8.5 二次曲线与曲面的分类

在这一节里, 我们要通过坐标变换将一般的二次曲线 (曲面) 的方程化简. 保持图像形状不变的坐标变换有两种基本形式: 正交变换和平移变换. 我们一般默认是采用这两种坐标的变换. 注意, 平移变换不是线性变换. 学生提前自学教材 §2.2.5 的内容

二维情形 首先, 考察平面上的二次曲线 (quadratic curve)

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0.$$

第一步, 我们把图形摆正, 即将二次曲线的对称轴调整到与坐标轴平行的状态. 这意味着消去交叉项 xy. 注意到曲线中的二次项为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=(x,y)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

将该二次型的矩阵记作 $\boldsymbol{A}$. 这个 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵, 可以通过正交矩阵, 相似 (相合) 于对角阵, 即存在正交阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$, 其中 λ_1,λ_2 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

此时, 若 $\boldsymbol{P}$ 为第一类正交矩阵, 则 $\boldsymbol{P}$ 对应于一个旋转, 可以写成

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

的形式. 若 $\boldsymbol{P}$ 为第二类正交矩阵, 设 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2)$, 考虑 $\boldsymbol{P}'=(\boldsymbol{P}_1,-\boldsymbol{P}_2)$, 则 $\boldsymbol{P}'$ 为第一类正交矩阵, 且 $(\boldsymbol{P}')^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}')=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$. 故, 我们可以直接假设 $\boldsymbol{P}$ 是一个如上形式的旋转.

第二步, 我们来确定 $\boldsymbol{P}$ 的具体形式, 这意味着

$$\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&\sin(\theta)\\-\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

需要成为一个对角阵. 由于这已经是一个实对称阵了, 我们接下来只需要 $(1,2)$ 位置的元素为 0, 即

$$(-a_{11}+a_{22})\cos(\theta)\sin(\theta)+a_{12}(-\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta))=0.$$

在 $a_{12}\neq 0$ 的条件下, 我们可以得到

$$\cot(2\theta)=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}.$$

解出适当的 θ 后, 我们可以写出 $\boldsymbol{P}$ (即通过三角函数的公式, 将 $\cos(\theta)$ 和 $\sin(\theta)$ 都用 $\cot(2\theta)$ 表示出来). 此时考虑坐标变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

则二次曲线的方程可以化成

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2b_1'x' + 2b_2y' + c' = 0,$$

其中 λ_1, λ_2 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 (注意顺序, 它们依赖于 $\boldsymbol{P}$ 的选取), 不全为 0, 而 $c' = c$.

在最后一步里, 我们通过配方来进一步化简曲线的方程. 其中, 若 $\lambda_1 \neq 0$, 我们令 $\tilde{x} = x' + b_1'/\lambda_1$, 否则, 令 $\tilde{x} = x'$. 类似地, 若 $\lambda_2 \neq 0$, 我们令 $\tilde{y} = y' + b_2'/\lambda_2$, 否则, 令 $\tilde{y} = y'$. 此时, 方程可以化成如下的标准形式.

(1) (椭圆型) 此时, $\lambda_1\lambda_2 > 0$, 即 λ_1 与 λ_2 同号:

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \lambda_3 = 0.$$

当然, 依赖于 λ_3 是否与 λ_1 同号, 或为零, 该方程组可能无解, 有退化解, 或有正常解.

(2) (双曲线型) 此时, $\lambda_1\lambda_2 < 0$, 即 λ_1 与 λ_2 异号:

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \lambda_3 = 0.$$

若 $\lambda_3 = 0$, 该方程为两条相交直线. 若 $\lambda_3 \neq 0$, 该方程为正常的双曲线.

(3) (抛物线型) λ_1 与 λ_2 之中有一个为零. 不妨设 $\lambda_2 = 0$. 则此时的方程为

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + 2b_2'\tilde{y} + c' = 0.$$

(a) 若 $b_2' \neq 0$, 我们可以令 $\tilde{y}' = \tilde{y} + \frac{c'}{2b_2'}$, 可以进一步简化方程.

(b) 若 $b_2' = 0$, 则方程退化成 $\lambda_1\tilde{x}^2 + c' = 0$.

三维情形 考察由如下方程给出的二次曲面 (quadratic surface)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0.$$

对于其二次项

$$(x,y,z)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},$$

令二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}$. 我们寻找正交阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵. 此时, 令

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix},$$

则二次曲面的方程可以化为

$$\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+\lambda_3(z')^2+2b_1'x'+2b_2'y'+2b_3'z'+c'=0.$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 $\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 主对角线上的元素, 即 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值; 而 $c'=c$. 接下来, 根据参数是否为零, 我们做适当的坐标轴平移, 进一步简化方程. 由于具体情况较多, 我们就不具体讨论了.

教学的要求是学生能根据简化后的方程判断曲面的类型, 参见教材 §2.2.5 中的分类.

注 8.5.1. *此时维数为 3, 正交阵 $\boldsymbol{P}$ 一般不会有二维中的简单情形. 那么该如何求呢? 之前已经提过: 通过特征值来计算特征向量, 然后对特征向量作正交归一化. 当然, 二维的情形也可以采用这一办法来处理.*

例 8.5.2. *试指出二次曲面*

$$x^2+(2+\lambda)y^2+\lambda z^2+2xy-2xz-yz-5=0$$

中参数 λ 取什么值时, 该曲面为椭球面.

解. 设相应的二次型对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2+\lambda & -1/2\\ -1 & -1/2 & \lambda\end{pmatrix}.$$

于是, 存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 此时, 在坐标变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 下, 曲面的方程可化为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2-5=0$. 这是一个椭球面的充要条件是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 都是正数, 即 $\boldsymbol{A}$ 是正定的.

由于 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式依次为

$$D_1 := 1, \quad D_2 := \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2+\lambda \end{vmatrix} = 1+\lambda, \quad D_3 := \det(\boldsymbol{A}) = \lambda^2 - \frac{5}{4}.$$

为了使 $D_1, D_2, D_3 > 0$, 我们需要 $\lambda > \frac{\sqrt{5}}{2}$. □

例 8.5.3. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求参数 c 及此二次型对应矩阵的特征值.

(2) 指出方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示何种二次曲面.

解. (1) 二次型对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix}.$$

由于 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 2$, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不是满秩的, 从而 $\det(\boldsymbol{A}) = 24(c-3) = 0$, 从而 $c = 3$. 此时, 特征多项式 $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$, 从而有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 9$.

(2) 此时二次曲面的方程可以化为 $4y_2^2 + 9y_3^2 = 1$, 这对应于一个椭圆柱面. □

例 8.5.4. 用正交变换和平移将二次方程

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4yz - 2x + 2\sqrt{2}y - 6\sqrt{2}z + 5 = 0$$

化为标准形式, 并判断它是什么曲面.

解. 曲面方程的二次部分对应的方阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 我们寻找正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

计算得特征多项式 $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$, 故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$. 由于特征值互不相等, 对应的特征向量已经相互正交. 经具体计算知

- $\lambda_1 = 0$ 有特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1 = (0, 1, 1)^{\mathsf{T}}$;
- $\lambda_2 = 1$ 有特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2 = (1, 0, 0)^{\mathsf{T}}$;
- $\lambda_3 = 4$ 有特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3 = (0, 1, -1)^{\mathsf{T}}$.

故, 可以选

$$\boldsymbol{P}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\xi}_3\right)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

这样得到的 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵. 此时, $\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(0,1,4)$.

考虑坐标变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}.$$

则二次曲面的方程化为

$$\underline{(y')^2+4(z')^2}-2y'+2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}z'\right)-6\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}z'\right)+5=0,$$

其中的二次项部分可以由特征值的信息直接给出, 不需要额外计算

即

$$(y')^2+4(z')^2-4x'-2y'+8z'+5=0.$$

进一步地, 令 $\tilde{x}=x'$, $\tilde{y}=y'-1$, $\tilde{z}=z'+1$, 则有

$$(\tilde{y})^2+4(\tilde{z})^2-4\tilde{x}=0.$$

这是一个椭圆抛物面. □