

✓ (2) (是非) 下列关于 τ 的函数 $R(\tau)$ 是否为(实或复)平稳过程的协方差函数?

(a) $R(\tau) = e^{-|\tau|}(|\tau|+1)^2$ (); (b) $R(\tau) = |\tau| e^{-\tau^2/2}$ (); (c) $R(\tau) = \frac{\sin \tau}{\pi \tau}$ ()

(d) $R(\tau) = \sigma^2 e^{i\lambda\tau}$ (); (e) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-i\lambda|\tau|}$ ()。 (注: $\sigma, \lambda > 0, i = \sqrt{-1}$)

✓ 五、 (16分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数为 0, 谱密度函数为

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 5}{\omega^4 + 11\omega^2 + 24}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

(1) 求 $X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) $X(t)$ 是否有均值遍历性? 为什么?

✓ 五、 (15分) 考察下列函数 $S_i(\omega), (\omega \in \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} S_1(\omega) &= \frac{\omega^2 + 9}{(\omega^2 + 4)(\omega + 1)^2}, & S_2(\omega) &= \frac{\omega^2 + 1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 6}, & S_3(\omega) &= \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 - 4\omega^2 + 3}, \\ S_4(\omega) &= \frac{\omega^2 - 4}{\omega^4 + 4\omega^2 + 3}, & S_5(\omega) &= \frac{e^{-i\omega^2}}{\omega^2 + 2} (i = \sqrt{-1}), & S_6(\omega) &= \frac{4a \cos \omega}{\omega^2 + a^2} (a > 0). \end{aligned}$$

(1) 问哪些可以作为平稳过程的谱密度函数? 并进而求出其对应的协方差函数 $R(\tau)$.

(2) 问相应的平稳过程的均值是否有遍历性? 为什么?

✓ 六、 (7分) 设

$$X_t = S_t + \varepsilon_t = b \cos(\omega t + U) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

其中 $U \sim U(0, 2\pi)$, $\{\varepsilon_t\}$ 零均值平稳, 方差为 σ^2 的白噪声序列, U 与 $\{\varepsilon_t\}$ 独立. 作矩形窗滤波, $M > 0$:

$$Y_t = \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^M X_{t-j}$$

1) 试问 Y_t 是平稳过程吗? 为什么?

2) 求出 Y_t 的方差.

六、 $\{X_t, t > 0\}$ 为均值为 0 的高斯过程, 其功率谱密度函数为 $S(\omega) = \frac{4}{\omega^2 + 4}$

1. 试求该高斯过程的分布.

2. 若 $T = X_t - X_s$ ($s < t$), 求 Y 的方差.

六. (10分) 均值为0的平稳过程的相关函数为

$$R_X(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta \tau, \quad \alpha, \beta > 0.$$

求其对应的功率谱密度 $S_X(\omega)$.

1. (20分) 判断是非题.

1). 若 $\{X_t\}$ 是一个独立增量过程, 则必有

a. $\{X_t\}$ 是一Poisson过程() b. $\{X_t\}$ 是一Markov过程()

c. $X_{t+1} - X_t$ 是一严平稳过程()

2). 我们称 $\{X_t, t \in T\}$ 为二阶矩过程, 若 $EX_t^2 < \infty$ 存在. 问下列过程是否为二阶矩过程

a. 严平稳过程() b. 平稳过程()

c. Poisson 过程() d. Gauss过程()

3). 若 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个不可约有限状态的Markov链, 状态空间为 S , μ_i 为状态 i 的平均常返时, $i \in S$, 则

a. 任意 $i, j \in S$, 有 $\mu_i = \mu_j$ () b. $\{X_n\}$ 必有唯一平稳分布 $\pi_j = \frac{1}{\mu_j}$ ()

c. $d_i = d_j \in (0, \infty)$ ()

✓ (2) 关于平稳过程, 下列说法是否正确

(a) 宽平稳过程具有平稳增量性. ()

(b) Poisson过程是平稳过程. ()

(c) 二阶矩存在的严平稳一定是宽平稳过程. ()

(d) 初始状态分布为平稳分布的Markov过程一定是严平稳的. ()

一、 1. $\{N_1(t), N_2(t)\}$ 是遵循 λ_1, λ_2 的相互独立的 Poisson 过程, 判断以下是否正确.

(1) $N_1(t) - N_2(t)$ 是 Poisson 过程 (2) $N_1(t) + N_2(t)$ 是 Poisson 过程 ()

2. 对于一个不可约遍历的马尔可夫链, 以下说法正确的是:

(1) 其平稳分布和极限分布都存在 () (2) 其平稳分布必定是极限分布 ()

3. 下列随机过程一定属于宽平稳的是:

A. 马尔可夫链 B. 严平稳过程 C. 泊松过程 D. 白噪声过程

4. X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, 且 $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, 则 $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 是____ 分布. $\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 是____ 分布.

5. $\{N_1(t)\}, \{N_2(t)\}$ 分别遵循参数为 2, 3 的 Poisson 过程, 且相互独立. 则在 $\{N_1(t)\}$ 任意两个相邻事件之间, $\{N_2(t)\}$ 恰好发生 k 次的概率为_____.