随机过程B

陈昱
cyu@ustc.edu.cn

安徽 合肥 中国科学技术大学

2022 年 4 月

第 3 章　Markov 过程

- 马尔可夫链的定义及例子
- 马尔可夫链的状态及分类
- 马尔可夫链的极限性质
- 连续时间马尔可夫链

- 连续时间Markov链的要点仍是Markov性，所谓Markov性就是给定了过程在目前的状态其未来的发展与过去的状况是独立的.
- 状态空间仍然是离散的 $S=\{0,1,2,\ldots\}$，连续时间Markov链与离散时间Markov链的区别在于时间指标参数从离散的 $T=\{0,1,2,\ldots\}$改为连续的实数 $T=\{t:t\geq 0\}$.

- 记号： $\{X(t), t \geq 0\}$，状态空间 $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ CTMC
- Markov 性质： 对 $\forall s, t \geq 0$, 任意状态 i, j, $x(u)$, $0 \leq u < s$, 有

$$\mathrm{P}\left(X(s+t) = j \,|\, X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(X(t+s) = j | X(s) = i\right) = p_{ij}(s, s+t).$$

- 限制之一：只考虑时间齐次的 MC, 记

$$P_{ij}(t) = \mathrm{P}\left(X(t+s) = j \mid X(s) = i\right), \quad \forall s \geq 0.$$

- 基本特征：
  - 当 MC 进入 “i”，该 MC 于 “i” 滞留时间 $\tau_i \sim \mathrm{Exp}(\nu_i)$;
  - 状态转移对应一个离散时间 MC, 转移概率 P_{ij} 满足 $P_{ii} = 0$;
  - MC 于 “i” 滞留时间 τ_i 与下一步转移进入的状态独立.

- **定理：** 连续时间Markov链的转移概率$P_{ij}(t)$和初始分布完全确定了过程的所有联合分布。

- **证：** 对任何$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ 和$i_k, 0 \le k \le n, n = 0, 1, \cdots,$

$$
\begin{aligned}
&P\left\{X\left(t_n\right)=i_n, X\left(t_{n-1}\right)=i_{n-1}, \cdots, X(0)=i_0\right\}\\
&\qquad=P\left\{X\left(t_n\right)=i_n \mid X\left(t_{n-1}\right)=i_{n-1} \cdots, X(0)=i_0\right\}\\
&\qquad\quad\cdot P\left\{X\left(t_{n-1}\right)=i_{n-1} \mid X\left(t_{n-2}\right)=i_{n-2}, \cdots, X(0)=i_0\right\}\\
&\qquad\quad\cdot P\left\{X\left(t_{n-2}\right)=i_{n-2} \mid X\left(t_{n-3}\right)=i_{n-3}, \cdots, X(0)=i_0\right\}\\
&\qquad\quad\cdots P\{X(0)=i_0\}\\
&\qquad=P_{i_{n-1}, i_n}\left(t_n-t_{n-1}\right) P_{i_{n-2}, i_{n-1}}\left(t_{n-1}-t_{n-2}\right) \cdots P_{i_0, i_1}\left(t_1\right) p_{i_0}
\end{aligned}
$$

- **定理：** $P_{ij}(t)$能够作为无瞬即转移的Markov过程的转移概率函数的充分必要条件是它满足:

(1) $P_{ij}(t) \geq 0, \quad \sum_j P_{ij}(t) = 1$ 随机矩阵

(2) $P_{ij}(t+s) = \sum_k P_{ik}(s) P_{kj}(t)$ C-K方程

(3) $\lim_{s \downarrow 0} P\{X(t+s) = i | X(t) = i\} = \lim_{s \downarrow 0} P_{ii}(s) = 1$ 连续性

- 引理 4.4.2

$$P_{ij}(t+s)=\sum_{k=0}^{\infty}P_{ik}(t)P_{kj}(s),\quad s,t\geq 0.$$

证明：

$$\begin{aligned}
&P_{ij}(t+s)\\
&\quad=P[X(t+s)=j|X(0)=i]\quad \text{Definition of } P_{ij}(t+s)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}[X(t+s)=j|X(t)=k,X(0)=i]\mathrm{P}[X(t)=k|X(0)=i]\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}[X(t+s)=j|X(t)=k]P_{ik}(t)\quad \text{无记忆性和马氏性}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}[X(s)=j|X(0)=k]P_{ik}(t)\quad \text{时齐性}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}P_{kj}(s)P_{ik}(t)
\end{aligned}$$

▶ **例子** 考虑Poisson过程$X(t), t \geq 0$. 在时间区间$[t, t+s]$内到达的粒子数服从以λs为参数的Poisson分布. 由独立增量性知:
对$0 \leq t_1 < \cdots < t_n < t$,

$$\begin{aligned} & P\{X(t+s)=k+j \mid X(t)=j, X\left(t_n\right)=j_m \cdots, X\left(t_1\right)=j_1\} \\ & =\frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s}=P\{X(t+s)-X(t)=k\} \\ & =P\{X(t+s)=j+k \mid X(t)=j\} \end{aligned}$$

所以过程$X(t), t \geq 0$有平稳转移概率的连续时间Markov链, 其转移概率为:

$$P_{ij}(t)=\begin{cases} 0, & j<i \\ \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, & j \geq i \end{cases}$$

- 无记忆性 $\Rightarrow$ 给定现在$X(s)$, 将来$X(t+s)$与过去$X(u)=x(u)$, $u<s$相互独立的.

1. T_i表示停留在状态i的时间, 分布为

$$\mathrm{P}\left[T_i > t\right] = \mathrm{P}[X(0:t) = i | X(0) = i]$$

2. 给定$T_i > s$下, $T_i > t+s$的概率

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left[T_i > t+s | T_i > s\right] &= \mathrm{P}[X(0:t+s) = i | X[0:s] = i] \\ &= \mathrm{P}[X(s:t+s) = i | X[0:s] = i] \\ &= \mathrm{P}[X(s:t+s) = i | X(s) = i] \\ &= \mathrm{P}[X(0:t) = i | X(0) = i]\end{aligned}$$

所以$T_i \sim \exp\left(\nu_i\right)$

- 性质：
  - 当 MC 进入“i”，且已知下一次将转入“j”条件下，MC 于“i”滞留时间分布 $F_{ij} = \mathrm{Exp}(\nu_i)$，与 j 无关.
  - 转移概率矩阵 $\mathbf{P} = (P_{ij})$ 满足

$$P_{ii} = 0, \quad \forall\ i.$$

一般总假定 $0 \le \nu_i < \infty$:

- i 称为瞬态的，若 $\nu_i = \infty$;
- i 称为吸收的，若 $\nu_i = 0$.

- 限制之二：只考虑规则的 MC. 一个连续时间 MC 称为是规则的，若有限时间内转移次数有限.

【例】 非规则 MC 的存在性：$P_{i,i+1}=1,\ \nu_i=(i+1)^2,\ i\geq 0.$

- 转移速率：无穷小分析法

$$\mathrm{P}\left(\text{于}\ (t,t+\Delta t)\ \text{访问状态}\ j\,|\,X(t)=i\right)=q_{ij}\Delta t+\circ(\Delta t),$$

其中

$$\underbrace{q_{ij}}_{\text{转移速率}}=\underbrace{\nu_i}_{\text{离开 } i \text{ 的速率}}\cdot\underbrace{P_{ij}}_{\text{由 } i \text{ 转入 } j \text{ 的概率}},\quad i\neq j.$$

$$\{\nu_i\},\ \{P_{ij}\}\longleftrightarrow\{q_{ij}\}$$

§4 连续时间 MC—Embedded discrete time MCs

一个具有转移概率矩阵**P**和转移率ν_i的连续时间的MC$\{X_t, t \geq 0\}$，相当于状态之间转移是按照离散时间的MC转移，转移之前停留在状态i的时间是服从参数为ν_i的指数分布.

- 一个转移概率矩阵**P** 描述了一个离散时间的MC
- 状态不能转移到自己$P_{ii} = 0$，该矩阵是对角全为0的一个矩阵
- 用离散时间的MC来理解CTMC.

利用离散时间的MC的来理解连续时间的MC的性质：

- 可达
- 互达
- 常返与瞬过

q_{ij} 已知，则ν_i 满足

$$\nu_i = \nu_i \sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} P_{ij} = \sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} \nu_i P_{ij} = \sum_{j=1, j\neq 1}^{\infty} q_{ij}$$

若P_{ij} 已知，$\Rightarrow P_{ij} = q_{ij}/\nu_i = q_{ij}\left(\sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} q_{ij}\right)^{-1}$

生灭过程：Birth and death process

▶ 定义 $\{X(t)\}$ 称为是一个生灭过程，如果

$$
\begin{aligned}
q_{ij} &= 0, \quad |i-j| > 1, \\
q_{i,i+1} &= \lambda_i \ (\text{出生率}), \quad i \geq 0, \\
q_{i,i-1} &= \mu_i \ (\text{死亡率}), \quad i \geq 1.
\end{aligned}
$$

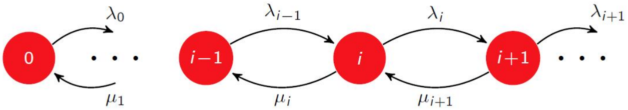
注

- 一个 MC 的结构由 $\{q_{ij}\}$ 所唯一确定 (约定 $\mu_0 = 0$):

$$\nu_i = q_{i,i+1} + q_{i,i-1}, \qquad P_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} = 1 - P_{i,i-1}.$$

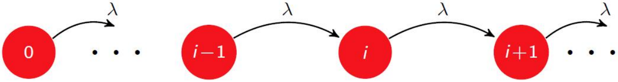
- 当系统处于 "i"，等待进入 "$i+1$" 的时间 $\sim \mathrm{Exp}(\lambda_i)$, 等待进入 "$i-1$" 的时间 $\sim \mathrm{Exp}(\mu_i)$, 且相互独立. 因此，在 "i" 滞留时间 $\tau_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i + \mu_i)$. [用 HPP 理论加以证明]

生灭过程的转移率图



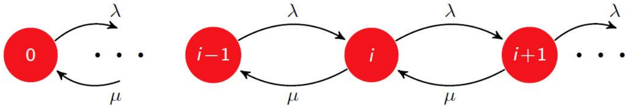
例：一个Poisson过程即为一个生灭过程，其中

$$\lambda_i = \lambda, \quad \mu_i = 0.$$



例：$M/M/1$排队论：一个服务器，顾客来到过程为Poisson过程，服务器的服务时间服从指数分布.

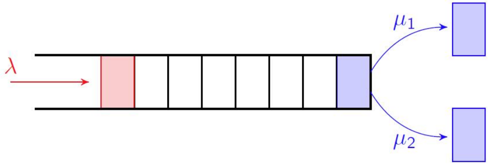
状态转移率图为



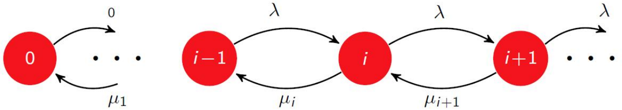
▶ 【例 4.3(A)】 (i) M/M/s-系统: 顾客到达间隔 iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, 每位顾客需要的服务时间 iid $\sim \mathrm{Exp}(\mu)$. 记 $X(t)$ 为时刻 t 系统里的顾客人数, 则 $\{X(t)\}$ 为一个生灭过程, 其中

$$\lambda_n = \lambda, \quad n \geq 0,$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n \leq s, \\ s\mu, & n > s. \end{cases}$$



状态转移率图为



- 【例 4.3(A)】(ii) 具有迁入的线型增长过程：记 $X(t)$ 为时刻 t 一个群体的大小，该群体中每个个体以强度 λ 产生后代，以强度 μ 死亡．同时，外部人口以强度 θ 进入该群体，则 $\{X(t)\}$ 为一个生灭过程，其中

$$\lambda_n = n\lambda + \theta, \quad n \geq 0,$$

$$\mu_n = n\mu, \quad n \geq 1.$$

- 定义
  - 纯生过程：$\mu_i = 0,\ i \geq 1$;
  - 纯灭过程：$\lambda_i = 0,\ i \geq 0$.

- Yule 过程：一个特殊的纯生过程 $\{X(t)\}$: $\lambda_n = n\lambda$, $n \geq 0$. 记

$$T_i = \text{第 } (i-1) \text{ 个出生到第 } i \text{ 个出生之间的时间间隔}, \quad i \geq 1,$$

即 T_i表示个体数从i变为$i+1$的时间, $T_i \sim Exp\{i\lambda\}$. 定义

$$S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n, \quad n \geq 1.$$

假设 $X(0) = 1$, 感兴趣的问题：

- S_i 的分布;
- $P_{ij}(t)$;
- $[(S_1, S_2, \ldots, S_n)|X(t) = n+1]$ 的条件联合分布.

(续) (i) 利用

$$S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n, \quad n \ge 1$$

其中 $T_i \sim \mathrm{Exp}(i\lambda)$, $i \ge 1$, 相互独立. 归纳证明:

$$\mathrm{P}\left(S_n \le t\right) = (1 - e^{-\lambda t})^n, \quad n \ge 1.$$

(ii) 求 $P_{ij}(t)$. 注意到 $\mathrm{P}\left(S_j \le t\right) = \mathrm{P}\left(X(t) \ge j+1 | X(0) = 1\right)$, 于是,

$$P_{1j}(t) = \mathrm{P}\left(S_{j-1} \le t\right) - \mathrm{P}\left(S_j \le t\right) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{j-1}, \quad j \ge 1,$$

即 $[X(t)|X(0) = 1] \sim \mathrm{Geo}(e^{-\lambda t})$, 从而

$$P_{ij}(t) = \binom{j-1}{i-1} e^{-\lambda t i}(1 - e^{-\lambda t})^{j-i}, \quad j \ge i \ge 1,$$

$$\mathrm{E}\left[X(t)|X(0) = 1\right] = e^{\lambda t}.$$

(续) (iii)

$$[(S_1, S_2, \ldots, S_n)|X(t) = n+1] \overset{\mathrm{d}}{=} (V_{1:n}, V_{2:n}, \ldots, V_{n:n}),$$

其中 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ iid, 具有共同的 pdf

$$f(s) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda(t-s)}}{1-e^{-\lambda t}}, & s \in (0, t), \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

Step 1: 先求出 $[(T_1, T_2, \ldots, T_n)|X(t) = n+1]$ 的条件 pdf

$$g_1(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda t_1} \cdot 2\lambda e^{-2\lambda t_2} \cdots (n\lambda) e^{-n\lambda t_n} \cdot e^{-(n+1)\lambda(t-t_1-\cdots-t_n)}}{\mathrm{P}\left(X(t) = n+1 | X(0) = 1\right)}$$

$$\forall\ t_i > 0, i = 1, \ldots, n, t > \sum_{k=1}^{n} t_k.$$

Step 2: 先求出 $[(S_1, S_2, \ldots, S_n)|X(t) = n+1]$ 的条件 pdf

$$
\begin{aligned}
& g_2(s_1, s_2, \ldots, s_n) \\
= \ & \frac{\lambda e^{-\lambda s_1} \cdot 2\lambda e^{-2\lambda(s_2 - s_1)} \cdots (n\lambda) e^{-n\lambda(s_n - s_{n-1})} \cdot e^{-(n+1)\lambda(t - s_n)}}{\mathrm{P}\left(X(t) = n+1 | X(0) = 1\right)} \\
= \ & n! \lambda^n \prod_{j=1}^{n} \frac{e^{-\lambda(t - s_j)}}{1 - e^{-\lambda t}} = n! \prod_{j=1}^{n} f(s_j), \\
& \qquad \forall\ 0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n < t.
\end{aligned}
$$

※

$$
[(S_1, S_2, \ldots, S_n)|S_{n+1} = t] \overset{\mathrm{d}}{=} (V_{1:n} V_{2:n}, \ldots, V_{n:n}),
$$

其中 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ iid, pdf 同上.

▶【例 4.3 (B)】 考虑一个 Yule 过程 $\{X(t)\}$, 其中 $X(0)=1$, $A(t)$ 为时刻 t 群体中个体年龄之和. 求 $\mathrm{E}\,A(t)$.

解：记 a_0 为初始个体于时刻 0 的年龄，则

$$
\begin{aligned}
A(t) &= a_0 + t + \sum_{i=1}^{X(t)-1} (t - S_i), \\
\mathrm{E}\left[A(t)|X(t)=n+1\right] &= a_0 + t + \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{X(t)-1} (t - S_i)|X(t)=n+1\right] \\
&= a_0 + t + \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} (t - V_{i:n})\right] \\
&= a_0 + t + n(t - \mathrm{E}\,V_1),
\end{aligned}
$$

其中 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ iid, 同前. ∎

▶ 【例 4.3 (C)】(流行病模型) 考虑一个有 m 位成员的群体，于时刻 0 有一个 “已感染” 和 $m-1$ 个 “易感染” 个体. 每个个体一旦感染某病毒，则永远保持此状态. 假设任意一个已感染的个体以强度 α 使得任意一个易感染个体感染此病毒. 记 $X(t)$ 为时刻 t 群体中已感染的人数，则 $\{X(t)\}$ 为一个纯生过程，出生率

$$\lambda_n = n(m-n)\alpha, \quad n = 1, \ldots, m.$$

记 T 为整个群体都变成 “已感染” 的时刻，求 $\mathrm{E}\, T$.

解： 记 T_i 为从 i 个已感染个体到 $i+1$ 个已感染的时间间隔，则 $T_1, \ldots, T_{n-1}$ 独立，$T_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i)$，且

$$T = T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-1}.$$

$\cdots\cdots$ ($\surd$).

Roadmap to determine $P_{ij}(t)$

转移概率函数

$$P_{ij}(t) := \mathrm{P}[X(t+s) = j | X(s) = i]$$

约定$P_{ij}(0) = 1, P_{ii}(0) = 1$. 采用如下的无穷小分析法求$P_{ij}(t)$

1. 对小区间长度h, 计算$P_{ij}(t)$
2. 先从0到t再到$t+h$ 向前方程
3. 或者从0到h再到$t+h$ 向后方程

- 引理 4.4.1

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-P_{ii}(t)}{t}=\nu_i;\qquad \lim_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t)}{t}=q_{ij},\quad i\neq j.$$

- 因为$P_{ij}(0)=0, P_{ii}(0)=1$, 则上述极限相当于是在$t=0$处的导数

$$\left.\frac{\partial P_{ij}(t)}{\partial t}\right|_{t=0}=q_{ij},\quad \left.\frac{\partial P_{ii}(t)}{\partial t}\right|_{t=0}=-\nu_i=q_{ii}$$

- 对充分小的h, 有(利用Taylor公式)

$$P_{ij}(h)=q_{ij}h+o(h),\quad P_{ii}(h)=1-\nu_i h+o(h)$$

- Transition rates q_{ij} are "instantaneous transition probabilities" $\Rightarrow$ Transition probability coefficient for small time h 统一写成

$$\lim_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t)-P_{ij}(0)}{t}=q_{ij}$$

- **证明** 仅证

$$\Delta(t) \equiv \mathrm{P}\left(\text{于 } (0,t] \text{ 有至少两次转移} | X(0)=i\right) = \circ(t). \qquad (*.1)$$

注意到

$$\begin{aligned}\Delta(t) &= \sum_{k\neq i} \mathrm{P}\left(\text{于 } (0,t] \text{ 有至少两次转移, 且首次进入 “}k\text{” } | X(0)=i\right) \\ &\leq \sum_{k\neq i, k\leq m} \mathrm{P}\left(\tau_i+\tau_k\leq t\right) P_{ik} + \sum_{k=m+1}^{\infty} P_{ik} \mathrm{P}\left(\tau_i\leq t\right),\end{aligned}$$

其中 $\tau_i \sim \mathrm{Exp}(\nu_i)$, $\tau_k \sim \mathrm{Exp}(\nu_k)$, $i\neq k$, 相互独立. 于是,

(续) 先固定 m,

$$\Delta(t) \le \sum_{k\neq i, k\le m} P_{ik} \int_0^t \left(1 - e^{-\nu_k (t-s)}\right) \nu_i e^{-\nu_i s} ds + (1 - e^{-\nu_i t}) \sum_{k=m+1}^{\infty} P_{ik}$$

$$\le \circ(t) + (1 - e^{-\nu_i t}) \sum_{k=m+1}^{\infty} P_{ik}.$$

$\Longrightarrow$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Delta(t)}{t} \le \nu_i \sum_{k=m+1}^{\infty} P_{ik} \longrightarrow 0 \quad (\text{令 } m \to \infty).$$

得证 (∗.1). ∎

- 定理 4.4.3 (Kolmogorov 向后微分方程) 对任意 i, j 和 $t \geq 0$,

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - \nu_i P_{ij}(t).$$

- $\nu_i P_{ij}(t) =$ (transition into j in $h \to t$)$\times$
(do not do that if leave i in initial instant)
- $q_{ik} P_{kj}(t) =$ (rate of transition into k in $0 \to h$)$\times$
(transition from k into j in $h \to t$)
- Forward equations $\Rightarrow$ change in $P_{ij}(t)$ if finish h later
- Backward equations $\Rightarrow$ change in $P_{ij}(t)$ if start h later
- Where process goes (forward) $\Leftrightarrow$ where process comes from (backward)

证： 由引理 4.4.2, $P_{ij}(t+h)=\sum_{k=0}^{\infty}P_{ik}(h)P_{kj}(t)$

$$\Longrightarrow \frac{P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)}{h}=\sum_{k\neq i}^{\infty}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t)-\frac{1-P_{ii}(h)}{h}P_{ij}(t).$$

仅证：

$$\lim_{h\to 0}\sum_{k\neq i}^{\infty}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t)=\sum_{k\neq i}q_{ik}P_{kj}(t). \qquad (*.2)$$

(续) 易证

$$\liminf_{h\to 0}\sum_{k\neq i}^{\infty}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t)\geq\sum_{k\neq i}q_{ik}P_{kj}(t). \qquad (*.3)$$

另一方面, 取 $m>i$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\neq i}^{\infty}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t) &\leq \sum_{k\neq i,k\leq m}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t)+\sum_{k>m}\frac{P_{ik}(h)}{h}\\
&= \sum_{k\neq i,k\leq m}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t)+\frac{1-P_{ii}(h)}{h}-\sum_{k\neq i,k\leq m}\frac{P_{ik}(h)}{h}\\
&\xrightarrow{h\to 0} \sum_{k\neq i,k\leq m}q_{ik}P_{kj}(t)+\underbrace{\nu_i-\sum_{k\neq i,k\leq m}q_{ik}}\\
&\xrightarrow{m\to\infty} \sum_{k\neq i}q_{ik}P_{kj}(t)\quad \left(\nu_i=\sum_{k\neq i}q_{ik}\right). \qquad (*.4)
\end{aligned}$$

$(*.3)+(*.4)\Longrightarrow(*.2)$. ∎

- 注 4.4.1

1. “向后微分方程”名称的来源.
2. 定义 $q_{ii} = -\nu_i$,

$$\boldsymbol{Q} = (q_{ij})_{S\times S}, \quad \boldsymbol{P}(t) = (P_{ij}(t))_{S\times S}, \quad \boldsymbol{P}'(t) = (P'_{ij}(t))_{S\times S},$$

则定理 4.4.3 可表为

$$\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t).$$

3. 类似, 在一定的正则条件下, 存在向前微分方程

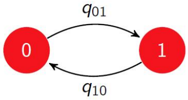
$$\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q},$$

即

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)q_{kj} - P_{ij}(t)\nu_j, \quad \forall, i, j.$$

两个状态的CTMC

两状态 MC $\{X(t)\}$, $S=\{0,1\}$, 转移率分别为q_{01} 和q_{10},



求转移概率函数

$$P_{00}(t), \quad P_{01}(t), \quad P_{10}(t), \quad P_{11}(t).$$

利用Kolmogorov向前方程

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k=0,k\neq j}^{\infty} q_{kj} P_{ik}(t) - \nu_j P_{ij}(t)$$

则有

$$P'_{00}(t) = q_{10}\left[1 - P_{00}(t)\right] - q_{01} P_{00}(t) = q_{10} - \left(q_{10} + q_{01}\right) P_{00}(t)$$

利用$P_{00}(t)=1$ 有

$$1=\frac{q_{10}}{q_{10}+q_{01}}+c \Rightarrow c=\frac{q_{01}}{q_{10}+q_{01}}$$

求解$P_{00}(t)$

$$P_{00}(t)=\frac{q_{10}}{q_{10}+q_{01}}+\frac{q_{01}}{q_{10}+q_{01}}e^{-(q_{10}+q_{01})t}$$

类似对$P_{11}(t)$有

$$P_{11}(t)=\frac{q_{01}}{q_{10}+q_{01}}+\frac{q_{10}}{q_{10}+q_{01}}e^{-(q_{10}+q_{01})t}$$

▶ 【例 4.4(A)】 两状态 MC $\{X(t)\}$, $S=\{0,1\}$, 于状态 “0” 滞留时间 $\tau_0 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, 于状态 “1” 滞留时间 $\tau_1 \sim \mathrm{Exp}(\mu)$. 于是,

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

向前微分方程为

$$P_{00}'(t)=-\lambda P_{00}(t)+\mu P_{01}(t)=\mu-(\lambda+\mu)P_{00}(t),$$

$\xRightarrow{P_{00}(0)=1}$

$$P_{00}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}, \quad t\geq 0.$$

再由对称性,

$$P_{11}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}, \quad t\geq 0.$$

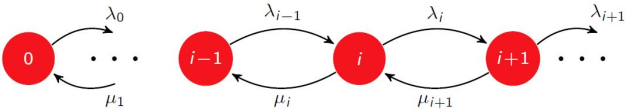
▶ 【例 4.4(B)】 生灭过程: $q_{ij}=0,\ |i-j|>1$; $q_{i,i+1}=\lambda_i,\ i\geq 0$; $q_{i,i-1}=\mu_i,\ i\geq 1$. 于是,

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{P}'(t)=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}$ 得向前微分方程

$$P'_{i0}(t)=-\lambda_0 P_{i0}(t)+\mu_1 P_{i1}(t),\quad i\geq 0,$$

$$P'_{ij}(t)=\lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t)-(\lambda_j+\mu_j)P_{ij}(t)+\mu_{j+1}P_{i,j+1}(t),\quad j\geq 1.$$



连续时间 MC $\{X(t)\}$ 是特殊的半马氏过程，其中：

$$\tau_i \sim H_i(x) = F_{ij}(x) = e^{-\nu_i x}, \ \forall\, j.$$

- 记号：

  $\{\pi_i, i \in S\}$ 嵌入 MC 的平稳分布（假设该链不可约正常返）

  $$\pi_i \longleftarrow \boldsymbol{P} = (P_{ij}).$$

  $\{P_i, i \in S\}$ $\{X_n\}$ 的稳态分布 [存在性已由 SMC 理论保证]

  $$P_j = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\left(X(t) = j | X(0) = i\right) = \frac{\pi_j/\nu_j}{\sum_k \pi_k/\nu_k}.$$

- 问题： 如何用 $\{q_{ij}\}$ 表示 $\{P_i\}$?

$$\{\nu_i\},\ \{P_{ij}\} \longleftrightarrow \{q_{ij}\}$$

注意到

$$P_j = \frac{\pi_j/\nu_j}{\sum_k \pi_k/\nu_k} \quad \Longrightarrow \quad \pi_j = c\, P_j \nu_j, \tag{$*.5$}$$

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}. \tag{$*.6$}$$

$(*.5)$ 代入 $(*.6)$ 得

$$P_j \nu_j = \sum_i P_i \nu_i P_{ij} = \sum_{i \neq j} P_i q_{ij} \qquad [P_{ii} = 0]$$

即

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{Q} = \mathbf{0}, \tag{$*.7$}$$

其中 $\boldsymbol{p} = (P_0, P_1, \ldots)$ 且 $\sum_i P_i = 1$.

※ $(*.7)$ 的一个看法：向前微分方程 $\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}'(t) \to \mathbf{0}$.

▶ 注记:

- P_j 是长时间后过程处于 “j” 的时间占比.
- 若 $X(0) \sim \text{pmf}\,\{P_i\}$, 则 $X(t) \sim \text{pmf}\,\{P_i\}$. 证：取定 “$k$”，

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X(t)=j\right) &= \sum_i P_i P_{ij}(t) = \sum_i \left(\lim_{s\to\infty} P_{ki}(s)\right) P_{ij}(t) \\
&\overset{?}{=} \lim_{s\to\infty} \sum_i P_{ki}(s) P_{ij}(t) \\
&= \lim_{s\to\infty} P_{kj}(s+t) \\
&= P_j.
\end{aligned}$$

以下往证 “$\overset{?}{=}$” 成立. 首先，利用常规技巧可得

$$\liminf_{s\to\infty} \sum_i P_{ki}(s) P_{ij}(t) \geq \sum_i \left(\lim_{s\to\infty} P_{ki}(s)\right) P_{ij}(t).$$

(续) 另一方面，先取定 m,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} P_{ki}(s)P_{ij}(t) &\leq \sum_{i=0}^{m} P_{ki}(s)P_{ij}(t) + \sum_{i=m+1}^{\infty} P_{ki}(s) \\
&= \sum_{i=0}^{m} P_{ki}(s)P_{ij}(t) + 1 - \sum_{i=0}^{m} P_{ki}(s) \\
&\xrightarrow{s\to\infty} \sum_{i=0}^{m} P_i P_{ij}(t) + 1 - \underbrace{\sum_{i=0}^{m} P_i}\,.
\end{aligned}$$

令 $m \to \infty$ 得

$$\limsup_{s\to\infty} \sum_i P_{ki}(s)P_{ij}(t) \leq \sum_i P_i P_{ij}(t).$$

得证 “$\overset{?}{=}$” 成立.

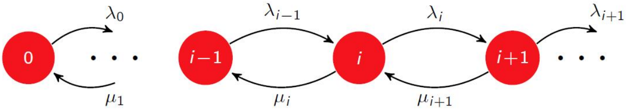
(续)

$$P_j = \sum_i P_i P_{ij}(t), \quad \forall\ t > 0. \qquad (*.8)$$

- 若 $X(0) \sim \text{pmf}\,\{P_i\}$, 则 $\big(X(t_1+h),\ldots,X(t_n+h)\big)$ 分布与 h 无关.
- $$\underbrace{P_j v_j}_{\text{过程离开“}j\text{”的速率}} = \underbrace{\sum_{i\neq j} P_i q_{ij}}_{\text{过程进入“}j\text{”的速率}}$$

$\boxed{\text{当系统处于平衡时, 在 } (0,t] \text{ 时间段进入“}j\text{”和离开“}j\text{”的次数相差不超过 1 次, 因此长时间之后过程离开和进入“}j\text{”的速度相同.}}$

- 【例】 生灭过程



$$\text{Rate out of } j = \text{Rate into } j$$

利用上式有

$$(\lambda_i + \mu_i) P_i = \lambda_{i-1} P_{i-1} + \mu_{i+1} P_{i+1}$$
$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

- 【例】 生灭过程

状态	过程离开的速率		过程进入的速率
0	$P_0\lambda_0$	$=$	$P_1\mu_1$
1	$P_1(\lambda_1+\mu_1)$	$=$	$P_2\mu_2+P_0\lambda_0$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n	$P_n(\lambda_n+\mu_n)$	$=$	$P_{n+1}\mu_{n+1}+P_{n-1}\lambda_{n-1}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

$\Longrightarrow$

$$P_0\lambda_0=P_1\mu_1, \qquad P_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0$$

$$P_1\lambda_1=P_2\mu_2, \qquad P_2=\frac{\lambda_1}{\mu_2}P_1$$

$$P_n\lambda_n=P_{n+1}\mu_{n+1} \qquad P_{n+1}=\frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}P_n, \quad n\geq 0.$$

(续)

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1} P_0, \quad n \geq 1.$$

由 $\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$ 得

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1}\right]^{-1}.$$

※ 生灭过程存在稳态分布的充分必要条件为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1} < \infty. \qquad (*.9)$$

▶ 【例 4.5(A)】 (M/M/1 系统) 顾客到达过程服从强调 λ 的 Poisson 过程, 服务时间服从 $\mathrm{Exp}(\mu)$ 分布. 记 $X(t)$ 为时刻 t 系统里顾客人数, 于是 $\{X(t)\}$ 为一个特殊的生灭过程, 其中 $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$. 此时,

$$(*.9) \iff \rho := \frac{\lambda}{\mu} < 1,$$

且

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{1+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda/\mu)^k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right), \quad n \geq 0.$$

※ 当 $t \to \infty$ 时, $X(t) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{Geo}(1-\lambda/\mu)$.

※ $\rho < 1$ 指系统到达率小于服务率.

※ $\rho = 1$ 指系统到达率与服务率相同. 此时, 不可约 MC 为零常返的. 事实上, $P_n = 0$. 若 MC 为常返, 则由 SMC 理论得

$$P_n = \frac{\mathrm{E}\,\tau_n}{\mathrm{E}\,T_{nn}}, \quad \mathrm{E}\,\tau_n = \frac{1}{\lambda+\mu} \Longrightarrow \mathrm{E}\,T_{nn} = +\infty.$$

▶ 【例 4.5(B)】 考虑一个由 M 个元件组成的系统，现有一个修理工. 每个元件独立工作，工作时长 $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$; 元件一旦失效，立即进行（排队等待）修理，每个失效元件修理时间 $\sim \mathrm{Exp}(\mu)$. 记 $X(t)$ 为时刻 t 系统失效的元件个数，于是 $\{X(t)\}$ 为一个生灭过程，$S=\{0,1,\ldots,M\}$,

$$\lambda_n=(M-n)\lambda, \quad \mu_n=\mu.$$

$\Longrightarrow$

$$P_0=\left[1+\sum_{n=1}^{M}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{M!}{(M-n)!}\right]^{-1}, \quad P_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{M!}{(M-n)!}P_0, \; n\in S.$$

※ 长时间运行下去，系统处于失效状态元件期望个数 $\sum_n nP_n$ ($\surd$).

※ 长时间运行下去，指定元件 i 在工作的概率为

$$\sum_{n=0}^{M}\mathrm{P}\,(\text{元件 } i \text{ 工作}|\text{系统 } n \text{ 个元件失效})=\sum_{n=0}^{M}\frac{M-n}{M}P_n.$$