线性代数 (B1) 第六次作业

请于 2023 年 4 月 18 日周二上课前在教室里交.

补充习题可视作思考题, 正常情况下不作要求, 但是学有余力的同学强烈建议认真完成.

2023 年 4 月 11 日布置的作业

教材习题. P116: #36, #37, #39, #40, #42.

补充习题 1. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$. 若 $n=2$ 或 3, 分别计算 $\det(\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{I}_n)$, 并将结果表示成关于 λ 的多项式.

补充习题 2. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶复方阵, 证明以下关于伴随矩阵的等式:

(1) $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$;

(2) $(\boldsymbol{XAX}^{-1})^* = \boldsymbol{XA}^*\boldsymbol{X}^{-1}$, 其中 $\boldsymbol{X}$ 为可逆的 n 阶方阵;

(3) 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B} = \boldsymbol{BA}^*$.

(提示: 先在 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 皆可逆的条件下证明这些结果. 若它们不同时可逆, 将其分别用 $\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{I}_n$ 和 $\boldsymbol{B} + t\boldsymbol{I}_n$ 代替, 再取极限.)

补充习题 3. (1) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{BA}$ 可逆. 求矩阵 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

(2) 在 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{AB}$ 可逆的条件下重新求上面的 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵.

(3) 证明: $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{AB}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{BA}$ 可逆 (参见教材 P115#25, 其中 #25 的公式称为 **Schur 公式** (的特殊形式) 或 **Sylvester 公式**, 需要牢记).

2023 年 4 月 13 日布置的作业

教材习题. P155: #3(2), #4, #10(2)(4), #13 (将表述改为 "若向量组 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s \in F^n$ 线性无关, 而 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{b}$ 可以表示成 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s$ 的线性组合, 且表示唯一", 并证明这一论断), #14, #15, #16, #17.