第37讲：$f(x)$在点x_0处的Taylor级数：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$，

2023.6.2.

(一) 复习：$f(x)$在x_0处的n阶Taylor公式：

设$f(x)$在$U(x_0,\delta)\triangleq(x_0-\delta,x_0+\delta)$中有$n+1$阶导数，则对$\forall x\in U(x_0,\delta)$

$$f(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}，\xi介于x_0与x之间，(式1)$$

其中，$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$x\in U(x_0,\delta)$称之为Taylor式

(式1)的Lagrange型余项。

(二) 函数$f(x)$在点x_0处的Taylor级数：

Th1：若$f(x)\in C^{\infty}(U(x_0,\delta))$，则$f(x)$在点$x_0$处能展成

Taylor级数：

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m}{m!}，\forall x\in U(x_0,\delta) \qquad (式2)$$

的充要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}=0$，$\forall x\in U(x_0,\delta)$. (式3)

(1) 证必要性：已知$f(x)\sim\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m}{m!}=f(x)$，$\forall x\in U(x_0,\delta)$

即部分和：$S_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m}{m!}\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x)$，$\forall x\in U(x_0,\delta)$

此时，由 $f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m=\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$

$\Rightarrow f(x)=S_n(x)+R_n(x)\Leftrightarrow R_n(x)=f(x)-S_n(x)$, $\forall x\in U(x_0,\delta)$

从而：$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=f(x)-f(x)=0$, $\forall x\in U(x_0,\delta)$.

(2) 证充分性：已知 $f(x)\in C^{\infty}(U(x_0,\delta))\Rightarrow f(x)\in C^{n+1}(U(x_0,\delta))$

$f(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+R_n(x)$. 且已知 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

对 $f(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+R_n(x)$ 两边取 $n\to\infty$ 的极限：

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, $\forall x\in U(x_0,\delta)$.

充分性获证。

Th2：若 $f(x)\in C^{\infty}(U(x_0,\delta))$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处能展成

Taylor 级数：$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, $\forall x\in U(x_0,\delta)$ 的

充分条件是：$f^{(n)}(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 中一致有界，即 $\exists M>0$,

M 与 x 无关，且对 $\forall n\in N^*$, $\forall x\in U(x_0,\delta)$, 恒有 $|f^{(n)}(x)|\le M$ 成立。

证：由 $f\in C^{\infty}(U(x_0,\delta))\Rightarrow f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+R_n(x)$.

且 $|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le M \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$,

$\forall x \in U(x_0,\delta)$. 即 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, $x\in U(x_0,\delta)$. 由①Th'2知

充分性得证. Th2 成立。

(三) 几个常用的Taylor级数:

(1). $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x\in(-\infty,+\infty) \Rightarrow a^x = e^{x\ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n$.

(2). $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(3). $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = (\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)'_x$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(4). $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$, $|x|<1$,

(5). $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$, $|x|<1$

(6). $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-x)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$, $x\in(-1,1]$.

(7). $\arctan x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x (1-x^2+x^4-x^6+x^8+\cdots)dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5}x^5 + \cdots$, $x\in[-1,1]$.

(四). 例题:

例(1). 试证明上述级数(1). (2) (3).

例(2). 将下列函数在指定点 x_0 处展成 Taylor 级数

(1) $\frac{1}{x^2+3x+2}$, $x_0=4, 0, -3$; (2) $\sin x$, $x_0=0$; (3) e^x, $x_0=5$;

(4). $\log_5^x$, $x_0=1$. (5) $x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$, $x_0=0$.

(6). $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$ $x_0=0$. (7). $\int_0^x e^{-u^2}du$, $x_0=0$, (8). $\int_0^x \frac{\sin u}{u}du$, $x_0=0$.

解:例(1) 记(1). 设 $f(x)=e^x$, $x\in(-\infty,+\infty)$. 则对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,

$\exists a>0$ 使 $|x|\le a$, $\Rightarrow |f^{(n)}(x)|=|(e^x)^{(n)}|=|e^x|=e^x\le e^a$, $\forall x\in[-a,a]$.

$\forall n\in N^*$, 且 $M=e^a$ 与 x 无关. 即 $f^{(n)}(x)$ 在 $[-a,a]$ 上一致有界. 从而,依

Th2. $f(x)=e^x$ 在 $x_0=0$ 处能展成 Taylor 级数:

$$f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^0}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ \forall x\in(-\infty,+\infty).$$

记(2): 设 $f(x)=\sin x$. $x\in(-\infty,+\infty)$. 则对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

取 $M=2$, 则 M 与 x 无关且 $|f^{(n)}(x)|=|\sin(\frac{n\pi}{2}+x)|\le 1<2=M$.

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $\forall n\in N^*$. 即 $f^{(n)}(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中一致有界. 依 Th2.

$f(x)=\sin x$ 在 $x_0=0$ 处能展成 Taylor 级数:

$\sin x = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n}{2}\pi + 0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in (-\infty, +\infty).$

练习例1(2):

$x_0 = 4$,

(1). $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x-4)+5} - \frac{1}{(x-4)+6}$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-4}{5}} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-4}{6}} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{x-4}{5}\right)^n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-4}{6}\right)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{6^{n+1}}\right)(x-4)^n$, 从 $\begin{cases} \left|\frac{x-4}{5}\right| < 1 \\ \left|\frac{x-4}{6}\right| < 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 9.$

$x_0 = 0$ 时, 由 $f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$, 从 $\begin{cases} |x| < 1 \\ \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 1.$

$x_0 = -3$ 时. $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+3)-2} - \frac{1}{(x+3)-1} = \frac{1}{1-(x+3)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x+3}{2}}$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(x+3)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+3}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(x+3)^n, \ -4 < x < -2.$

(2). $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}, \ x \in (-\infty, +\infty).$

即 $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \ x \in (-\infty, +\infty).$

(3). $e^x = e^{x-5+5} = e^5 \cdot e^{x-5} = e^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^5}{n!}(x-5)^n, \ \forall x \in R.$

(4). $\log_5 x = \log_5 ((x-1)+1) = \frac{\ln(1+(x-1))}{\ln 5} = \frac{1}{\ln 5}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}, \ 0 < x \le 2.$

(5).

(5) 令 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$，则 $f'(x)=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}$

$=\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，$|x|\le 1$，$\Rightarrow f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}dx$

即 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+1)}$，$x\in[-1,1]$.

(6). $\because f^{(n)}(0)\equiv 0$，$n=0,1,2,3,\cdots$ $\therefore f(x)\ne\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\equiv 0\ne f(x)$. $x\in R$.

(7). $\because e^{-u^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-u^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u^{2n}}{n!}$，$\therefore\int_0^x e^{-u^2}dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u^{2n}}{n!}du$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

(8). $\because\frac{\sin u}{u}=\frac{1}{u}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n+1)!}$

$\therefore\int_0^x\frac{\sin u}{u}du=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n+1)!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

例2中的(6)：$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 处存在Taylor级数：

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0+0x+0x^2+0x^3+\cdots+0x^n+\cdots$ 但 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处的Taylor级数

不收敛于 $f(x)$ 本身！

五) 作业：EX7.3：5/(2),(3),(4),(6)；6/(1),(2),(4),(5),(7)；

ch7 总练/2.