hw12

ch4 T16. X_0 r.v. 有 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$ X_{n+1} 在给定 $X_0, X_1, \dots X_n$ 下为 $(1-X_n, 1)$ 上均匀分布. 证 $\{X_n, n=0,1,\dots\}$ 均值有遍历性

证明: 均匀分布 $\sim U(a,b)$ $EX=\frac{a+b}{2}$, $\mathrm{Var}X=EX^2-(EX)^2$, $EX^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+ab)$ (*)

$EX_0=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx=\frac{2}{3}$, $EX_{n+1}=E[E[X_{n+1}\mid X_0,\dots X_n]]\overset{(*)}{=}E[1-\frac{X_n}{2}]=1-\frac{1}{2}EX_n$ (☆) $n\ge 0$

递推可得 $EX_n\equiv\frac{2}{3}$, $\forall n\ge 0$.

$EX_0^2=\int_0^1 x^2\cdot 2x\,dx=\frac{1}{2}$, $EX_{n+1}^2\overset{(*)}{=}E[1+(1-X_n)^2+(1-X_n)]=1-EX_n+\frac{1}{3}EX_n^2$, 递推有 $EX_n^2\equiv\frac{1}{2}$.

$EX_nX_{n+m}=E[E[X_nX_{n+m}\mid X_n]]=E[X_nE(X_{n+m}\mid X_n)]\overset{(☆)}{=}E[X_n(1-\frac{1}{2}E(X_{n+m-1}\mid X_n))]=EX_n-\frac{1}{2}E[X_nE(X_{n+m-1}\mid X_n)]$

$=\frac{2}{3}-E[E[X_nX_{n+m-1}\mid X_n]]=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}E[X_nX_{n+m-1}]$

$\Rightarrow E(X_nX_{n+m})-\frac{4}{9}=-\frac{1}{2}[E(X_nX_{n+m-1})-\frac{4}{9}]=(-\frac{1}{2})^m(EX_n^2-\frac{4}{9})=\frac{1}{18}(-\frac{1}{2})^m$.

$\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+m})$

$\therefore \mathrm{Cov}(X_n, X_{n+m})=\frac{1}{18}(-\frac{1}{2})^m$ 只与 m 有关, $\mathrm{Var}(X_n)=\frac{1}{18}<+\infty$, $EX_n\equiv\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ 宽平稳.

又由 $R(m)=\frac{1}{18}(-\frac{1}{2})^m\to 0$ as $m\to+\infty$ 由 Corollary 4.2 有均值遍历性成立

ch4 T17 $\{\varepsilon_n, n=0,\pm1\dots\}$ 白噪声. 令 $X_n=\alpha X_{n-1}+\varepsilon_n$, $|\alpha|<1$. $n=\dots,-1,0,1,\dots$ $X_n=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\varepsilon_{n-k}$. $\Rightarrow\{X_n\}$ 平稳序列.

求序列协方差函数是否有遍历性? (均值)

证明: ① $EX_n=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^kE[\varepsilon_{n-k}]=0$

$\mathrm{Cov}(X_n, X_m)=E[\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\varepsilon_{n-k}\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^l\varepsilon_{m-l}]=\sum_{k,l\ge 0}^{\infty}\alpha^{k+l}E[\varepsilon_{n-k}\varepsilon_{m-l}]\underset{\text{WN定义均值}=0}{\overset{n-k=m-l时由}{=\!=\!=\!=}}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2k+n-m}E[\varepsilon_{n-k}^2]=\sigma^2\cdot\frac{\alpha^{n-m}}{1-\alpha^2}$ 只与 $n-m$ 有关

$\mathrm{Var}X_n=\sigma^2\cdot\frac{1}{1-\alpha}<\infty$. $(|\alpha|<1)$

$\therefore\{X_n\}$ 平稳序列

② $R(m)=\sigma^2\cdot\frac{\alpha^m}{1-\alpha^2}\to 0$ as $m\to\infty$ 由 Cor 4.2, 有均值遍历性.

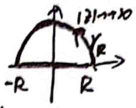
hw 13

T24 $\{X(t)\}$ Gauss 平稳过程，均值为零，$S(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}$，求 $X(t)$ 落在 $[0.5, 1]$ 中概率

解：由 $\{X(t)\}$ Gauss 平稳，$EX(t)\equiv 0$，求 $R_X(\tau)$ 即可。

[留数Thm：$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\sum_k \mathrm{Res}(f, z_k)$，$\mathrm{Res}(f,a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1}\left((z-a)^m f(z)\right)$，其中 a 为 $f(z)$ m 阶极点

Jordan引理：若 $f(z)$ 在 $R_0\le|z|<\infty$ 上连续，$\lim_{|z|\to+\infty} g(z)=0$，$a>0$，有 $\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} g(z)e^{iaz}dz=0$]



由 W-K 公式，$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{1}{1+\omega^2}e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}2\pi j\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{j\omega|\tau|}}{1+\omega^2}, j\right)=\frac{1}{2\pi}2\pi j\cdot\lim_{\omega\to j}(\omega-j)\frac{1}{1+\omega^2}e^{j\omega|\tau|}$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi j\lim_{\omega\to j}\frac{1}{\omega+j}e^{j\omega|\tau|}=\frac{1}{2}e^{-|\tau|}$$

从而 $R_X(0)=\frac{1}{2}$，即有 $X(t)\sim N(0,\frac{1}{2})\Rightarrow P(\frac{1}{2}\le X(t)\le 1)=P(\frac{\sqrt2}{2}\le\underbrace{\sqrt2 X(t)}_{\sim N(0,1)}\le\sqrt2)=\Phi(\sqrt2)-\Phi(\frac{\sqrt2}{2})$，$\Phi$ 为 $N(0,1)$ 分布函数

T25. 平稳过程 $\{X(t)\}$ $S(\omega)=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+4\omega^2+3}$，求 $X(t)$ 均方差

解：由 W-K 公式，$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\omega^2+1}{\omega^4+4\omega^2+3}e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\frac{\omega^2+1}{(\omega^2+1)(\omega^2+3)}d\omega=\frac{1}{2\pi}2\pi j\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{j\omega|\tau|}}{\omega^2+3},\sqrt3 j\right)$ [这里 j 不是 $\frac{\omega^2+1}{(\omega^2+1)(\omega^2+3)}$ 可去奇点]

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi j\lim_{\omega\to\sqrt3 j}(\omega-\sqrt3 j)\frac{1}{\omega^2+3}e^{j\omega|\tau|}=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi j\cdot\lim_{\omega\to\sqrt3 j}\frac{1}{\omega+\sqrt3 j}e^{j\omega|\tau|}=\frac{1}{2\sqrt3}e^{-\sqrt3|\tau|}.$$

从而 $R_X(0)=\frac{1}{2\sqrt3}$ $\Rightarrow$ 均方差(标准差)为 $\sqrt{\frac{1}{2\sqrt3}}$.

T28 求 $S(\omega)$ 对应 $R(\tau)$

(2) $S(\omega)=\frac{1}{(1+\omega^2)^2}$　　　(4) $S(\omega)=\begin{cases}a & |\omega|\le b\\ 0 & |\omega|>b.\end{cases}$

(2) $S(\omega)$ 极点阶数为2，$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{j\omega\tau}}{(1+\omega^2)^2}, j\right)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{\omega\to j}\frac{d}{d\omega}\left((\omega-j)^2\frac{e^{j\omega|\tau|}}{(1+\omega^2)^2}\right)=\frac{d}{d\omega}\left(\frac{e^{j\omega|\tau|}}{(\omega+j)^2}\right)\Big|_{\omega=j}=-\frac{2e^{j\omega|\tau|}}{(\omega+j)^3}\Big|_{\omega=j}+\frac{j|\tau|e^{j\omega|\tau|}}{(\omega+j)^2}\Big|_{\omega=j}$

$$=e^{-|\tau|}\frac{2}{8j}+e^{-|\tau|}\left(\frac{j|\tau|}{-4}\right)=e^{-|\tau|}\left(-\frac{j}{4}|\tau|+\frac{1}{4j}\right)$$

$$\therefore R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi j\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{j\omega\tau}}{(1+\omega^2)^2}, j\right)=\frac{1}{4}e^{-|\tau|}(|\tau|+1)$$

(4) $R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-b}^{b}a\cdot e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\cdot\int_0^b a\cdot\cos\omega|\tau|\,d\omega=\frac{a}{\pi|\tau|}\sin\omega|\tau|\Big|_0^b=\frac{a\sin b|\tau|}{\pi|\tau|}.$

补充题目.

~~2019期末~~ ① (1) 平稳过程 判断

(a) 宽平稳过程有平稳增量性. $\to X(t_1+h)-X(t_1) \stackrel{d}{=} X(t_2+h)-X(t_2)$ ✗ 但宽平稳仅 $Cov(X_t, X_s)$ 与 $t-s$ 有关

(b) Poisson 过程为平稳过程. ✗ $EX(t)=\lambda t$.

(c) 二阶矩存在的严平稳一定宽平稳. ✓ 结论. 宽平稳 $\underset{EX^2<\infty}{\overset{+正态}{\rightleftarrows}}$ 严平稳

(d) 初始状态分布为平稳分布的 Markov 过程一定严平稳. ✓ $\pi P=\pi$.

② $\{X(t)\}$ 平稳过程 $EX(t)=0$. $S(\omega)=\frac{\omega^2+5}{\omega^4+11\omega^2+24}$

(1) 求 $R(\tau)$ (2) $X(t)$ 是否均值遍历?

(1) $S(\omega)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\omega^2+3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\omega^2+8} \overset{WK}{\Longrightarrow} R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\omega^2+3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\omega^2+8}\right)e^{j\omega\tau}d\omega$

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{5}\cdot\int\frac{1}{\omega^2+3}e^{j\omega\tau}d\omega+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{3}{5}\int\frac{1}{\omega^2+8}e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{5}\cdot 2\pi j\, Res\left(\frac{e^{j\omega|\tau|}}{\omega^2+3},\sqrt{3}j\right)+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{3}{5}\cdot 2\pi j\cdot Res\left(\frac{e^{j\omega|\tau|}}{\omega^2+8},2\sqrt{2}j\right)$$

$$=\frac{1}{5\pi}\cdot 2\pi j\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}j}e^{-\sqrt{3}|\tau|}+\frac{3}{5}j\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}j}\cdot e^{-2\sqrt{2}|\tau|}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{15}e^{-\sqrt{3}|\tau|}+\frac{3\sqrt{2}}{40}e^{-2\sqrt{2}|\tau|}$$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{15}e^{-\sqrt{3}|\tau|}+\frac{3\sqrt{2}}{40}e^{-2\sqrt{2}|\tau|}\right)d\tau<\infty \Rightarrow$ 由推论1 有均值遍历性成立.

③ 2019.1.10 下列 $R(\tau)$ 是否为平稳过程协方差函数?

(a) $R(\tau)=e^{-|\tau|}(|\tau|+1)^2$ (✗) (b) $R(\tau)=|\tau|e^{-\frac{\tau^2}{2}}$ (✗) (c) $R(\tau)=\frac{\sin\tau}{\pi\tau}$ (✓)

(d) $R(\tau)=\sigma^2 e^{ja\tau}$ (✓) (e) $R(\tau)=\sigma^2 e^{-j\lambda|\tau|}$ (✗) ($\sigma,\lambda>0$, $j=\sqrt{-1}$)

判断所用性质: $R(\tau)=\overline{R(-\tau)}$; $R(0)\geq|R(\tau)|$

(a) $R(1)=\frac{4}{e}>R(0)=1$ (b) $R(0)=0<R(1)$ (e) $R(\tau)\neq\overline{R(-\tau)}$

④ 判断谱密度 $S(\omega)$

① $S(\omega)=\overline{S(\omega)}$
② $S(\omega)=S(-\omega)$
③ $S(\omega)\geq 0$.

$S_1(\omega)=\frac{\omega^2+9}{(\omega^2+4)(\omega+1)^2}$ ✗ $S(\omega)\neq S(-\omega)$

$S_2(\omega)=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6}$ ✓

$S_3(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4-4\omega^2+3}$ ✗ $S(\omega)\geq 0$.

$S_4(\omega)=\frac{\omega^2-4}{\omega^4+4\omega^2+3}$ ✗ $S(\omega)\geq 0$

$S_5(\omega)=\frac{e^{-i\omega^2}}{\omega^2+2}$ ✗ $S(\omega)\neq\overline{S(\omega)}$

$S_6(\omega)=\frac{4a\cos\omega}{\omega^2+a^2}$ ✗ $S(\omega)\geq 0$.

⑤ $X(t)=S_t+\varepsilon_t=b\cos(\omega t+U)+\varepsilon_t,\ t\in\mathbb{Z}.$ $U\sim U(0,2\pi)$, $\{\varepsilon_t\}$ 零均值平稳，方差为 σ^2 白噪声序列. $U \perp \{\varepsilon_t\}$

$$Y_t=\frac{1}{2M+1}\sum_{j=-M}^{M}X_{t+j}$$

(1) Y_t 为平稳过程？ (2) 求 $Var(Y_t)$

解：(1) • $EX(t)=bE[\cos(\omega t+U)]+E(\varepsilon_t)=0$

$$R(\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]=b^2E[\cos(\omega t+U)\cos(\omega(t+\tau)+U)]+\sigma^2\delta(\tau)$$

$$=\frac{1}{2}b^2E[\cos\omega\tau+\cos(2\omega t+\omega\tau+2U)]+\sigma^2\delta(\tau)$$

$$=\frac{1}{2}b^2\cos\omega\tau+\sigma^2\delta(\tau)\quad ,\text{其中}\ \delta(\tau)=\begin{cases}1 & \tau=0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$R(0)<\infty \Longrightarrow X_t$ 宽平稳

• 对 Y_t： $EY_t=\frac{1}{2M+1}\sum_{j=-M}^{M}EX_{t+j}=0$

$$R_Y(\tau)=E(Y_tY_{t+\tau})=\frac{1}{(2M+1)^2}E\Big[\sum_{j=-M}^{M}\sum_{i=-M}^{M}X_{t+j}X_{t+\tau+i}\Big]=\frac{1}{(2M+1)^2}\sum_{j=-M}^{M}\sum_{i=-M}^{M}\Big[\frac{b^2}{2}\cos\omega(\tau-i+j)+\sigma^2\delta(\tau-i+j)\Big]$$

$R_Y(0)<\infty$

$\Rightarrow Y_t$ 宽平稳

(2) ~~$Var Y_t$~~ $Var\,Y_t=R_Y(0)$ 代入上式.

⑥ $\{X_t,t\in R\}$ 为0均值平稳Gauss过程，$S(\omega)=\frac{4}{\omega^2+4}$ (1) X_t 服从分布？ (2) $Y\triangleq X_t-X_s,\ s<t$，求 $Var\,Y$.

(1) 由 W-K 公式 有 $R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{4e^{j\omega\tau}}{\omega^2+4}d\omega=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi j\cdot\lim_{\omega\to 2j}(\omega-2j)\frac{4e^{j\omega|\tau|}}{\omega^2+4}d\omega=j\cdot\frac{4e^{-2|\tau|}}{4j}=e^{-2|\tau|}.$

由 $R(0)=1$，有 $X(t)\sim N(0,1)$.

(2) 由 $\{X_t\}$ Gauss过程，有 $(X(s),X(t))\sim N\left(0,\begin{pmatrix}1 & e^{-2(t-s)}\\ e^{-2(t-s)} & 1\end{pmatrix}\right)$

从而 $Y=X_t-X_s\sim N(0,\ 2-2e^{-2(t-s)})$. $\Rightarrow Var\,Y=2-2e^{-2(t-s)}$.

⑦ 判断是非.

(1) $\{X_t\}$ 独立增量，则必有
- $\{X_t\}\sim$ Poisson过程 ✗ 仅有独立性
- $\{X_t\}\sim$ Markov.. ✓ $P(X_n=x_n|X_{n-1}=x_{n-1})=P(X_n=x_n|X_{n-1}=x_{n-1},\dots)$
- $X_{t+1}-X_t$ 平稳. ✗ 分布不一定

(2) $\{X_t\}$ 二阶矩过程：$EX_t^2<\infty$ 且. 问是否 $EX_t^2<\infty$
- 严平稳 ✗
- 平稳 ✓
- Poisson ✓
- Gauss ✓

(3) $\{X_n,n\geq 0\}$ 不可约有限 Markov S，μ_i 为平均返回时，则 (a) $\forall i,j\in S$，$\mu_i=\mu_j$ (✗)

(b) $\{X_n\}$ 必有唯一平稳分布 $\pi_j=\frac{1}{\mu_j}$ (✗) 非周期.

(c) $d_i=d_j\in(0,\infty)$ (✓)

⑧ 均值为0平稳过程 $R_X(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau$，$\alpha,\beta>0$，求 $S_X(\omega)$.

由 W-K 公式，$S_X(\omega)=\int R(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=\int e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau\, e^{-i\omega\tau}d\tau$

$$=\int\cos\beta\tau\cdot(\cos\omega\tau-i\sin\omega\tau)e^{-\alpha|\tau|}d\tau=\int\cos\beta\tau\cos\omega\tau\cdot e^{-\alpha|\tau|}d\tau-\underbrace{i\int\cos\beta\tau\sin\omega\tau\, e^{-\alpha|\tau|}d\tau}_{\text{奇函数}=0}$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\cos(\omega+\beta)\tau+\cos(\omega-\beta)\tau\right)e^{-\alpha|\tau|}d\tau$$

$$=\int_0^\infty\cos(\omega+\beta)\tau\, e^{-\alpha\tau}d\tau+\int_0^\infty\cos(\omega-\beta)\tau\, e^{-\alpha\tau}d\tau\triangleq I_1+I_2$$

记 $I_1=\int_0^\infty\cos(\omega+\beta)\tau\, e^{-\alpha\tau}d\tau$，有 $I_1=-\frac{1}{\alpha}\cos(\beta+\omega)\tau\, e^{-\alpha\tau}\Big|_0^\infty-\frac{\beta+\omega}{\alpha}\int_0^\infty\sin(\beta+\omega)\tau\, e^{-\alpha\tau}d\tau$

即 $I_1=\frac{1}{\alpha}-\frac{\beta+\omega}{\alpha}\left[-\frac{1}{\alpha}\sin(\beta+\omega)\tau\, e^{-\alpha\tau}\Big|_0^\infty+\frac{\beta+\omega}{\alpha}\int\cos(\beta+\omega)\tau\, e^{\alpha\tau}d\tau\right]$

$$=\frac{1}{\alpha}-\frac{(\omega+\beta)^2}{\alpha^2}I_1$$

$\Rightarrow I_1=\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega+\beta)^2}$，类似可得 $I_2=\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega-\beta)^2}$

$$\Rightarrow S_X(\omega)=\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega+\beta)^2}+\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega-\beta)^2}.$$

ch4

- 平稳过程定义，验证三条，宽平稳 $\rightleftharpoons$ 严平稳，Poisson / Markov / 平稳增量 / 独立增量.
- 均值遍历性：协方差计算，Cor 4.1（先证平稳过程）
- W-K 公式：留数定理

③ 增加的判断题　1. $N_1(t)\sim Poi(\lambda_1)$，$N_2(t)\sim Poi(\lambda_2)$　(1) $N_1(t)-N_2(t)\sim$ Poisson　(×)　增量不平稳.

(2) $N_1(t)+N_2(t)\sim$ Poisson　(√)　$\sim HP(\lambda_1+\lambda_2)$

2. 不可约 $\underline{\underline{\text{遍历}}}$ Markov　(1) 平稳分布和极限分布存在　(√)

正常返非周期　(2) ~~唯一~~…… $1/\mu$ 为极限分布　(√)

3. 一定为宽平稳：　D.

4. $X_1,\dots,X_n \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda)$　$X_1+\dots+X_n\sim\Gamma(n,\lambda)$　[ch2 作业]，$\min(X_1,\dots,X_n)\sim Exp(n\lambda)$（概统次序统计量）

5. $N_1(t),N_2(t)\sim Poi(2),Poi(3)$，独立. 在 $\{N_1(t)\}$ 任意两个相邻事件间 $\{N_2(t)\}$ 恰好发生 k 次概率.

[ch2 练习]　$\frac{2}{5}\cdot(\frac{3}{5})^k$