例 3.2.10. 解方程组

教材例题 3.2.3

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 9x_2 + 9x_3 + 7x_4 = -1 \end{cases}$$

解.

$$\xrightarrow{\text{矩阵形式}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -7 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -9 & 9 & 7 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{消元}]{\substack{-2r_1 \to r_2 \\ -3r_1 \to r_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -5 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-r_2 \to r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ \quad - 3x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -1 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 = -6 \end{cases}$$

从最后一个方程出发可以看出, 原线性方程组无 (实数) 解. □

注 3.2.11. 从前面的几个例子出发, 我们可以看出, 一个线性方程组可能有唯一解, 可能有 (无穷) 多解, 也可能无解.

下面描述线性方程组的解法.

$$\begin{tikzcd} \text{线性方程组} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "\text{方程组的初等变换}"] & \text{相应的矩阵表示} \arrow[d, "\text{矩阵的初等行变换}"] \\ \text{阶梯形线性方程组} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "\text{回代}"] & \text{矩阵的标准形式 (Row Echelon Form)} \arrow[d, "\text{矩阵的初等行变换}"] \\ \text{方程组的通解} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{矩阵的约化标准形} \end{tikzcd}$$

接下来介绍上面出现的一些术语. 关于非零矩阵的**标准形式** (**阶梯形矩阵**), 我们要求

(1) 所有**非零行** (该行至少有一个非零元素) 在所有**全零行**的上面 (从而全零行都在矩阵的底部).

(2) 任何一个非零行的**主元** (该行最左边的首个非零元素) 所在的列严格地比上面行 (若存在, 则必然也是非零行) 的主元所在的列更靠右. 有的教材里会进一步要求主元为 1, 这儿我们暂时不作此要求.

(3) 从而, 主元所在列中, 在主元下面的元素皆为零.

注 3.2.12. (1) 非零矩阵总是可以通过初等行变换化为标准形式. 例如, 我们可以采用如下的算法.

第一步 找到最左的非零列, 将其视作**主元列**.

第二步 在主元列中选取一个非零的元素作为主元. 如有必要, 通过对换行的方法, 把这个元素移到这一列最顶端的位置.

第三步 用 "倍加行" 的方法将主元下面的元素变为 0.

第四步 暂时不用管该主元所在的行以及它上面的各行, 对剩下的子矩阵重复使用上面的三个步骤, 直到没有非零行需要处理为止.

需要提醒的是, 通过一系列初等行变换所能得到的标准形式并不唯一.

(2) 但是, 若进一步要求所有主元为 1, 且在主元所在列, 在主元上面的元素为 0, 则对于给定的矩阵而言, 其通过一系列初等行变换所能得到的符合条件的标准形式是存在且唯一的. 这样的标准形式称为原矩阵的**约化标准形** (*reduced row echelon form*). 关于约化标准形的存在性是不难看出的. 其唯一性用本节稍后关于解集的讨论可以证明出来; 大家也可以参考这个超链接所指向的论文, 或者是 *Shores* [6]* 的 *Theorem 1.3*.

用于得到约化标准形的算法可以描述如下. 在前述的四步的基础上, 我们只需进行如下操作.

第五步 对于每个主元, 若它不是 1, 利用 "倍乘行" 的方法将它变为 1.

第六步 由最右边的主元开始, 利用 "倍加行" 的方法把每个主元上方的元素都变为 0.

在上面的第六步里, 从最左边开始当然也是可以的, 但是计算量会稍微大一点.

回到我们处理线性方程组时遇到的增广矩阵. 通过适当的初等行变换, 我们可以将其化为图 3.1 所示的标准形式, 其中 $c_{1j_1}, c_{2j_2}, \ldots, c_{rj_r}$ 皆非零 (一般情形下倾向于选为 1), $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$, 而 d_{r+1} 可能为 0. 并且一般情况下, 我们会有 $j_1 = 1$.

定理 3.2.13. 线性方程组通过逐步消元, 总可以化为阶梯形方程组. 等价地, 其增广矩阵总可以利用初等变换化为如上的标准形. 此时, 我们有如下的性质.

---

*Thomas S. Shores, *Applied linear algebra and matrix analysis*, 2nd ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2018.

$$\left(\begin{array}{l:c}
0\cdots\cdots 0\ \boxed{c_{1j_1}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots c_{1n} & d_1 \\
0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\ \boxed{c_{2j_2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots c_{2n} & d_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\
0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\ \boxed{c_{rj_r}}\cdots\cdots c_{rn} & d_r \\
0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 & \boxed{d_{r+1}} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\
0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 0
\end{array}\right)$$

图 3.1: 增广矩阵的标准形式

(1) 若 $d_{r+1} \neq 0$, 则原方程组无解.

(此时的等价方程组里会出现形如 $0x_1 + \cdots + 0x_n = d_{r+1} \neq 0$ 的无解方程)

(2) 若 $d_{r+1} = 0$, 且 $r = n$, 则方程组有唯一解.

(此时的方程组本质上为 $n \times n$ 的严格三角形的方程组; 对方程组进行回代的操作即可看到这一点)

(3) 若 $d_{r+1} = 0$, 而 $r < n$ (即有效方程的个数小于未知元的个数), 则原方程组有多解.

(此时, 通常会选取 x_i ($i \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$) 这 $n-r$ 个变元为自由元 (*free variables*), 将含有这些自由元的项移到方程组的右边, 则得到了关于 $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ 这些主元所对应的保留下来的未知元 (*bound variables*) 的严格三角形的方程组. 对于每组确定的自由元的取值, 这些主元所对应的未知元都有唯一的解, 从而原方程组有无穷多解. 需要进一步说明两点. 其一, 自由元的选取方式并不是唯一的, 但是自由元的个数总是固定的. 其二, 虽然有可能有其它的自由元的选取方式, 但是其选取方式并不好统一描述, 而这儿的选取方式总是简单易行的.)

定理的证明在课堂上不详细给出, 由学生课后自行阅读. 关于上面的第 (3) 点, 我们举一个简单的例子.

例 3.2.14. *假定 3×4 的方程组的增广矩阵可以化简为如下的 (约化) 标准形:*

$$\left(\begin{array}{cccc:c} \boxed{1} & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

则主元在第 1 与第 3 列出现, 而我们将以 x_2 和 x_4 为自由元. 上面的矩阵表示等价于

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\0\end{pmatrix}.$$

从而我们的线性方程组的通解的列向量表示 (*solution vector*) 为

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\0\end{pmatrix}-x_2\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}-x_4\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-2x_2-3x_4\\6-5x_4\end{pmatrix}.$$

这儿体现了将增广矩阵写成约化标准形的优越性

我们一般会将通解写成

$$x_1=4-2t_1-3t_2,\quad x_2=t_1,\quad x_3=6-5t_2,\quad x_4=t_2,$$

或等价地,

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\6\\0\end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}-3\\0\\-5\\1\end{pmatrix},$$

其中参数 $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ 任意.

习题 3.2.15. 在上面的例题中, 我们还可以选取哪些未知元来组成自由元?

推论 3.2.16. 齐次线性方程组 (即 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 的情形) 总是有零解 (平凡解) 的. 它有非零解的充要条件是 $r<n$. 特别地, 若 $m<n$ (由于 $r\le m$, 故有 $r<n$), 齐次线性方程组必有非零解.

从教学的角度来看, 同学们在初步掌握了之前关于方程组求解的基本理论 (定理 3.2.13) 后, 需要加强如下类型题目的训练.

例 3.2.17. 对于参数 a 的取值, 讨论如下方程组的解的情况:

提示学生利用软件熟悉含参数的线性方程组的求解

$$\begin{cases}x_1+\ x_2+\ x_3=3\\2x_1+\ x_2-ax_3=9\\x_1-2x_2-3x_3=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&3\\2&1&-a&9\\1&-2&-3&-6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_1\to r_3]{-2r_1\to r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -a-2 & 3\\ 0 & -3 & -4 & -9\end{pmatrix}\xrightarrow{-3r_2\to r_3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -a-2 & 3\\ 0 & 0 & 3a+2 & -18\end{pmatrix}.$$

故方程组无解的充要条件是 $3a+2=0$，即 $a=-\frac{2}{3}$.

当 $a\neq-\frac{2}{3}$ 时，方程组的有效方程个数 $=$ 未知元个数，从而方程组有唯一解. 接下来，利用回代，我们可以解出

$$x_1=-\frac{6}{3a+2},\quad x_2=\frac{9a+30}{3a+2},\quad x_3=-\frac{18}{3a+2}.$$

例 3.2.18. 当参数 λ 为何值时，下列方程组有解？在有解的条件下，求出其通解. 教材例题 3.3.1

$$\begin{cases}2x_1-\ x_2+\ x_3+\ \ x_4=1\\ x_1+2x_2-\ x_3+\ 4x_4=2\\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_1\to r_3]{-2r_1\to r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3\\ 0 & 5 & -3 & 7 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\to r_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-5\end{pmatrix}.$$

由此可以看出，方程组无解的充要条件是 $\lambda-5\neq0$，即 $\lambda\neq5$.

当 $\lambda=5$ 时，方程组的有效方程个数 $=2<$ 未知元个数 $=5$，因此方程组有多解. 我们可以以 x_1 和 x_2 为主元，以 x_3,x_4 为自由元. 将上面的矩阵作进一步的简化，可以得到

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{-2r_2\to r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & \frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

从而 (这一步如果没有反应过来，请回顾一下例 *3.2.14* 中的解答过程)，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\ \frac{3}{5}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\ \frac{3}{5}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\ -\frac{7}{5}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x_1=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}t_1-\frac{6}{5}t_2\\ x_2=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}t_1-\frac{7}{5}t_2\\ x_3=t_1\\ x_4=t_2\end{cases}$$

其中参数 $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ 任意.

习题 3.2.19. (1) 给出一个由 3 个方程构成的关于未知元 x_1, x_2, x_3 的齐次线性方程组, 使得 $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$ 是它的一个解, 并且方程组的增广矩阵的约化标准形的主元在前两列.

(2) 是否存在一个由 3 个方程构成的关于未知元 x_1, x_2, x_3 的齐次线性方程组, 使得 $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$ 仍然是它的一个解, 但是方程组的增广矩阵的约化标准形主元在第一列和第三列?

习题 3.2.20. 苯甲酸 (化学式为 $C_7H_6O_2$) 氧化后会分解为二氧化碳和水, 即我们有化学方程 $C_7H_6O_2 + O_2 \to CO_2 + H_2O$. 平衡该化学方程式.

本章的讨论初步解决了线性方程组的求解问题, 其内容与方法本质上还是初等的. 细致看来, 还有些相关的理论问题可以探讨:

(1) 增广矩阵的标准形里的 r 是否唯一?

(2) 这个 r 反映了该线性方程组的什么几何、代数特性?

(3) 方程组在可解时的解集有什么几何性质?

(4) 在特殊情形下, 方程组有怎样的公式解?

(5) 等等.

这些问题的解决, 需要我们在后续章节中对矩阵、行列式、线性空间等代数对象作进一步地讨论.

第四章　矩阵与行列式

4.1　矩阵的定义

在前面一章里, 我们用矩阵和向量储存线性方程组的核心信息, 协助方程组的求解. 从这一章开始, 我们从矩阵自身出发, 来正式学习与之相关的系列知识.

矩阵记号　简单地说, **矩阵** (matrix) 就是一个矩形的数字阵列. 一个 m 行和 n 列的矩阵称为 $m \times n$ **矩阵**, 而 $m \times n$ 称为它的**维数** (size). 矩阵中出现的数称为该矩阵的**元素** (entry) 或**标量** (scalar). 当我们引用矩阵时, 通常用大写字母 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 等来表示矩阵. 一般地, 习惯上会用 a_{ij} 或者 $a_{i,j}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素, 并称之为 $\boldsymbol{A}$ 的**第 (i,j) 元素**. 因此, 若 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times n$ 矩阵, 则一般会写成

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

有时候还会将上面的写法简记为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$. 类似地, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可表示为 (b_{ij}), 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可表示为 (c_{ij}) 等等.

在我们的讨论中, 矩阵的元素通常取值于 $F = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 此时, 我们也称该矩阵是 F **上的矩阵**. F 上的 $m \times n$ 矩阵的全体记作 $F^{m\times n}$.

F 中的元素也可以自然地被视为一个 1×1 矩阵.