第二次习题课讲义(2023.4.1)

1 作业题讲解

8.设 $\mathbf{z=x^2+y^2}$, 其中 $\mathbf{y=y(x)}$ 为由方程 $\mathbf{x^2-xy+y^2=1}$ 所定义的函数，求 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}\mathbf{x}}$ 及 $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{z}}{\mathrm{d}\mathbf{x}^2}$.

由 $\mathrm{d}\left(x^2-xy-y^2\right)=2x\,\mathrm{d}x-y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y+2y\,\mathrm{d}y=0$ 有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x-y}{x-2y}(x\neq 2y)$,

于是

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{dx}=2x+y\frac{2x-y}{x-2y},\quad x\neq 2y$$

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=2+2\left(\frac{\mathrm{d}y}{dx}\right)^2+2y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2+2\left(\frac{2x-y}{x-2y}\right)^2+2y\left(\frac{-6(x^2-xy+y^2)}{(2y-x)^3}\right)$$

14.设 $\mathbf{y=y(x),z=z(x)}$ 是由方程 $\mathbf{z=xf(x+y)}$ 和 $\mathbf{F(x,y,z)=0}$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数．求 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}\mathbf{x}}$.

$$G(x,y,z)\triangleq xf(x+y)-z$$

则有：

$$G'_x=f(x+y)+xf'(x+y)$$
$$G'_y=xf'(x+y)$$
$$G'_z=-1$$

由隐函数定理可知：

代入得：

$$\frac{dz}{dx}=\frac{F'_xG'_y-F'_yG'_x}{F'_yG'_z-F'_zG'_y}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-F'_xf'(x+y)x+F'_yf(x+y)+F'_yf'(x+y)x}{F'_y+F'_zf'(x+y)x}$$

30.试证方程 $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2}+2\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{y}}-3\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}^2}+2\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}+6\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}}=0$ 经变化 $\xi=\mathbf{x}+\mathbf{y},\eta=3\mathbf{x}-\mathbf{y}$ 后变成 $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi}=0$. 其中二阶偏导数均连续

$$\begin{cases} \xi=x+y \\ \eta=3x-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{4}(\xi+\eta) \\ y=\frac{1}{4}(3\xi-\eta) \end{cases}$$

得到

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=\frac{\partial x}{\partial \eta}=\frac{1}{4},\frac{\partial y}{\partial \xi}=\frac{3}{4},\frac{\partial y}{\partial \eta}=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}=\frac{1}{16}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{1}{16}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial \xi}+6\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=0$$

21.求函数 $u=xyz$ 在点 $(1,2,-1)$ 沿方向 $\boldsymbol{l}=(3,-1,1)$ 的方向微商 .

根据方向微商的计算公式

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}=(-2,-1,2)\cdot\frac{(3,-1,1)}{\sqrt{11}}=-\frac{3\sqrt{11}}{11}$$

11.求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上某点 M 处的切平面 π 的方程，使 π 过已知直线 $L:\frac{x-6}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{2z-1}{-2}$.

M_0. 处切平面方程 $x_0x+2y_0y+3z_0z=21$

π过直线(π过点$(6,3,\frac{1}{2})$且π的法向量垂直于$(2,1,-1)$) $\Longrightarrow \begin{cases} 6x_0+6y_0+\frac{3}{2}z_0=21 \\ 2x_0+2y_0-3z_0=0 \end{cases}$

$$x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21 \Longrightarrow \quad (x_0,y_0,z_0)=(3,0,2),(1,2,2)$$

$\pi:x+2z=7 \qquad \pi:x+4y+6z=21$

4.求下列函数的Taylor公式，并指出展开式成立的区域 .

(1) $f(x,y)=\mathrm{e}^x\ln(1+y)$ 在点 $(0,0)$, 直到三阶为止；

(3) $f(x,y)=\frac{1}{1-x-y+xy}$ 在点 $(0,0)$, 直到 n 阶为止；

(7) $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在点 $(1,-2)$ 的 Taylor 展开式 .

(1) 成立区域：$\{(x,y)\mid y>-1\}$.

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)\left(y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+o\left(y^3\right)\right) \\
&= y+xy-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{3}y^3+o\left(\rho^3\right)
\end{aligned}
$$

(3) 成立区域：$\{(x,y)\mid x<-1,y<-1\}$.

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{(1-x)(1-y)} = \left(\sum_{i=0}^{n} x^i + o\left(x^n\right)\right)\left(\sum_{i=0}^{n} y^i + o\left(y^n\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} x^i y^{k-i} + o(\rho).
\end{aligned}
$$

(7) 成立区域：$\mathbb{R}^2$. 配方得：

$$
f(x,y)=2(x-1)^2-(y+2)^2-(x-1)(y+2)+5.
$$

2 补充习题(综合习题1，5)

1. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是非零常数. $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微. 求证: 存在 $\mathbb{R}$ 上一元可微函数 $F(s)$ 使得 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=F\left(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\right)$ 的充分必要条件是 $a_j\frac{\partial f}{\partial x_i}=a_i\frac{\partial f}{\partial x_j}, i,j=1,2,\cdots,n$.

5. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续二阶偏导数, 且对任意实数 x,y,z 满足 $f(x,y)=f(y,x)$ 和

$$
f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=3f\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right).
$$

试求 $f(x,y)$.

3 解析函数

连续性方法(Continuity method)

To show a fanmily of preperties $P(t)$ fold for all $t\in\mathbb{R}^n$, it suffices to check

1. $\exists t_0\in\mathbb{R}^n$ such that $P(t_0)$ holds.
2. $\{t|P(t)\,\text{holds}\}$ is open.
3. $\{t|P(t)\,\text{holds}\}$ is closed.

Definition 3.1. 实解析函数：$f(x)$在$\mathbb{R}$上实解析，若$f\in C^\infty(\mathbb{R})$, 且$\forall x_0\in\mathbb{R}$

$$
f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n
$$

在x_0的邻域内成立。

Remark 3.2. 解析函数全体记为$C^\omega(\mathbb{R})$,则$C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^\omega((R))$

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} e^{-\frac{1}{x}} & x>0 \\ 0 & x \leq 0 \end{array}\right. ,$$

可以验证$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 且有 $f^{(n)}(0)=0$。但是 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot (x-0)^n$ 在0的邻域不成立。

Theorem 3.3.

$$f \in C^w(\mathbb{R}) \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}.\ s.t. \quad f^{(n)}\left(x_0\right)=0(\forall n) \Longrightarrow f(x) \equiv 0$$

Hint: Using continuity method.