例 4.3.17 (Vandermonde 型)**.**

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2\cdots\cdots\cdots a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2\cdots\cdots\cdots a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2\cdots\cdots a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)},$$

其中 a_i 全不为 0 或 b_j 全不为 0.

解. 不妨假定所有的 a_i 不为 0. 对于每个 i, 从第 i 行提出 a_i^n, 得到

$$\begin{aligned} D_{n+1}&=a_1^na_2^n\cdots a_{n+1}^n\begin{vmatrix} 1 & b_1/a_1 & (b_1/a_1)^2\cdots\cdots\cdots\cdots(b_1/a_1)^n \\ 1 & b_2/a_2 & (b_2/a_2)^2\cdots\cdots\cdots\cdots(b_2/a_2)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ 1 & b_{n+1}/a_{n+1} & (b_{n+1}/a_{n+1})^2\cdots\cdots(b_{n+1}/a_{n+1})^n \end{vmatrix} \\ &=a_1^na_2^n\cdots a_{n+1}^n\prod_{1\le i<j\le n+1}(b_j/a_j-b_i/a_i)=\prod_{1\le i<j\le n+1}(a_ib_j-a_jb_i). \end{aligned}$$

最后的计算结果在 D_n 允许某些 $a_i=0$ 和某些 $b_j=0$ 时也成立: 这一点可以通过直接计算轻松验证. $\square$

习题 4.3.18 (Cauchy 行列式)**.** 设 $a_1,\cdots,a_n$ 和 $b_1,\cdots,b_n$ 是一些复数, 满足对任意的 $i,j=1,\cdots,n$ 都有 $a_i+b_j\neq 0$. 设 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 为 n 阶方阵, 其元素 $c_{ij}:=\frac{1}{a_i+b_j}$. 证明*:*

$$\det(\boldsymbol{C})=\frac{\prod_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod_{1\le i,j\le n}(a_i+b_j)}.$$

(提示*:* 第一步, 先将用最后一列来减前面 $n-1$ 列, 并通过提出各行各列的公因式来化简. 第二步, 用前面的 $n-1$ 行来减最后一列, 继续化简, 并用归纳法.)

习题 4.3.19. (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶反对称的矩阵, 其中 n 为奇数. 证明*:* $\det(\boldsymbol{A})=0$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶反对称的矩阵, 其中 n 为偶数. 若给 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素都加上相同的一个数 λ, 从而得到新矩阵 $\boldsymbol{B}$. 证明*:* $\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{B})$. (提示*:* 若将 $\boldsymbol{B}$ 视作 $\boldsymbol{A}$ 的每个列向量都加上了一个新的列向量所得到的矩阵. 将其行列式按列全部拆开, 你会得到 2^n 个行列式. 接下来考虑 $n+1$ 阶反对称阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1\cdots\cdots 1 \\ -1 & \\ \vdots & \boldsymbol{A} \\ -1 & \end{pmatrix}$, 将其行列式按第一行展开.)

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶反对称的矩阵, 其中 n 为偶数, 并且 $\boldsymbol{A}$ 的对角线右上方的所有元素都是 1. 求 $\det(\boldsymbol{A})$.

习题 4.3.20. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

求 $\det(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})$, 其中 $\lambda \in F$ 为标量.

习题 4.3.21. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, 而 A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 相对于 (i,j) 位置的代数余子式. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j A_{ij}.$$

行列式的性质及其证明 在这一部分里, 我们将证明之前提到的关于行列式的一些性质, 并介绍更多的与之相关的内容.

回忆. 对于矩阵, 我们有初等变换操作:

- 三种初等行变换: $r_i \leftrightarrow r_j$, λr_i, $\lambda r_i \to r_j$;
- 三种初等列变换: $c_i \leftrightarrow c_j$, λc_i, $\lambda c_i \to c_j$.

接下来, 从单位矩阵出发, 我们引入相应的三种**初等矩阵** (elementary matrix):

$$\boldsymbol{I}_n \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \boldsymbol{S}_{ij} \xleftarrow{c_i \leftrightarrow c_j} \boldsymbol{I}_n$$

$$\boldsymbol{I}_n \xrightarrow{\lambda r_i} \boldsymbol{D}_i(\lambda) \xleftarrow{\lambda c_i} \boldsymbol{I}_n$$

$$\boldsymbol{I}_i \xrightarrow{\lambda r_j \to r_i} \boldsymbol{T}_{ij}(\lambda) \xleftarrow{\lambda c_i \to c_j} \boldsymbol{I}_n$$

由学生写出这三种初等矩阵的具体形式. 其中注意到 $\boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)$ 中的 λ 出现在方阵的 (i,j) 位置上. 需要注意的是, 不同教材里对这些初等矩阵的记法是不一致的.

定理 4.3.22. 教材定理 4.4.1

(1) 矩阵的初等行变换对应于初等矩阵的**左乘**, 即, 对于矩阵 $\boldsymbol{A}$, $r_i \leftrightarrow r_j$ 等同于 $\boldsymbol{S}_{ij}\boldsymbol{A}$, λr_i 等同于 $\boldsymbol{D}_i(\lambda)\boldsymbol{A}$, $\lambda r_j \to r_i$ 等同于 $\boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)\boldsymbol{A}$.

(2) 矩阵的初等列变换对应于初等矩阵的**右乘**, 即, 对于矩阵 $\boldsymbol{A}$, $c_i \leftrightarrow c_j$ 等同于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}_{ij}$, λc_i 等同于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_i(\lambda)$, $\lambda c_i \to c_j$ 等同于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)$.

证明. 直接验证. □

定理 4.3.23. 初等矩阵都是可逆矩阵, 且其逆矩阵仍然是同类型的初等矩阵, 并满足 教材定理 4.4.2

$$\boldsymbol{S}_{ij}^2 = \boldsymbol{D}_i(\lambda)\boldsymbol{D}_i(1/\lambda) = \boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)\boldsymbol{T}_{ij}(-\lambda) = \boldsymbol{I}.$$

证明. 可以直接计算验证; 也可以用初等行变换的观点来看, 将这些初等矩阵通过左乘作用在单位阵 $\boldsymbol{I}$ 上. □

讨论. 给定一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 我们可以通过一系列初等行变换将其化为约化标准形; 我们将后者记作 $\mathrm{rref}(A)$. 这儿, 我们只用到了它的存在性, 不需要它的唯一性. $\mathrm{rref}(A)$ 的主元个数显然至多为 n 个.

(1) 若 $\mathrm{rref}(A)$ 恰有 n 个主元, 那么由约化标准形的定义可知, $\mathrm{rref}(A) = \boldsymbol{I}_n$.

(2) 若 $\mathrm{rref}(A)$ 的主元的个数小于 n, 那么 $\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})$ 的最后一行全为 0. 对任意的 n 阶方阵 $\boldsymbol{X}$, 容易看出矩阵乘法 $\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$ 的最后一行也全为 0, 从而不可能为 $\boldsymbol{I}_n$. 这说明此时, $\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})$ 不是可逆方阵.

定理 4.3.24. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 则以下三条等价:

(a) $\boldsymbol{A}$ 可以通过一系列初等行变换化为单位阵 $\boldsymbol{I}_n$;

(b) $\boldsymbol{A}$ 是一些初等矩阵的乘积;

(c) $\boldsymbol{A}$ 是可逆的.

证明. (a)⇒(b): 利用定理 4.3.22 中的等价, 我们可以得到一系列初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1, \dots, \boldsymbol{E}_s$, 使得 $\boldsymbol{E}_1 \cdots \boldsymbol{E}_s\boldsymbol{A} = \mathrm{rref}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{I}$. 此时, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_s^{-1} \cdots \boldsymbol{E}_1^{-1}$, 是一些初等矩阵的乘积. 对 $\boldsymbol{A}$ 做的第一个初等行变化是由 $\boldsymbol{E}_s$ 给出的

(b)⇒(c): 因为初等矩阵都是可逆的, 而可逆阵的矩阵乘法仍然是可逆的.

(c)⇒(a): 由上面的讨论及定理 4.3.22 中的等价可知, 存在一系列初等矩阵 $\boldsymbol{E}_1,\dots,\boldsymbol{E}_s$, 使得 $\boldsymbol{E}_1\cdots\boldsymbol{E}_s\boldsymbol{A}=\operatorname{rref}(\boldsymbol{A})$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的, 由此看出 $\operatorname{rref}(\boldsymbol{A})$ 也是可逆的. 若 $\operatorname{rref}(\boldsymbol{A})$ 的主元个数小于 n, 则 $\operatorname{rref}(\boldsymbol{A})$ 不可逆. 这说明 $\operatorname{rref}(\boldsymbol{A})$ 的主元个数为 n, 即 $\operatorname{rref}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}_n$. □

注 4.3.25. 由于方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$ 可逆, 故上面的几条也等价于说 $\boldsymbol{A}$ 可以通过一系列初等列变换化为单位阵 $\boldsymbol{I}_n$.

接下来继续讨论 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det(\boldsymbol{A})$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是它的 n 个行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的有序排列, 故 $\det(\boldsymbol{A})$ 也可以视作这些行向量的函数: $\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)$.

定理 4.3.26. *行列式函数满足以下的性质.*

(a) $\det(\boldsymbol{I}_n)=1$, 即 $\det(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)=1$, 其中, $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ 为数组空间 F^n 中的基本向量, 写成行向量的形式.

(b) $\det(\boldsymbol{A})$ 关于 $\boldsymbol{A}$ 的每个行向量都是线性的 (在固定其它行向量的条件下): 若第 i_0 个行向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_0}=k_1\boldsymbol{\beta}+k_2\boldsymbol{\gamma}$, 其中 $k_1,k_2\in F$, 那么

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{A})&=\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_0-1},\boldsymbol{\alpha}_{i_0},\boldsymbol{\alpha}_{i_0+1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\\&=k_1\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_0-1},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_{i_0+1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_n)\\&\qquad+k_2\det(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{i_0-1},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_{i_0+1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_n).\end{aligned}$$

特别地, 若 $\boldsymbol{A}$ 有一行全为 0, 则 $\det(\boldsymbol{A})=0$.

(c) 若 $\boldsymbol{A}$ 有相邻的两行相等, 则 $\det(\boldsymbol{A})=0$.

证明. 不难看出, 这些结果当 $n=1$ 时是成立的. 以下不妨设 $n\geq 2$.

(a) 这是例 4.3.3 的一个特例.

(b) 设将 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的第 i_0 个行向量分别换为 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 后得到的矩阵为 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 与 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$, 并记相应的代数余子式分别为 B_{ij} 与 C_{ij}. 从行列式的归纳定义 (4.6) 出发, 我们只需证明对任意的 $r=1,2,\dots,n$, 我们都有

$$a_{r1}A_{r1}=k_1b_{r1}B_{r1}+k_2c_{r1}C_{r1}, \tag{†}$$

其中 A_{r1} 是 $\boldsymbol{A}$ 相应位置的代数余子式.

- 设 $r=i_0$. 此时, 我们所处理的行不在这些子式里, 这说明 $A_{r1}=B_{r1}=C_{r1}$. 另一方面, $a_{r1}=k_1b_{r1}+k_2c_{r1}$. 从而等式 (†) 得证.

- 设 $r \neq i_0$. 此时, 我们所处理的行在这些 $(n-1)$ 阶子式里, 由对 n 的归纳法可知 $A_{r1} = k_1 B_{r1} + k_2 C_{r1}$. 另一方面, $a_{r1} = b_{r1} = c_{r1}$. 从而等式 (†) 得证.

特别地, 当 $\boldsymbol{A}$ 的某一行 (比如说 $\boldsymbol{\alpha}_{i_0}$) 为零时, 我们有 $\boldsymbol{\alpha}_{i_0} = 0\boldsymbol{\beta} + 0\boldsymbol{\gamma}$, 此时的公式告诉我们

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{A}) = 0 \det(&\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_0-1}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_{i_0+1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) \\ &+ 0 \det(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_0-1}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}_{i_0+1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) \\ = 0.&\end{aligned}$$

(c) 设 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 个行向量等于其第 $k+1$ 个行向量. 那么对于 $r = 1, 2, \ldots, n$, 若 $r \neq k, k+1$, 则代数余子式 A_{r1} 中有两行相等, 从而由归纳法可知为零. 于是, 从行列式的递归定义 (4.6) 出发, 我们有

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{k,1} A_{k,1} + a_{k+1,1} A_{k+1,1}.$$

由于 $a_{k,1} = a_{k+1,1}$, 而 $A_{k,1}$ 与 $A_{k+1,1}$ 恰好相差一个正负号, 上式为 0. □

定理 4.3.27. *行列式函数满足以下的性质.*

(a) *设 $\boldsymbol{B}$ 由方阵 $\boldsymbol{A}$ 通过倍乘行的初等行变换得到: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\lambda r_i} \boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}_i(\lambda)\boldsymbol{A}$, 则 $\det(\boldsymbol{B}) = \lambda \det(\boldsymbol{A})$.*

(b) *设 $\boldsymbol{B}$ 由方阵 $\boldsymbol{A}$ 通过倍加的初等行变换得到: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\lambda r_j \to r_i} \boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}_{ij}(\lambda)\boldsymbol{A}$, 则 $\det(\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A})$.*

(c) *设 $\boldsymbol{B}$ 由方阵 $\boldsymbol{A}$ 通过交换行的初等行变换得到: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_j \leftrightarrow r_i} \boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}_{ij}\boldsymbol{A}$, 则 $\det(\boldsymbol{B}) = -\det(\boldsymbol{A})$.*

(d) *若 $\boldsymbol{A}$ 的不同两行 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 对应成比例, 则 $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.*

证明. (a) 可以从定理 4.3.26 的 (b). 接下来只需验证 (b), (c) 和 (d).