therefore f(r\cos\theta, r\sin\theta)=r^k f(\cos\theta,\sin\theta)$

又 $\because f(x,y)$ 有界, $\exists M>0$, 使得 $|f(x,y)|\leq M$. $(\forall (x,y)\in D)$. $\Rightarrow$

$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)|=r^k|f(\cos\theta,\sin\theta)|\leq r^k M \rightrightarrows 0$ (当 $r\to 0$ 时一致 $\to 0$)
与 θ 无关

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \{f(x,y)+(x-1)e^y\}=-1$

T4 设 $u=f(x,y,z)$ 在闭立方体 D $[a,b;a,b;a,b]$ 连续. 试证. $g(x,y)=\max\limits_{a\leq z\leq b} f(x,y,z)$ 在正方体 $[a,b;a,b]\subset\mathbb{R}^2$ 上连续.

证明: 因 $f(x,y,z)$ 在 D 上连续, 故一致连续. 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, D 上当 $|x-x'|<\delta$, $|y-y'|<\delta$, $|z-z'|<\delta$ 时恒有

$$|f(x,y,z)-f(x',y',z')|<\varepsilon.$$

取 $z=z'$ $\Rightarrow$ 当 $|x-x_0|<\delta$. $|y-y_0|<\delta$ 时.

$$|f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z)|<\varepsilon. \quad (\forall z\in[a,b]).$$

即 $f(x_0,y_0,z)-\varepsilon < f(x,y,z) < f(x_0,y_0,z)+\varepsilon$.

固定 x,y 让 z 在 $[a,b]$ 上变化，取最大值. 可得

$$f(x_0,y_0,z)-\varepsilon < f(x,y,z) < g(x_0,y_0)+\varepsilon \quad \forall z\in[a,b].$$

令此式中间取最大值 $\max\limits_{a\le z\le b} f(x,y,z)$，上式仍成立.

$$\Rightarrow \quad f(x_0,y_0,z)-\varepsilon < g(x,y) < g(x_0,y_0)+\varepsilon \quad \forall z\in[a,b]$$

最后令左边第一项取最大值，得

$$g(x_0,y_0)-\varepsilon < g(x,y) < g(x_0,y_0)+\varepsilon$$

即 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 时. $|g(x,y)-g(x_0,y_0)|<\varepsilon$ 得证.

5 证明：不存在由闭区间到圆周上的一对一连续映射.

反证：若存在，设 $K=\{(r,\theta)\mid 0\le\theta<2\pi\}$ 是某个圆，$[a,b]$ 是某个闭区间. 若存在 $[a,b]$ 到 K 的一对一连续对应，则 $[a,b]$ 也就连续一对一地对应于区间 $[0,2\pi)$，因此 a,b 二点至少有一个对应于 $[0,2\pi)$ 的内点，例如是 a. 记 f 为此对应关系，则有 $0<f(a)<2\pi$，

取 θ_1,θ_2 使 $0<\theta_1<f(a)<\theta_2<2\pi$，记 $x_1=f^{-1}(\theta_1)$，$x_2=f^{-1}(\theta_2)$. 则 $x_1,x_2\in(a,b]$

$$0<f(x_1)<f(a)<f(x_2)<2\pi.$$

由介值定理，$\exists\,\xi$ 在 $x_1\sim x_2$ 使 $f(\xi)=f(a)$，与一一对应矛盾.

~~6. 设 $u=f(z)$，其中 z 为方程式 $z=x+y\varphi(z)$~~

6. $f(x,y)=\varphi(|xy|)$，其中 $\varphi(0)=0$，在 $u=0$ 的附近满足 $|\varphi(u)|\le u^2$，试证 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

证明：$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(|x\cdot 0|)-\varphi(0)}{x}=0$，$f'_y=0$

$$\left|\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\left|\frac{\varphi(|xy|)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\frac{|xy|^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\le|xy|^{\frac{3}{2}}\to 0 \quad (x\to 0,\ y\to 0).$$

17 设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的一个邻域上有定义，要求给函数 $\varphi(x,y)$ 加上适当的条件，使得

(1) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续.

(2) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 存在偏导数

(3) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.

证明 (1) 由于 $f(0,0)=0$. 而在点 $(0,0)$ 附近. $|f(x,y)|\le 2\sqrt{x^2+y^2}\,|\varphi(x,y)|$

于是当 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\,\varphi(x,y)=0$ 时 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

即只要 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 附近有界即可

(2) 考虑单侧偏导数. $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\pm}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0^\pm}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^\pm}\frac{\pm x\varphi(x,0)}{x}=\pm\lim_{x\to 0^\pm}\varphi(x,0).$$

$\therefore$ 当 $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x,0)=-\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x,0)$ 时. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x,0)$ 存在.

~~∴只需 φ(x,y) 关于x在 0 处连续~~. 同理

$\lim\limits_{y\to 0^+}\varphi(0,y)=-\lim\limits_{y\to 0^-}\varphi(0,y)$ 时. $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0^+}\varphi(0,y)$. 存在.

综上只须 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\varphi(x,y)=0$ 时. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

(3) $f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y$

$=|x-y|\varphi(x,y)-[\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x,0)]x-[\lim\limits_{y\to 0^+}\varphi(0,y)]y$

$$=\begin{cases}[\varphi(x,y)-\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x,0)]x-[\varphi(x,y)+\lim\limits_{y\to 0^+}\varphi(0,y)]y & x\ge y\\ -[\varphi(x,y)+\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x,0)]x+[\varphi(x,y)-\lim\limits_{y\to 0^+}\varphi(0,y)]y & x<y\end{cases}$$

$\therefore$ 只须. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\varphi(x,y)=0$ 即可. (要求还能更松).

此时 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{|x-y|\,|\varphi(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}2|\varphi(x,y)|=0$ 可微.

T8 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续偏导数，且 $f(x,x^2)\equiv 1$

(1) 若 $f_x(x,x^2)=x$，求 $f_y(x,x^2)$

(2) 若 $f_y(x,y)=x^2+2y$，求 $f(x,y)$

解：(1) 对 $f(x,x^2)\equiv 1$ 两边求导可知

$$f_x(x,x^2)+f_y(x,x^2)\cdot 2x=0$$

$\therefore$ $x\neq 0$ 时 $f_y(x,x^2)=-\frac{1}{2}$，由连续性 $x=0$ 时 $f(x,x^2)=-\frac{1}{2}$

(2) 令 $F(x,y)=f(x,y)-(x^2y+y^2)$

其实是积分来的.

$$F_y(x,y)=f_y(x,y)-x^2-2y=0.$$

$\therefore$ $F(x,y)$ 只是 x 的函数，即 $F(x,y)=\varphi(x)$.

$\therefore$ $\cancel{f(x,y)=x^2+2y+\varphi(x)}$ $f(x,y)=x^2y+y^2+\varphi(x)$.

再由 $f(x,x^2)\equiv 1$ 得 $\cancel{3x^2+\varphi(x)}=2x^4+\varphi(x)=1 \Rightarrow \varphi(x)=1-2x^4$

$\therefore$ $f(x,y)=x^2y+y^2+1-2x^4$.

对 $f_y(x,y)$ 两边对 y 积分（x 看成常数）.

$\int f_y(x,y)=x^2y+y^2+C(x)$ 有关 x 的常数

$\Rightarrow f(x,y)=x^2y+y^2+C(x)$.

T9 设二元连续可微函数 F 在直角坐标下可写为 $F(x,y)=f(x)g(y)$，在极坐标下可写为 $F(r\cos\theta, r\sin\theta)=h(r)$，若 $F(x,y)$ 无零点，求 $F(x,y)$.

$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$

解 注意 $\frac{\partial F}{\partial\theta}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}$ （从直角坐标来观察）

$$=f'(x)g(y)(-r\sin\theta)+f(x)g'(y)r\cos\theta$$

$$=-yf'(x)g(y)+xf(x)g'(y)$$

$\frac{\partial F}{\partial\theta}=\frac{\partial h(r)}{\partial\theta}=0$. （从极坐标观察）.

$\therefore$ $-yf'(x)g(y)+xf(x)g'(y)=0$.

当 $x\neq 0$, $y\neq 0$ 时. $\dfrac{f'(x)}{xf(x)} = \dfrac{g'(y)}{yg(y)}$

由于上式对任意 $x\neq 0$, $y\neq 0$ 恒成立. $\Rightarrow$ 令 $\dfrac{f'(x)}{xf(x)} = \dfrac{g'(y)}{yg(y)} = \lambda$

其中 λ 为一个常数. 由此 $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \lambda x \Rightarrow \ln f(x) = (\frac{\lambda}{2}x^2)' \Rightarrow \ln f(x) = \frac{\lambda}{2}x^2 + C$

$f(x) = e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\cdot C_1$

同理 $g(y) = C_2\, e^{\frac{\lambda}{2}y^2}$.

$\therefore F(x,y) = C' e^{\frac{\lambda}{2}(x^2+y^2)}$ $\quad C.\lambda$ 为任一常数.

由于 $F(x,y)$ 在 $x=0$. $y=0$ 处都连续. 那定义域为 $\mathbb{R}^2$ 且满足题意

(若题目给两个初值. 就唯一确定).

T_{10}. 设 $u=f(z)$, 其中 z 为方程式 $z=x+y\varphi(x)$ 所定义的为 x,y 的隐函数, 证明: $\varphi.f$ 关于各自变量偏导都连续.

Lagrange 公式 $\dfrac{\partial^n u}{\partial y^n} = \dfrac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{[\varphi(z)]^n \dfrac{\partial u}{\partial x}\right\}$ ...... A

$u - z < \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$.

证明: 采用数学归纳法来证明: $n=1$ 时 记 $F(x,y,z) = z-x-y\varphi(z)$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{du}{dz}\cdot\left(-\frac{F_y}{F_z}\right) = f'(z)\cdot\frac{\varphi(z)}{1-y\varphi'(z)}.$$

同理: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{f'(z)}{1-y\varphi'(z)} \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y} = \varphi(z)\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ✓.

若 $n-1$ 的情况成立. 下证 n 时也成立.

$$A\text{式右} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{[\varphi(z)]^n\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{[\varphi(z)]^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right\} = \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\left\{(n-1)[\varphi(z)]^{n-2}\varphi'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right.$$
$$\left.+[\varphi(z)]^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right\} \quad ①$$

$$A\text{式左} = \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial y^{n-1}}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\left\{[\varphi(z)]^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x}\right\}$$
$$= \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\frac{\partial}{\partial y}\left\{[\varphi(z)]^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x}\right\}$$

$$= \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}} \cdot \left\{ (n-1)[\varphi(z)]^{n-2} \varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot [\varphi(z)]^{n-1} \right\}$$ ②

比较①②可知：只须知 $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$ 即可

由于 $z_y' = \varphi(z) z_x'$ 且 $u_y' = \varphi(z) u_x'$ 似知，$z_y' = \frac{u_y'}{u_x'} z_x' \Rightarrow z_y' u_x' = u_y' z_x'$ #

T11 设 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处可微，$l_1, l_2 \cdots l_n$ 为 P_0 处给定的 n 个单位向量，相邻二向量夹角为 $\frac{2\pi}{n}$

证明：$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l_i} = 0$

证明：由于 $\frac{\partial f}{\partial l_i}\Big|_P = f_x'(x_0,y_0) \cdot \cos(l_i, x) + f_y'(x_0,y_0) \cos(l_i, y)$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial l_i}(x_0,y_0) = \sum_{i=1}^{n} \left(f_x'(x_0,y_0)\cos(l_i,x) + f_y'(x_0,y_0)\cos(l_i,y) \right)$$

$$= f_x'(x_0,y_0) \sum_{i=1}^{n} \cos(l_i,x) + f_y'(x_0,y_0) \sum_{i=1}^{n} \cos(l_i,y)$$

不妨设在 $P=(x_0,y_0)$ 沿 x 轴方向逆时针方向转动遇到的第一个向量为 l_1，记 l_1 与 x 轴的夹角为 α，则 $l_1 \cdots l_n$ 与 x 轴的夹角顺次为 $\alpha + \frac{2\pi}{n}, \alpha + \frac{4\pi}{n} \cdots \alpha + (n-1)\frac{2\pi}{n}$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} \cos(l_i, x) = \cos\alpha + \cos(\alpha + \frac{2\pi}{n}) + \cdots + \cos(\alpha + (n-1)\frac{2\pi}{n})$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{2\pi}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} 2\cos(\alpha + i\frac{2\pi}{n}) \sin\frac{2\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{2\pi}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sin[\alpha + i\frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}] - \sin[\alpha + (i-1)\frac{2\pi}{n}] \right).$$

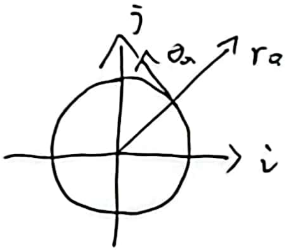
$$= 0.$$

同理 $\sum_{i=1}^{n} \cos(l_i, y) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l_i} = 0$ #

T_{12} 设 $u=f(x,y)$. $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 求证.

$$\nabla u=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{r_0}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{\theta_0}$$

$\vec{r_0}$. $\vec{\theta_0}$ 为径向和圆周方向的单位向量.



$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$$

证明: 由向量分解知.

$$\nabla u=(\nabla u\cdot\vec{r_0})\vec{r_0}+(\nabla u\cdot\vec{\theta_0})\vec{\theta_0}$$

$$\vec{r_0}=(\cos\theta,\sin\theta).\quad \vec{\theta_0}=(\underbrace{\cos(\theta+\tfrac{\pi}{2})}_{=-\sin\theta},\ \underbrace{\sin(\theta+\tfrac{\pi}{2})}_{=\cos\theta}).$$

$$\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

$$\nabla u\cdot\vec{r_0}=\frac{\partial u}{\partial x}\underbrace{\cos\theta}_{\frac{\partial x}{\partial r}}+\frac{\partial u}{\partial y}\underbrace{\sin\theta}_{\frac{\partial y}{\partial r}}\overset{定义}{=}\frac{\partial f}{\partial r}$$ ~~(方向导数)~~

$$\nabla u\cdot\vec{\theta_0}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos(\theta+\tfrac{\pi}{2})+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta\right]$$

$$\overset{定义}{=}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

$$\therefore \nabla u=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{r_0}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{\theta_0}.$$

T_{13}. 设 $x^2y^2+x^2+y^2-1=0$, 证明 当 $xy>0$ 时有 $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0$

证明: 对原方程关于 x 求导. (y看成x函数). $2xy^2+x^2 2y\dfrac{dy}{dx}+2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2xy^2+2x}{-(x^2 2y+2y)}=-\sqrt{\frac{x^2(y^2+1)^2}{y^2(x^2+1)^2}}$$

由原式 $\begin{cases}x^2(y^2+1)=1-y^2\\ y^2(x^2+1)=1-x^2.\end{cases}$ 代入知 $\dfrac{dy}{dx}=-\sqrt{\dfrac{(y^2+1)(1-y^2)}{(1-x^2)(x^2+1)}}=-\sqrt{\dfrac{1-y^4}{1-x^4}}$

$$\therefore \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

(特殊的点通过连续性保证.)