hw9

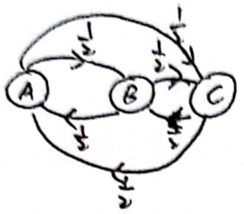
T14. Markov, 三种型号 A, B, C, P, 问每个状态是否常返?

(1) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) 

$p_{ii}^{(1)} > 0 \Rightarrow d(i) = 1$, $i = A, B, C$ $\Rightarrow$ 非周期

$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty \Leftrightarrow$ 状态 i 常返 $\Rightarrow$ A, B, C 均为常返态, 且为 $\boxed{\text{正常返}}$

(2) 

$p_{ii}^{(2)} > 0$, $p_{ii}^{(3)} > 0 \Rightarrow d(i) = 1 \Rightarrow$ 非周期

不可约 (均互达)

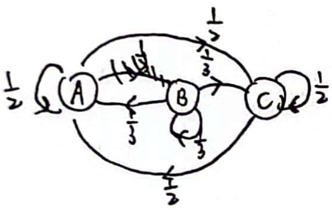
$f_{ii}^{(n)} = P(X_n = i, X_k \neq i, k = 1, \dots, n-1 \mid X_0 = i)$ 记

对 A, $f_{AA}^{(n)} = P(X_n = A, X_k \neq A, k = 1, \dots, n-1 \mid X_0 = A) = \begin{cases} P(X_1 = B, X_2 = C, \dots, X_{n-1} = B, X_n = A) + P(X_1 = C, X_2 = B, \dots, X_{n-1} = C, X_n = A) & (n\text{偶}) \\ P(X_1 = B, X_2 = C, \dots, X_{n-1} = C, X_n = A) + P(X_1 = C, X_2 = B, \dots, X_{n-1} = B, X_n = A) & (n\text{奇}) \end{cases}$

(B, C)

$\Rightarrow f_{AA}^{(n)} = (\frac{1}{2})^n \cdot 2 = (\frac{1}{2})^{n-1}$ $(n \geq 2)$, $f_{ii}^{(1)} = 0$

$f_{AA} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = 1$, 且 $\mu_A = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} < \infty \Rightarrow \boxed{\text{正常返}}$

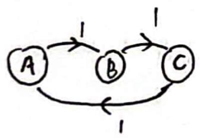
(3) 

由转移概率图 {A, C}, {B}

{A, C} 非周期 $f_{AA}^{(n)} = (\frac{1}{2})^n \Rightarrow f_{AA} = 1 \Rightarrow$ {A, C} $\boxed{\text{正常返(类似(2)}}$

{B} 非周期 ~~$f_{BB}^{(n)} = \dots \Rightarrow f_{BB} =$~~

$f_{BB}^{(0)} = 0$, $f_{BB}^{(1)} = \frac{1}{3}$, $f_{BB}^{(n)} = 0, n \geq 2 \Rightarrow$ {B} $\boxed{\text{瞬过}}$.

(4) 

不可约, $p_{ii}^{(3)} > 0$, $p_{ii}^{(6)} > 0 \Rightarrow$ 周期, $d(i) = 3$.

~~$f_{AA}^{(3k)} = 1$~~, $f_{ii}^{(3)} = 1$, 其余为0 $\Rightarrow f_{ii} = 1$, $\mu_i < \infty \Rightarrow \boxed{\text{正常返}}$

T15. 有限状态 Markov 链. 证明: (a) 至少有一个状态常返 (b) 任何常返状态必为正常返.

(a) 反证, 设所有状态均瞬过, 由 $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(n)} = 1$, 两边取 $n \to \infty$, 由瞬过有 $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(n)} = 1$, 而 LHS $\overset{N\text{有限}}{=} \sum_{j=1}^{N} \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$. 矛盾!

[$\forall i, j$, j 为瞬过或零常返, 则 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$] 故至少有一个状态常返.

(b) 反证: 假设存在零常返. 由状态空间分解, 取一个有限状态零常返子链(一定存在)

在子链中 $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(n)} = 1$ 两边取极限得 $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(n)} = 0 = 1$ 矛盾! $\Rightarrow$ 任意常返状态均为正常返.

T16 考虑一生长灾害模型. Markov 状态 0,1,2,⋯ 状态i可能以 p_i 转移到 $i+1$ (生长), 也能以~~灾害~~prob $=q_i=1-p_i$ 落回0 (灾害)

而 $p_0=1$. (a) 证 所有状态为常返的条件是 $\lim_{n\to\infty} p_1p_2\cdots p_n=0$ (b) 若此链常返, 求其为零常返的条件.

(a)

由图所有状态互达 ⇒ 不可约.

$f_{00}^{(1)}=0,\ f_{00}^{(2)}=1-p_1,\ f_{00}^{(3)}=p_1(1-p_2),\ \ldots\ f_{00}^{(n)}=p_1\cdots p_{n-2}(1-p_{n-1})$

$f_{00}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f_{00}^{(i)}=1-\lim_{n\to\infty}p_1p_2\cdots p_{n-1}$ 有 $f_{00}=1 \iff \lim_{n\to\infty}p_1\cdots p_{n-1}=0 \iff \lim_{n\to\infty}p_1\cdots p_n=0$

故所有状态常返的条件为 $\lim_{n\to\infty}p_1\cdots p_n=0$

(b) $\mu_0=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)}=\sum_{n=2}^{\infty} n\prod_{i=1}^{n-2} p_i(1-p_{n-1})=2(1-p_1)+\sum_{n=3}^{\infty} n[p_1\cdots p_{n-2}-p_1\cdots p_{n-1}]$. 0零常返 $\iff \mu_0=\infty$

故所求条件为 $\sum_{n=3}^{\infty} n[p_1p_2\cdots p_{n-2}-p_1p_2\cdots p_{n-1}]=+\infty$. [或直接 $\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot p_1\cdots p_{n-2}(1-p_{n-1})=\infty$ ($p_0=1$) 注意下标]

(或 $2+\sum_{n=1}^{\infty}p_1\cdots p_n$)

hw10.

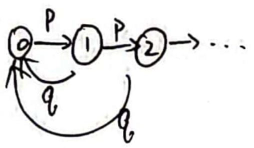
T12. 成败型重复试验, S.F. 游程. 成功prob $=p$, 失败 $q=1-p$. X_n 为n次试验后成功游程长度 (若第n次失败, 则 $X_n=0$)

证 $\{X_n\}$ 为MC, 求P. 记T为返回0的时间, 求T的分布及均值, 并由此对MC状态分类.

① Markov性: 由题意, $X_{n+1}=\begin{cases}X_n+1 & \text{第}n+1\text{次成功}\\ 0 & \cdots\cdots\text{失败}\end{cases}$ 仅与 X_n 有关, 则 $\forall n\geq 1$, $P(X_{n+1}=j\mid X_n=i_n,X_{n-1}=i_{n-1},\ldots,X_1=i_1)=P(X_{n+1}=j\mid X_n=i_n)$

⇒ $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 为一MC.

② $P=\begin{pmatrix} q & p & & \\ q & 0 & p & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ q & & & \end{pmatrix}$



③ $P(T=n)=P(X_n=0,X_{n-1}=n-1,\ldots,X_1=1\mid X_0=0)=p^{n-1}\cdot q \quad n\geq 1.$ $\Rightarrow ET=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot p^{n-1}q=q\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}p^n\right)'=\frac{q}{(1-p)^2}=\frac{1}{q}.$

④ (由图P知MC为不可约的, 只考虑状态0即可) $f_{00}^{(n)}=p^{n-1}q \Rightarrow f_{00}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{00}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}p^{n-1}q=\frac{q}{1-p}=1.$ ⇒常返

又由 $ET=\frac{1}{q}<\infty$ ⇒ 正常返 $\xrightarrow[\text{不可约}]{\text{MC}}$ 所有状态正常返, 非周期

T17. 求 $P=\begin{pmatrix}\frac12 & \frac12 & 0\\ \frac13 & \frac13 & \frac13\\ \frac16 & \frac12 & \frac13\end{pmatrix}$ 极限分布.

由P知该MC不可约, 非周期, 正常返 (有限MC不可约) ⇒ 平稳分布即为极限分布.

$\pi P=\pi \Rightarrow (\pi_1\ \pi_2\ \pi_3)\begin{pmatrix}\frac12 & \frac12 & 0\\ \frac13 & \frac13 & \frac13\\ \frac16 & \frac12 & \frac13\end{pmatrix}=(\pi_1\ \pi_2\ \pi_3) \Rightarrow \begin{cases}\frac12\pi_1+\frac13\pi_2+\frac16\pi_3=\pi_1\\ \frac12\pi_1+\frac13\pi_2+\frac12\pi_3=\pi_2\\ \frac13\pi_2+\frac13\pi_3=\pi_3\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\pi_1=\frac{5}{14}\\ \pi_2=\frac37\\ \pi_3=\frac{3}{14}\end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}P^n=\begin{pmatrix}\frac{5}{14} & \frac37 & \frac{3}{14}\\ \frac{5}{14} & \frac37 & \frac{3}{14}\\ \frac{5}{14} & \frac37 & \frac{3}{14}\end{pmatrix}$

T18 天气4状态MC：(S,S) (S,C) (C,S) (C,C)

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} (S,S) & (S,C) & (C,S) & (C,C) \end{array} \\
\mathbb{P}=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

求MC的 π. 并求长期平均晴天数.

$$
\pi\mathbb{P}=\pi \Rightarrow \begin{cases} 0.8\pi_1+0.6\pi_3=\pi_1 \\ 0.2\pi_1+0.4\pi_3=\pi_2 \\ 0.4\pi_2+0.1\pi_4=\pi_3 \\ 0.6\pi_2+0.9\pi_4=\pi_4 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1=\frac{3}{11} \\ \pi_2=\frac{1}{11} \\ \pi_3=\frac{1}{11} \\ \pi_4=\frac{6}{11} \end{cases}
$$

一年平均晴天数：$(\frac{3}{11}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{2})\times 365=\frac{1460}{11}\approx 132.7$ (天)

(或 $\frac{4}{11}$)

T19. 某人有 M 把伞并在办公室和家之间往返. 若在家(办公室)下雨且家中(办公室)有伞则带一把去上班(回家). 不下雨从不带.

若每天早、晚下雨 prob $=p$, 定义 $M+1$ 状态 MC 并研究被雨淋湿的机会.

设 X_n 为第 n 天家中伞的数目 $S=\{0,1,2,\dots,M\}$ 为 $M+1$ 状态不可约遍历 MC, 定义

$$
P=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & & & M \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \\ M \end{array} & \begin{pmatrix} q & p & & & \\ pq & p^2+q^2 & pq & & \\ & pq & p^2+q^2 & pq & \\ & & \ddots & p^2+q^2 & pq \\ & & & pq & p^2+q^2+pq \end{pmatrix} \end{array}
$$

① 状态0 到状态0：$p_{00}=q$ (当天晚上未下雨, 没带伞回家)

- - - 1：$p_{01}=p$ (下午下雨, 带伞回家)

② 状态 $1,\dots,M-1$：
$$
\begin{cases} p_{i,i-1}=pq & \text{(早上下雨, 晚上无)} \\ p_{i,i}=p^2+q^2 & \text{(均下或均不下)} \\ p_{i,i+1}=pq & \text{(早上不下, 晚上下)} \end{cases}
$$

③ 状态 M：$p_{M,M-1}=pq$ (早上下, 晚上无)

$p_{M,M}=1-pq$ (早晚均下或早上不下)

求 $\pi\mathbb{P}=\pi \Rightarrow \begin{cases} \pi_0=\frac{1-p}{M+1-p} \\ \pi_1=\dots=\pi_M=\frac{1}{M+1-p} \end{cases}$

$\Rightarrow$ 被雨淋湿的 prob $=\underset{\text{早上下}}{p}\cdot\pi_0+\underset{\text{早上无晚上下}}{(1-p)\cdot p}\,\pi_M=\frac{2p(1-p)}{M+1-p}$

习题课补充.

1. MC $S=\{0,1,2\cdots\}$ 对 $k\in S$, $p_{k0}=\frac{1}{k+2}$, $p_{k,k+1}=\frac{k+1}{k+2}$

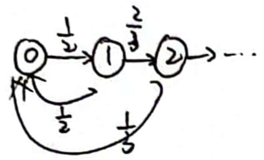
(1) 写出 MC 转移概率矩阵 $\mathbb{P}$.

(2) 对 MC 进行状态分类 (可约, 常返(正/零, 瞬过), 周期)

(3) MC 平稳分布是否存在? 若存在请求出; 若不存在请说明理由.

(1) $\mathbb{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & & \cdots \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \frac{1}{k+2} & 0 & \cdots & 0 \quad 0 & \frac{k+1}{k+2} \cdots \end{pmatrix}$

(2)



所有状态均互达 (不可约), 非周期 ($p_{00}^{(n)}>0, n\geq 1$), 零常返

$f_{00}^{(n)}=\frac{1}{n(n+1)}$. $\Rightarrow f_{00}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f_{00}^{(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1-\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}=1.\Rightarrow$ 常返.

$\mu_0=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{00}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\infty\Rightarrow$ 零常返.

(3) 由 MC 零常返, 不存在平稳分布.

2. MC $\mathbb{P}=\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0.3 & 0.7 & \\ 2 & & 0.2 & 0.8 \\ 3 & 0.3 & & 0.7 \end{array}$

(1) ~~若~~ $P(X_0=1)=0.2$, $P(X_0=2)=0.5$, $P(X_0=3)=0.3$ 求转移2步后为状态2的prob.

(2) 求 MC 平稳分布及平均常返时.

(1) $\mathbb{P}^2=\begin{pmatrix} 0.09 & 0.35 & 0.56 \\ 0.24 & 0.04 & 0.72 \\ 0.3 & 0.21 & 0.49 \end{pmatrix}$ $\pi\mathbb{P}^2=(0.228, 0.153, 0.619)\Rightarrow P(X_2=2)=0.153.$

(2) MC 有限不可约 $\Rightarrow$ 遍历, ∃平稳分布. $\pi\mathbb{P}=\pi\Rightarrow\begin{cases}0.3\pi_1+0.3\pi_3=\pi_1\\0.7\pi_1+0.2\pi_2=\pi_2\\0.8\pi_2+0.7\pi_3=\pi_3\\\pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\pi_1=\frac{24}{101}\\\pi_2=\frac{21}{101}\\\pi_3=\frac{56}{101}\end{cases}$

由极限分布 Thm 有 $\mu_1=\frac{1}{\pi_1}=\frac{101}{24}$, $\mu_2=\frac{101}{21}$, $\mu_3=\frac{101}{56}$.