第六次习题课

2023 年 6 月 27 日

目录

第六次习题课主要包含了第 10 至 15 次作业讲解。习题课讲义会注重概念和推导过程的逻辑，计算细节大家需要自己练习，避免出错。

1 相似对角化、相合对角化、对称、正定

1.1 相似对角化

矩阵是否可以相似对角化：

1. 充要条件：几何重数等于代数重数；n 个线性无关的特征向量。
2. 充分条件：n 个不同的特征值；实对称矩阵。

相似变换的性质：

1. 相似变换保持行列式、迹、特征值不变。
2. 对于可相似对角化的矩阵，可以利用相似标准型进行幂和多项式运算。

1.2 相合对角化

相合对角化一般仅在对称矩阵范围内讨论，而对称矩阵都可以相合对角化。

相合对角化的性质：

1. 相合对角化保持特征值的正负不变（实数域），因此有相合标准型。

1.3 实对称矩阵

实对称矩阵的性质

1. 特征值都为实数。
2. 可以正交相似对角化，选择的正交矩阵即是相似对角化矩阵也是相合对角化矩阵。
3. 二次型存在可以用实对称矩阵表示，二次型的换元、配方都等价于对实对称矩阵作相合对角化。

1.4 正定矩阵

正定矩阵一般仅在实对称矩阵范围内讨论，关注它的等价条件。参考老师讲义 20230613. 下面我列出我认为几个常用的。

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否是正定矩阵，下列条件等价：

1. $\boldsymbol{A} > 0$

2. 所有特征值都大于 0。

3. 存在可逆矩阵 P，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$。利用 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$

4. $\boldsymbol{A}$ 的每个主子式都是正的。利用 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$ 和 Binet-Cauchy 公式。

5. $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式都是正的。同上。从此出发证明 $\boldsymbol{A}>0$ 用到归纳法和行列式在相合变换下符号不变。可用于计算检验。

1.5 解题思路

方针的通用性质：$\det\boldsymbol{A}=\lambda_1\cdots\lambda_n,\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\sum\limits_i\lambda_i$

对于矩阵的幂，一般有以下思路

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值集合为 $\{\lambda_i\}$，则 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值集合为 $\left\{\lambda_i^k\right\}$.

2. 通过相似变换，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为上三角矩阵。（复数域）对角线上元素为 $\{\lambda_i\}$，此时 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{\Lambda}^k$ 为上三角矩阵，对角线上元素为 $\left\{\lambda_i^k\right\}$。

对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，实对称矩阵的特征值都是实数，且可以正交相似对角化为对角矩阵，证明一般从 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵。进一步地，实对称矩阵可以相合对角化为标准型 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & & \\ & -\boldsymbol{I}_s & \\ & & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}$

要证明对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，一般是证明特征值全为正，其次是 $\forall\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$，若都不行可以考虑其他的等价条件。

1.6 一些错误

下面有许多正确的论断，经常有同学忽略下面的基本事实进行错误的证明，在考试的时候使用是会被扣分的（或者没有分）。

1. 实数矩阵不一定可以相似对角化。不能假设 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_i,\cdots,\lambda_n)$。

2. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$。

3. $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0\nrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

4. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值不是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值的简单加法。

2 第 10 次作业

度量矩阵 Gram 矩阵的变换：若基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$, 即有

$$\left(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\right) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\,\boldsymbol{P}$$

则内积在 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 下的度量矩阵分别为 $\boldsymbol{G}, \tilde{\boldsymbol{G}}$，满足

$$\tilde{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{P}$$

习题 1 (教材习题 P192: 21)**.** *设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$, 满足 $\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{O}$, 其中 $m \geqslant 2$ 为正整数.*

1. *求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;*
2. *证明: $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角矩阵;*
3. *证明: $\det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}) = 1$.*

证明.

1. 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是属于 λ 的一个特征向量. 则 $\mathbf{0} = \boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha} = \lambda^m\boldsymbol{\alpha}$. 所以 $\lambda = 0$. 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 0.
2. 假如 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵, 则由 (i) 可知 $\boldsymbol{A}$ 相似于零矩阵, 即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 矛盾. 故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角矩阵.
3. 由 (i) 可知, $\boldsymbol{A}$ 必相似于一个主对角元全为 0 的上三角形矩阵 $\boldsymbol{B}$. 于是 $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}$ 必相似于主对角元全为 1 的上三角形矩阵 $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}$. 因此 $\det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{P} = 1$.

以此题第一问为例，上述证明之所以正确，有许多没有明说的细节，大家可以自己考虑。复习时对自己的证明也要仔细思考有没有问题。对于考试而言，当然不必写出下面这么多逻辑，但是也不要跳跃太快导致无法复现你的证明。

1. λ 一定存在。
2. 对于每一个 λ，至少存在 1 个属于 λ 的非零特征向量，原因是 $\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0 \Rightarrow \operatorname{rank}(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) < n$。此处不需代数重数等于几何重数及其条件。
3. $\mathbf{0} = \lambda^m\boldsymbol{\alpha}$，由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量，λ^m 是数，因此 $\lambda^m = 0 \Rightarrow \lambda = 0$。
4. 上述论断对每一个 λ 都适用，因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 0。

□

习题 2 (教材习题 P192: 23)**.** *设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$. 证明: $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{I}_{n-r} \end{pmatrix}$, 其中 $0 \leqslant r \leqslant n$.*

证明. 容易看到若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值集合为 $\{\lambda_i\}$，则 $\lambda_i^2 = 1 \Rightarrow \lambda_i = \pm 1$，但此时只证明了 $\boldsymbol{A}$ 相似后的对角元素为 1 或 −1，还需证明可对角化（否则类似 Jordan 标准型）。此时我们知道 $|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0, |\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}| = 0$，可对角化的证明则可以想到考虑几何重数和代数重数，具体可以参考答案。 □

3 第 11 次作业

此次作业主要是 Gram-Schmidt 正交化，主要考察内积的定义和计算过程。注意最后要归一。

Gram-Schmidt 正交化方法：

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 \xrightarrow{\text{归一}} \boldsymbol{\epsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}}\boldsymbol{\beta}_1$$
$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\epsilon}_1)\boldsymbol{\epsilon}_1 \xrightarrow{\text{归一}} \boldsymbol{\epsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}}\boldsymbol{\beta}_2$$
$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - (\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\epsilon}_1)\boldsymbol{\epsilon}_1 - (\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\epsilon}_2)\boldsymbol{\epsilon}_2 \xrightarrow{\text{归一}} \boldsymbol{\epsilon}_3 = \frac{1}{\sqrt{(\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_3)}}\boldsymbol{\beta}_3$$
$$\cdots$$

内积计算根据题目中的定义带入即可。

除了计算之外，下面是一些有关证明的知识要点。

1. 正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$
2. 正交变换是保持内积不变的线性变换。
3. 标准正交基满足 $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$，向量可表示为 $\boldsymbol{x}_i = \sum_{s=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{e}_s)\boldsymbol{e}_s$，这两个式子可以解决大部分问题。
4. 将标准正交基变为标准正交基的变换是正交变换。

4 第 12/13 次作业

这两次作业主要是实对称矩阵的正交相似对角化/相合对角化计算。对矩阵 $\boldsymbol{A}$，正交相似对角化求解特征值-特征向量 $\lambda_i, \boldsymbol{e}_i$，得到正交矩阵 $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{e}_1 \cdots, \boldsymbol{e}_i \cdots, \boldsymbol{e}_n)$，则有 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_i, \cdots, \lambda_n)$。可以从 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{e}_1 \cdots, \boldsymbol{e}_i \cdots, \boldsymbol{e}_n)(0, \cdots, \lambda_i, \cdots, 0)^T$ 看出。

相合对角化可以通过许多种方法，一般的方法是初等变换法，但如果题目有比较容易配方的形式配方法也可以。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P} \end{pmatrix}$$

应该注意，相合对角化比正交相似对角化更宽松，不要求 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$，在一些情况下可能计算量更小（如矩阵阶数高，特征值非常复杂等），最好根据题目要求进行计算。

习题 3 (教材习题 245：9). 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵，证明：

(1)$\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵当且仅当对任意一个 n 维向量 $\boldsymbol{x}$，有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$

(2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，且对任意一个 n 维向量 $\boldsymbol{x}$，有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$

证明. (1) 既然我们不知道反对称矩阵的性质，此题的证明思路是最基本的展开，展开就能完成第一问的证明。

(2) 第二问有一些同学用了 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x}^T\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T\right)\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{O} = 2\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$。画红线的部分明显是不能直接推导的，可参考第一问的结论 □

5 第 14 次作业

这一部分主要是实对称矩阵的正定的诸多等价条件的灵活运用及推导。

对于实际计算，验证对称矩阵是否正定最简单的方法是计算矩阵的顺序主子式。

对于证明而言，对称矩阵判断是否正定最常用的等价条件是特征值全为正。

对称矩阵正定的等价条件的互推大家最好也能自行复现，是这几部分的集合。

习题 4 (教材习题 15). *设有 n 元实二次型*

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2,$$

其中 $a_i(i=1,\cdots,n)$ 为实数，试问：当 $a_1,\cdots,a_n$ 满足何种条件时，$Q(x_1,\cdots,x_n)$ 为正定二次型？

解. 此题已经表达成了很好的配方的形式，显然 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 半正定，因此只需考虑是否存在 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 使得 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$，利用配方每一项都为 0 就能很容易解答。 □

习题 5 (教材习题 24(1)). *设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶实对称正定矩阵，证明:*
(1)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 亦正定.

证明. 对任意非零向量 $\boldsymbol{x}$ 有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0, \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} > 0$，所以 $\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} > 0$，即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 正定.

注意不能使用特征值相加。$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的特征值不是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值的简单加法。 □

6 第 15 次作业

习题 6 (补充习题 2). *设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{M}^*$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的伴随矩阵，则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^* = ()$.*

(D) $\begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}$

解. 利用 $\boldsymbol{M}^* = |\boldsymbol{M}|\,\boldsymbol{M}^{-1}$，所以求出 $\boldsymbol{M}^{-1}$ 即可，可以假设 $\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$（准上/下三角阵的逆总是可以假设也是上/下三角阵），然后可计算 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{C} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$ 从而

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^* = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^{-1} & -|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^* \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{pmatrix}.$$

这里用到了准上三角矩阵求逆以及求行列式的结论，可以参见第三次习题课讲义补充习题 1. □

习题 7 (补充习题 5). 方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 = 2 \end{cases}$ 有解, 其中 a, b 为常数. 若 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 4$，则 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} =$

解. 设系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，方程组有解说明 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \leq 3 < 4$，所以 $|\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}| = 0$。还可以观察到 $\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ 对应 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ a & b & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的前三行三列，$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$ 对应 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的第 2-4 行前三列。两个行列式的值恰与 $|\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}|$ 的第四列展开有对应关系。因此对应的行列式按第四列展开即可。 □

致谢

感谢各助教对本文档的校对工作和内容补充，感谢申伊塃老师以及同学对助教工作的支持。