**作业2**

1. 设随机变量序列 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 满足

$$X_n = \sum_{k=1}^{m} (A_k \cos n\omega_k + B_k \sin n\omega_k),$$

其中 $A_1, \cdots, A_m; B_1, \cdots, B_m$ 是均值为 0 且两两不相关的随机变量, 又 $EA_k^2 = EB_k^2 = \sigma_k^2$, $1 \leq k \leq m$, $0 < \omega_k < 2\pi$，试考察其平稳性.

2. 令 $X$ 和 $Y$ 是从单位圆内的均匀分布中随机选取一点所得的横坐标和纵坐标。试计算条件概率

$$P\left(X^2 + Y^2 \geq \frac{3}{4} \mid X > Y\right).$$

3. $X, Y$ 为两独立随机变量且分布相同。证明 $E(X|X+Y=z) = E(Y|X+Y=z)$。并试求基于 $X+Y=z$ 的 $X$ 的最佳预报。并求出预报误差 $E(X - \varphi(X+Y))^2$。

4. 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布。它们服从参数为 $\lambda$ 的指数分布。试证 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 是参数为 $(n, \lambda)$ 的 $\Gamma$ 分布，其密度为

$$f(t) = \lambda \exp\{-\lambda t\} (\lambda t)^{n-1} / (n-1)! \ , \quad t \geq 0.$$

(利用特征函数来计算)

5. 假设一个电子管内到达阳极的电子数目$N(t)$ 服从参数为$\lambda t$ 的Poisson分布,每个电子$X_j$携带能量相互独立且与电子数目$N(t)$ 相互独立, 并均服从区间$[1, 2]$ 上的均匀分布, 设到$t$ 时刻的阳极接受的能量为$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$. 求$S(t)$ 的均值$\mathrm{E}[S(t)]$ 和方差$\mathrm{Var}[S(t)]$.