

随机过程B

平稳过程

陈 昱

cyu@ustc.edu.cn

东区管理科研楼 1003

63602243

2020 年 2 月

随机过程有限维分布族

- **定义(有限维分布族)**: 随机过程的一维分布, 二维分布, ..., n 维分布, 等等, 其全体

$$\mathcal{F} = \{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) : \forall t_1, \dots, t_n \in T, \forall n = 1, 2, \dots\}$$

称为随机过程 $\{X(t)\}$ 的有限维分布族, 其中

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n).$$

- 有限维分布族的性质
 - ① 对称性: 对次序交换保持一致
 - ② 相容性: 对取边缘分布保持一致

- **定理(柯尔莫哥洛夫相容性定理):** 设分布函数族

$$\mathcal{F} = \{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) : \forall t_1, \dots, t_n \in T, \forall n = 1, 2, \dots\}$$

满足上述的对称性和相容性, 则必存在一个随机过程 $\{X(t)\}$ 使得上述分布族恰好是它的有限维分布族.

对随机过程 $\{X(t), t \in T\}$,

- 过程的一维分布函数为

$$F_t(x) = P(X(t) \leq x), \forall t \in T.$$

- 过程的一维均值函数为

$$\mu_X(t) = EX(t).$$

- 过程的方差函数为

$$\sigma_X^2(t) = \text{Var}[X(t)].$$

有限维分布和数字特征

对随机过程 $\{X(t), t \in T\}$,

- $X(t_1)$ 与 $X(t_2)$ 的联合分布函数为

$$F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2), \forall t_1, t_2 \in T.$$

这也就是过程在 t_1, t_2 两不同时刻值的联合二维分布, 记作 $F_{t_1, t_2}(x_1, x_2)$

- 过程的自相关函数

$$r_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)].$$

- 过程的协方差函数为

$$R_X(t_1, t_2) = \text{Cov}(X(t_1), X(t_2)) = E\{(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))\}$$

自相关函数和协方差函数性质

对随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的 $r_X(t_1, t_2)$ 和 $R_X(t_1, t_2)$, 有

- 对称性:

$$r_X(s, t) = r_X(t, s) \quad R_X(s, t) = R_X(t, s)$$

- 非负定性, 任何 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ 及任意实数 b_1, b_2, \dots, b_n 我们恒有

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j r_X(t_i, t_j) \geq 0 \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j R_X(t_i, t_j) \geq 0$$

因为协方差运算有线性性质, 由

$$\begin{aligned} 0 \leq \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n b_i X(t_i) \right) &= \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^n b_i X(t_i), \sum_{j=1}^n b_j X(t_j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j R_X(t_i, t_j) \end{aligned}$$

随机向量同分布是指其联合分布函数相同。时间序列 $\{X(t)\}$ 与 $\{Y(t)\}$ 同分布, 当且仅当 $\forall n \in \mathbb{N}_+, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$, $(X(t_1), \dots, X(t_n))^T$ 与 $(Y(t_1), \dots, Y(t_n))^T$ 同分布.

- **定义(严平稳过程)**: 如果时间序列 $\{X(t)\}$ 对 $\forall n \in \mathbb{N}_+, t_1, \dots, t_n, k \in \mathbb{Z}$,

$(X(t_1), \dots, X(t_n))^T$ 和 $(X(t_1 + k), \dots, X(t_n + k))^T$ 同分布.

即分布平移不变, 称时间序列 $\{X(t)\}$ 为严平稳时间序列.

- ① $n = 1$, 则对所有的 k , X_{t_k} 都同分布.
- ② $n = 2$, 则对所有的 k , (X_{k+t_1}, X_{k+t_2}) 的分布与 k 无关.

- **严平稳过程性质**: 如果时间序列 $\{X(t)\}$ 严平稳时间序列, 对任多元函数 $\phi(x_1, x_2, \dots, x_m)$, 定义

$$\{Y_t = \phi(X_{t+1}, \dots, X_{t+m}), t \in \mathbb{Z}\},$$

则 $\{Y(t)\}$ 仍是严平稳时间序列.

- ① $\{Y(t)\}$ 是 $\{X(t)\}$ 的滑动平均序列, 则严平稳保持.

宽平稳过程定义

- **定义(平稳过程)**: 如果时间序列 $\{X(t)\}$ 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 满足

1. 对所有的 $t \in \mathbb{N}$, $EX_t^2 < \infty$;
2. 对所有的 $t \in \mathbb{N}$, $EX_t = \mu$;
3. 对所有的 $t, s \in \mathbb{N}$, $E[(X_t - \mu)(X_s - \mu)] = \gamma_{t-s}$,

则称 $\{X(t)\}$ 是**宽平稳时间序列**, 简称为**平稳序列** 或**平稳列**.
称实数列 $\{\gamma_t\}$ 为 $\{X(t)\}$ 的**自协方差函数**.

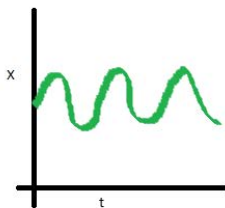
- 性质

1. 期望、方差与 t 无关
2. 时间平移不影响两时刻的相关系数
3. 又称平稳序列为二阶矩平稳序列, 还称为平稳列或弱平稳列
4. $H = \{Y, EY^2 \leq \infty\}$ 是一个线性空间, 定义内积为 $(X, Y) = EXY$, 是个完备的内积空间 (Hilbert空间). 这样对于二阶矩过程 $X(t)$, 可以看出Hilbert空间的一条曲线, 平稳过程则是Hilbert空间的一个圆($EX_t X_t = R(0) = c$).
即 **$X(t)$ 的端点都在以原点为圆心半径为 \sqrt{c} 的球面上**.

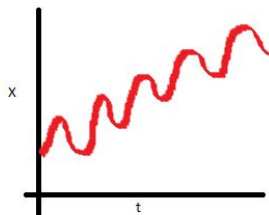
- 严平稳与平稳过程的关系

1. 二阶矩有限的严平稳为宽平稳。
2. 宽平稳一般不是严平稳。
3. 正态平稳列既是宽平稳也是严平稳。
4. 平稳序列宽平稳序列弱平稳序列。

平稳过程图

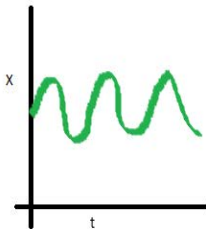


Stationary series

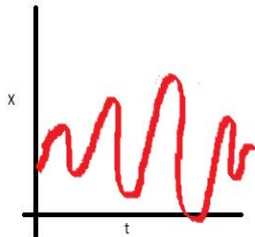


Non-Stationary series

平稳过程方差齐性

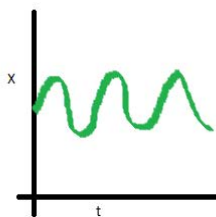


Stationary series

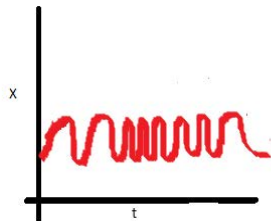


Non-Stationary series

平稳过程协方差



Stationary series



Non-Stationary series

自协方差函数性质

- 自协方差函数性质

1. 对称性: $\gamma_k = \gamma_{-k}, \forall k \in \mathbb{Z}$

2. 非负定性: $\forall n \in \mathbb{N}_+$

$$\Gamma_n = (\gamma_{k-j})_{k,j=1}^n = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix} \text{ 非负定}$$

3. 有界性: $|\gamma_k| \leq \gamma_0$ 对 $\forall k \in \mathbb{Z}$

任何满足上述三个性质的实数列都被称为非负定序列. 所以平稳序列的自协方差函数是非负定序列. 可以证明, 每个非负定序列都可以是一个平稳序列的自协方差函数.

自协方差矩阵

- 矩阵 Γ_n 的元素通项是

$$\Gamma_n = (\gamma_{|i-j|})_{i=1,2,\dots,n,j=1,2,\dots,n}$$

记

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},$$

则 $\Gamma_n = \text{Var}(\mathbf{X})$.

- 定理** 一个定义在整值点上的函数是某个**平稳过程的协方差函数**的 \Leftrightarrow 该函数是**偶函数**且是**非负定**的。
 - 例: 验证某个矩阵是非负定的, 只需看它是不是平稳列的协方差函数, $A = (\cos(i-j)\omega)_{n \times n}$ 是非负定阵.

自协方差矩阵非负定和线性相关

- 因为 Γ_n 是协方差阵, 所以非负定。事实上, 设 $\alpha = (a_1, \dots, a_n)^T$, 则

$$\alpha^T \Gamma_n \alpha = \text{Var}(\alpha^T \mathbf{X} \alpha) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) \geq 0$$

- Γ_n 退化(不满秩) 当且仅当存在使得 $\alpha \neq 0$,

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = 0.$$

这时称随机变量 X_1, \dots, X_n 是线性相关的。即 X_1, \dots, X_n 的非零线性组合是退化随机变量。如果 X_1, \dots, X_n 线性相关, 则 $m \geq n$ 时, X_1, \dots, X_n 线性相关。

- **自相关系数定义AutoCorrelation Function** 平稳序列 $\{X_t\}$ 的 h 阶自相关系数

$$\begin{aligned}\rho_X(h) &= \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} \\ &= \frac{\text{Cov}(X_{t+h}, X_t)}{\text{Cov}(X_t, X_t)} \\ &= \text{Corr}(X_{t+h}, X_t)\end{aligned}$$

几个例子

1. 平稳序列的线性变换还是平稳的. 例如: $Y_t = a + bX_t, t \in \mathbb{Z}$
2. 调和平稳序列, 设 a, b 是常数, $U \sim U(-\pi, \pi)$, 则

$$X_t = b \cos(at + U), \quad t \in \mathbb{Z}$$

是平稳序列, 称为调和平稳列.

$$\begin{aligned} EX_t &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} b \cos(at + u) du = 0, \\ E(X_t X_s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} b^2 \cos(at + u) \cos(as + u) du \\ &= \frac{1}{2} b^2 \cos((t - s)a), \end{aligned}$$

这个平稳序列的观测样本和自协方差函数都是以 a 为角频率, 以 $2\pi/a$ 为周期的函数.

- **定义(白噪声, White Noise):** 设 $\{\varepsilon_t\}$ 是一平稳列. 如果对任意的 $s, t \in \mathbb{N}$, 有

$$E\varepsilon_t = \mu,$$
$$\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \begin{cases} \sigma^2, & t = s \\ 0, & t \neq s \end{cases} = \sigma^2 \delta_{t-s},$$

则称随机变量序列 $\{\varepsilon_t\}$ 是一个**白噪声序列**, 记做 $WN(\mu, \sigma^2)$.

- ① 一般地假定 $\mu = 0$. 如果 $\mu = 0$, 称 $\{\varepsilon_t\}$ 为**零均值白噪声**. 白噪声的另一种定义要求零均值, 本书中用到的白噪声一般都是零均值的.
- ② 当 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ 时, 称 $\{\varepsilon_t\}$ 为**标准白噪声**.
- ③ 当 ε_t 服从正态分布时, 称是**正态白噪声或高斯白噪声**. 正态白噪声总是独立白噪声.

Poisson 白噪声

这是服从Poisson独立白噪声的例子。

例： 如果连续时的随机过程 $\{N(t) : t \in [0, \infty)\}$ 满足

- ① $N(0) = 0$, 且对任何 $s \geq 0, t > 0$ 和非负整数 k ,

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp\{-\lambda t\}, (\lambda > 0,)$$

- ② $\{N(t)\}$ 有**独立增量性**: 对任何 $n > 1$ 和 $0 = t_0 < \dots < t_n$, 随机变量 $N(t_j) - N(t_{j-1}), j = 1, 2, \dots, n$ 相互独立,

则称 $\{N(t)\}$ 是一个强度 λ 的Poisson 过程.

注： $EN(t) = \lambda t, \text{Var}(N(t)) = \lambda t$.

令

$$\varepsilon_n = N(n+1) - N(n) - \lambda, \quad n = 1, 2, \dots,$$

则 $E\varepsilon_n = 0, \text{Var}(\varepsilon_n) = \lambda, \{\varepsilon_n\}$ 是独立白噪声, 称为Poisson白噪声.

这是一种更典型的随机过程。

如果连续时的随机过程 $\{B(t) : t \in [0, \infty)\}$ 是一个标准布朗运动.

定义

$$\varepsilon_n = B(n+1) - B(n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

则 $\{\varepsilon_n\}$ 是一个标准正态白噪声.

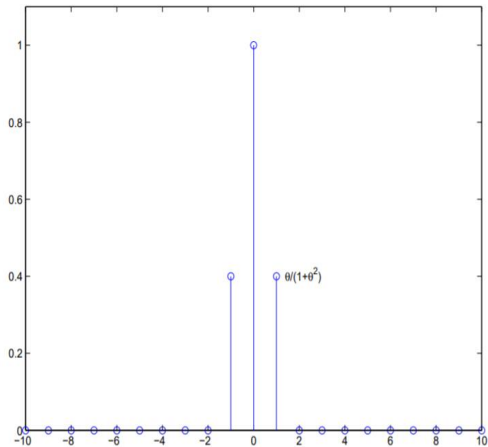
3. (MA(1) 过程: Moving Average)

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2).$$

平稳性:

$$\begin{aligned} EX_t &= 0, \\ \gamma_X(t+h, t) &= E(X_{t+h}X_t) \\ &= E[(\varepsilon_{t+h} + \theta\varepsilon_{t+h-1})(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})] \\ &= \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta^2), & \text{if } h = 0 \\ \sigma^2\theta, & \text{if } h = \pm 1 \\ 0, & \text{if } |h| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

MA(1) 过程的ACF图



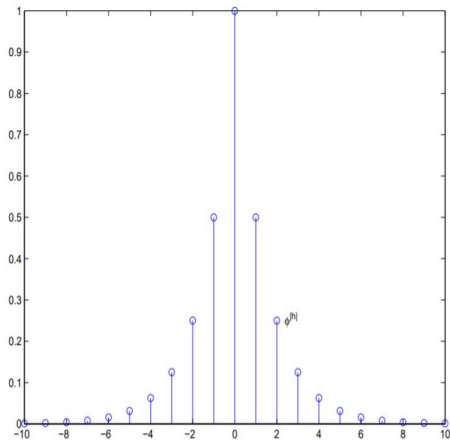
4. (AR(1) 过程AutoRegressive:)

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2).$$

假定 $\{X_t\}$ 是平稳的和 $|\phi| < 1$. 则有

$$\begin{aligned} EX_t &= \phi EX_{t-1} = 0, \\ EX_t^2 &= \phi^2 EX_{t-1}^2 + \sigma^2 = \sigma^2 / (1 - \phi^2), \\ \gamma_X(t+h, t) &= E(X_{t+h} X_t) \\ &= E[(\phi X_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h-1}) X_t] \\ &= \phi \gamma_X(h-1) \\ &= \phi^{|h|} \gamma_X(0) = \frac{\phi^{|h|} \sigma^2}{1 - \phi^2} \end{aligned}$$

AR(1) 过程的ACF图



平稳过程的例子

例题： 设 $A_0, A_1, \dots, A_m; B_0, B_1, \dots, B_m$ 为两两不相关的随机变量，且 $EA_i = EB_j, EA_i^2 = EB_j^2 = \sigma_i^2, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq m$ ，记 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m$ 为 $[0, \pi]$ 中不同的频率。定义

$$X_t = \sum_{k=0}^m (A_k \cos t\omega_k + B_k \sin t\omega_k)$$

则显然有 $EX_t = 0$ 。利用诸 A_i, B_j 不相关，可知

$$EX_{t+\tau}X_t = \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 \cos \tau\omega_k \quad (1)$$

仅与 τ 有关，故 $\{X_t, -\infty < t < \infty\}$ 为平稳过程。

► 注意到 $A_k \cos t\omega_k$ 和 $B_k \sin t\omega_k$ 表示圆频率为 ω_k 而随机振幅为 A_k 和 B_k 的简谐振动在时刻 t 时质点的位置。因此可见，当振动的随机振幅两两不相关时，经叠加而生成的过程仍为平稳过程。

例：滑动平均序列： 设 $\{\varepsilon_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 为一列不相关的有相同均值 m 和方差 σ^2 的随机变量。设 a_1, \dots, a_k 为任意 k 个实数。考虑由下式定义的序列：

$$X_n = a_1\varepsilon_n + a_2\varepsilon_{n-1} + \dots + a_k\varepsilon_{n-k+1}, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

我们有

$$EX_n = m(a_1 + \dots + a_k)$$

记 $\xi_j = \varepsilon_j - m$ ，则由 ε_j 的两两不相关知协方差函数

$$\begin{aligned} & R(n + \tau, n) \\ &= E[(X_n - m(a_1 + \dots + a_k))(X_{n+\tau} - m(a_1 + \dots + a_k))] \\ &= E(a_1\xi_n + a_2\xi_{n-1} + \dots + a_k\xi_{n-k+1}) \\ &\quad \cdot (a_1\xi_{n+\tau} + a_2\xi_{n+\tau-1} + \dots + a_k\xi_{n+\tau-k+1}) \\ &= \begin{cases} \sigma^2(a_k a_{k-\tau} + \dots + a_{\tau+1} a_1) & , \quad \text{若 } 0 \leq \tau \leq k-1, \\ 0 & , \quad \text{若 } \tau \geq k, \end{cases} \end{aligned}$$

即协方差函数仅与时间间隔 τ 有关，故 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ 为平稳过程。

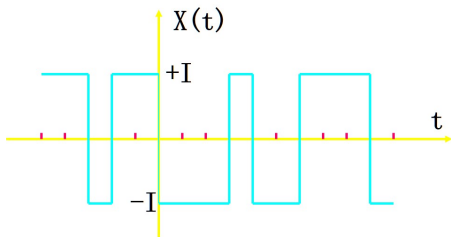
例：（随机电报信号）设信号流 $X = \{X(t), t \geq 0\}$ 为一随机过程，且对每个 t 有

$$P(X(t) = I) = P(X(t) = -I) = \frac{1}{2},$$

而在 $[t, t + \tau]$ 时间内正负号变化的次数 N 服从速率为 λ 的 Poisson 过程，即

$$P(N(\tau) = k) = e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^k / k!, \quad \lambda > 0,$$

试讨论信号流的平稳性。



解 显然, $EX(t) = 0, t \geq 0$ 。为计算协方差函数, 设 $\tau \geq 0$ 。注意到 $X(t+\tau)$ 与 $X(t)$ 的乘积只能取 I^2 和 $-I^2$ 两个值, 故

$$\begin{aligned} EX(t+\tau)X(t) &= I^2 \cdot P(\text{信号在 } [t, t+\tau] \text{ 内变号偶数次}) \\ &\quad - I^2 \cdot P(\text{信号在 } [t, t+\tau] \text{ 内变号奇数次}) \end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned} &P(\text{信号在 } [t, t+\tau] \text{ 内变号偶数次}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t+\tau) - N(t) = 2k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^{2k} / (2k)! = e^{-\lambda\tau} \cosh(\lambda\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(\text{信号在 } [t, t+\tau] \text{ 内变号奇数次}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t+\tau) - N(t) = 2k+1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^{2k+1} / (2k+1)! = e^{-\lambda\tau} \sinh(\lambda\tau) \end{aligned}$$

所以

$$EX(t+\tau)X(t) = I^2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda\tau} (-\lambda\tau)^k / k! = I^2 e^{-2\lambda\tau},$$

当 $\tau < 0$ 时, 考虑 $[t+\tau, t]$ 内信号变化次数, 同样可得

$$EX(t+\tau)X(t) = I^2 e^{-2\lambda|\tau|}$$

即协方差函数只与时间间隔 τ 有关, 因此随机电报信号流是平稳过程。

还可以考虑复平稳过程。其定义类似，差别一是把 $X(t)$ 改为复值，二是把协方差函数定义为

$$E(X(t) - m) \cdot \overline{(X(s) - m)}$$

这儿 \overline{X} 表示 X 的共轭。

Example

(周期振动) 设 $X(t) = X \cdot f(t)$ ，其中 X 为实随机变量，满足 $EX = 0$, $EX^2 = \sigma^2$, $f(t)$ 为一个非随机的复值函数。考虑复值过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 。试证明 $\{X(t)\}$ 为平稳过程的充分必要条件是 $f(t) = Ce^{j(\lambda t + \theta)}$ ，其中 $j = \sqrt{-1}$, C, λ, θ 为常数。

证 由 $EX = 0$ 知 $EX(t) = 0, -\infty < t < \infty$ 。如果 $f(t) = Ce^{j(\lambda t + \theta)}$, 则

$$\begin{aligned} EX(t + \tau)\overline{X(t)} &= EX^2 C^2 e^{j(\lambda(t+\tau)+\theta)} e^{-j(\lambda t + \theta)} \\ &= \sigma^2 C^2 e^{j\lambda\tau} \end{aligned}$$

故 Y 为平稳过程。反之, 设 $X(t)$ 是一个平稳过程, 则

$$R(\tau) = EX(t + \tau)\overline{X(t)} = EX^2 f(t + \tau)\overline{f(t)} = \sigma^2 f(t + \tau)\overline{f(t)},$$

即 $f(t + \tau)\overline{f(t)}$ 与 t 无关。

取 $\tau = 0$, 我们有

$$|f(t)|^2 = C^2 = R(0).$$

故 $f(t) = Ce^{j\psi(t)}$, 这儿 $\psi(t)$ 为一实数, 由此

$$f(t+\tau)\overline{f(t)} = C^2 e^{j(\psi(t+\tau)-\psi(t))}$$

与 t 无关, 因此

$$\frac{d(\psi(t+\tau) - \psi(t))}{dt} = 0$$

即 $\frac{d\psi(t+\tau)}{dt} = \frac{d\psi(t)}{dt}$ 对一切 t 均成立。因而 $\psi'(t)$ 为一常数, 记为 λ 。则 $\psi(t) = \lambda t + \theta$, 因而有

$$f(t) = Ce^{j(\lambda t + \theta)}.$$

时间序列一般只有一条轨道。要用时间序列 $\{X_t\}$ 的一次实现 x_1, x_2, \dots 推断 $\{X_t(\omega), t \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega\}$ 的统计性质. 这样我们必须对时间序列要提出要求, **遍历性**就是可以保证从一条轨道可以推断整体的统计性质的一种要求。

如果**严平稳序列是遍历的**, 从它的一次实现 x_1, x_2, \dots 就可以推断出这个严平稳序列的**所有有限维分布**:

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ = & P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_m \leq x_m), \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

有遍历性的严平稳序列被称作**严平稳遍历序列**.

在应用工作中一下定理非常有用，但它的证明超出了本课关心的范围。

- **遍历性定理**: 如果 $\{X_t\}$ 是严平稳遍历序列, 则有如下的结果:

1. **强大数律**: 如果 $E|X_1| < \infty$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t = EX_1, a.s..$$

2. 对任多元函数 $\phi(x_1, x_2, \dots, x_m)$,

$$\{Y_t = \phi(X_{t+1}, \dots, X_{t+m}), t \in \mathbb{Z}\},$$

仍是**严平稳遍历**时间序列.

严平稳遍历性例子

例子1: 对严平稳遍历时间序列 $\{X_t\}$, 定义

$$Y_t = I[X(t+t_1) \leq y_1, X(t+t_2) \leq y_2, \dots, X(t+t_m) \leq y_m], \\ t \in \mathbb{Z}.$$

这里 $I[A]$ 是事件 A 的示性函数. 如果 $\{X_t\}$ 是遍历的, 由遍历性定理的第2条知道 $\{Y_t\}$ 也是遍历的, 并且有界. 利用遍历性定理的第1条(强大数律)得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_t = EY_0 \\ = P(X(t_1) \leq y_1, X(t_2) \leq y_2, \dots, X(t_m) \leq y_m), \text{ a.s..}$$

这个例子说明, 在几乎必然的意义下, $\{X_t\}$ 的每一次观测都可以决定 $\{X_t\}$ 的有限维分布.

严平稳遍历性例子2

例子2: 对严平稳遍历时间序列 $\{X_t\}$, 则 $\{X_t X_{t+k}, t \geq 1\}$ 也是严平稳遍历的序列。当 $EX_t^2 < \infty$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t X_{t+k} = EX_1 X_{k+1}, a.s..$$

平稳过程的遍历性定理

对平稳过程加上什么条件后，对时间的平均值可以等于过程的均值？这一问题称为平稳过程的遍历性（Ergodic）问题。这是平稳过程研究中的一个重要课题，其重要性可以从如下粗略的分析中看出。

对平稳过程 X ，重要的是确定它的均值 m 以及协方差函数 $R(\tau)$ ，由于 $EX(t) = m$ ，为估计 m ，我们必须对随机过程 X 作大量观察，以 $X_i(t)$ 记第 i 次观察中时刻 t 的值， $i = 1, 2, \dots, n$ ，则大数律告诉我们可以用

$$\hat{m}_n = \frac{1}{n}(X_1(t) + \dots + X_n(t))$$

来估计。同样，为了估计协方差函数也可以用

$$\hat{R}_n(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k(t+\tau) - \hat{m}_n)(X_k(t) - \hat{m}_n)$$

来估计。

但对随机过程作多次观察一般来说很难做到。比较容易的是作了一次观察，获得一条样本路径

平稳过程的遍历性定理

但对于平稳过程，只要加上一些很一般的条件，比如观察的时间足够长，就可以从一次观察中获得 m 和 $R(\tau)$ 的较好的估计。这就是有名的遍历性定理。为导出这一定理，我们需要如下的定义。这儿的极限是均方极限

定义： 设 $X = \{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 为一平稳序列，若

$$\bar{X} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N X(k) \stackrel{L_2}{=} m \quad (2)$$

则称 X 的均值有遍历性。如果

$$\hat{R}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=1}^n (X(k+\tau) - \hat{m}_n)(X(k) - \hat{m}_n) \stackrel{L_2}{=} R(\tau) \quad (3)$$

则称 X 的协方差函数有遍历性。

平稳过程的遍历性定理

遍历性又称各态历经性。直观上可以这样理解：

考虑只有有限个状态的平稳序列 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ ，其状态 $E = \{e_1, \dots, e_b\}$ 。则 $m = EX_n$ 是各个状态的加权平均。若令

$$A_N = \{X_n : -N \leq n \leq N\},$$

则遍历性告诉我们，对几乎每个样本，当 N 很大时， A_N 中的元素历经 E 中各个状态，而且当 $N \rightarrow \infty$ 时， A_N 中的元素为状态 e_i 的频率趋于 p_i ，从而对 A_N 中元素的平均

$$\bar{X}_N = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N X_n$$

趋于过程均值

$$m = \sum_{i=1}^b p_i e_i.$$

平稳过程的遍历性定理

平稳过程均值的遍历性问题。

均值遍历性定理:

设 $X = \{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ 为平稳序列, 其协方差函数为 $R(\tau)$, 则 X 有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = 0$$

推论: 对平稳序列而言, 若 $R(\tau) \rightarrow 0 (\tau \rightarrow \infty)$, 则均值遍历性成立。

平稳过程的遍历性定理

$$\begin{aligned} E(\bar{X}_N - \mu)^2 &= E\left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (X_k - \mu)\right]^2 \\ &= \frac{1}{N^2} E\left[\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N (X_k - \mu)(X_j - \mu)\right] = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \gamma_{k-j} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{m=1-j}^{N-j} \gamma_m \quad (\text{令 } m = k - j) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=-N+1}^{N-1} \sum_{j=\max(1-m, 1)}^{\min(N-m, N)} \gamma_m = \frac{1}{N^2} \sum_{m=-N+1}^{N-1} (N - |m|) \gamma_m \\ &\leq \frac{2}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} (N - m) \gamma_m \end{aligned}$$

平稳过程的遍历性定理

改写一下求和式

$$\sum_{m=0}^{N-1} (N-m)\gamma_m = S_0 + S_1 + \cdots + S_{N-1}$$

其中

$$S_j = \sum_{k=0}^j \gamma_k.$$

于是

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} (N-m)\gamma_m \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} S_m \stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2S_{N-1}}{2N-1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

即 \bar{X}_N 均方收敛到 μ .

先考虑平稳过程均值的遍历性问题。

Theorem (均值遍历性定理)

(i) 设 $X = \{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ 为平稳序列, 其协方差函数为 $R(\tau)$, 则 X 有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) = 0$$

(ii) 若 $X = \{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 为平稳过程, 则 X 有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) R(\tau) d\tau = 0.$$

证 由于离散场合和连续时间场合证明思路相同, 首先计算 \bar{X} 的均值和方差。记

$$\bar{X}_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt,$$

则

$$E\bar{X}_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T EX(t) dt = m,$$

下面计算 \bar{X}_T 的方差, 如图 4.1,

线性变换把线段还是变为线段的，于是我们就考虑四个点的变换

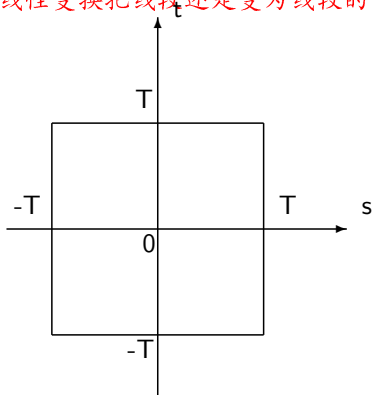


图 4.1

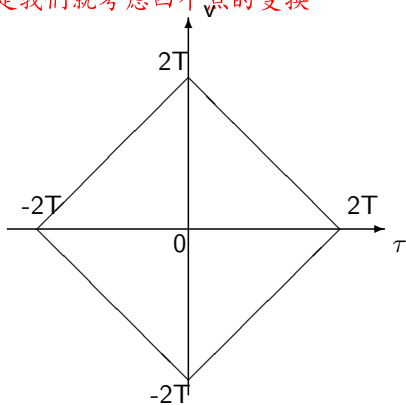


图 4.2

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\bar{X}_T) &= E\left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)dt\right]^2 - \frac{1}{4T^2} E\left[\int_{-T}^T EX(t)dt\right]^2 \\
&= \frac{1}{4T^2} \int \int_{-T}^T E[(X(t) - m)(X(s) - m)] dt ds \\
&= \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T R(t-s) dt ds. \tag{4}
\end{aligned}$$

作积分变换 $\begin{cases} \tau = t - s \\ \nu = t + s \end{cases}$ ，则变换的Jacobi行列式为：

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial \tau} & \frac{\partial t}{\partial \nu} \\ \frac{\partial s}{\partial \tau} & \frac{\partial s}{\partial \nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

积分区域变换为 $D = \{-2T \leq \tau \pm \nu \leq 2T\}$ (如图 4.2)

注意到 $R(\tau)$ 是偶函数, 故 (4.12) 等于

$$\begin{aligned}& \frac{1}{4T^2} \cdot \frac{1}{2} \int \int_D R(\tau) d\tau dv \\&= \frac{1}{4T^2} \int_{-2T}^{2T} \int_{-2T-|\tau|}^{2T+|\tau|} R(\tau) \frac{1}{2} d\tau dv \\&= \frac{1}{4T^2} \int_{-2T}^{2T} R(\tau) (2T - |\tau|) d\tau \\&= \frac{1}{2T^2} \int_0^{2T} R(\tau) (2T - \tau) d\tau \\&= \frac{1}{T} \int_0^{2T} R(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) d\tau,\end{aligned}$$

- 若 $\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty$, 则均值遍历性成立。

这是由于当 $0 \leq \tau \leq 2T$ 时, $|(1 - \frac{\tau}{2T})R(\tau)| \leq |R(\tau)|$,

$$\frac{1}{T} \left| \int_0^{2T} (1 - \tau/2T) R(\tau) d\tau \right| \leq \frac{1}{T} \int_0^{2T} |R(\tau)| d\tau \leq \frac{1}{T} \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau \rightarrow 0$$

- 对平稳序列而言, 若 $R(\tau) \rightarrow 0 (\tau \rightarrow \infty)$, 则均值遍历性成立。

协方差遍历性

关于协方差函数 $R(\tau)$ 的遍历性定理, 我们可以考虑随机过程

$$Y_\tau = \{Y_\tau(t), -\infty < t < \infty\},$$

其中 $Y_\tau(t) = (X(t+\tau) - m)(X(t) - m)$, 则 $EY_\tau(t) = R(\tau)$. 由定理 4.1 的证明过程知道, 均值有遍历性等价于 $\text{Var}(\overline{X}_T) \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$. 因此可以类推协方差函数 $R(\tau)$ 有遍历性等价于

$$\text{Var}(\overline{Y}_\tau^T(t)) \rightarrow 0, T \rightarrow \infty$$

其中

$$\overline{Y}_\tau^T(t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Y_\tau(t) dt,$$

把 $\text{Var}(\overline{Y}_\tau^T(t))$ 写开, 便得到协方差遍历性定理.

Theorem

(协方差函数遍历性定理) 设 $X = \{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 为平稳过程, $Y_T = \{Y_T(t), -\infty < t < \infty\}$ 其中 Y_T 由上面所定义, 则对给定的 τ , X 的协方差函数 $R(\tau)$ 有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau_1}{2T}\right) (B(\tau_1) - R^2(\tau)) d\tau_1 = 0,$$

其中

$$B(\tau_1) = EX(t + \tau + \tau_1)X(t + \tau_1)X(t + \tau)X(t).$$

关于协方差函数的遍历性，由于牵涉到过程的四阶矩，一般很难验证。但对于 Gauss 过程来说，问题要简单得多，比如我们有如下的结果。

Theorem

设 $X = \{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ 是均值为 0 的 Gauss 平稳过程，如果

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R^2(k) = 0$$

则 Gauss 过程的协方差函数有遍历性。

遍历性例子

例 设 $X(t) = a \cos(\omega t + \Theta)$, $\Theta \sim U(0, 2\pi)$, $\omega \neq 0$, 则

$$X = \{X(t), -\infty < t < \infty\}$$

的均值有遍历性。

证 首先

$$EX(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a \cos(\omega t + \theta) d\theta = 0,$$

其协方差函数为

$$\begin{aligned} EX(t+\tau)X(t) &= Ea^2 \cos(\omega(t+\tau) + \Theta) \cos(\omega t + \Theta) \\ &= \frac{a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos((t+\tau)\omega + \theta) \cos(t\omega + \theta) d\theta \\ &= \frac{a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} [\cos((2t+\tau)\omega + 2\theta) + \cos \tau\omega] d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \cos \tau\omega, \end{aligned}$$

故 X 为平稳的。

由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \int_0^{2T} (1 - \tau/2T) R(\tau) d\tau &= \frac{a^2}{2T} \int_0^{2T} (1 - \tau/2T) \cos \omega \tau d\tau \\ &= \frac{a^2}{2T} \cdot \frac{\sin(2T\omega)}{\omega} - \frac{a^2}{4T^2} \int_0^{2T} \tau \cos \omega \tau d\tau,\end{aligned}\quad (5)$$

由分部积分知

$$\left| \int_0^{2T} \tau \cos \omega \tau d\tau \right| = \left| \frac{1}{\omega} [2T \sin(2T\omega) - \frac{1}{\omega} (1 - \cos(2T\omega))] \right| \leq \frac{2T}{\omega},$$

把此结果代入 (4.13) 式, 即知

$$\frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) R(\tau) d\tau \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty).$$

故由定理 4.1 知遍历性成立

时间平均性

$$\begin{aligned}\langle X(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a \cos(\omega t + \Theta) dt \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a}{2T} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \Theta) \Big|_{-T}^T \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a}{2T\omega} (\sin(\omega T + \Theta) - \sin(-\omega T + \Theta)) \\&\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a}{\omega T} = 0\end{aligned}$$

协方差遍历性

$$\begin{aligned}\langle \overline{X(t)} X(t + \tau) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \overline{X(t)} X(t + \tau) dt \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{2T} \int_{-T}^T \cos(\omega t + \Theta) \cos(\omega(t + \tau) + \Theta) dt \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{2T} \cdot \frac{1}{2} \int_{-T}^T (\cos(2\omega t + \omega\tau + 2\Theta) + \cos \omega\tau) dt \\&= \frac{a^2}{2} \cos \omega\tau\end{aligned}$$

Example

设随机变量序列 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ 满足

$$X_n = \sum_{k=0}^m (A_k \cos n\omega_k + B_k \sin n\omega_k),$$

其中 $A_1, \dots, A_m; B_1, \dots, B_m$ 是均值为 0 且两两不相关的随机变量, 又 $EA_k^2 = EB_k^2 = \sigma_k^2, 1 \leq k \leq m, 0 < \omega_k < 2\pi$, 试考察其均值的遍历性。

解 与例 4.6 类似, 可以算得

$$EX_n = 0, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

$$R(\tau) = \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 \cos \tau \omega_k,$$

由三角求和公式 $\frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n+1/2)x}{2 \sin(x/2)}$, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \left| \sum_{\tau=0}^{N-1} R(\tau) \right| &= \frac{1}{N} \left| \sum_{\tau=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 \cos \tau \omega_k \right| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 \left| \sum_{\tau=0}^{N-1} \cos \tau \omega_k \right| = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 \left| \frac{\sin(N-1/2)\omega_k}{2 \sin(\omega_k/2)} + \frac{1}{2} \right| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^m \sigma_k^2 \frac{1}{\sin(\omega_k/2)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

故平稳序列 X 的均值有遍历性。

Example

研究例 4.8 中的随机电报信号的均值有否遍历性。

解 由例 4.8 知 $R(\tau) = I^2 e^{-2\lambda|\tau|}$ ，其中 $\lambda > 0$ ，由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau = 2I^2 \int_0^{\infty} e^{-2\lambda\tau} d\tau = \frac{I^2}{\lambda} < \infty,$$

由定理 4.1 的推论立得随机电报信号的均值有遍历性。

三角函数公式

和差化积

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

积化和差

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$