《随机过程 B》第2 次习题课

2024 年 4 月 19 日

习题 2

题目 1： $N(t)$ 为一 Poisson 过程，对 $s<t$ 试求条件概率 $P(N(s)=k|N(t)=n)$

解答: 对于 $k=0,1,\ldots,n,n=0,1,\ldots,0\leq s<t$

$$\begin{aligned}
P(N(s)=k|N(t)=n) &= \frac{P(N(s)=k),P(N(t)=n)}{P(N(t)=n)} \\
&= \frac{P(N(s)=k,P(N(t)-N(s)=n-k)}{P(N(t)=n)} \\
&= \frac{P(N(s)=k)P(N(t)-N(s)=n-k)}{P(N(t)=n)} \\
&= \frac{\frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!}\frac{(\lambda(t-s))^{n-k}e^{-\lambda(t-s)}}{(n-k)!}}{\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}} \\
&= \binom{n}{k}(\frac{s}{t})^k(\frac{t-s}{t})^{n-k}
\end{aligned}$$

注 1: 第一个等号是条件概率的定义，第三个等号是泊松过程的独立增量性质，第四个等号带入泊松过程的公式的时候用到了泊松过程的齐次性

注 2: 该结果说明 $N(s)|N(t)=n$ 服从二项分布 $B(k;n,\frac{s}{t})(0\leq s<t)$, 参数与 λ 无关

注 3: 根据独立增量性，不相交区间中事件发生的数目相互独立，我们知道 $t>s,n>k$ 的时候

$$P(N(t)=n|N(s)=k)=P(N(t)-N(s)=n-k|N(s)=k)=P(N(t-s)=n-k)$$

但并不能根据“理解上的含义（给定 t 时间长度内事件发生了 n 次的条件下 s 时间长度内事件发生了 k 次意味着 t-s 的长度内事件发生了 n-k 次）”进行转化，即

$$P(N(s)=k|N(t)=n)\neq P(N(t)-N(s)=n-k)$$

题目 2: $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一强度为 λ 的 Poisson 过程，对 $s > 0$ 试计算 $E[N(t)N(t+s)]$
解答:

$$\begin{aligned}
E[N(t)N(t+s)] &= E[N(t)(N(t+s) - N(t) + N(t))] \\
&= E[N(t)(N(t+s) - N(t))] + E[(N(t))^2] \\
&= E[N(t)]E[N(s)] + Var(N(t)) + (E[N(t)])^2 \\
&= \lambda^2 ts + \lambda t + (\lambda t)^2 \\
&= \lambda t(\lambda s + \lambda t + 1)
\end{aligned}$$

注 1: 第一个等号加一项减一项是为了凑出来独立的时间区间，第二个等号是期望的线性性质，第三个等号是独立增量性和方差的定义
题目 4: $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一强度为 $\lambda = 2$ 的 Poisson 过程，求

1. $P(N(1) \leq 2)$
2. $P(N(1) = 1, N(2) = 3)$
3. $P(N(1) \geq 2 | N(1) \geq 1)$

解答: $\lambda = 2$

1.

$$\begin{aligned}
P(N(1) \leq 2) &= P(N(1) = 0) + P(N(1) = 1) + P(N(1) = 2) \\
&= \frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!} \\
&= 5e^{-2} \approx 0.6767
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
P(N(1) = 1, N(2) = 3) &= P(N(1) = 1, N(2) - N(1) = 2) \\
&= P(N(1) = 1)P(N(2-1) = 2) \\
&= \frac{2^1 e^{-2}}{1!} \frac{2^2 e^{-2}}{2!} \\
&= 4e^{-4} \approx 0.0733
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
P(N(1) \geq 2 | N(1) \geq 1) &= 1 - P(N(1) = 1 | N(1) \geq 1) \\
&= 1 - \frac{P(N(1) = 1)}{1 - P(N(1) = 0)} \\
&= 1 - \frac{\frac{2^1 e^{-2}}{1!}}{1 - \frac{2^0 e^{-2}}{0!}} \\
&= \frac{1 - 3e^{-2}}{1 - e^{-2}} \approx 0.6870
\end{aligned}$$

当 $P_m(0)=0$ 时

假设 $P_m(t)=\frac{\lambda^m t^m}{m!}e^{-\lambda t}$ 对 $m\le M$

$$P_m'(t)+\lambda P_m(t)=\lambda P_{m-1}(t)=\frac{\lambda^m t^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow P_m(t)=C(t)\cdot e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow C'(t)e^{-\lambda t}=\frac{\lambda^m t^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow C(t)=\frac{\lambda^m t^m}{m!}+c\ ,\ P_m(0)=0\quad c=0$$

$$\therefore P_m(t)=\frac{\lambda^m t^m}{m!}e^{-\lambda t}\ ,\ m=1,2,\cdots$$

题目 6: 一部 600 页的著作总共有 240 个印刷错误，试利用 Poisson 过程近似求出连续 3 页无错误的概率

解答: 假设印刷错误的出现服从泊松过程，即 $N(t)\sim Poi(\lambda t)$, 对于 $m=0,1,\ldots,597$

$$\begin{aligned}P(N(m+3)-N(m)=0|N(600)=240)&=P(N(3)=0|N(600)=240)\\&=\binom{240}{0}(\frac{3}{600})^0(1-\frac{3}{600})^{240}\\&=(\frac{597}{600})^{240}\approx 0.3003\end{aligned}$$

注 1: 第一个等号利用了平稳增量性, 第二个等号用了作业题 2.1 的结论 $N(s)|N(t)=n\sim B(n,\frac{s}{t}), s<t$

注 2: 注意到泊松分布为二项分布的近似，即

$$lim_{n\to\infty,np_n\to\lambda}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

则

$$P(N(m+3)-N(m)=0|N(600)=240)\approx\frac{(240\times\frac{3}{600})^0}{0!}e^{-240\times\frac{3}{600}}=e^{-\frac{6}{5}}$$

另一种理解是用 $\mu\approx\frac{240}{600}$ 表示单位间隔的错误发生频率，则 $\tilde{N}(t)\sim Poi(\mu t)$ 计算泊松分布 $P(\tilde{N}(3)=0)=e^{-3\mu}=e^{-\frac{6}{5}}\approx 0.3012$

题目 7： $N(t)$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程，给定 $N(t)=n$，试求第 r 个事件 $r\leq n$ 发生的时刻 W_r 的条件概率密度 $f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)$

解答:

具体来说，本题有两种求解方式：第一种是先求概率分布函数 $\rightarrow$ 求导得到密度函数，第二种是直接利用充分小增量的概念求概率密度函数

第一种方法是 $P(W_r\leq s|N(t)=n)\leftrightarrow P(N(s)\geq r|N(t)=n), s<t$

$$\begin{aligned}
F_{W_r|N(t)=n}(s) &= P(W_r\leq s|N(t)=n)\\
&= P(N(s)\geq r|N(t)=n)\\
&= \sum_{k=r}^{n} P(N(s)=k|N(t)=n)\\
&= \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k}(\frac{s}{t})^k(1-\frac{s}{t})^{n-k}
\end{aligned}$$

注 1: 上述第四个等号用到了第二章作业第一题的结论

老师命题2.2

密度函数就对上述求和式求导之后裂项相消即可

$$\begin{aligned}
f_{W_r|N(t)=n}(s) &= \frac{dF_{W_r|N(t)=n}(s)}{ds}\\
&= \sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{t}(\frac{s}{t})^{k-1}(1-\frac{s}{t})^{n-k} - \sum_{k=r}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{n-k}{t}(\frac{s}{t})^k(1-\frac{s}{t})^{n-k-1}\\
&= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}(\frac{s}{t})^{r-1}(1-\frac{s}{t})^{n-r}\frac{1}{t}
\end{aligned}$$

吃计算

第二种方法是 $f_{W_r|N(t)=n}(s) = \frac{F_{W_r|N(t)=n}(s)(s+\delta s)-F_{W_r|N(t)=n}(s)}{ds}$

$$\begin{aligned}
f_{W_r|N(t)=n}(s) &= \lim_{\delta s\to 0}\frac{F_{W_r|N(t)=n}(s+\delta s)-F_{W_r|N(t)=n}(s)}{\delta s}\\
&= \lim_{\delta s\to 0}\frac{P(N(s)=r-1, N(s+\delta s)-N(s)=1|N(t)=n)}{\delta s}\\
&= \lim_{\delta s\to 0}\frac{1}{\delta s}\frac{P(N(s)=r-1, N(s+\delta s)-N(s)=1, N(t)-N(s+\delta s)=n-r)}{P(N(t)=n)}\\
&= \lim_{\delta s\to 0}\frac{1}{\delta s}\frac{\frac{(\lambda s)^{r-1}e^{-\lambda s}}{(r-1)!}(\lambda\delta s+o(\delta s))\frac{(\lambda(t-s-\delta s))^{n-r}e^{-\lambda(t-s-\delta s)}}{(n-r)!}}{\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}}\\
&= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}(\frac{s}{t})^{r-1}(1-\frac{s}{t})^{n-r}\frac{1}{t}
\end{aligned}$$

吃理解

注 2:根据上述解法，我们可以得到恒等式

$$\sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} = m\binom{n}{m}\int_0^p u^{m-1}(1-u)^{n-m}$$

注 3:

- 泊松过程第 r 个事件的到达时刻 W_r 服从 Γ 分布;
- 给定前 [0, t] 时间段内总共发生 n 次事件的条件下, $W_r|N(t)=n$ 与 [0, t] 上的均匀分布的第 r 个次序统计量同分布;

$$f_{W_r|N(t)=n}(w_r|n)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}(\frac{w_r}{t})^{r-1}(1-\frac{w_r}{t})^{n-r}\frac{1}{t}$$

题目 8: 令 $\{N_i(t),t\geq 0\}$ 为 n 个独立的强度参数分别为 λ_i 的 n 个 Poisson 过程, $i=1,\ldots,n$。记 T 为全部 n 个过程中至少发生了一件事的时刻，试求 T 的分布，并求该事件恰好来自第一个过程的概率

:答解

记 $N_i(t)$ 的第一个事件到来的时刻为 S_i, 则 $S_i\sim Exp(\lambda_i)$ 下面验证 $T=min\{S_1,\ldots,S_n\}\sim Exp(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)$

$$\begin{aligned}P(min\{S_1,\ldots,S_n\}\leq t)&=1-P(min\{S_1,\ldots,S_n\}>t)\\&=1-\prod_{i=1}^{n}P(S_i>t)\\&=1-e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t}\end{aligned}$$

注 1: 可以先证明指数分布的一个性质：假设 $X_1\sim Exp(\lambda_1)$, $X_2\sim Exp(\lambda_2)$

$$\begin{aligned}P(X_1<X_2)&=\int_0^{\infty}P(X_1<X_2|X_1=x)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx\\&=\int_0^{infty}e^{-\lambda_2 x}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx\\&=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\end{aligned}$$

因此如果我们令 $\tilde{T}=\min\{S_2,\ldots,S_n\}$, 根据上述证明知: $\tilde{T}\sim Exp(\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$

$$\begin{aligned}P(T=S_1)&=P(S_1\leq\min\{S_2,\ldots,S_n\})\\&=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}\end{aligned}$$

注 2: $N_1(t)\sim Poi(\lambda_1)$, $N_2(t)\sim Poi(\lambda_2)$，独立的随机过程，则 $N_1(t)+N_2(t)\sim Poi(\lambda_1+\lambda_2)$，该联合过程首个事件来自于 $N_1(t)$ 的概率为 $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$，它独立于该事件发生的时刻

9. 考虑参数为 λ 的 Poisson 过程 $\{N(t):t\geq 0\}$, 若每一事件独立地以概率 p 被观察到, 并将观察到的过程记为 $\{N_1(t):t\geq 0\}$. 试问 $\{N_1(t):t\geq 0\}$ 是什么过程? $\{N(t)-N_1(t):t\geq 0\}$ 呢? $\{N_1(t):t\geq 0\}$ 与 $\{N(t)-N_1(t):t\geq 0\}$ 是否独立?

解 由题设易知 定义2.1

$N_1(t)$ 为 $N(t)$ 的子抽样过程.

(i) $N_1(0)=0$;

(ii) $\{N_1(t):t\geq 0\}$ 是一独立增量过程.

往证

(iii) 对 $0\leq s<t$, $N_1(t)-N_1(s)$ 服从参数为 $\lambda p(t-s)$ 的 Poisso 分布. 从而, 由 (i)–(iii) 可知, $\{N_1(t):t\geq 0\}$ 是一参数为 λp 的 Poisso 过程. 其实, 对 $0\leq s<t$, 有

$$P(N_1(t)-N_1(s)=m\mid N(t)-N(s)=n)=\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m},$$
$$m=0,1,\cdots,n,n=0,1,2,\cdots. \quad (1)$$

而由 $\{N(t):t\geq 0\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程可知, 对 $0\leq s<t$, 有

$$P(N(t)-N(s)=n)=\frac{[\lambda(t-s)]^n}{n!}e^{-\lambda(t-s)},\quad n=0,1,2,\cdots. \quad (2)$$

故由 (1) 和 (2) 可得

$$\begin{aligned}
&P(N_1(t)-N_1(s)=m)\\
=&\sum_{n=m}^{\infty}P(N_1(t)-N_1(s)=m\mid N(t)-N(s)=n)P(N(t)-N(s)=n)\\
=&\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}\cdot\frac{[\lambda(t-s)]^n}{n!}e^{-\lambda(t-s)}\\
=&\frac{p^m}{m!}e^{-\lambda(t-s)}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(1-p)^{n-m}[\lambda(t-s)]^n}{(n-m)!}\\
=&\frac{[\lambda p(t-s)]^m}{m!}e^{-\lambda p(t-s)},\quad m=0,1,\cdots,
\end{aligned}$$

这即说明了, 对 $0\leq s<t$, $N_1(t)-N_1(s)$ 服从参数为 $\lambda p(t-s)$ 的 Poisso 分布.

注意到若 n 个随机事件 $A_1,\cdots,A_n$ 独立, 则 n 个随机事件 $\bar{A}_1,\cdots,\bar{A}_n$ 也独立, 其中 $\bar{A}_i$ 等于 A_i 或等于 A_i 的对立事件, $i=1,\cdots,n$, 因而, $\{N_1(t):t\geq 0\}$ 与 $\{N(t)-N_1(t):t\geq 0\}$ 独立. 由 $N_1(t)$ 和 $N(t)-N_1(t)$ 的对称性可知, $\{N(t)-N_1(t):t\geq 0\}$ 是一参数为 $\lambda(1-p)$ 的 Poisso 过程.■

11. 冲击模型 (Shock Model) 记 $N(t)$ 为某系统到时刻 t 受到的冲击次数, 这是参数为 λ 的 Poisson 过程. 设第 k 次冲击对系统的损害大小 Y_k 服从参数为 μ 的指数分布,$Y_k, k=1,2,\cdots$ 独立同分布. 记 $X(t)$ 为系统所受到的总损害, 当损害超过一定的极限 α 时, 系统就不能运行, 寿命终止. 记 T 为系统寿命. 试求该系统的平均寿命 $E(T)$, 并对所得结果作出直观解释.

解 注意到

$$\{T>t\}=\{X(t)\le\alpha\},\quad t>0,$$

因而

$$\begin{aligned}
P(T>t)=P(X(t)\le\alpha)&=P(\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k\le\alpha)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}P(\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k\le\alpha, N(t)=n)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}P(\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k\le\alpha\mid N(t)=n)P(N(t)=n)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}P(\sum_{k=1}^{n}Y_k\le\alpha\mid N(t)=n)P(N(t)=n)
\end{aligned}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}P(\sum_{k=1}^{n}Y_k\le\alpha)P(N(t)=n),\quad t>0. \tag{1}$$

而由于 $Y_k, k=1,2,\cdots$ 独立同分布, Y_1 服从参数为 μ 的指数分布, 因此,$S_n\triangleq\sum_{k=1}^{n}Y_k$ 具有密度函数

$$f_{S_n}(s)=\frac{\mu^n}{(n-1)!}s^{n-1}e^{-\mu s},\quad s>0, n=1,2,\cdots,$$

故

$$P(\sum_{k=1}^{n}Y_k\le\alpha)=\frac{\mu^n}{(n-1)!}\int_0^\alpha s^{n-1}e^{-\mu s}ds,\quad n=1,2,\cdots. \tag{2}$$

又

$$P(N(t)=n)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{3}$$

将 (2) 和 (3) 代入 (1) 中得

$$P(T>t)=e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda\mu t)^n}{n!(n-1)!}\int_0^\alpha s^{n-1}e^{-\mu s}ds,\quad t>0.$$

分部积分证明.

故

Γ分布, Γ积分

$$\begin{aligned}
E(T)&=\int_0^{+\infty}P(T>t)dt\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu\lambda)^n}{n!(n-1)!}\int_0^{+\infty}t^ne^{-\lambda t}dt\cdot\int_0^\alpha s^{n-1}e^{-\mu s}ds\\
&=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^n}{(n-1)!}\int_0^\alpha s^{n-1}e^{-\mu s}ds\\
&=\frac{1}{\lambda}\int_0^\alpha e^{-\mu s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^n}{(n-1)!}s^{n-1}ds\\
&=\frac{\mu}{\lambda}\int_0^\alpha ds=\frac{\mu\alpha}{\lambda}.
\end{aligned}$$

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

泰勒级数展开.

求和从n=0开始,故正确答案为1+μα/λ

这说明了, 若 λ 越大 (即系统所受冲击越频繁),μ 越小 (即每次冲击所造成的平均损害越大), α 越小 (即系统所能承受的损害极限越小), 则系统的平均寿命越短. 这是符合常识的.■