作业答案

王睿

2023 年 3 月 15 日

目录

一点说明

1. 作业讲义部分题过程可能有省略。如对作业仍有疑问可以在群里或答疑课上讨论。
2. **作业讲义会随时间更新。**
3. 请及时核对自己在 BB 系统里的分数，如有问题请向对应的助教反馈。
4. 附录里的内容仅供有兴趣的同学参考，有可能涉及之后才会学习或课外的知识，不要求在现阶段掌握。
5. 讲义最好用电脑打开，文档内置了链接功能，复习或查看指定的作业很方便。

1 第一周作业

成绩说明：成绩公式为

$$\text{score} = \begin{cases} 10 - k \cdot \max\{n - n_0, 0\} & \text{未迟交} \\ 5 & \text{迟交} \end{cases}$$

其中 n 为错题数，n_0 为容忍度；k 为系数，取决于当周作业的题量。第一周作业较少，$n = 5$，考虑到一些同学出现了计算失误、笔误、抄错题目等等情况，$n_0 = 1$；$k = 0.5$。对于一些不严格的证明，助教也会酌情给分。也意味着作业得到满分不代表作业没有问题，请认真查看自己的作业。

上述评分标准对每个助教都成立。

1.1 3 月 7 日布置的作业

1.1.1 习题 1：Cauchy 不等式的证明

证明如下形式的 Cauchy 不等式：若 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$，则必有

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)$$

解答：Cauchy 不等式有许多证明方法，这里只给出一种。

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \\
=&\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{j=1}^n b_j^2 - \sum_{i=1}^n a_ib_i \sum_{j=1}^n a_jb_j \\
=&\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^2b_j^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_ib_ia_jb_j \\
=&\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(a_i^2b_j^2 - a_ib_ia_jb_j\right) \\
=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(a_i^2b_j^2 - 2a_ib_ia_jb_j + a_j^2b_i^2\right) \\
=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_ib_j - a_jb_i)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

其中 $\sum$ 符号为求和符号，$\sum\limits_{i=1}^n a_i^2$ 代表从 i 从 1 取到 n，对 a_i^2 的求和，即

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

求和符号参考教材 1.9 节第 27 页。

有一些同学使用的是构造函数的方法：构造

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 \geq 0$$

对任意 $x \in \mathbb{R}$ 有

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 \geq 0$$

因此有关 x 的二次方程判别式小于或等于 0，可得

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq 0$$

总体来讲，上述证明没有什么大问题；但应注意的是要分 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = 0 \text{ or } \neq 0$ 的两种情况。不等于 0 的情况上面已经讨论过；$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0 \Rightarrow a_i = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = 0 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = 0$$

可知 Cauchy 不等式成立。这样证明才是比较严谨的。

Cauchy 不等式的其他证明方法可以参考https://www.zhihu.com/question/449533105。

个人而言，不是很推荐使用向量的夹角作为证明方法，主要基于以下原因：**在一般的线性空间理论中，内积不是必要的定义**。事实上，在教材中直到第七章欧几里得空间才定义了线性空间中的内积和“夹角”。夹角的性质

$$-1 \leq \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|} \leq 1$$

需要通过 Cauchy-Schwarz 不等式来证明，而 Cauchy-Schwarz 不等式的证明依赖线性空间上内积的定义。而迄今为止，还不能说严格地定义了线性空间中的内积。没有严格内积的定义、却使用依赖内积定义的“夹角”性质来证明 Cauchy 不等式，有点本末倒置的意味。当然，对几何空间的直观理解——两个向量之间有夹角，余弦值在 $[-1,1]$ 之间也不能说错；但应注意，在很多线性空间中“夹角”是相当难理解（且没啥用）的概念，比如傅里叶级数也是一种定义内积的线性空间（例 7.1.3）。有关 Cauchy-Schwarz 不等式的证明详见附录，傅里叶级数的线性空间理解会在讲到线性空间时再介绍。

1.1.2 习题 2

设三维空间中有向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, 它们的长度相同, 两两之间的夹角相等。若 $\boldsymbol{a} = (1,1,0), \boldsymbol{b} = (0,1,1)$, 求出 $\boldsymbol{c}$.

解答: 长度相同意味着 $|\boldsymbol{a}| = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{b}| = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{c}| = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}$，夹角相等意味着 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|} = \dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|}$. 设 $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$，代入计算得

$$\begin{cases} c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0^2 + 1^2 + 1^2 = 2 \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = c_1 + c_2 = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = c_2 + c_3 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3) = (1,0,1) \text{ or } (-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$$

1.2 3 月 9 日布置的作业

1.2.1 教材习题 1.(1/2)(4)

1.(1)

$$(1)\ \begin{cases} x_1 & +x_2 & -3x_3 & = -1 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & = 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = 3 \\ x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 1 \end{cases}$$

使用增广矩阵以使表达简洁明了。方程可以记为

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

使用三个初等行变换：对换行、倍乘行、倍加行进行运算，将矩阵转换为标准形式，**计算过程不唯一**，下面只展示一种计算方法。

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2r_1\to r_2, -r_1\to r_3, -r_1\to r_4} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4, \frac{1}{4}r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2\to r_4} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{-4r_3\to r_4} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

说明此方程无解。

1.(2)

$$(2)\ \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = 4 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = -3 \\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & = 1 \\ & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = -3 \end{cases}$$

使用增广矩阵以使表达简洁明了。方程可以记为

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

使用三个初等行变换：对换行、倍乘行、倍加行进行运算，将矩阵转换为标准形式，计算过程不唯一，下面只展示一种计算方法。

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{-r_1 \to r_3} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[7r_2 \to r_4]{-5r_2 \to r_3} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{4}r_4]{\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{-r_3 \to r_4} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2r_2 \to r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \to r_2]{-r_3 \to r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 - x_4 = 3 \\ x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{令 } x_4 \text{ 为自由变量 } t}$$

$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 3 + t \\ x_3 = 6 + 2t \\ x_4 = t \end{cases} (\text{其中 } t \text{ 任意}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.(4)

$$(4) \begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & -6x_3 & +x_4 & = 2 \\ x_1 & -x_2 & +4x_3 & +x_4 & = 1 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \end{cases}$$

这里使用增广矩阵以使表达简洁明了。方程可以记为

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 4 & -6 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

使用三个初等行变换：对换行、倍乘行、倍加行进行运算，将矩阵转换为标准形式，计算过程不唯一，

下面只展示一种计算方法。

$$
\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 4 & -6 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-2r_1 \to r_2]{r_1 \to r_3} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -14 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\frac{1}{6}r_2]{\frac{1}{3}r_3} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_1} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{6} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{5}{3}r_3 \to r_1]{\frac{7}{3}r_3 \to r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{18} & \frac{4}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{25}{18} & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{令 } x_4 \text{ 为自由变量 } t} \begin{cases} x_1 = \frac{4}{9} + \frac{5}{18}t \\ x_2 = \frac{7}{9} - \frac{25}{18}t \\ x_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t \\ x_4 = t \end{cases} \quad (\text{其中 } t \text{ 任意}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{5}{18} \\ -\frac{25}{18} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}
$$

1.2.2 软件计算

1.(7)

$$
\begin{cases} x_1 & +x_2 & & -3x_4 & -x_5 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & -x_4 & & = 0 \\ 4x_1 & -2x_2 & +6x_3 & +3x_4 & -4x_5 & = 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & +4x_4 & -7x_5 & = 0 \end{cases}
$$

使用任何程序均可，只要结果正确即可。这里只展示结果。

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}
$$

A Cauchy-Schwarz 不等式的证明

第一次作业第一题比较合适的方法（第七章内容，自行学习不要求掌握）是：先证明

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \tag{A.1}$$

是实线性空间 V 中的内积，为此需要满足

1. 对称性：$\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$
2. 恒正性：$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0},(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\sum_{i=1}^{n}a_i^2>0$
3. 双线性：$\forall\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}\in V,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，均有

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})\\(\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\lambda(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\\(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1)+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_2)\\(\boldsymbol{\alpha},\mu\boldsymbol{\beta})=\mu(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\end{gathered} \tag{A.2}$$

将方程 (A.1) 代入方程 (A.2) 验证即知满足。

因此方程 (A.1) 定义的是内积。从而有

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2\leq(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) \tag{A.3}$$

这里展示一种与课本略微不同的证明，仅作为课本的补充。当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时，$(\mathbf{0},\boldsymbol{\beta})=(0\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0,(\mathbf{0},\mathbf{0})=0$，因此式 (A.3) 成等式，即当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时，式 (A.3) 成立。

设 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，记 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}\boldsymbol{\alpha}$，由内积的恒正性 $0\leq(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$ 得 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2\leq(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\beta}_1=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{\beta}=\dfrac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}\boldsymbol{\alpha}$ 时成立，此时 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关。

将方程 (A.1) 代入式 (A.3)，有

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2\leq\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right). \tag{A.4}$$

一个例子： 设 $\mathbb{R}^2$ 是所有 2 维实向量 (x_1,x_2) 构成的 2 维实向量空间，$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2),\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$. 定义 2 维实向量空间 $\mathbb{R}^2$ 上二元实函数 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+4x_2y_2 \tag{A.5}$$

容易验证，二元实函数 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 满足：对称性、恒正性和双线性。所以二元实函数 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是 2 维实向量空间 $\mathbb{R}^2$ 上的一个内积。2 维实向量空间 $\mathbb{R}^2$ 连同内积 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 便构成一个 Euclid 空间。代入式 (A.3) 一样可以得到一个不等式：

$$(x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+4x_2y_2)^2\leq(x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2)(y_1^2-2y_1y_2+4y_2^2) \tag{A.6}$$

我这里使用 mathematica 验证上式的正确性，如图A.1，并且我们还可以发现等号成立当且仅当 $x_2y_1 = x_1y_2$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关。

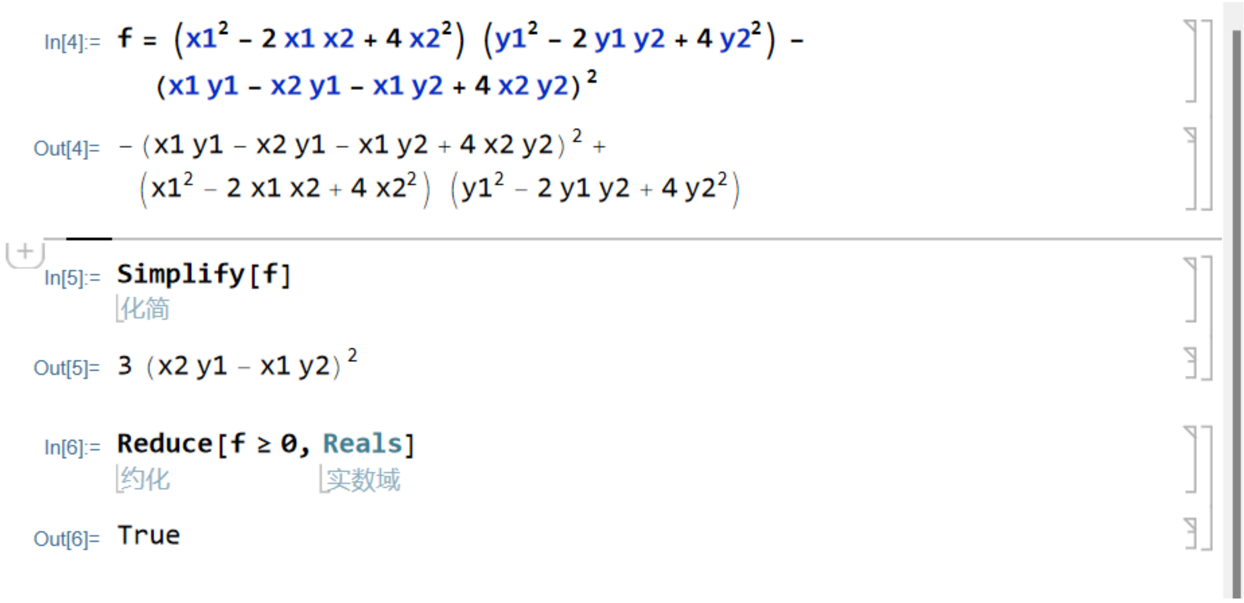

图 A.1: 使用软件可以辅助自己的计算。

当然我们也可以形式地定义“夹角”为

$$\begin{aligned}\theta &= \arccos \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})}} \\ &= \arccos \frac{(x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2)}{\sqrt{(x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2)(y_1^2 - 2y_1y_2 + 4y_2^2)}}\end{aligned} \tag{A.7}$$

上式定义的夹角可以直接用来证明 Cauchy-Schwarz 不等式吗？显然是不行的，所以用夹角的性质直接推到 Cauchy 不等式也是有问题的。

致谢

感谢胡铁宁、贺维易同学对本文档的校对工作和内容补充，感谢申伊塃老师以及同学对助教工作的支持。