随机过程B

平稳过程的相关函数与功率谱密度

陈 昱

cyu@ustc.edu.cn

东区管理科研楼 1003

63602243

2022年 5 月

协方差函数

对平稳过程 X 的协方差函数 $R(\tau)$，容易由定义得到如下性质：

1. 对称性，即 $R(-\tau) = R(\tau)$
2. 有界性，即 $|R(\tau)| \le R(0)$
3. 非负定性。即对任意的时刻 t_n 及实数 a_n, $n = 1, 2, \cdots, N$。有

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} a_n a_m R(t_n - t_m) \ge 0,$$

4. 平稳过程 n 阶导数的协方差函数为

$$Cov(X^n(t), X^n(t+\tau)) = (-1)^n R^{(2n)}(\tau). \tag{1}$$

- 本小节主要研究协方差函数（即均值为零的自相关函数）的频率结构。
- 我们先从确定性时间函数的能量，能谱密度，功率谱等概念出发，然后引入平稳过程功率谱的概念。

- 设 $x(t)$ 是实轴上以 $2T$ 为周期的函数，在 $[-T,T]$ 上只有有限个第一类间断点（也可以改为其他条件），则 $x(t)$ 有傅里叶展开，即

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A(n)e^{-jn\omega t},$$

其中 $\omega=\pi/T$。

$$A(n)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)e^{jn\omega t}dt$$

$A(n)$ 一般为复数，由定义显然有 $A(n)$ 的共轭 $\overline{A}(n)=A(-n)$。$\frac{1}{2}A(0)$ 称为直流分量，$|A(1)|$ 称为基波 ω 的振幅，$|A(n)|$ 称为谐波 $n\omega$ 的振幅

现考虑 $x(t)$ 按频率在 $[-T,T]$ 上能量的分解。（为了便于理解诸物理术语，可以把 $x(t)$ 设想为加在 1 欧姆电阻上的电压。若

$$\int_{-T}^{T} x^2(t)dt < \infty,$$

则成立 Parsval 等式：

$$\int_{-T}^{T} x^2(t)dt = 2T\sum_{n=-\infty}^{\infty}|A(n)|^2,$$

上式左边表示 $x(t)$ 在 $[-T,T]$ 上的总能量，或者说 $x(t)$ 的功率为

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|A(n)|^2.$$

我们称 $\omega_n = n\omega$ 为各谐波的角频率。$\lambda = n/2T$ 称为谐波的线频率。下图为 $x(t)$ 的线功率谱图。每条线段称为一条谱线，高度为 $|A(n)|^2$，$|A(-n)|^2 + |A(n)|^2$ 为基波或第 $(n-1)$ 个谐波的功率。

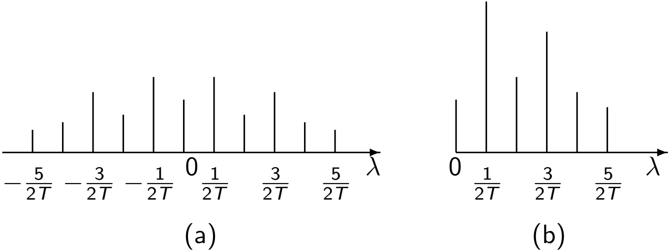


图 4.3 周期为 $2T$ 的函数功率谱

图 4.3(b) 是把功率谱都集中在右半直线上，用它表示的称为半功率谱。这儿“半”字不是量值的一半，而是区域的一半。因为除 0 外，半功率谱的值为功率谱在同处的二倍。由于上述谱线是离散的，所以我们把这种功率谱称为离散谱。上面的分析告诉我们，如果 $[-T, T]$ 上 $x(t)$ 的总能量有限，则总功率可以分解为各谐波的功率之和。

如果 $x(t)$ 不是周期的，但总能量有限，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt < \infty, \tag{2}$$

则 $x(t)$ 的 Fourier 变换存在或者说有频谱

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt.$$

一般 $F(\omega)$ 为复数，且 $\overline{F}(\omega) = F(-\omega)$。而 Parsval 等式仍成立：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

这公式的意义是 $x(t)$ 的全部能量可以按所有频率进行分解，$|F(\omega)|^2$ 称为能量谱密度。满足 (2) 式的信号称为能量型信号。

但在一般情况下，信号不满足 (2) 式，即总能量为无限，但是平均功率

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)dt < \infty.$$

这种信号称为功率型信号。正弦型信号、平稳过程的样本函数等时间函数，由于 t 趋于正负无穷大时都不收敛于 0，所以都不是能量型信号。但显然正弦型信号是功率型的。为了利用 Fourier 变换给出平均功率的谱表达式，我们可以按如下方式来考虑。令

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \tag{3}$$

则 $x(t)$ 在有限区向上的能量总是有限的。故 $x_T(t)$ 的 Fourier 变换存在。

$$F(\omega, T) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)e^{-j\omega t}dt, \tag{4}$$

且成立 Parsval 等式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega, T)|^2 d\omega. \tag{5}$$

两边除以 $2T$，左边即为 $x_T(t)$ 的平均功率。令 $T \to \infty$，则 $x(t)$ 在实数轴上的平均功率可表示为

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T}|F(\omega, T)|^2 d\omega. \tag{6}$$

如果

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}|F(\omega, T)|^2 = S(\omega)$$

存在，则 (6) 中的极限号和积分号可以交换，注意到 (3) 式，有

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_T^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega. \tag{7}$$

我们称 $S(\omega)$ 为 $x(t)$ 的平均功率谱密度。$S(\omega)\Delta\omega$ 表示 $x(t)$ 的频率在 $[\omega, \omega+\Delta\omega]$ 中的成分对 $x(t)$ 总功率的贡献。

把平均功率谱密度的概念推广到平稳过程$X=\{X(t),-\infty<t<\infty\}$。为此，对每条样本轨道，根据 (4) 和 (7)（设 $S(\omega)$ 存在），则有

$$F(\omega,T)=\int_{-T}^{T}X(t)e^{-j\omega t}dt, \tag{8}$$

和

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2d\omega. \tag{9}$$

注意，(8) 和 (9) 两式中的量都是随机变量，所以有意义的是它们的平均值。我们把过程 X 的平均功率谱密度定义为（如果极限存在的话）

$$S(\omega)=\lim_{T\to\infty}\mathbb{E}\left[\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2\right], \tag{10}$$

而

$$\lim_{T\to\infty} E\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X^2(t)dt\right). \tag{11}$$

定义为平稳过程 X 的平均功率。由假定 $EX(t)=0$，在 (11) 中交换积分和期望运算次序，则

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} EX^2(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} R(0)dt = R(0), \tag{12}$$

即 $R(0)$ 就表示过程的平均功率。在 (10) 中交换运算次序，得

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} E\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2 d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty} E\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega. \end{aligned} \tag{13}$$

在 (9) 式两边取期望，然后令 $T \to \infty$，则由 (12) 和 (13) 得

$$R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega. \tag{14}$$

(14) 式称为平稳过程的平均功率的谱表示式。当然，这里还差一个所述运其次序能否交换的问题。可以证明，如果平稳过程的协方差函数 $R(\tau)$ 满足 $\int |R(\tau)|d\tau < \infty$，则以上各种运算次序的交换都是合法的。如果把 $-\omega$ 处的谱密度加到 ω 处，使谱密度只在正半实轴上有定义，则称之为半（功率）谱密度或单边谱密度。如用 $G(\omega)$ 表示半谱密度，则

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \begin{cases} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E|F(\omega, T)|^2 & \omega \geq 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2S(\omega) & \omega \geq 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{15}$$

由于谱密度在谱分析中的重要性，有必要仔细讨论它的性质，特别是它与协方差函数之间的关系。
由 $S(\omega)$ 的定义可知

$$\bar{S}(\omega) = S(\omega) \geq 0, \qquad S(-\omega) = S(\omega).$$

这是因为 $|F(\omega, T)|^2 = F(\omega, T)F(-\omega, T)$ 为实的，非负偶函数。其次，由 (10) 定义的平均功率谱密度 $S(\omega)$ 和协方差函数 $R(\tau)$（假定平稳过程的均值为零）是一对富里埃变换。一般由 (10) 定义的平均功率谱密度 $S(\omega)$ 和自相关函数 $r(\tau)$ 也是一对富里埃变换。更具体地，我们有

Theorem (（*Wiener − Khintchine*公式）)

假定 $EX(t) = 0$，*且* $\int |R(\tau)| d\tau < \infty$，*则*

$$S(\omega) = \int R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \tag{16}$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \tag{17}$$

注：

由于 $R(\tau)$ 和 $S(\omega)$ 都是偶函数，故 Wiener-Khintchine 公式还可以写为偶 Fourier 变换形式：

$$
\begin{aligned}
S(\omega) &= 2\int_0^{\infty} R(\tau)\cos\omega\tau d\tau, && (18)\\
R(\tau) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S(\omega)\cos\omega\tau d\omega. && (19)
\end{aligned}
$$

对平稳序列来说，设 $R(\tau), \tau = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$，为其协方差函数，且 $\sum |R(\tau)| < \infty$，$S(\omega)$ 为对应的谱密度（即在 (8) 中把积分号改为求和号，然后由 (10) 得到的平均功率谱密度），则对应于 (20) 和 (21) 的 Wiener-Khintchine 公式为

$$
\begin{aligned}
S(\omega) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R(\tau), && (20)\\
R(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega)\cos\omega\tau d\omega. && (21)
\end{aligned}
$$

在 $EX(t) = m$ 时，由 (10) 定义的平均功率谱密度和自相关函数是一对 Fourier 变换，即

$$S(\omega) = \int r(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

$$r(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

为方便起见，以下我们总假定 $EX(t) = 0$，表 4.1 列出了若干协方差函数及对应的谱密度。

最常见的谱密度是有理谱密度，即 $S(\omega)$ 为两个 ω 多项式的比：

$$S(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}.$$

由谱密度是 ω 的非负实值偶函数知，$S(\omega)$ 形如

$$s_0 \frac{\omega^{2n} + a_{2n-2}\omega^{2n-2} + \cdots + a_2\omega^2 + a_0}{\omega^{2m} + b_{2m-2}\omega^{2m-2} + \cdots + b_2\omega^2 + b_0},$$

式中 $s_0 \neq 0$。又由于 $R(0) > 0$，故 $S(\omega)$ 应在 $[0, \infty)$ 上可积，从而 $S(\omega)$ 的分母不能有实根，分母多项式次数至少应比分子高 2 以及 $s_0 > 0$。

留数定理

函数$f(z)$ 在区域D 内除有限个孤立奇点$z_1, z_2, \ldots, z_n$外处处解析，C是D内包围诸奇点的一条正向简单闭曲线，则

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right]$$

留数定理: 假设$R(x)$是分母无实零点的有理函数，且分子分母没有相同的零点，而分母的幂次比分子的幂次至少高一次，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jax} R(x)dx = 2\pi j \sum_{k} \mathrm{Res}\left[e^{j|a|z} R(z), z_k\right]$$

z_k是$R(z)$的分母在上半复平面的零点。若z_k是$R(z)$ 分母的n重零点，则

$$\mathrm{Res}\left[e^{j|a|z} R(z), z_k\right] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_k} \left[e^{j|a|z} R(z)\left(z - z_k\right)^n\right]^{(n-1)}$$

例题

▶已知零均值平稳过程的谱密度为:

$$S_X(\omega) = \frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}$$

求其求相关函数$R_X(\omega)$ 与平均功率。

解法一：利用复变函数中的留数定理

$$\begin{aligned}
R_X(\tau) =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} S_X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} \frac{\omega^2+4}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)} d\omega \\
=& \frac{1}{2\pi} 2\pi j \left[\mathrm{Res}\left(\frac{\omega^2+4}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)} e^{j\omega|\tau|}, j \right) \right. \\
& \left. + \mathrm{Res}\left(\frac{\omega^2+4}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)} e^{j\omega|\tau|}, 3j \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\omega^2+4}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}e^{j\omega|\tau|}, j\right) = \lim_{\omega\to j}(\omega - j)\frac{\omega^2+4}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}e^{j\omega\tau|} = \frac{3}{16j}e^{-|\tau|}$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\omega^2+4}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}e^{j\omega|\tau|}, 3j\right) = \lim_{\omega\to j}(\omega - 3j)\frac{\omega^2+4}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}e^{j\omega\tau|} = \frac{5}{48j}e^{-3|\tau|}$$

所以我们得到

$$\begin{aligned} R_X(\tau) =& \frac{1}{2\pi}2\pi j\left[\mathrm{Res}\left(\frac{\omega^2+4}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}e^{j\omega|\tau|}, {\color{red}j}\right)\right. \\ & \left. + \mathrm{Res}\left(\frac{\omega^2+4}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}e^{j\omega|\tau|}, {\color{red}3j}\right)\right] \\ =& j\left(\frac{3}{16j}e^{-|\tau|} + \frac{5}{48j}e^{-3|\tau|}\right) = \frac{3}{16}e^{-|\tau|} + \frac{5}{48}e^{-3|\tau|} \end{aligned}$$

解法二： 利用已知的基本公式和Fourier变换的性质等

$\mathcal{F}\left[e^{-a|\tau|}\right] = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$,

$$
\begin{aligned}
S_X(\omega) &= \frac{5}{8}\frac{1}{\omega^2+9} + \frac{3}{8}\frac{1}{\omega^2+1} \\
&= \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2\times 3}{\omega^2+3^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\times 1}{\omega^2+1} \\
&= \frac{5}{48}\cdot\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{2\times 3}{\omega^2+3^2}\right] + \frac{3}{16}\cdot\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{2\times 1}{\omega^2+1}\right] \\
&= \frac{5}{48}e^{-3|\tau|} + \frac{3}{16}e^{-|\tau|}
\end{aligned}
$$

例。已知平稳过程的相关函数为:

$$R_X(\tau) = e^{-a|\tau|} \cos \omega_0 \tau$$

其中$a > 0, \omega_0$ 为常数，求功率谱密度$S_X(\omega)$.

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|\tau|} \cos \omega_0 \tau \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= 2\int_0^{\infty} e^{-a\tau} \cos \omega_0 \tau \cdot \cos \omega\pi d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-a\tau} \left[\cos\left(\omega_0 + \omega\right)\tau + \cos\left(\omega_0 - \omega\right)\tau\right] d\tau \\ &= \frac{a}{a^2 + \left(\omega_0 + \omega\right)^2} + \frac{a}{a^2 + \left(\omega_0 - \omega\right)^2} \end{aligned}$$

白噪声序列

定义：均值为零而谱密度为正常数，即

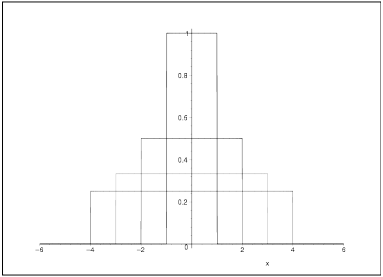
$$S_X(\omega) = S_0 > 0, -\infty < \omega < +\infty$$

的平稳过程X(t)，称为白噪声过程，简称白噪声。

- 由于白噪声过程类似于白光的性质，其能量谱在各种频率上均匀分布，故有“白”噪声之称，又由于它的主要统计特性不随时间的推移而改变，故它是平稳过程。
- 但是它的相关函数在通常的意义下的傅氏反变换不存在。所以，为了对白噪声过程进行频谱分析，下面引进δ 函数的傅氏变换概念

具有下列性质的函数称为Dirac Delta 函数δ函数

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$$



δ 函数的性质

- $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(x)dx \\ &= f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx \\ &= f(0)\end{aligned}$$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$

δ 函数

δ 函数的傅里叶变换为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = e^{-i\omega\tau}\Big|_{\tau=0} = 1.$$

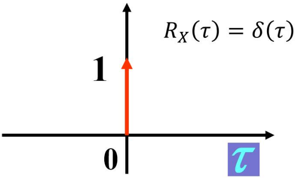
由傅里叶反变换，可得δ 函数的傅里叶积分表达式

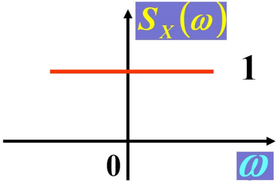
$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega\tau} d\omega$$

或者

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega\tau} d\omega = 2\pi\omega\delta(\tau)$$

说明δ 函数与1 构成一对傅里叶变换。





同理可得

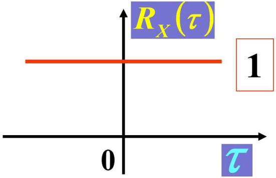
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}e^{i\omega\tau}\Big|_{\omega=0}=\frac{1}{2\pi}$$

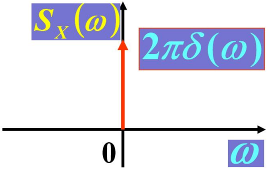
或

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\cdot\delta(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega=1$$

相应的有

$$\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{-i\omega\tau}d\tau=2\pi\delta(\omega)$$





例：已知相关函数

$$R_X(\tau) = a\cos\omega_0\tau$$

其中a, ω_0 为常数。求功率谱密度$S_X(\omega)$

$$\begin{aligned}
S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} a\cos\omega_0\tau e^{-i\omega\tau}d\tau \\
&= \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}\right]e^{-i\omega\tau}d\tau \\
&= \frac{a}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)\tau}d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\omega_0)\tau}d\tau\right] \\
&= \frac{a}{2}\cdot\left[2\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right) + 2\pi\delta\left(\omega+\omega_0\right)\right] \\
&= a\pi\left[\delta\left(\omega-\omega_0\right) + \delta\left(\omega+\omega_0\right)\right]
\end{aligned}$$

更一般的，若

$$R_X(\tau) = \sum_{i=1}^{n} a_i\cos\left(\omega_i\tau\right)$$

则它的谱密度：

$$S_X(\omega) = \pi\sum_{i=1}^{n} a_i\left[\delta\left(\omega-\omega_i\right) + \delta\left(\omega+\omega_i\right)\right]$$

已知平稳过程X(t)的自相关函数为

$$R_X(\tau) = 4e^{-|\tau|}\cos\pi\tau + \cos 3\pi\tau$$

求谱密度$S_X(\omega)$.

解:

$$S_X(\omega) = 4\left[\frac{1}{(\omega-\pi)^2+1} + \frac{1}{(\omega+\pi)^2+1}\right] + \pi[\delta(\omega-3\pi)+\delta(\omega+3\pi)]$$

已知平稳过程的相关函数为:

$$R_X(\tau) = 5 + 4e^{-3|\tau|}\left(\cos^2 2\tau\right)$$

求其功率谱密度$S_X(\omega)$.

解:

$$\begin{aligned}
\because R_X(\tau) &= 5 + 2e^{-3|\tau|} + 2e^{-3|\tau|}\cos 4\tau \\
\therefore S_X(\omega) &= \mathcal{F}\left[R_X(\tau)\right] \\
&= 5\mathcal{F}[1] + 2\mathcal{F}\left[e^{-3|\tau|}\right] + 2\mathcal{F}\left[e^{-3|\tau|}\cos 4\tau\right] \\
&= 10\pi\delta(\omega) + \frac{12}{9+\omega^2} + 2\left[\frac{3}{9+(\omega-4)^2} + \frac{3}{9+(\omega+4)^2}\right]
\end{aligned}$$