6. 迷宫问题. 将小鼠放入迷宫中作动物的学习实验, 如图 3.3 所示. 在迷宫的第 7 号小格内放有美味食物而第 8 号小格内则是电击捕鼠装置. 假定当家鼠位于某格时有 k 个出口可以离去, 则它总是随机地选择一个, 概率为 $\frac{1}{k}$, 并假定每一次家鼠只能跑到相邻的小格去. 令 X_n 为家鼠在时刻 n 时所在小格的号数, $n=0,1,2,\cdots$. 试写出过程 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 的转移概率矩阵, 并求出家鼠在遭到电击前能找到食物的概率.

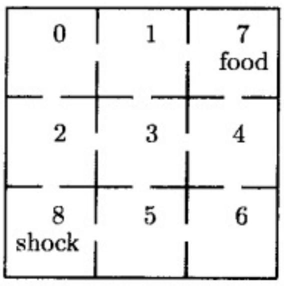


图 3.3 迷宫图

解: 转移概率矩阵为:

$$\begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

记 $T=\min\{n: X_n \in \{7,8\}\}$, 记 $u_j = P(X_T = 7 | X_0 = j)$, 则 $u_7 = 1$, $u_8 = 0$, $u_0 = \frac{1}{2}(u_1+u_2)$, $u_6 = \frac{1}{2}(u_4+u_5)$, $u_3 = \frac{1}{4}(u_1+u_2+u_4+u_5)$, $u_1 = \frac{1}{3}(u_0+u_3+u_7)$, $u_4 = \frac{1}{3}(u_3+u_6+u_7)$, $u_2 = \frac{1}{3}(u_0+u_3+u_8)$, $u_5 = \frac{1}{3}(u_3+u_6+u_8)$。计算可得:

$u_0 = u_3 = u_6 = \frac{1}{2}$, $u_1 = u_4 = \frac{2}{3}$, $u_2 = u_5 = \frac{1}{3}$。

7. 记 $Z_i, i=1,2,\cdots$ 为一串独立同分布的离散随机变量. $P\{Z_1=k\}=p_k \geqslant 0, k=0,1,2,\cdots, \sum_{k=0}^{\infty} p_k=1$. 记 $X_n=Z_n, n=1,2,\cdots$. 试求过程 X_n 的转移概率矩阵.

解证 由题设知,$\{Z_n, n=1,2,\cdots,\}$ 的状态空间为 $\mathcal{X}=\{0,1,2,\cdots\}$, 对任意正整数 n 及任意 $i_1,\cdots,i_{n+1}\in\mathcal{X}$, 有

$$P(Z_{n+1}=i_{n+1}\mid Z_1=i_1,\cdots,Z_n=i_n)=P(Z_{n+1}=i_{n+1})=p_{i_{n+1}}$$

和

$$P(Z_{n+1}=i_{n+1}\mid Z_n=i_n)=P(Z_{n+1}=i_{n+1})=p_{i_{n+1}}.$$

因而

$$P(Z_{n+1}=i_{n+1}\mid Z_1=i_1,\cdots,Z_n=i_n)=P(Z_{n+1}=i_{n+1}\mid Z_n=i_n)=p_{i_{n+1}}.$$

这说明了 $\{Z_n, n=1,2,\cdots,\}$ 是一 Markov 链, 且其转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

■

8. 对第 7 题中的 Z_i, 今 $X_n=\max\{Z_1,\cdots,Z_n\}$, $n=1,2,\cdots$, 并约定 $X_0=0$. X_n 是否为 Markov 链? 如果是, 其转移概率阵是什么?

解 由题设知,$\{X_n, n=0,1,2,\cdots,\}$ 的状态空间为 $\mathcal{X}=\{0,1,2,\cdots\}$. 由于 $P(X_0=0)=1$, 因此,$X_0, Z_1, Z_2,\cdots$ 独立. 对任意 $i_1\in\mathcal{X}$, 有

$$P(X_1=i_1\mid X_0=0)=P(Z_1=i_1\mid X_0=0)=P(Z_1=i_1)=p_{i_1}. \tag{1}$$

进而, 对任意正整数 n 及任意 $i_1,\cdots,i_{n+1}\in\mathcal{X}$, 有

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_0=0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)\\
=&\frac{P(X_0=0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n,X_{n+1}=i_{n+1})}{P(X_0=0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)}\\
=&\frac{P(X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n,X_{n+1}=i_{n+1})}{P(X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n)}\\
=&\frac{P(Z_1=i_1,\max\{i_1,Z_2\}=i_2,\cdots,\max\{i_{n-1},Z_n\}=i_n,\max\{i_n,Z_{n+1}\}=i_{n+1})}{P(Z_1=i_1,\max\{i_1,Z_2\}=i_2,\cdots,\max\{i_{n-1},Z_n\}=i_n)}\\
=&P(\max\{i_n,Z_{n+1}\}=i_{n+1})\\
=&\begin{cases} 0, & i_n>i_{n+1},\\ P(Z_{n+1}\le i_{n+1}), & i_n=i_{n+1},\\ P(\max\{i_n,Z_{n+1}\}=i_{n+1}), & i_n<i_{n+1}\end{cases}\\
=&\begin{cases} 0, & i_n>i_{n+1},\\ P(Z_{n+1}\le i_{n+1}), & i_n=i_{n+1},\\ P(\max\{i_n,Z_{n+1}\}=i_{n+1},Z_{n+1}<i_n) & \\ +P(\max\{i_n,Z_{n+1}\}=i_{n+1},Z_{n+1}\ge i_n), & i_n<i_{n+1}\end{cases}\\
=&\begin{cases} 0, & i_n>i_{n+1},\\ P(Z_{n+1}\le i_{n+1}), & i_n=i_{n+1},\\ P(Z_{n+1}=i_{n+1}), & i_n<i_{n+1}\end{cases}
\end{aligned}$$

$$
=\begin{cases} 0, & i_n > i_{n+1}, \\ \sum\limits_{k=0}^{i_{n+1}} p_k, & i_n = i_{n+1}, \\ p_{i_{n+1}}, & i_n < i_{n+1}. \end{cases} \tag{2}
$$

同理可知, 对任意正整数 n 及任意 $i_n, i_{n+1} \in \mathcal{X}$, 有

$$
P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n) = \begin{cases} 0, & i_n > i_{n+1}, \\ \sum\limits_{k=0}^{i_{n+1}} p_k, & i_n = i_{n+1}, \\ p_{i_{n+1}}, & i_n < i_{n+1}. \end{cases} \tag{3}
$$

由此及 (2) 可得

$$
\begin{aligned} & P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = 0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) \\ =& P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n). \end{aligned} \tag{4}
$$

由此及 (1) 可知, $\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 为一 Markov 链, 且其转移概率矩阵为

$$
P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & p_0 + p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 + p_1 + p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_0 + p_1 + p_2 + p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.
$$

■

作业8，2024 年4月

1. 现有一个三状态的马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$的25个连续观察数据：

$$\begin{array}{ccccccccccccc} -1, & 0, & 0, & 1, & 0, & -1, & -1, & -1, & 0, & 0, & -1, & 0, & -1, \\ -1, & -1, & 0, & 0, & 1, & 1, & 1, & 0, & -1, & 1, & 1, & 1, & \end{array}$$

则据此估计该MC的一步转移概率矩阵.

2. 设有夏普、大金两个品牌的空气净化器在某地市场占有率开始时($n = 0$) 均为1/3(其他品牌总的市场占有率为1/3). 而每过一个月（单位时间）顾客消费倾向的改变可以用一个三状态的马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$ 来描述,其一步转移概率(状态1、2、3分别表示购买夏普、大金、其他品牌的空气净化器

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.35 & 0.3 & 0.35 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

(1) 问两个月后各品牌的市场占有率将变成多少?

(2) 各品牌对市场的占有率最终会稳定于什么样的比例? （利用如下红色的公式）

$\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n-1} * \mathbf{P}, \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$，两边取极限，有$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)\mathbf{P}$

可以用matlab简单跑一下验证一下计算结果.

3. 逐个随机地把球放入到a 个盒子中去（可重复放），以X_n 表示放了n 个球之后的空盒数，则$\{X_n, n \geq 0\}$ 为马氏链，

(1) 写出该马氏链的转移概率矩阵P;

(2) 试求放满a 个盒子的平均时间（次数）。

4. 市场上有a 种牌号的牙膏，记为$\{1, 2, \ldots, a\}$. 假定消费者相继使用的牙膏牌号构成马氏链，选用第i 种牌号牙膏的消费者继续使用第i 种牌号牙膏的概率为$p_{i,i}, (0 < p_{i,i} < 1, i = 1, 2, \ldots, a)$. 若他对原来使用的牙膏不满意, 就在其它$a-1$ 种牙膏中任选一种, 即有: $p_{i,j} = \frac{1-p_{i,i}}{a-1}, (j \neq i)$, 试写出该马氏链的转移概率矩阵$P$ 并对马氏链作状态分类

5. 设一质点在正整数点上做随机游动, 质点处于正整数点i时，以概率p_i往右走一格，概率$1-p_i$退回到点1, $p_i = e^{-\frac{1}{i}}$, $i = 1, 2, \ldots$. 记X_n表示时刻n质点所处的位置,

(1) 写出过程的状态空间, 说明该过程为Markov链.

(2) 讨论该各状态的周期性和常返性。

1、解：频率估计法.

$-1 \begin{cases} -1: & 4次 \\ 0: & 4次 \\ 1: & 1次 \end{cases}$

$0 \begin{cases} -1: & 4次 \\ 0: & 3次 \\ 1: & 2次 \end{cases}$

$1 \begin{cases} -1: & 0次 \\ 0: & 2次 \\ 1: & 3次 \end{cases}$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

第2题

解: (1) 记 τ_i 为第 i 个月后市场占有率，则 $\tau_0 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, 且 $\tau_{n+1} = \tau_n P$.
所以 $\tau_2 = \tau_0 P^2 = (0.2950, 0.2933, 0.4117)$。
(2) 最终占有率满足 $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1, \pi P = \pi$，计算可得：$\pi = (0.2414, 0.2759, 0.4828)$。

第3题

解: (1)

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{a-i}{a}, & j = i \\ \frac{i}{a}, & j = i-1 \\ 0, & else \end{cases} .$$

(2)$X_0 = a$, 记 $T = \min\{n : X_n = 0\}$, $t_i = E(T|X_0 = i)$. 则

$$\begin{aligned} t_i &= E(T|X_1 = i)P(X_1 = i|X_0 = i) + E(T|X_1 = i-1)P(X_1 = i-1|X_0 = i) \\ &= (1 + t_i)\frac{a-i}{a} + (1 + t_{i-1})\frac{i}{a}. \end{aligned}$$

故 $t_i = t_{i-1} + \frac{a}{i}$, $t_0 = 0$, 故 $t_a = \sum_{i=1}^{a} \frac{a}{i}$。

第4题

$$P = (P_{ij})_{a\times a} = \begin{cases} P_{ii}, & i = j \\ \frac{1-P_{ii}}{a-1}, & i \neq j \end{cases}$$

由 $0 < P_{ii} < 1$，故对 $\forall i, j$, $0 < P_{ij} < 1$

故所有状态均可互达，

只有一类状态。

且该类均为常返且非周期的。

第5题：(1) 状态空间为正整数集 $\mathbb{N}^+$.

且易证 $\{X_n\}$ 有马尔可夫性

其转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1-e^{-1} & e^{-1} & 0 & 0 & \cdots \\ 1-e^{-1/2} & 0 & e^{-1/2} & 0 & \cdots \\ 1-e^{-1/3} & 0 & 0 & e^{-1/3} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

(2) 对 $\forall i$, $P_{i1}=1-e^{-i^{-1}}>0$

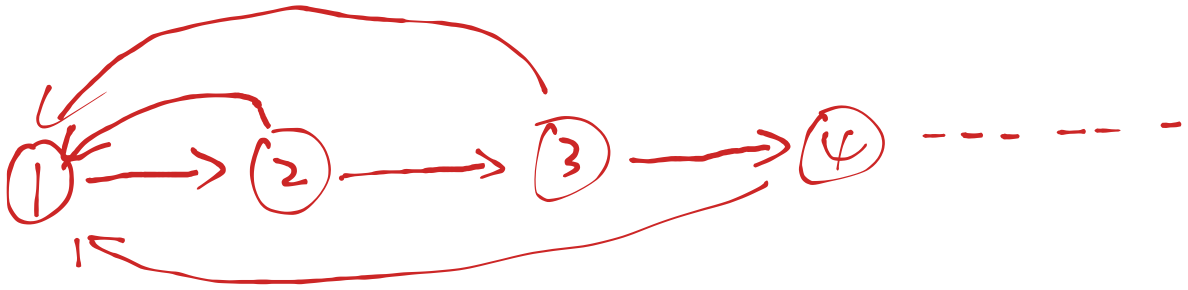
且 $\exists k\in\mathbb{N}$, s.t. $P_{1i}^{(k)}>0$

故所有状态互达.

又由于 $P_{11}>0$, $P_{11}^{(2)}=e^{-1}-e^{-\frac{3}{2}}>0$

$\cdots$ $P_{11}^{(n)}>0 \Rightarrow$ 状态1非周期.

由互达性知，所有状态非周期.



记 $f_{ii}^{(n)}=P\{X_n=i,\ X_k\neq i,\ 1\le k\le n-1 \mid X_0=i\}$.

由示意图知

$$f_{11}^{(n)}=P_{12}P_{23}\cdots P_{n-1,n}\cdot P_{n,1}$$

$$= e^{-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \cdots\cdots e^{-\frac{1}{n-1}} \cdot (1 - e^{-\frac{1}{n}})$$

$$\Rightarrow f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{n-1} e^{-j^{-1}} \cdot (1 - e^{-1}) \right]$$

$$= 1 - e^{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}$$

$$= 1$$

故 状态1为常返的.

又由互达性,

所有状态均为常返的。