线性代数 (B1) 第十二次作业

请于 2023 年 6 月 6 日周二上课前在教室里交.

补充习题可视作思考题, 学有余力的同学强烈建议认真完成.

2023 年 5 月 30 日布置的作业

教材习题. P221: #16.

补充习题 1. 若 $\mathscr{A}$ 是有限维欧氏空间 V 上的正交变换, 证明 V 中的任何元素在 $\mathscr{A}$ 下都存在唯一一个原像.

补充习题 2. 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维欧氏空间 V 上的线性变换, 有 n 个实特征值 (不要求互不相同). 证明: 存在 V 的一组标准正交基, 使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为上三角阵.

补充习题 3. 设 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ 与 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ 是 n 维欧氏空间的两组基. 证明: 存在 V 上的正交变换 $\mathscr{A}$ 使得 $\mathscr{A}(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 的充要条件是内积在这两组基下的度量矩阵相等.

2023 年 6 月 1 日布置的作业

教材习题. P221-222: #15, #18(3)(4). P244: #1, #2,

设 W 是欧氏空间 V 的一个子空间. 如果向量 $\boldsymbol{z} \in V$ 与 W 中的任意向量都正交, 则称 $\boldsymbol{z}$ 正交于 W. V 中与 W 正交的向量的全体称为 W 的正交补, 并记作 $W^{\perp}$.

补充习题 4. 设 $W = \langle \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_p \rangle$ 是欧氏空间 V 的一个子空间.

(1) 证明向量 $\boldsymbol{z} \in V$ 属于 $W^{\perp}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{z}$ 与生成 W 的任一向量 $\boldsymbol{w}_i$ 都正交.

(2) 证明 $W^{\perp}$ 是 V 的一个子空间.

(3) 证明 $V = W \oplus W^{\perp}$, 即, $W \cap W^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$, 且对任意的 $\boldsymbol{z} \in V$, 都存在 $\boldsymbol{z}_1 \in W$ 以及 $\boldsymbol{z}_2 \in W^{\perp}$ 使得 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2$.

补充习题 5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 的实矩阵, 在标准内积下, 验证 $\boldsymbol{A}$ 的行空间的正交补是 $\boldsymbol{A}$ 的零空间 (即 $\{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$).

补充习题 6. 若 W 是有限维欧氏空间 V 的一个子空间, 证明 V 中的任意一个向量 $\boldsymbol{y}$ 都可以唯一地表示为 $\boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{z}$, 其中 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 属于 W, 而 $\boldsymbol{z}$ 属于 $W^{\perp}$. 事实上, 如果 $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_p\}$ 是 W 的一组正交的基, 那么

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{p} \frac{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}_i)}{(\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_i)} \boldsymbol{w}_i,$$

而 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}$.