线性代数 (B1) 期中考试卷　参考答案

一、【30 分】填空题. **(每小题 5 分)**

(1) 排列 $(3,6,5,4,1,2)$ 的逆序数是 $\underline{\ 11\ }$.

(2) 齐次方程组 $\begin{cases} x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4+\ x_5=0 \\ x_1+2x_2+3x_3-2x_4+2x_5=0 \\ x_1 \qquad\ \ -\ x_3+4x_4 \qquad\ =0 \end{cases}$ 的解空间的维数是 $\underline{\ 3\ }$.

(3) 方程 $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的解 $\boldsymbol{X} = \underline{\begin{pmatrix} -7 & -2 & 9 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}}$.

(4) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, 而 $\boldsymbol{A}^*$ 是它的伴随矩阵, 那么 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \underline{\ 2\ }$, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^*) = \underline{\ 1\ }$.

(5) 如果 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_3 \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_3$ 都是可逆矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_3^{-1} \end{pmatrix}}$.

(6) 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -11 & 5 \\ 4 & -5 & 17 & 3 \end{pmatrix}$ 的相抵标准形是 $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

二、【20 分】判断下面的说法是否正确, 并简要说明理由或者举出反例. **(每小题 5 分, 其中判断对错占 2 分, 理由占 3 分)**

(1) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 任何 4 个向量都线性相关.

对. 设这四个向量为 3×4 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组, 由于 $\boldsymbol{A}$ 的秩至多为 3, $\boldsymbol{A}$ 的零空间至少是 $4-3=1$ 维的, 从而这四个向量线性相关.

(2) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ $(s\geq 2)$ 线性相关, 那么其中的每个向量都可以由其余的向量线性表示.

错. 例如当 $s=2$, $\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$ 而 $\boldsymbol{\alpha}_2\neq\ \mathbf{0}$. 这个向量组由于含零向量, 因此线性相关, 但是 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 并不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性表示出来.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个秩为 4 的矩阵, 那么一定存在秩为 2 的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$.

对. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_4,\boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}$, 由此, 令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_2,\boldsymbol{O}_2,\boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(\boldsymbol{O}_2,\boldsymbol{I}_2,\boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}$ 即可.

(4) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为二阶方阵, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$, 那么 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

对. 由条件可以推出 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$. 这说明 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵, 从而有 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}$, 即 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$. 由此可知 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

三、【12 分】当 a 为何值时, 如下的线性方程组有解? 当有解时, 求出它的所有解.

$$\begin{cases} x_1 - \ \ 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 11x_2 - \ \ x_3 = 3 \\ 3x_1 - \ \ 5x_2 + 7x_3 = a. \end{cases}$$

解. 该方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & a \end{pmatrix}$,

通过初等行变换, 可以化为 $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$

因此, 方程组有解的充要条件是 $a = -1$.

此时, 上面的矩阵可以进一步化为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 18/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 1/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 从而方程组的通解为 $x_1 = -\frac{18}{7}t + \frac{1}{7}$, $x_2 = -\frac{1}{7}t + \frac{2}{7}$, $x_3 = t$, 其中 $t \in F$ 任意.

(此题通解形式不唯一, 酌情给分) □

四、【8 分】计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 - b & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 - b & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 - b & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 - b \end{vmatrix}$.

解.

$$原式 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^4 a_i - b & a_2 & a_3 & a_4 \\ \sum_{i=1}^4 a_i - b & a_2 - b & a_3 & a_4 \\ \sum_{i=1}^4 a_i - b & a_2 & a_3 - b & a_4 \\ \sum_{i=1}^4 a_i - b & a_2 & a_3 & a_4 - b \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^4 a_i - b\right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & a_2 - b & a_3 & a_4 \\ 1 & a_2 & a_3 - b & a_4 \\ 1 & a_2 & a_3 & a_4 - b \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^4 a_i - b\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -b \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^4 a_i - b\right)(-b)^3.$$

□

五、【10 分】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+2 & a & a+1 \\ a+1 & a+2 & a \end{pmatrix}$ 为 3 阶方阵, 其中 $a\neq -1$. 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解. 我们用初等变换方法:

$$\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 & 1 & 0 & 0 \\ a+2 & a & a+1 & 0 & 1 & 0 \\ a+1 & a+2 & a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} \\ a+2 & a & a+1 & 0 & 1 & 0 \\ a+1 & a+2 & a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} \\ 0 & -2 & -1 & -\frac{a+2}{3a+3} & 1-\frac{a+2}{3a+3} & -\frac{a+2}{3a+3} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{a+1}{3a+3} & -\frac{a+1}{3a+3} & 1-\frac{a+1}{3a+3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{a+1}{3a+3} & -\frac{a+1}{3a+3} & 1-\frac{a+1}{3a+3} \\ 0 & -2 & -1 & -\frac{a+2}{3a+3} & 1-\frac{a+2}{3a+3} & -\frac{a+2}{3a+3} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{a+1}{3a+3} & -\frac{a+1}{3a+3} & 1-\frac{a+1}{3a+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3a+4}{9a+9} & -\frac{1}{3}+\frac{3a+4}{9a+9} & -\frac{2}{3}+\frac{3a+4}{9a+9} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9a+9} & -\frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{9a+9} & -\frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{9a+9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9a+9} & -\frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{9a+9} & -\frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} \end{pmatrix}$$

因此, 所要求的逆矩阵为

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{9a+9} \\ \frac{1}{9a+9} & -\frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{9a+9} & -\frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9a+9}\begin{pmatrix} -3a-2 & 3a+4 & 1 \\ 1 & -3a-2 & 3a+4 \\ 3a+4 & 1 & -3a-2 \end{pmatrix}.$$

□

六、【12 分】设 $n \geq 2$ 为正整数, 而 $a_1, \ldots, a_n$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 内的 n 个互异的数. 用 V 表示次数小于 n 的全体复系数多项式构成的 $\mathbb{C}$ 上的线性空间. 对于 $j = 1, \ldots, n$, 令 $f_j(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_{j-1})(x-a_{j+1})\cdots(x-a_n)$. **(每小问 4 分)**

(1) 证明: $f_1, \ldots, f_n$ 构成 V 的一组基.

(2) 对于 $j = 1, \ldots, n$, 设 $a_j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi j/n} = \cos(2\pi j/n) + \mathrm{i}\sin(2\pi j/n)$, 即 $a_1, \ldots, a_n$ 为全体 n 次单位根. 求从基 $1, x, \ldots, x^{n-1}$ 到 $f_1, \ldots, f_n$ 的过渡矩阵.

(3) 在 (2) 的条件下, 求多项式 $1 + x + \cdots + x^{n-1}$ 在 $f_1, \ldots, f_n$ 下的坐标.

解. (1) 设

$$k_1 f_1 + \cdots + k_n f_n = 0.$$

在上式中令 $x = a_i$, 得到 $k_i f_i(a_i) = 0$, 因此 $k_i = 0$. 这表明 $f_1, \ldots, f_n$ 是线性无关的。

(2) 由于

$$x^n - 1 = \prod_{j=1}^{n}(x - a_j)$$

对固定的指标 i,

$$f_i(x) = \prod_{j \neq i}(x - a_j) = \frac{x^n - 1}{x - a_i} = \frac{x^n - a_i^n}{x - a_i} = x^{n-1} + a_i x^{n-2} + \cdots + a_i^{n-2}x + a_i^{n-1}.$$

我们得到

$$\begin{pmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

这就是要求的过渡矩阵.

(3) 观察到 $f_n(x) = \frac{x^n-1}{x-1} = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$. 因此所求的坐标为

$$(0, \ldots, 0, 1).$$

□

七、【8 分】**(每小问 4 分)**

(1) 若 $\boldsymbol{C} \in F^{m\times n}$ 是一个行满秩的矩阵, 证明一定存在矩阵 $\boldsymbol{D} \in F^{n\times m}$ 使得 $\boldsymbol{CD} = \boldsymbol{I}_m$ 为单位阵.

(2) 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$, 证明存在 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{ABX} = \boldsymbol{A}$. (提示: 利用 $\boldsymbol{A}$ 的相抵标准形)

证明. (1) (方法一) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}_m, \boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}$, 选取 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$ 即可.

(方法二) 设 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ 是 F^m 的标准基, 对于 $i = 1, 2, \ldots, m$, 方程组 $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{e}_i$ 有解 (因为 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{C}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{e}_i) = m$), 设 $\boldsymbol{x}_i$ 是一个解. 那么, $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$ 满足要求.

(2) (1) (方法一) 设 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r$, 于是, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$.

此时 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{QB} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{C}$ 有 r 行. 由于 $\boldsymbol{AB}$ 的秩也是 r, 这说明 $\boldsymbol{C}$ 是一个满秩矩阵. 由 (1) 可知, 存在 $\boldsymbol{D}$ 使得 $\boldsymbol{CD} = \boldsymbol{I}_r$. 要想构造 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{ABX} = \boldsymbol{A}$, 即 $\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$, 只需选取 $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{D}, \boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}$ 即可.

(2) (方法二) 设 $S_1 = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组, $S_2 = \{\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n\}$ 为 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量组, 则 S_2 可由 S_1 线性表示. 又由于 $\operatorname{rank}(S_2) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(S_1)$, 这说明 S_1 与 S_2 等价, 从而 S_1 可由 S_2 线性表示. 而这意味着存在 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{ABX} = \boldsymbol{A}$. □