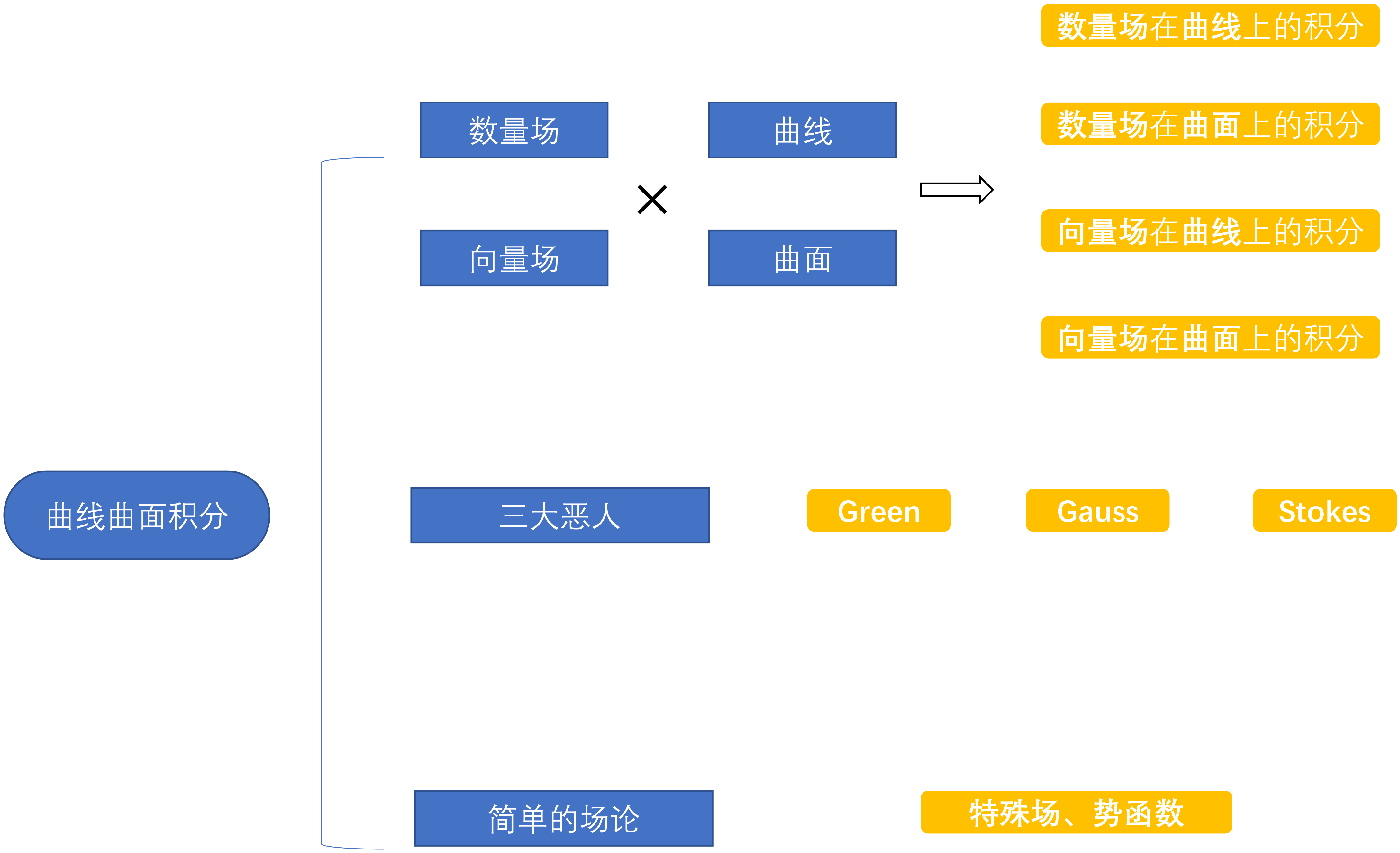
曲线曲面积分复习

彭辉阳

2023.6.28


曲线曲面积分
数量场
向量场
曲线
曲面
数量场在曲线上的积分
数量场在曲面上的积分
向量场在曲线上的积分
向量场在曲面上的积分
三大恶人
Green
Gauss
Stokes
简单的场论
特殊场、势函数

数量场在曲线上的积分

1. **形式**：$\int_L \varphi(x,y,z)ds$

2. **性质**：线性性(对φ)、保序性、可加性(对L)

3. **计算**：$L: r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k, t \in [\alpha, \beta]$，则
$\int_L \varphi(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta \varphi\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$

4. **应用**：求长度、线密度计算质量、转动惯量、引力势能

数量场在曲面上的积分

1. **形式**：$\iint_S \varphi(x,y,z)dS$

2. **性质**：线性性(对φ) 、保序性、可加性(对S)

3. **计算**：$S: r(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k, (u,v) \in D$，则
$\iint_S \varphi(x,y,z)dS = \iint_D \varphi\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)|r_u' \times r_v'|dudv$

4. **应用**：求面积、面密度求质量、转动惯量

两种常用的曲线参数化(建议背上)

- S由$z = z(x,y), (x,y) \in D$给出，则面积元素：
$$dS = \sqrt{1 + {z_x'}^2 + {z_y'}^2}dxdy$$

- 球面$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 上，可设$x = Rsin\theta cos\varphi, y = Rsin\theta sin\varphi, z = Rcos\theta$
$$dS = R^2 sin\theta d\theta d\varphi$$

- $dS = \sqrt{EG - F^2}dudv$和$dS = |r_u' \times r_v'|dudv$本质上一样的，但是前者算起来一般快些，后者更接近于实质。

向量场在曲线上的积分

1. 定向：(Important! 计算向量场积分必须先对参数定向)，如果 $r = r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k, \alpha \le t \le \beta$，积分的方向是从A: $r(\alpha)$到B: $r(\beta)$，如果$r'(t) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k$的方向与从$A$到$B$的方向一致，则称$t$为**正向参数**。
2. Note: 不是不用正向参数就做不了，但是大多数情况下用正向参数会方便一些，或者如果你发现自己定了一个反向参数，也可以$\int_{AB} = -\int_{BA}$ 转化一下就成了**正向参数，~~说白了这个东西就是为了防止正负号弄乱的，要是你不用正向参数也能算对那怎么做都行，不过不建议就是了。~~**

向量场在曲线上的积分

3. 形式：$\int_{L_{AB}} v \cdot dr$，如果积分路径是封闭曲线，也写作$\oint_L v \cdot dr$

4. 计算：$v = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$，$L_{AB}: r = r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k, \alpha \le t \le \beta$，则
$\int_{L_{AB}} v \cdot dr = \int_\alpha^\beta v\big(r(t)\big) \cdot r'(t)dt = \int_\alpha^\beta [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)]dt$

5. 性质：线性性(对v)，可加性(对L_{AB})，方向性($\int_{AB} = -\int_{BA}$)
6. 应用：力做功的计算

向量场在曲面上的积分

1. 定向：曲面S有定向n，S的参数表示$r = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k, (u,v) \in D$，如果$r_u' \times r_v'$的方向与$n$相同，则称$(u,v)$为曲面的正向参数。

2. 形式：向量场的曲面积分通常以两种形式出现：

- $\iint_S v \cdot dS = \iint_S v \cdot n dS$
- $\iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy$
- 前者在$v = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$的情况下与后者等价。
- **需要注意后者有的时候只会出现一部分，此时向量场在部分方向上分量为零，但仍然是第二型曲面积分。**

向量场在曲面上的积分

3. 性质：线性性(对v)，可加性(对S)，方向性($\iint_S v\cdot n^- dS = -\iint_S v\cdot n^+ dS$)

4. 计算：向量场为$v = Pi + Qj + Rk$，S有正向参数表示$r = r(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k$，则
$\iint_S v\cdot dS = \iint_D v\cdot r_u' \times r_v' dudv = \iint_D [P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}] dudv$

5. 应用：磁通量、电通量

Green

1. 公式：$\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$

2. 作用：平面上的第二型曲线积分→二重积分

3. 推论：平面上的面积计算公式：$\sigma(D) = \frac{1}{2}\oint_{\partial D}(-ydx + xdy) = \oint_{\partial D}(-ydx) = \oint_{\partial D} xdy$

保守场的平面版本——Green推论

- $\Leftrightarrow$ 任意环量 $=0\left(\oint_L v\cdot dr=0\right)$
- $\Leftrightarrow$ 存在$\varphi, v=\nabla\varphi(x,y)$
- $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$
- 这三种说法等价。

- 如果v满足以上三条中的任意一条，则他的积分：
$\int_A^B v\cdot dr=\varphi(B)-\varphi(A)(\nabla\varphi=v)$

Gauss

1. 形式1：$\oiint_S v\cdot dS=\iiint_V \nabla\cdot v dV$

2. 形式2：$\oiint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$

3. 作用：第二型曲面积分→三重积分

4. 计算电通量、磁通量

Stokes

1. 形式1：$\oint_L v \cdot dr = \iint_S \nabla \times v \cdot dS$

2. 形式2：$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$

3. 作用：第二型曲线积分→ 第二型曲面积分

4. ~~其实这个感觉不如$Gauss$公式那么厉害，一般只有在$\nabla \times v$形式比较好看的时候才会用，基本上是一个曲面和一个平面的交线这种才比较好做。~~

场论初步

- 保守场：$\forall L$闭合，有 $\oint_L v \cdot ds = 0$，或者说曲线积分与路径无关，那么称v是一个保守场。
- $\Leftrightarrow$ v是保守场
- $\Leftrightarrow$ $\exists \varphi$使得$v = \nabla\varphi$(此时称φ是v的势函数)
- $\Leftrightarrow$ $\nabla \times v = 0$

- 具有势函数的向量场是**有势场**，旋度为零的向量场为无旋场。
- 保守场v，则$\int_{L_{AB}} v \cdot dr = \varphi(B) - \varphi(A)$
- 广义$Stokes$公式：$\int_{\partial\Omega} w = \int_{\Omega} dw$(了解即可)

Poisson公式

3. (Poisson 公式) 设 $S:\ x^2+y^2+z^2=1$, $f(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 求证:

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(kt)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

- Hint: 做正交变换。

首先做正交变换：

$$\begin{pmatrix} t \\ u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

其中A的第一行是$(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k})$

则$t = ax + by + cz/k$，因此$f(kt) = f(ax + by + cz)$

则$\iint_S f(ax + by + cz)dS = \iint_\Sigma f(kt)d\Sigma, \Sigma : t^2 + u^2 + v^2 = 1$

这是一个第一型的曲面积分，利用$v = \sqrt{1 - t^2 - u^2}$为方程(t, u)为参数，有

$LHS = 2 \iint_{t^2+u^2\leq 1} f(ut)\frac{1}{\sqrt{1-t^2-u^2}}dtdu = 2\pi \int_{-1}^{1} f(kt)dt$

等周定理

- 讨论：在周长相等的一切简单闭曲线中，怎样的曲线包围的图形有最大的面积（只讨论分段光滑的情况）

- Hint: Green公式，积分求面积

设闭曲线Γ的长度为L，围成面积为A

取他的一对平行切线l_1, l_2，再取一个圆周S也被l_1, l_2所夹，其半径为r，以圆心为坐标原点，x轴方向垂直于l_1, l_2

设$x = x(s), y = y(s), 0 \le s \le L$为闭曲线$\Gamma$的**弧长参数**方程，则它所围成的面积：$S = \int_0^L xy'ds$

另一方面，定义$\bar{y}(s) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2(s)}, 0 \le s \le s_0 \\ -\sqrt{r^2 - x^2(s)}, s_0 \le s \le L \end{cases}$

则$(x(s), \bar{y}(s))$的曲线围成一个半径为r的圆，有:$\int_0^L \bar{y}x'ds = -\pi r^2$

$A + \pi r^2 = \int_0^L (xy' - \bar{y}x')ds = \int_0^L |(-\bar{y}, x) \cdot (x', y')|ds \le \int_0^L \sqrt{\bar{y}^2 + x^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}ds = r\int_0^L ds = rL$

$\sqrt{A\pi r^2} \le \frac{A+\pi r^2}{2} \le \frac{rL}{2}$，即$4\pi A \le L^2$(圆周不等式)

球面上的曲面积分

- 设$B_r(M_0)$是以$M_0=(x_0,y_0,z_0)$为心，r为半径的球，$\partial B_r(M_0)$是以M_0为心，r为半径的球面，证明:
- (1)$\iiint_{B_r(M_0)} f(x,y,z)dxdydz=\int_0^r \oiint_{\partial B_\rho(M_0)} f(x,y,z)dS_\rho d\rho$
- (2)$\frac{d}{dr}\iiint_{B_r(M_0)} f(x,y,z)dxdydz=\oiint_{\partial B_r(M_0)} f(x,y,z)$

先证(1)

$x=x_0+\rho\sin\varphi\cos\theta, y=y_0+\rho\sin\varphi\sin\theta, z=z_0+\rho\cos\varphi$

$0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\pi, 0\le\rho\le r$

$\iiint_{B_r(M_0)} f(x,y,z)dxdydz=\int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+\rho\sin\varphi\cos\theta, y_0+\rho\sin\varphi\sin\theta, z_0+\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d\varphi d\theta d\rho$

$=\int_0^r \oiint_{\partial B_\rho(M_0)} f(x,y,z)dS_\rho d\rho$

两边对r求导即可得到(2)

叠甲

- 这部分内容系我本人一时兴起而作，客观不足，主观有余，不全面或者有所疏漏难以避免。
- 要是我划的题目里面恰好出现了期末考的题目，希望教务处不要来找我麻烦；要是我划的题目里面什么都没有考到，希望看了这个PPT的同学不要来找我麻烦。

- 只是个人对于期末考试内容进行的片面且极具主观性的评价与猜测，仅代表本人的个人喜好、看法与观点，并不代表教务处或者老师的任何观点，本人也从未被教务处或任何任课老师透露过有关期末考试的相关内容。

- Ex11.1 1(4); 2(9); 5(没有显式的参数表示时应该如何换元处理，物理背景的应用)
- Ex11.2 1(6); 2(4); 3; 6(曲面参数化的技巧，对称性，物理题)
- Ex11.3 1(1)(6); 3; **4(5)**; **6**(分段计算、Green公式的**填补与“挖洞”法**、物理题)
- Ex11.4 1(1)(5)(7)(8)(常见的积分曲面、参数化方法)
- Ex11.5 1(3)**(5)**; 2; 4; 9(3)(Gauss公式的**补面法**、融入其他数学背景、Stokes代表(因为都差不多)、物理题)
- Ex11.7 2(1); 4; 5; 6(5); **10**(分段、求参数、凑全微分、**难算**)