第八次作业参考

贺维易，王睿，胡铁宁

2023 年 5 月 16 日

目录

一点说明

(i) 作业讲义部分题过程可能有省略。如对作业仍有疑问可以在群里或答疑课上讨论。

(ii) **作业讲义会随时间更新。**

(iii) 请及时核对自己在 BB 系统里的分数，如有问题请向对应的助教反馈。

(iv) 附录里的内容仅供有兴趣的同学参考，有可能涉及之后才会学习或课外的知识，不要求在现阶段掌握。

(v) 讲义最好用电脑打开，文档内置了链接功能，复习或查看指定的作业很方便。

成绩说明：成绩公式为

$$\text{score} = \begin{cases} 10 - k \cdot \max\{n - n_0, 0\} & \text{未迟交} \\ 5 & \text{迟交} \end{cases}$$

其中 n 为错题数，n_0 为容忍度；k 为系数，取决于当周作业的题量。第八周不考虑补充题共 15 题，$n = 15$，考虑到一些同学出现了计算失误、笔误、抄错题目等等情况，$n_0 = 2$；$k = 0.5$。对于一些不严格的证明，助教也会酌情给分。也意味着作业得到满分不代表作业没有问题，请认真查看自己的作业。

上述评分标准对每个助教都成立。

1 4 月 23 日布置的作业

1.1 教材习题 P156-157:38,40,41,43,44

习题 1 (教材习题 38)**.** 设 $\boldsymbol{\alpha_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_s}$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一组解，$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为常数。给出 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha_1}+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha_s}$ 为该线性方程组的解的充要条件。

解. 充要条件为 $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i=1$.
充分性：假设 $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i=1$，因为 $\boldsymbol{\alpha_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_s}$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一组解，则 $\boldsymbol{A}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha_1}+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha_s})=\boldsymbol{b}\sum_{i=1}^{s}\lambda_i=\boldsymbol{b}$，即 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha_1}+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha_s}$ 为该线性方程组的解;
必要性：假设 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha_1}+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha_s}$ 为该线性方程组的解，则 $\boldsymbol{A}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha_1}+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha_s})=\boldsymbol{b}$，显然有 $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i=1$.
充要性得证. □

习题 2 (教材习题 40)**.** 求下列齐次线性方程组的基础解系与通解：
(1)

$$\begin{cases} x_1-3x_2+x_3-2x_4=0 \\ -5x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ -x_1-11x_2+2x_3-5x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+x_4=0 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4-4x_5=0 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=0 \\ -x_1+3x_2-5x_3+7x_4-4x_5=0 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4-6x_5=0 \end{cases}$$

解. 本题答案不唯一，选择基础解系的时候可以令不同的元为 0 来保证线性无关性。
(1)$\boldsymbol{\alpha_1}=(-1,1,0,-2),\boldsymbol{\alpha_2}=(-1,0,7,3)$ 构成原线性方程组的一个基础解系，通解为 $t_1\boldsymbol{\alpha_1}+t_2\boldsymbol{\alpha_2}$，$t_1,t_2$ 为任意参数.
(2)$\boldsymbol{\alpha_1}=(2,2,0,0,1),\boldsymbol{\alpha_2}=(0,0,1,1,\frac{1}{2})$ 构成原线性方程组的一个基础解系，通解为 $t_1\boldsymbol{\alpha_1}+t_2\boldsymbol{\alpha_2}$，$t_1,t_2$ 为任意参数. □

习题 3 (教材习题 41)**.** 已知 F^5 中向量 $\eta_1=(1,2,3,2,1)^T$ 及 $\eta_2=(1,3,2,1,2)^T$. 找一个齐次线性方程组，使得 η_1 与 η_2 为该方程组的基础解系。

解. 本题答案不唯一.

$$\begin{cases} 5x_1-x_2-x_3=0 \\ x_1-x_3+x_4=0 \\ 3x_1-x_4-x_5=0 \end{cases}$$

容易验证上面的齐次线性方程组的系数矩阵秩是 3, 故解空间维数为 $5-3=2$, $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}_2$ 确实为基础解系. □

习题 4 (教材习题 43). 判断下列集合关于规定的运算是否构成线性空间:

(1)V 是所有实数对 (x, y) 的集合，数域 $F = \boldsymbol{R}$. 定义

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda(x, y) = (x, y);$$

(2)V 是所有满足 $f(-1) = 0$ 的实函数的集合，数域 $F = \boldsymbol{R}$. 定义加法为函数的加法，数乘为数与函数的乘法;

(3)V 是所有满足 $f(0) \neq 0$ 的实函数的集合，数域 $F = \boldsymbol{R}$. 定义加法为函数的加法，数乘为数与函数的乘法;

(4)V 是数域 F 上所有 n 阶可逆方阵的全体，加法为矩阵的加法，数乘为矩阵的数乘。

解. 验证加法与数乘的封闭性以及是否满足八条运算规律.

(1) 不构成线性空间，不满足 (D2);

(2) 构成线性空间;

(3) 不构成线性空间，对加法不封闭;

(4) 不构成线性空间，对加法不封闭，即可逆矩阵的和未必可逆. □

习题 5 (教材习题 44). 设 V 是所有实函数全体在实数域上构成的线性空间，判断 V 中下列函数组是否线性相关:

(1)$1, x, \sin x$*;*

(2)$1, x, e^x$*;*

(3)$1, \cos 2x, \cos^2 x$*;*

(4)$1, x^2, (x-1)^3, (x+1)^3$*;*

(5)$\cos x, \cos 2x, \cdots, \cos(nx)$.

解. 参照课本例题 5.6.7

(1) 线性无关. 设 $a_0 + a_1 x + a_2 \sin x = 0$. 分别令 $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ 解得 $a_0 = a_1 = a_2 = 0$，从而函数组线性无关.

(2) 线性无关. 设 $a_0 + a_1 x + a_2 e^x = 0$. 分别令 $x = 0, 1, -1$ 解得 $a_0 = a_1 = a_2 = 0$，从而函数组线性无关.

(3) 线性相关.$\cos x = 2\cos^2 x - 1$.

(4) 线性相关.$(x+1)^3 = (x-1)^3 + 6x^2 + 2$. (5) 线性无关. 设 $a_1 \cos x + \cdots + \cos(nx) = 0$，令 $x = 0$ 得到 $a_1 + \cdots + a_n = 0$，对上式求二阶导可得到 $a_1 + 2^2 a_2 + \cdots + n^2 a_n = 0$，重复上述过程直至得到足够多的方程，由 Vandermonde 行列式的性质可见它们只有唯一解 $a_1 = \cdots = a_n = 0$，从而函数组线性无关. □

1.2 补充习题 1

习题 6 (补充习题 1)**.** 求解下列含参数 λ 的线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ (\lambda^2+1)x_1 + 2\lambda x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda + 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ 2x_1 + (\lambda+1)x_2 + (\lambda+1)x_3 = 2 \end{cases}$$

解. 对增广矩阵做线性变换得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda = 1$ 时，令 $x_1 = t_1, x_2 = t_2, x_3 = 1 - t_1 - t_2$，$t_1, t_2$ 为任意常数，可以得到线性方程组的通解;

当 $\lambda = -2$ 时线性方程组无解;

当 $\lambda \neq 1, -2$ 时，线性方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{1}{\lambda+2}, x_2 = \frac{1}{\lambda+2}, x_3 = \frac{1}{\lambda+2}$$

□

2　4 月 25 日布置的作业

2.1　教材习题 P157-158:46,49;P189:1

习题 7 (教材习题 46). 设 $F^n[x]$ 是数域 F 上的次数小于或等于 n 的多项式全体构成的线性空间.

(1) 证明：$S = \{1, x-1, (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n\}$ 构成 $F^n[x]$ 的一组基;

(2) 求 S 到基 $T = \{1, x, \cdots, x^n\}$ 的过渡矩阵;

(3) 求多项式 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in F^n[x]$ 在基 S 下的坐标.

解. (1) 证明：显然不存在不全为 0 的常数 $a_0, \cdots, a_n$，使 $a_0 + a_1(x-1) + \cdots + a_n(x-1)^n = 0$，$S$ 线性无关，即为 $F^n[x]$ 的一组基.(具体可见 [教材习题 44] 的方法)

(2) 设 S 到 T 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 $(1, x, \cdots, x^n) = (1, x-1, \cdots, (x-1)^n)\boldsymbol{A}$. 因为 $x^n = [(x-1)+1]^n = C_n^0 + C_n^1(x-1) + \ldots + C_n^n(x-1)^n$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \cdots & C_n^0 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^n \end{pmatrix}$$

(3) 易见多项式 $p(x)$ 在基 T 下的坐标为 $(a_0, \cdots, a_n)^T$，由坐标变换公式，在 S 下的坐标为 $\boldsymbol{A}(a_0, \cdots, a_n)^T$. □

习题 8 (教材习题 49). $V = F^{n\times n}$ 是数域 F 上所有 n 阶矩阵构成的线性空间，令 W 是数域 F 上所有满足 $tr(\boldsymbol{A}) = 0$ 的 n 阶矩阵的全体，证明 W 是 V 的线性子空间，并求 W 的一组基与维数.

证明. 首先验证 W 是线性空间.

对任意矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in W$ 满足 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}) = 0$，由 trace 的线性性质 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}) = 0$，则 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \in W$，另一方面，对任意 $\lambda \in F, \mathrm{tr}(\lambda\boldsymbol{A}) = 0$，则 $\lambda\boldsymbol{A} \in W$，即 W 是 V 的线性子空间。

设 E_{ij} 表示第 i, j 元为 1，其它元素为 0 的 $n \times n$ 单位矩阵，则 W 的基可以表示为

$$\{E_i j | i \neq j\} \cup \{E_{ii} - E_{i+1,i+1} | 1 \leq i < n\}.$$

$\dim(W) = n(n-1) + n - 1 = n^2 - 1.$ □

习题 9 (教材习题 1). 判断下面所定义的变换，哪些是线性的，哪些不是线性的：

(1) 在 $\boldsymbol{R^2}$ 中，$\mathscr{A}(a, b) = (a + b, a^2)$;

(2) 在 $\boldsymbol{R^3}$ 中，$\mathscr{A}(a, b, c) = (a - b, c, a + 1)$;

(3) 取定 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(F)$，对每个 $\boldsymbol{X} \in M_n(F), \mathscr{A}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{AX} - \boldsymbol{XB}$;

(4) 在线性空间 V 中，$\mathscr{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha}$，其中 α 为 V 中的一个固定的向量.

解. 只需要按照线性变换的定义进行验证，对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, \lambda \in F$，有：

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathscr{A}(\boldsymbol{x}) + \mathscr{A}(\boldsymbol{y}), \mathscr{A}(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \mathscr{A}(\boldsymbol{x})$$

下面仅以 (1) 为例给出验证过程，(2)(3)(4) 的验证同理于 (1).

(1) 不是线性的。设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$，则有 $\mathscr{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (x_1+x_2+y_1+y_2, (x_1+y_1)^2) \neq \mathscr{A}(\boldsymbol{x}) + \mathscr{A}(\boldsymbol{y}) = (x_1+x_2, x_1^2) + (y_1+y_2, y_1^2) = (x_1+x_2+y_1+y_2, x_1^2+y_1^2)$.

(2) 不是线性的.

(3) 是线性的. 注：$M_n(F)$ 表示数域 F 上所有 n 阶矩阵组成的向量空间.

(4)$\mathscr{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}(\boldsymbol{x}) + \mathscr{A}(\boldsymbol{y}) = 2\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}(\lambda \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha}, \lambda \mathscr{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{\alpha}$，因此可以看出，只有在线性空间中固定向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 为零向量时才是线性变换，否则均不是线性变换。 □

2.2 补充习题 2,3

习题 10 (补充习题 2). 设 $\mathscr{A}: V_1 \to V_2$ 是向量空间之间的线性映射. 验证：$\ker(\mathscr{A})$ 是 V_1 的子空间，而 $\operatorname{im}(\mathscr{A})$ 是 V_2 的子空间。

证明. 由定义，这两个空间与 V_1, V_2 的包含关系是显然的，我们只需要验证它们是线性空间.

对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ker(\mathscr{A})$，由定义 $\boldsymbol{x} \in V_1, \boldsymbol{y} \in V_2, \mathscr{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \in V_2, \mathscr{A}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \in V_2$. 而 $\mathscr{A}$ 是线性变换，V_1, V_2 为线性空间，所以 $\mathscr{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathscr{A}(\boldsymbol{x}) + \mathscr{A}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \in V_2$，即 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \ker(\mathscr{A})$，同理 $\lambda \boldsymbol{x} \in \ker(\mathscr{A})$，即 $\ker(\mathscr{A})$ 是 V_1 的子空间。

同理可验证 $\operatorname{im}(\mathscr{A})$ 是 V_2 的子空间。 □

习题 11 (补充习题 3). 设 $\mathscr{A}: V_1 \to V_2$ 是向量空间之间的线性映射，证明：

$$\dim(V_1) = \dim(\ker(\mathscr{A})) + \dim(\operatorname{im}(\mathscr{A})). \tag{1}$$

(提示：先找到 $\ker(\mathscr{A})$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_s}$，接下来将其扩充为 V_1 的一组基 $\boldsymbol{\alpha_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_s}, \boldsymbol{\beta_1}, \cdots, \boldsymbol{\beta_t}$，并且验证 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta_1}), \cdots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\beta_t})$ 构成 $\operatorname{im}(\mathscr{A})$ 的一组基)

证明. 由提示，我们只需证明 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta_1}), \cdots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\beta_t})$ 构成 $\operatorname{im}(\mathscr{A})$ 的一组基.

假设存在不全为 0 的 $a_1, \cdots, a_t$，使得 $a_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta_1}) + \cdots + a_t\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta_t}) = 0$，由 $\mathscr{A}$ 的线性性，这等价于 $\mathscr{A}(a_1\boldsymbol{\beta_1} + \cdots + a_t\boldsymbol{\beta_t}) = 0$，即 $a_1\boldsymbol{\beta_1} + \cdots + a_t\boldsymbol{\beta_t} \in \ker(\mathscr{A})$. 因为 $\boldsymbol{\alpha_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_s}$ 是 $\ker(\mathscr{A})$ 的一组基，则存在不全为 0 的 $b_1, \cdots, b_s$ 使得 $b_1\boldsymbol{\alpha_1} + \cdots + b_s\boldsymbol{\alpha_s} = a_1\boldsymbol{\beta_1} + \cdots + a_t\boldsymbol{\beta_t}$，但是 $\boldsymbol{\alpha_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_s}, \boldsymbol{\beta_1}, \cdots, \boldsymbol{\beta_t}$ 是 V_1 的一组基，它们应该线性无关，则矛盾. 所以 $a_1 = \cdots = a_t = 0$. 即 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta_1}), \cdots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\beta_t})$ 构成 $\operatorname{im}(\mathscr{A})$ 的一组基. □

3 4 月 27 日布置的作业

3.1 教材习题 P189-190:2,3,4,6,8

习题 12 (教材习题 P189 2). 求下列线性变换在所指定的基下的矩阵:
(1)$\mathbb{R}^3$ 中的投影变换 $\mathscr{A}(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, 0)$ 在自然基下;
(2) 在 $F_n[x]$ 中, $\mathscr{A}(P(x)) = P'(x)$, 在基 $\boldsymbol{e}_0 = 1, \boldsymbol{e}_1 = x, \cdots, \boldsymbol{e}_n = \dfrac{x^n}{n!}$ 下;
(3) 以四个线性无关的函数

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mathrm{e}^{ax} \cos bx, \quad \alpha_2 = \mathrm{e}^{ax} \sin bx, \\ \alpha_3 &= x\mathrm{e}^{ax} \cos bx, \quad \alpha_4 = x\mathrm{e}^{ax} \sin bx \end{aligned}$$

为基的四维空间中, 线性变换为微分变换;
(4) 给定 2 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$, 求 2 阶实方阵构成的线性空间上的线性变换 $\mathscr{A}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{AX} - \boldsymbol{XA}$ 在基

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解. (1) 借助教材 P163 的定义

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1), \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

代入即得

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1), \mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2), \mathscr{A}(\boldsymbol{e}_3)) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 在次数不超过 n 的多项式空间中, 容易看到 $\mathscr{A}(x^k) = kx^{k-1}$

$$\begin{aligned} \mathscr{A}\left(1, x, \frac{x^2}{2!}, \ldots, \frac{x^n}{n!}\right) &= \left(0, 1, x, \frac{x^2}{2!}, \ldots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) \\ &= \left(1, x, \frac{x^2}{2!}, \ldots, \frac{x^n}{n!}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) 微分变换即为 $\dfrac{d}{dx}$，记为 $\mathscr{D}$。首先计算 $\mathscr{D}(\boldsymbol{\alpha}_i)$

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}(\boldsymbol{\alpha}_1) &= ae^{ax}\cos(bx) - be^{ax}\sin(bx) = a\boldsymbol{\alpha}_1 - b\boldsymbol{\alpha}_2 \\
\mathscr{D}(\boldsymbol{\alpha}_2) &= ae^{ax}\sin(bx) + be^{ax}\cos(bx) = b\boldsymbol{\alpha}_1 + a\boldsymbol{\alpha}_2 \\
\mathscr{D}(\boldsymbol{\alpha}_3) &= -bxe^{ax}\sin(bx) + e^{ax}\cos(bx) + axe^{ax}\cos(bx) = \boldsymbol{\alpha}_1 + a\boldsymbol{\alpha}_3 - b\boldsymbol{\alpha}_4 \\
\mathscr{D}(\boldsymbol{\alpha}_4) &= e^{ax}\sin(bx) + axe^{ax}\sin(bx) + bxe^{ax}\cos(bx) = \boldsymbol{\alpha}_2 + b\boldsymbol{\alpha}_3 + a\boldsymbol{\alpha}_4
\end{aligned}$$

因此

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

(4) 不妨设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，根据定义有

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1) &= \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = -a_{12}\boldsymbol{e}_2 + a_{21}\boldsymbol{e}_3 \\
\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2) &= \begin{pmatrix} -a_{21} & a_{11}-a_{22} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix} = -a_{21}\boldsymbol{e}_1 + (a_{11}-a_{22})\boldsymbol{e}_2 + a_{21}\boldsymbol{e}_4 \\
\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_3) &= \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22}-a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix} = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + (a_{22}-a_{11})\boldsymbol{e}_3 - a_{12}\boldsymbol{e}_4 \\
\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_4) &= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{21} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}\boldsymbol{e}_2 - a_{21}\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}$$

因此

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4) = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & a_{11}-a_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22}-a_{11} & -a_{21} \\ 0 & a_{21} & -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

□

习题 13 (教材习题 P190 3). 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义线性变换

$$\mathscr{A}(x,y,z) = (x+2y, x-3z, 2y-z)$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0), \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0), \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ 下的矩阵

解. 根据定义有

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1) &= \mathscr{A}(1,0,0) = (1,1,0) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \\
\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2) &= \mathscr{A}(0,1,0) = (2,0,2) = 2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3 \\
\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_3) &= \mathscr{A}(0,0,1) = (0,-3,-1) = -3\boldsymbol{e}_2 - 1\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}$$

即得

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&-3\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

□

习题 14 (教材习题 P190 4). 在 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 将

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,0,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^T$$

变换到

$$\boldsymbol{\beta}_1=(2,3,5)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,0)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(0,1,-1)^T$$

求 $\mathscr{A}$ 在自然基和 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵。

解. 注意到 $\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\neq 0$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的一组基。

先计算 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵。根据定义有，

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1&\boldsymbol{\beta}_2&\boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}$$

可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1&\boldsymbol{\beta}_2&\boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1&0\\3&0&1\\5&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&-1&1\\2&1&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

容易看到自然基到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵为方阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}$（教材例 6.2.1），于是由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到自然基的过渡矩阵为 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}^{-1}$，则由教材定理 6.2.2，$\mathscr{A}$ 在自然基上的矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1&\boldsymbol{\beta}_2&\boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1&\boldsymbol{\beta}_2&\boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&-3&3\\-1&-5&5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

习题 15 (教材习题 P190 6). 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为线性空间 V 的一组基，证明：对于任意的 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\in V$，存在线性变换 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}(\alpha_i)=\boldsymbol{\beta}_i$，并证明这样的 $\mathscr{A}$ 的唯一性。

证明. 根据教材 P132 定义 5.4.1，容易看到对于任意的 $\boldsymbol{\beta}_i \in V$，可表示为 $\boldsymbol{\beta}_i = a_{1i}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2i}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{ni}\boldsymbol{\alpha}_n$，且容易证明这种表示是唯一的（假设两组不同的表示，相减根据线性无关定义即可。）因此 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i)$ 可写为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_n\end{pmatrix} = \mathscr{A}\,(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \cdots\ \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

存在性证毕。若存在不同的线性变换 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ 满足 $\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha}_i) = \mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha}_i) = \boldsymbol{\beta}_i$，则 $\forall \boldsymbol{\gamma} \in V, \boldsymbol{\gamma} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n, \mathscr{A}_1(\boldsymbol{\gamma}) = \mathscr{A}_1(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{\alpha}_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha}_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha}_i) = \mathscr{A}_2(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{\alpha}_i) = \mathscr{A}_2(\boldsymbol{\gamma}) \Leftrightarrow \mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$。唯一性证毕。 □

习题 16 (教材习题 P190 8)**.** *设 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的矩阵:

(1)$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2$

(2)$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$

解. 设 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$。写出 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 过度矩阵 $\boldsymbol{T}$,$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{T}$

(1)$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(2)$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

□

4 5 月 4 日布置的作业

4.1 教材习题 P190-191:5,9

习题 17 (教材习题 P190 5)**.** *设 V 为 n 维线性空间, $\mathscr{A}: V \to V$ 为线性变换. 若存在 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 使得 $\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 但是 $\mathscr{A}^{n}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 证明: $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

证明. 首先, 我们不难看出

$$\mathscr{A}(\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = (\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

下面, 我们只要证明 $\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}$ 是 V 的一组基就能得到题目结论. 我们设 n 个数 $\lambda_{n-1}, \cdots, \lambda_1, \lambda_0$ 满足 $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \mathscr{A}^k \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. 于是 $\mathscr{A}^{n-1}(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \mathscr{A}^k \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$, 即 $\lambda_0 \mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. 又由 $\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ 可得 $\lambda_0 = 0$. 于是再由 $\mathscr{A}^{n-2}(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \mathscr{A}^k \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$ 可得 $\lambda_1 = 0$. 依次进行下去不难得到 $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$. 因此 $\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}$ 线性无关, 构成 n 维线性空间 V 的一组基. □

习题 18 (教材习题 P191 9)**.** *在 $\mathbb{R}^3$ 中给定两组基:*

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 1), \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 1, 0), \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 1, 1);$$
$$\boldsymbol{\beta}_1 = (2, 3, 1), \quad \boldsymbol{\beta}_2 = (7, 9, 5), \quad \boldsymbol{\beta}_3 = (3, 4, 3).$$

定义线性变换 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\beta}_i, i = 1, 2, 3$.

(i) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵.

(ii) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的矩阵.

解. 这种计算题我们总是以标准基作为沟通两组基的桥梁. 设 $\mathbb{R}^3$ 的标准基为

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1).$$

(i) 我们可以看出[1]

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

以及

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{pmatrix}.$$

记前面的从 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 到 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 和 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$ 的过渡矩阵分别为

$$\boldsymbol{T}_1=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{T}_2=\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{pmatrix}.$$

于是

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{T}_2=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{T}_2.$$

因此, $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{T}_2=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&-3&-1\\\frac{1}{2}&1&0\\\frac{5}{2}&8&4\end{pmatrix}.$$

(ii) 直接计算

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{T}_2=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{T}_2=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{T}_2.$$

故 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵也是

$$\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{T}_2=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&-3&-1\\\frac{1}{2}&1&0\\\frac{5}{2}&8&4\end{pmatrix}.$$

□

4.2 补充习题 4,5,6,7

习题 19 (补充习题 4)**.** 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 构成向量空间 V 的一组基, 而 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}0&-6&1\\0&5&-1\\1&-2&7\end{pmatrix}$. 计算 $\mathscr{A}(3\boldsymbol{\beta}_1-4\boldsymbol{\beta}_2+5\boldsymbol{\beta}_3)$.

[1]理应注意的是, $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 和 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 都不是方阵, 而仅仅是两个向量组而已.

解. 由条件可得

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}0&-6&1\\0&5&-1\\1&-2&7\end{pmatrix}.$$

所以

$$\mathscr{A}(3\boldsymbol{\beta}_1-4\boldsymbol{\beta}_2+5\boldsymbol{\beta}_3)=\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}0&-6&1\\0&5&-1\\1&-2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}29\\-25\\46\end{pmatrix}=29\boldsymbol{\beta}_1-25\boldsymbol{\beta}_2+46\boldsymbol{\beta}_3.$$

□

习题 20 (补充习题 5)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 所在的相似等价类仅有一个元素. 证明: $\boldsymbol{A}$ 是一个数量阵.

证明. 由条件可知, 对任意的 n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{P}$, 有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}$, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$. 特别地, 取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}_{ij}, i,j=1,\cdots,n$. 其中, $\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示 (i,j) 元为 1, 其余元素全为 0 的 n 阶方阵. 故 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}_{ij})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}_{ij})$, 即 $\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}$. 与我们之前做过的一道习题 (与任意 n 阶方阵均乘法可交换的矩阵必为数量阵) 类似, 可得 $\boldsymbol{A}$ 必为数量阵. □

习题 21 (补充习题 6)**.** 若同阶方阵满足 $\boldsymbol{A}_1\sim\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{B}_1\sim\boldsymbol{B}_2$, 我们一般情况下是无法推出 $(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1)\sim(\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2)$ 的, 也无法推出 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1)\sim(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2)$. 请举例说明这一点.

解. (i) 令

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

显然 $\boldsymbol{A}_1\sim\boldsymbol{A}_2$. 又不难计算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}_2$, 所以 $\boldsymbol{B}_1\sim\boldsymbol{B}_2$. 但是

$$\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

容易看出 $(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1)\sim(\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2)$ 不成立.

(ii) 令

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{B}_1=\mathrm{diag}(1,2),\quad \boldsymbol{B}_2=\mathrm{diag}(2,1).$$

显然 $\boldsymbol{A}_1\sim\boldsymbol{A}_2$. 又不难计算 $\boldsymbol{S}_{12}^{-1}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{S}_{12}=\boldsymbol{B}_2$, 所以 $\boldsymbol{B}_1\sim\boldsymbol{B}_2$. 但是

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\mathrm{diag}(1,4),\quad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2=\mathrm{diag}(2,2).$$

于是 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2$ 有不同特征值, 从而 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1)\sim(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2)$ 不成立.

□

习题 22 (补充习题 7)**.** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times 2}$, 而 $\boldsymbol{P}$ 是初等矩阵 $\boldsymbol{S}_{12},\boldsymbol{D}_1(\lambda),\boldsymbol{D}_2(\lambda),\boldsymbol{T}_{12}(\lambda)$ 或 $\boldsymbol{T}_{21}(\lambda)$. 在这五种情形下, 计算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$. 进一步地, 说明任意 2 阶复数方阵都可以相似于一个上三角矩阵, 也可以相似于一个下三角矩阵.

解. (i) 当 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{S}_{12}$ 时, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$.

(ii) 当 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}_1(\lambda)$ 时, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} a & \lambda^{-1}b \\ \lambda c & d \end{pmatrix}$.

(iii) 当 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}_2(\lambda)$ 时, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} a & \lambda b \\ \lambda^{-1}c & d \end{pmatrix}$.

(iv) 当 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{T}_{12}(\lambda)$ 时, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -\lambda c+a & -\lambda^2 c+\lambda(a-d)+b \\ c & \lambda c+d \end{pmatrix}$.

(v) 当 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{T}_{21}(\lambda)$ 时, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \lambda b+a & b \\ -\lambda^2 b+\lambda(d-a)+c & -\lambda b+d \end{pmatrix}$.

若 $b\neq 0$, 在 (v) 中取 λ 为一元二次方程 $-x^2b+x(d-a)+c=0$ 的一个复根, 则可知 $\boldsymbol{A}$ 相似于上三角矩阵. 若 $b=0$, 则由 (i) 可知 $\boldsymbol{A}$ 相似于上三角矩阵. 下三角矩阵类似可证. □

致谢

感谢各助教对本文档的校对工作和内容补充，感谢申伊塃老师以及同学对助教工作的支持。