ch2 梳理

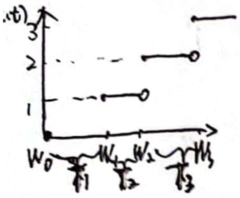
1. Poisson 过程定义：(Def 2.1.1)
$$\begin{cases} N(0)=0 \\ \text{独立增量} \\ N(t+s)-N(s)\sim Poi(\lambda t) \quad \forall s,t\geq 0 \text{ (平稳增量)} \end{cases}$$

$\Rightarrow EN(t)=Var(N(t))=\lambda t,\ Cov(N(s),N(t))=\lambda\min(s,t)$

(技巧1：构造增量用独立增量+平稳增量来求) $\Rightarrow$ hw T1,2,4

等价定义：(Def 2.1.2) $f(h)=o(h)$，若 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0$.
$$\begin{cases} N(0)=0 \\ \text{平稳增量，独立增量} \\ P(N(h)=1)=\lambda h+o(h) \\ P(N(h)\geq 2)=o(h) \end{cases}$$

2. 时间间隔和事件发生次数



事件发生时刻：$W_0=0<W_1<W_2\cdots$

时间间隔：$T_k=W_k-W_{k-1}$

$\Rightarrow$ Thm 2.2.1 $\{N(t)\}\sim P(\lambda)$ 则 $\{T_n\}$ i.i.d. $Exp(\lambda)$

Pf: ① $P(T_1>t)=P(N(t)=0)=e^{-\lambda t}$ [事件和时间转化]

$P(T_2>t|T_1=s)=e^{-\lambda t}\Rightarrow$ 积分得 $P(T_2>t)$

结论可得 $W_k=\sum_{i=1}^{k}T_i\sim\Gamma(n,\lambda)$

② $P(T_{i+1}>t)=\int P(T_{i+1}>t|W_i=s)f_{W_i}(s)ds$ (取条件分布)

Thm 2.2.2 $\{N(t)\}\sim P(\lambda)$，则 $\{W_n\}\sim\Gamma(n,\lambda)$

pf: ① 由 Thm 2.2.1 + 指数分布可加性 $\Rightarrow$.

② $W_n\leq t\Leftrightarrow N(t)\geq n$ [技巧2：时刻、时间、事件转化] $\to$ ~~hw~~ hw T7

Def 2.2.1 $\{N(t)\}\sim P(\lambda)$，若 $\{T_n, n\geq 1\}\overset{iid}{\sim}Exp(\lambda)$ $\Rightarrow$ hw 补充T5.

[技巧3：指数分布无记忆性：$P(X>s+t|X>t)=P(X>s)$]

补充结论(课上)：$X\perp\!\!\!\perp Y$，$X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)\Rightarrow$ (1) $\min(X,Y)\sim Exp(\lambda_1+\lambda_2)$ (2) $P(X<Y)=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$. $\Rightarrow$ 推广结论即为 hw T8.

Pf: (2) $P(X<Y)=\int_0^\infty P(X<Y|X=x)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx=\int_0^\infty e^{-\lambda_2 x}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ [技巧4：取条件分布再积分]

(1) $P(\min(X,Y)\leq t)=1-P(\min(X,Y)>t)=1-P(X>t)P(Y>t)=1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$

推广：$\{N_i(t)\}\sim P(\lambda_i)$ ~~设~~ $T=\min\{T_1,\dots,T_n\}$，T_i 为第1个事件到来时刻(对 $N_i(t)$) $\Rightarrow T\sim Exp(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)$ $\Rightarrow$ hw 补充 T6

$P(T=T_1)=P(T_1<\min\{T_2,\dots,T_n\})=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}$

拓展：$S_n-S_{n-1}\sim exp(\lambda)$，$S_{N(t)}-S_{N(t)-1}$? ~~$\Rightarrow\Gamma(1,\lambda)$~~ 求期望

到达时间条件分布：Thm 2.3.1 $\{N(t)\}\sim P(\lambda)$ 则 $[(W_1,W_2,\dots,W_n)|N(t)=n]\overset{d}{=}(U_{1:n},U_{2:n},\dots,U_{n:n})$，$U_i\overset{iid}{\sim}U(0,t)$ $U_{1:n}<\cdots<U_{n:n}$ (次序统计量)

注：次序统计量分布 · $X_{(k)}$ pdf $f_{X_{(k)}}(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k}f(x)$

· $(X_{(k)},X_{(l)})$ 联合 pdf $f_{kl}(x,y)=\frac{n!}{(n-l)!(l-k-1)!(k-1)!}(F(x))^{k-1}(F(y)-F(x))^{l-k-1}(1-F(y))^{n-l}f(x)f(y)$，其中 $k<l$.

· $(X_{(1)},\dots,X_{(n)})$ ---- $f(x_1,\dots,x_n)=n!f(x_1)\cdots f(x_n)$ (置换) $x_1<\cdots<x_n$.

结论：$S_k|N(t)=n\overset{d}{=}U_{(k)}$，$S_k$ 分布 $\Rightarrow E(S_k|N(t)=n)=E(U_{(k)})=\frac{tk}{n+1}$.

推论：$\{N(t)\}\sim P(\lambda)$，S_n 为到达时刻，$E\sum_{k=1}^{\infty}f(S_k)=\lambda\int_0^\infty f(t)dt$ $E\sum_{k=1}^{N(t)}f(S_k)=\lambda\int_0^t f(t)dt$.

3. 推广

• 复合Poisson过程 $N(t)\sim P(\lambda)$, $\{Y_k\}$ i.i.d. r.v. $\perp\!\!\!\perp N(t)$, 称 $X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k$ 为复合Poisson过程. 【第1章随机和例题结论】

$\varphi_X(u)=G_{N(t)}(\varphi_Y(u))=e^{\lambda t(\varphi_Y(u)-1)}$, $g_X(u)=e^{\lambda t(g_Y(u)-1)}$

① 考虑 $P(Y_1=c_k)=p_k$, 记 $N_j(t)\sim P(\lambda p_j)$, 则 $X(t)=N_1(t)+2N_2(t)+\cdots+mN_m(t)$

② $N_j(t)\sim P(\lambda_j)$, $\{N_j(t)\}$ 独立 $\Rightarrow$ $X(t)=a_1N_1(t)+\cdots+a_nN_n(t)$ 为复合Poisson过程.

Thm 2.3.2 $\{N_i(t)\}\sim P(\lambda_i)$, $N_1(t)\perp\!\!\!\perp N_2(t)$, $N(t)\triangleq N_1(t)+N_2(t)$ 则 $\{N(t)\}\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

结论: $N_i(t)\sim P(\lambda_i)$, 在 $N_2(t)$ 任意两个间隔时间中 $N_1(t)$ 发生次数 ~ 几何分布 $P(N_1(\underset{\sim}{T_1^2})=k)=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k$ $k=0,1,2,\dots$ （第2过程的T_1）

Poisson过程稀疏化和分类 $\{Z_1,\dots,Z_n\}$ i.i.d. $Z_i\in\{1,\dots,m\}$, $N(t)\sim Poi(\lambda)\perp\!\!\!\perp\{Z_1,\dots,Z_n\}$, $N_k(t)\triangleq\sum_{i=1}^{N(t)}I(Z_i=k)$ $k=1,\dots,m$ $\Rightarrow N_k(t)\sim Poi(\lambda P(Z_i=k))$

Prop 2.3.2 $\{N(t)\}\sim Poi(\lambda)$, 则 $N_1(t)\perp\!\!\!\perp N_2(t)$, 且 $N_1(t)\sim Poi(\lambda p)$, $N_2(t)\sim Poi(\lambda(1-p))$ (可推广到有限/可列事件) $\Rightarrow$ 结论 T_1.

• 更新过程: $\{T_n\}\overset{i.i.d.}{\sim}F$, $F(0^-)=0$, $F(0)<1$, $S_0\triangleq0$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}T_k$, $n\geq1$. $N(t)\triangleq\sup\{n: S_n\leq t, n\geq0\}$ $t\geq0$. 称 $\{N(t)\}$ 为更新过程.

分布: $P(N(t)\geq n)=F^{(n)}(t)$, $m(t)=EN(t)$ $\Rightarrow m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{(n)}(t)$

hw5

T1 $[0,t]$ 内 $\{N(t)\}\sim P(\lambda)$，到达人以 prob $=p$ 进入，是否进入相互独立。进入的以 prob $=q$ 消费。求进店顾客数均值，方差；消费顾客均值，方差。

复合Poisson过程 $X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$，$Y_i\sim$ 进店顾客 $\Rightarrow EX(t)=\lambda t\cdot p$. $VarX(t)=\lambda t EN\cdot VarY+\cancel{\ldots}\ \gamma\cdot VarN=\lambda t\cdot(p-p^2)+p^2\lambda t=\lambda pt$

$EY_i=p,\ VarY_i=p-p^2$

$\tilde{X}(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Z_i$，$Z_i\sim$ 消费顾客 $\begin{cases}1 & pq\\0 & 1-pq\end{cases}$ $\Rightarrow E\tilde{X}(t)=\lambda pqt$，$Var\tilde{X}(t)=\lambda pqt$.

T2. $X(t)$ 独立 $Y(t)$，$X(t)\sim P(\lambda_1)$，$Y(t)\sim P(\lambda_2)$ 求 $X(t)$ 两个相邻事件间隔内，$Y(t)$ 出现 k 个事件概率。

(参考老师课上某页ppt) 记 T 为自 $X(t)$ 第一个事件发生起，第二个事件发生的时间

$$P(N_Y(t)=k)=\int_0^\infty P(N_Y(T)=k|T=t)\lambda_1e^{-\lambda_1t}dt=\int_0^\infty P(N_Y(t)=k|T=t)\lambda_1e^{-\lambda_1t}dt$$

$$\overset{X(t)独立Y(t)}{=}\int_0^\infty P(N_Y(t)=k)\lambda_1e^{-\lambda_1t}dt=\int_0^\infty\frac{(\lambda_2t)^ke^{-\lambda_2t}}{k!}\lambda_1e^{-\lambda_1t}dt$$

$$=\frac{(\lambda_2)^k\lambda_1}{k!}\int_0^\infty t^ke^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}dt=\cancel{\frac{\ }{\lambda_1+\lambda_2}}\frac{(\lambda_2)^k\lambda_1}{k!}\cdot\frac{\Gamma(k+1)}{(\lambda_1+\lambda_2)^{k+1}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k$$

T5. $N(t)\sim P(\lambda)$ 从该过程中每隔一点抽取一个构成一个新的计数过程，新过程是否为Poisson过程？

~~法一~~ 由题意，新过程两个事件间隔时间 $T'\sim\Gamma(2,\lambda)$ [相当于原先两个事件(如1,3/2,4)之间时间和]

由Def 2.2.1 有与Poisson过程定义矛盾 $\Rightarrow$ 不为Poisson过程 (实际上这是一个更新过程)

~~法二：不妨抽1,3,5,…取，则 $P(N_1(t)=1)=P(N(t)=1或2)=P(N(t)=1)+P(N(t)=2)=\lambda t e^{-\lambda t}\ldots(\lambda t)^2$~~

~~$P(N_1(t)=1)=pt$~~

T6 红、黄、蓝三色车 $\sim P(\lambda_i)$ 过站 (1) 不论颜色，第一辆车过站时间的p.d.f和E.

(2) 在已知 t_0 时刻观察到一辆红车条件下 (a) 下一辆仍为红车的prob?

(b) …黄…?

(3) ———————，下面 k 辆全红，而后非红车prob?

(4) 相继两辆红车间过 n 辆蓝车的prob?

(1) 由题意，$N_i(t)$ 第一个事件发生时间记为 $S_i\sim exp(\lambda_i)$，则由课上结论有 $T=\min\{S_1,S_2,S_3\}\sim exp(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$

故 $f_T(t)=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\exp\{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t\}$，$ET=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$

(2) 由指数分布无记忆性性质，从 t_0 开始计时 $P(S_1=\min\{S_1,S_2,S_3\})=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$ (类似hw T8)

$P(S_2=\min\{S_1,S_2,S_3\})=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$

(3) 记T_{yb}为自t起第1辆非红车到达时刻，有$T_{yb}\sim exp(\lambda_2+\lambda_3)$ $\Rightarrow P(N_1(T_{yb})=k)=\left(\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)^k$ (类似T2做法)

(4) 记T_r为 …… ……红车 ……，$T_r\sim exp(\lambda_1)$，$P(N_3(T_r)=n)=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_3}\right)\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_3}\right)^n$ [三种车流相互独立，不必考虑黄车]

hw6

1. 某网站报名，A, B, C 三门，报考比例 35%，40%，25%，报名费 30元，30元，50元，按速率入报名，$\lambda=10$人/天，$X(t)$为到第t天收到的报名费总数，求$EX(t)$，$VarX(t)$，$g_{X(t)}(\mu)=Ee^{\mu X(t)}$

解：由题意，记三门报名人数对应的Poisson过程为$N_i(t)$，其中$i=1,2,3$. $N_i(t)\sim P(\lambda p_i)$，$P_1=0.35$，$P_2=0.4$，$P_3=0.25$

~~记Y_i为对应的报名费 ……$P(Y_i=30)=0.75$，$P(Y_i=50)=0.25$，~~

~~则$X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k$，$N(t)=N_1(t)+N_2(t)+N_3(t)$~~

则$X(t)=30N_1(t)+30N_2(t)+50N_3(t)$ $N_i(t)$间相互独立.(利用课上结论)

$EX(t)=30(EN_1(t)+EN_2(t))+50EN_3(t)=30\cdot\lambda(p_1+p_2)t+50\cdot\lambda\cdot p_3t=350t$.

$VarX(t)=900(Var(N_1(t))+Var(N_2(t)))+2500\,Var(N_3(t))=900\cdot(\lambda\cdot(p_1+p_2)t)+2500\cdot\lambda\cdot p_3t=13000t$.

$g_{X(t)}(\mu)=E(e^{\mu X(t)})=Ee^{30\mu N_1(t)}\cdot Ee^{30\mu N_2(t)}\cdot Ee^{50\mu N_3(t)}=g_{N_1(t)}(30\mu)\cdot g_{N_2(t)}(30\mu)\cdot g_{N_3(t)}(50\mu)$

$g_{N_1(t)}(\mu)=e^{\lambda_1t(e^{\mu}-1)}$，$g_{N_2(t)}(\mu)=e^{\lambda_2t(e^{\mu}-1)}$，$g_{N_3}(t)=e^{\lambda_3t(e^{\mu}-1)}$，其中$\lambda_1=3.5$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=2.5$ 代入上式.

2. Markov X_n，证：$P(X_{n+1}=j\mid X_0=i_0,\dots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i_n)=P(X_{n+1}=j\mid X_n=i_n)$ $\Leftrightarrow$

对任意n,m，所有状态$i_0,\dots,i_n,j_1,\dots,j_m$有$P(X_{n+1}=j_1,\dots,X_{n+m}=j_m\mid X_0=i_0,\dots,X_n=i_n)=P(X_{n+1}=j_1,\dots,X_{n+m}=j_m\mid X_n=i_n)$

证明：$\Rightarrow$，$P(X_{n+1}=j_1,\dots,X_{n+m}=j_m\mid X_0=i_0,\dots,X_n=i_n)=P(X_0=i_0,\dots,X_n=i_n,X_{n+1}=j_1,\dots,X_{n+m}=j_m)/P(X_0=i_0,\dots,X_n=i_n)$

$$=\frac{P(X_0=i_0,\dots,X_n=i_n,X_{n+1}=j_1,\dots,X_{n+m}=j_m)}{P(X_0=i_0,\dots,X_n=i_n,X_{n+1}=j_1,\dots,X_{n+m-1}=j_{m-1})}\cdots\frac{P(X_0=i_0,\dots,X_n=i_n,X_{n+1}=j_1)}{P(X_0=i_0,\dots,X_n=i_n)}$$

$=P(X_{n+m}=j_m\mid X_0=i_0,\dots,X_{n+m-1}=j_{m-1})\cdots P(X_{n+1}=j_1\mid X_0=i_0,\dots,X_n=i_n)$

$\overset{\text{马氏性}}{=}P(X_{n+m}=j_m\mid X_{n+m-1}=j_{m-1})\cdots P(X_{n+1}=j_1\mid X_n=i_n)$

另一方面，$P(X_{n+1}=j_1,\dots,X_{n+m}=j_m\mid X_n=i_n)=\frac{P(X_n=i_n,\dots,X_{n+m}=j_m)}{P(X_n=i_n)}=\frac{P(X_n=i_n,\dots,X_{n+m}=j_m)}{P(X_n=i_n,\dots,X_{n+m-1}=j_{m-1})}\cdots\frac{P(X_n=i_n,\dots,X_{n+1}=j_1)}{P(X_n=i_n)}$

$=P(X_{n+m}=j_m\mid X_n=i_n,\dots,X_{n+m-1}=j_{m-1})\cdots P(X_{n+1}=j_1\mid X_n=i_n)$

$\overset{\text{马氏性}}{=}P(X_{n+m}=j_m\mid X_{n+m-1}=j_{m-1})\cdots P(X_{n+1}=j_1\mid X_n=i_n)$

从而"$\Rightarrow$"得证.

$\Leftarrow$：取$m=1$立得.

T3. 0,1,2 状态. $P=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix} \end{array}$ $p_0=0.3,\ p_1=0.4,\ p_2=0.3$. 求 $P(X_0=0,\ X_1=1,\ X_2=2)$

解: $LHS \overset{(马氏性)}{=} P(X_2=2 \mid X_1=1)\cdot P(X_1=1 \mid X_0=0)\cdot P(X_0=0) = 0.3\cdot 0.2\cdot 0 = 0.$

T4. 信号传送 0,1. 每步出错概率 α. $X_0=0$ 送出, X_n 为第 n 步收. $X_n\sim$ Markov. $P_{00}=P_{11}=1-\alpha$, $P_{10}=P_{01}=\alpha$. $\alpha\in(0,1)$

(1) $P(X_0=0,\ X_1=0,\ X_2=0)$ (2) 两步后收到正确信号.

$$\mathbb{P}=\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 1 & \alpha & 1-\alpha \end{array}$$

(1) $LHS = P(X_2=0 \mid X_1=0)\,P(X_1=0 \mid X_0=0) = (1-\alpha)^2.$

(2) $LHS = P(X_0=0, X_1=0, X_2=0) + P(X_0=0,\ X_1=1,\ X_2=0) = \alpha^2+(1-\alpha)^2 = 2\alpha^2-2\alpha+1.$

(3) (书上) 多步不出错的prob? 求 $\mathbb{P}^n=\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}^n$ 技巧: 特征根分解 (相似)

相似: $P=Q\Lambda Q^T$, Q 正交. ① $|\lambda I-P|=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+2\alpha-1)=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=1-2\alpha.$

$\Downarrow$

② 特征向量 $x_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1-2\alpha\end{pmatrix}$

$\Downarrow$

③ $\mathbb{P}^n = Q\Lambda^n Q^T = Q\cdot\begin{pmatrix}1 & \\ & (1-2\alpha)^n\end{pmatrix}Q^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & (1-2\alpha)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+(1-2\alpha)^n & 1-(1-2\alpha)^n \\ \cdots & 1+(1-2\alpha)^n\end{pmatrix}.$

得 $P(X_5=0 \mid X_0=0) = p_{00}^{5} = \frac{1}{2}[1+(1-2\alpha)^5]$

T5. A,B两罐共N球. 如下试验, 时刻n先N个球中等概率任取一球. 然后A,B两罐任取一个, 取A prob=p (B⇒q)

将选出球放入. X_n 为每次试验时A罐球数. 求 $\mathbb{P}$.

过程叙述:

$$\begin{cases} i\to i+1: & P(X_{n+1}=i+1 \mid X_n=i) = \underset{\uparrow\ \text{选A}}{p}\cdot\underset{\uparrow\ \text{从B中选一个}}{\frac{N-i}{N}} \\ i\to i: & P(X_{n+1}=i \mid X_n=i) = p\cdot\frac{i}{N} + q\cdot\frac{N-i}{N} \\ i\to i-1: & P(X_{n+1}=i-1 \mid X_n=i) = q\cdot\frac{i}{N}. \\ \text{其他}: & 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}=\frac{1}{N}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} Nq & Np & & & & \\ q & p+(N-1)q & (N-1)p & & & \\ & 2q & 2p+(N-2)q & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 2p & \\ & & & (N-1)q & (N-1)p+q & p \\ & & & & Nq & Np \end{pmatrix} \end{array}$$

补充题

1. 甲负责杂志订阅，前来订阅顾客数 $\sim Poi(\lambda)$ — $\{N(t)\}$，$\lambda=6$. 季数 $Y\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$，各人选择独立. $N_i(t)$ 为订阅 i 季杂志顾客数.

$\{X(t)\}$ 为时刻 t 为止甲所得手续费（一季一元）

(1) 问 $N_i(t)$ $i=1,2,3$ 为何过程？是否相互独立？

(2) 求 $EX(t)$，$VarX(t)$，$g_{X(t)}(u)=E[e^{uX(t)}]$

解：(1) 易证 $N_1(t)\sim HPP(3)$，$N_2(t)\sim HPP(2)$，$N_3(t)\sim HPP(1)$ $\quad$ $(N_i(t)\sim Poi(\lambda p_i))$

$$P(N_1(t)=n_1,N_2(t)=n_2,N_3(t)=n_3)=P(N_1(t)=n_1,N_2(t)=n_2,N_3(t)=n_3\mid N(t)=n)\cdot P(N(t)=n) \quad n=n_1+n_2+n_3.$$

$$=C_n^{n_1}C_{n-n_1}^{n_2}C_{n-n_1-n_2}^{n_3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n_1}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n_2}\left(\tfrac{1}{6}\right)^{n_3}\frac{e^{-\lambda t}}{n!}(\lambda t)^n=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n_1}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n_2}\left(\tfrac{1}{6}\right)^{n_3}\cdot\frac{e^{-\lambda t}}{n!}(\lambda t)^n.$$

$$=P(N_1(t)=n_1)\,P(N_2(t)=n_2)\,P(N_3(t)=n_3). \Rightarrow \text{相互独立}$$

(2) $X(t)=N_1(t)+2N_2(t)+3N_3(t)$，$EX(t)=1\cdot 3t+2\cdot 2t+3\cdot 1t=10t$

$VarX(t)=1\cdot 3t+4\cdot 2t+9\cdot 1t=20t.$

$g_{X(t)}(u)=E[e^{uX(t)}]=E[e^{uN_1(t)}]\,E[e^{2uN_2(t)}]\,E[e^{3uN_3(t)}]$

$=g_{N_1(t)}(u)\cdot g_{N_2(t)}(2u)\,g_{N_3(t)}(3u)$

$g\quad =e^{t[3(e^u-1)+2(e^{2u}-1)+1(e^{3u}-1)]}$

2. (2013秋) 科大东区地铁站 $\sim Poi(5)$，到达间隔固定为 20 min.

① 相邻地铁到达间隔内（20 min），到达地铁站的乘客人数分布.

② 每班地铁刚离开 10 min 内，所有到达乘客的总等待时间期望

③ ‑‑‑ 到站前 ‑‑‑‑‑‑‑‑‑‑‑‑‑‑‑‑.

解：① 由泊松过程定义，$P(N(20)=k)=\frac{(5\cdot 20)^k}{k!}e^{-5\cdot 20}=\frac{100^k}{k!}e^{-100}$. 即 $N(20)\sim Poisson(100)$

② 设第 i 个人到达时间为 W_i，则 $E\left(\sum_{i=1}^{N(t)}W_i\mid N(t)=n\right)=E\left(\sum_{i=1}^{n}U_{(i)}\right)=\frac{nt}{2}$. $U_i\sim U(0,t)$

代入 $t=10$ 得 $E\left(\sum_{i=1}^{N(10)}W_i\mid N(10)\right)=5N(10).$

$\Rightarrow E\left(\sum_{i=1}^{N(10)}(20-W_i)\right)=20EN(10)-E\left[E\left(\sum_{i=1}^{N(10)}W_i\mid N(10)\right)\right]=20EN(10)-5EN(10)=15\cdot 5\cdot 10=750$（分钟）

③ 类似地，$E\left(\sum_{i=1}^{N(10)}(20-W_i-10)\right)=10EN(10)-5EN(10)=5\cdot 50=250$（分钟）

利用泊松过程增量平稳性

第一次随机过程

2023秋. $\{N(t)\} \sim HPP(\lambda)$ $Y(t) \hat{=} X\cdot(-1)^{N(t)}$ $X \perp\!\!\!\perp N(t)$. $P(X=a)=P(X=-a)=\frac{1}{4}$. $P(X=0)=\frac{1}{2}$, $a>0$.

$Y(t)$ 宽平稳?

① $EY(t)=EX\,E[(-1)^{N(t)}]=0$ $(EX=0)$

② $R_Y(t_1,t_2)=E[X^2(-1)^{N(t_1)+N(t_2)}] \overset{X\perp\!\!\!\perp N(t)}{=} EX^2\cdot E[(-1)^{N(t_1)+N(t_2)}]=\frac{a^2}{2}\cdot E[(-1)^{2N(t_1)+N(t_2)-N(t_1)}]$

$=\frac{a^2}{2}E[(-1)^{\overbrace{N(t_2)-N(t_1)}^{\sim Poisson((t_2-t_1)\lambda)}}]=\frac{a^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^n}{n!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}=\frac{a^2}{2}\cdot e^{-2\lambda(t_2-t_1)}$ 只与 t_2-t_1 有关

③ $Var\,Y(t)=\frac{a^2}{2}<\infty$ (②中取 $t_1=t_2$)

$\Rightarrow$ 宽平稳.

2024春. $N(t)$ 冲击次数 $\sim HPP(\lambda)$, Y_k 一第k次冲击 $Y(t)$ 总损害 $Y_k\sim exp(\mu)$

求 $T(1)$

求 $EY(t)$, $Var\,Y(t)$, $g_Y(s)$

$EY(t)=EN(t)\,EY_k=\frac{\lambda t}{\mu}$, $Var\,Y(t)=EN(t)\,Var\,Y_k+E^2Y_k\,Var\,N(t)=\lambda t\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{1}{\mu^2}\right)=\frac{2\lambda t}{\mu^2}$.

$g_Y(s)=Ee^{s\cdot Y(t)}=E\,E[e^{s\sum_{i=1}^{n}Y_i}\mid N(t)=n]$

$E[e^{s\sum_{i=1}^{n}Y_i}\mid N(t)=n]=[g_{Y_k}(s)]^n=\left(\frac{\mu}{\mu-s}\right)^n$

$g_Y(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\mu-s}\right)^n\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}=e^{\frac{\mu\lambda t}{\mu-s}}\cdot e^{-\lambda t}=e^{\frac{\lambda s t}{\mu-s}}$.

$Y(t)\perp\!\!\!\perp Z(t)$, $EY(t)=EZ(t)=0$. $EY(t)Y(s)=EZ(t)Z(s)=e^{-|t-s|}$ $X(t)\hat{=}Y(t)\cos(\omega t+\theta)+Z(t)\sin(\omega t+\theta)$ $\theta\in[0,2\pi]$

$X(t)$ 平稳. $\because$

$$\begin{cases} EX(t)=EY(t)\cdot\cos(\omega t+\theta)+EZ(t)\sin(\omega t+\theta)=0. \\ R_X(t_1,t_2)=E[(Y(t_1)\cos(\omega t_1+\theta)+Z(t_1)\sin(\omega t_1+\theta))(Y(t_2)\cos(\omega t_2+\theta)+Z(t_2)\sin(\omega t_2+\theta))] \\ =E[Y(t_1)Y(t_2)\cos(\omega t_1+\theta)\cos(\omega t_2+\theta)+Z(t_1)Z(t_2)\sin(\omega t_1+\theta)\sin(\omega t_2+\theta)] \\ =e^{-|t_1-t_2|}\cdot\cos(\omega(t_1-t_2)) \quad \text{只与 } t_1-t_2 \text{ 有关.} \\ Var(X(t))=1<\infty. \end{cases}$$