随机过程B

陈昱
cyu@ustc.edu.cn

cyu@ustc.edu.cn
东区管理科研楼 1003

March 24, 2024

第 2 章　Poisson 过程

- Poisson 过程定义
- 与 Poisson 过程相关的若干分布
- 更新过程

第 2 章　Poisson 过程

- Poisson 过程定义
- 与 Poisson 过程相关的若干分布
- 更新过程

第 2 章　Poisson 过程

- Poisson 过程定义
- 与 Poisson 过程相关的若干分布
- 更新过程

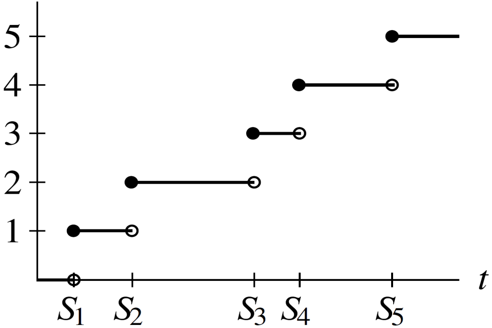
第 2 章　Poisson 过程

- Poisson 过程定义
- 与 Poisson 过程相关的若干分布
- 更新过程

计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为计数过程，若

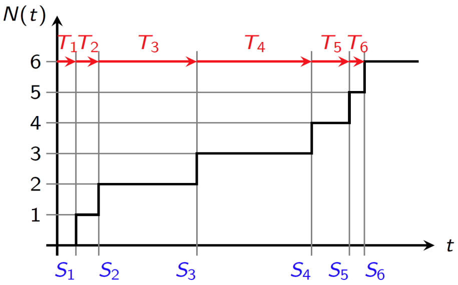
- $N(t)$ 取非负整数；(Nonnegative integer valued)
- $N(s) \leq N(t)$, $\forall s < t$; (Nondecreasing)
- 对于任意 $s < t$, $N(t) - N(s)$ 表示在时间段 $(s, t]$ 内发生的事件数. (event counter)

$N(t)$是右连续轨道。



- **定义 2.1.1** 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度 λ 的 Poisson 过程, 若
  (i) $N(0) = 0$;
  (ii) 过程具有独立增量;
  (iii) $N(t+s) - N(s) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$, $\forall\, s, t \geq 0$; i.e., 对任意的 $s, t \geq 0$ (与s无关, 平稳增量)

$$\mathrm{P}\left(N(t+s) - N(s) = n\right) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$



注 (Poisson 过程的基本性质):

- 由 (i) $N(0)=0$ 知计数从时刻 0 开始.
- (iii) 为过程名称的缘由, 由 (iii), 我们有

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathrm{Var}[N(t)] = \lambda t, \ \ \forall\, t \geq 0;$$

- 单位时间内事件发生的平均个数为

$$\lambda = \frac{\mathbb{E}[N(t)]}{t}$$

故称 λ 为过程的强度或者速率.

- 由 (iii)知Poisson 过程具有平稳增量，从而具有平稳独立增量;
- (i) 和 (ii) 较为容易验证，(iii) 的验证较困难, 我们引入 Poisson 过程的另一个描述性定义

引入记号

$$f(h) = o(h), \text{ 如果 } \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

▶ 定义 2.1.2 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度 λ 的 Poisson 过程, 若

(1) $N(0) = 0$;

(2) 过程具有平稳增量和独立增量性质;

(3) $\mathrm{P}(N(h) = 1) = \lambda h + \circ(h)$;

(4) $\mathrm{P}(N(h) \geq 2) = \circ(h)$.

$\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度 λ 的 Poisson 过程, 记为 $\mathrm{P}(\lambda)$

引入记号

$$f(h)=o(h),\ \text{如果}\ \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0.$$

- **定义 2.1.2** 计数过程 $\{N(t),t\geq 0\}$ 称为强度 λ 的 Poisson 过程, 若

(1) $N(0)=0$;

(2) 过程具有平稳增量和独立增量性质;

(3) $\mathrm{P}\left(N(h)=1\right)=\lambda h+\circ(h)$;

(4) $\mathrm{P}\left(N(h)\geq 2\right)=\circ(h)$.

$\{N(t),t\geq 0\}$ 称为强度 λ 的 Poisson 过程，记为 $\mathrm{P}(\lambda)$

注:

- (2) 说明在互不相交的区间内事件发生数目是相互独立的;
- (3) 说明短时间内事件发生的概率 $p=\lambda h$ 很小
- (3)+(4)说明短时间内事件不发生的概率 $1-\lambda h$; 这刚好是独立的 Bernoulli 试验模型.
- 说明事件是一件一件地发生的，在同一瞬间发生多个事件的概率为 0.

§2.1 Poisson 过程定义解释

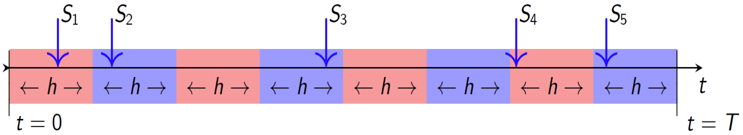
1. 考虑$[0,T]$区间，等分为n个小区间
2. $h=T/n$，第m个小区间为$((m-1)h,mh]$
3. 记A_m为第m个小区间里发生的事件数

$$A_m=N(mh)-N((m-1)h).$$

4. $[0,T]$发生的事件数为(N(0)=0)所有A_m，$m=1,\cdots,n$的和

$$N(T)=\sum_{m=1}^{n}A_m=\sum_{m=1}^{n}N(mh)-N((m-1)h$$

看下图：$N(T)=5, A_1, A_2, A_4, A_7, A_8$ 为1 and A_3, A_5, A_6 为0.



§2.1 Poisson 过程定义解释

1. 注意到定义中具有平稳增量，于是有

$$\mathrm{P}\left(A_m = k\right) = \mathrm{P}(N(mh) - N((m-1)h) = k) = \mathrm{P}(N(h) = k)$$

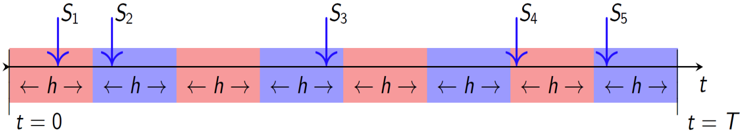
2. 由定义中的(3)和(4)

$$\mathrm{P}\left(A_m = 1\right) = \mathrm{P}(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$$
$$\mathrm{P}\left(A_m > 1\right) = \mathrm{P}(N(h) > 1) = o(h)$$

3. $o(h)$ 关于λh可以忽略不计(高阶无穷小)

$$\mathrm{P}\left(A_m = 1\right) = \lambda h, \quad \mathrm{P}\left(A_m = 0\right) = 1 - \lambda h$$

$\Rightarrow A_m$ Bernoulli 随机变量$B(1, \lambda h)$



- 定理 2.1.1 定义 2.1.1 $\Longleftrightarrow$ 定义 2.1.2

分析：($\Longleftarrow$) 仅证明 $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$. 为此，将 $[0, t]$ 区间 k 等分：$I_{kj}, j = 1, \ldots, k$. 记 N_K^* 为发生事件的区间数.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\,(\text{在某个区间发生事件数} \geq 2) \\
&\quad \leq \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}\,(\text{在区间 } I_{kj} \text{ 发生事件数} \geq 2) = k \circ \left(\frac{t}{k}\right) = \circ(1).
\end{aligned}$$

于是，$N_k^* \sim B(k, \lambda t/k + \circ(1/k))$, 且 $N_k^* \to N(t)$, $k \to \infty$. 故

$$N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t).$$

- **定理 2.1.1** 定义 2.1.1 $\Longleftrightarrow$ 定义 2.1.2

分析：($\Longleftarrow$) 仅证明 $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$. 为此，将 $[0, t]$ 区间 k 等分：$I_{kj}, j = 1, \ldots, k$. 记 N_K^* 为发生事件的区间数.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\,(\text{在某个区间发生事件数} \geq 2) \\
&\quad \leq \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}\,(\text{在区间 } I_{kj} \text{ 发生事件数} \geq 2) = k \circ \left(\frac{t}{k}\right) = \circ(1).
\end{aligned}
$$

于是，$N_k^* \sim B(k, \lambda t/k + \circ(1/k))$, 且 $N_k^* \to N(t)$, $k \to \infty$. 故

$$
N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t).
$$

证明：($\Longleftarrow$) 仅证 $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$. 记 $p_n(t) = \mathrm{P}\left(N(t) = n\right)$. 由

$$p_0(t+h) = \mathrm{P}\left(N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0\right) = p_0(t)[1 - \lambda h + \circ(h)]$$

得

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t), \quad t > 0. \qquad (*.1)$$

同样，对任意 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &= \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}\left(N(t) = n-j, N(t+h) - N(t) = j\right) \\ &= p_n(t)[1 - \lambda h] + p_{n-1}(t) \cdot \lambda h + \circ(h), \end{aligned}$$

化简得

$$p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \quad t > 0. \qquad (*.2)$$

记 $N(t)$ 的生成函数为 $\mathbb{P}(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)z^n$, 则

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}(z,t)=\cdots=-\lambda\mathbb{P}(z,t)+\lambda z\mathbb{P}(z,t)=\lambda(z-1)\mathbb{P}(z,t).$$

求解得

$$\log\mathbb{P}(z,t)=\lambda t(z-1)+c(z), \tag{$*$.3}$$

其中 $c(z)$ 待定. 由 $p_0(0)=1$, $p_k(0)=0$, $\forall\, k>0$, 得

$$\mathbb{P}(z,0)\equiv 1.$$

代入 $(*.3)$ 得 $c(z)\equiv 0$, 于是

$$\mathbb{P}(z,t)=\exp\left\{\lambda t(z-1)\right\},$$

即 $N(t)\sim\mathrm{Poisson}(\lambda t)$. ∎

例子. 顾客依 Poisson 过程到达某商店，速率为 $\lambda = 4$人/小时 。已知商店上午 $9:00$ 开门。试求到 $9:30$ 时仅到一位顾客，而到 $11:30$ 时总计已到达 5 位顾客的概率。

解 令 t 的计时单位为小时，并以 $9:00$ 为起始时刻，所求事件可表示为 $\{N(\frac{1}{2}) = 1, N(\frac{5}{2}) = 5\}$ 。其概率为

$$P\{N(\frac{1}{2}) = 1, N(\frac{5}{2}) = 5\} = P\{N(\frac{1}{2}) = 1, N(\frac{5}{2}) - N(\frac{1}{2}) = 4\}$$

$$= \{\frac{e^{-4\cdot\frac{1}{2}} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}}{1!}\}\{\frac{e^{-4\cdot 2}(4\cdot 2)^4}{4!}\} = 0.0155$$

例子. 顾客依 Poisson 过程到达某商店，速率为 $\lambda = 4$人/小时 。已知商店上午 $9:00$ 开门。试求到 $9:30$ 时仅到一位顾客，而到 $11:30$ 时总计已到达 5 位顾客的概率。

解 令 t 的计时单位为小时，并以 $9:00$ 为起始时刻，所求事件可表示为 $\{N(\frac{1}{2}) = 1, N(\frac{5}{2}) = 5\}$ 。其概率为

$$P\{N(\frac{1}{2}) = 1, N(\frac{5}{2}) = 5\} = P\{N(\frac{1}{2}) = 1, N(\frac{5}{2}) - N(\frac{1}{2}) = 4\}$$
$$= \{\frac{e^{-4\cdot\frac{1}{2}} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}}{1!}\}\{\frac{e^{-4\cdot 2}(4\cdot 2)^4}{4!}\} = 0.0155$$

第 2 章　　Poisson 过程

- Poisson 过程定义
- 与 Poisson 过程相关的若干分布
- 更新过程

第 2 章　Poisson 过程

- Poisson 过程定义
- 与 Poisson 过程相关的若干分布
- 更新过程

2.2.1 数字特征

设 $\{N(t),\, t \geq 0\}$ 为 强度为 λ 的 Poisson 过程. 则对 $t, s \in [0, \infty)$,

- 均值过程: $\mu_N(t) = \mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$; $\mathbb{E}[N(t) - N(s)] = \lambda(t - s)$
- 方差过程 $\mathrm{Var}\,(N(t)) = \lambda t$; $\mathrm{Var}\,(N(t) - N(s)) = \lambda(t - s)$
- 协方差过程$R_N(s, t) = \lambda \min\{s, t\}$.

  证明: 对 $s < t$,

$$
\begin{aligned}
R_N(s, t) &= \mathrm{Cov}(N(t), N(s)) \\
&= \mathbb{E}(N(t) - \mu_N(t))(N(s) - \mu_N(s)) \\
&= \mathbb{E}[N(t)N(s)] - \mu_N(t)\mu_N(s) \\
&= \mathbb{E}[N(t)N(s)] - \lambda^2 ts.
\end{aligned}
$$

$$s < t,\ N(t) = \underbrace{N(t) - N(s)}_{\text{与}N(s)\text{独立}} + N(s)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N(t)N(s)] &= \mathbb{E}[(N(t) - N(s))N(s)] + \mathbb{E}[N(s)^2] \\
&= \mathbb{E}[N(t) - N(s)]\mathbb{E}[N(s)] + (\mathbb{E}[N(s)])^2 + \mathrm{Var}\,(N(s)) \\
&= \lambda(t-s)\lambda s + (\lambda s)^2 + \lambda s \\
&= \lambda^2 ts + \lambda s.
\end{aligned}$$

因此，

$$R_N(s,t) = \lambda s.$$

2.2.2 事件发生间隔与等待时间的分布

例子. 样本路径图

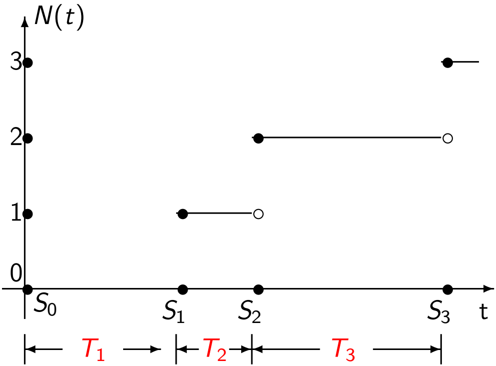
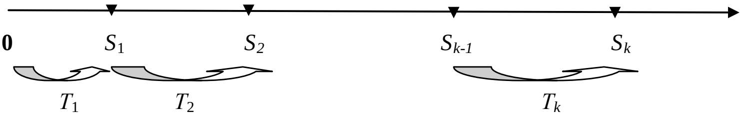


图 2.1 Poisson 过程的样本路径

2.2.2 事件发生间隔与等待时间的分布



事件发生时刻： $S_0 = 0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_k < \cdots$

事件发生间隔： $T_k = S_k - S_{k-1}$, $k \geq 1$

▶ **定理 2.2.1** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda)$，则 $\{T_n, n \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

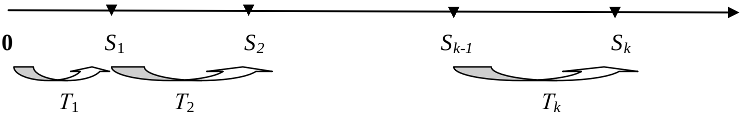
证明： $T_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ $\surd$. 对任意 $s, t > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(T_2 > t \middle| T_1 = s\right) &= \mathrm{P}\left(N(t+s) = 1 \middle| N(s) = 1, N(s-) = 0\right) \\
&= \mathrm{P}\left(N(t+s) - N(s) = 0 \middle| N(s) = 1, N(s-) = 0\right) \\
&= \mathrm{P}\left(N(t+s) - N(s) = 0\right) = e^{-\lambda t},
\end{aligned}$$

即 T_1, T_2 iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. 余类似. ∎

§2.2 与 Poisson 过程相关的若干分布

2.2.2 事件发生间隔与等待时间的分布



事件发生时刻： $S_0 = 0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_k < \cdots$

事件发生间隔： $T_k = S_k - S_{k-1}$, $k \geq 1$

▶ 定理 2.2.1 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda)$，则 $\{T_n, n \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

证明： $T_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ $\surd$. 对任意 $s, t > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(T_2 > t | T_1 = s\right) &= \mathrm{P}\left(N(t+s) = 1 | N(s) = 1, N(s-) = 0\right) \\
&= \mathrm{P}\left(N(t+s) - N(s) = 0 | N(s) = 1, N(s-) = 0\right) \\
&= \mathrm{P}\left(N(t+s) - N(s) = 0\right) = e^{-\lambda t},
\end{aligned}$$

即 T_1, T_2 iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. 余类似. ▮

- T_1的生存分布$\Rightarrow \mathrm{P}(T_1 > t) = \mathrm{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$

  $\Rightarrow T_1$ has exponential distribution with parameter λ
- since increments are stationary and independent, likely T_i are i.i.d.

- 定理 2.2.1 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda)$，则 $\{T_n, n \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.
- 证明：求T_{i+1}的分布，对S_i取条件

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(T_{i+1} > t) &= \int \mathrm{P}(T_{i+1} > t | S_i = s) f_{S_i}(s) ds \\
&= \int \mathrm{P}(N(t+s) - N(s) = 0 | N(s) = i) f_{S_i}(s) ds \\
&= \int \mathrm{P}(N(t+s) - N(s) = 0) f_{S_i}(s) ds \\
&= \int e^{-\lambda t} f_{S_i}(s) ds = e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

▶ 定理 2.2.2 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda)$, 则 $\{S_n, n \geq 1\}$ 服从参数为 n 和 λ 的Γ 分布 $\Gamma(n, \lambda)$.

证明：方法一：利用定理 2.2.1 和课后习题 13.
方法二：注意到

$$S_n \leq t \Longleftrightarrow N(t) \geq n.$$

故

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S_n \leq t) &= \mathrm{P}(N(t) \geq n) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \end{aligned}$$

对上式求导，得

$$\begin{aligned} f_{S_n}(t) &= \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(-\lambda)(\lambda t)^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{k(\lambda t)^{k-1}\lambda}{k!} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{\lambda^{k+1} t^k}{k!} = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

■

§2.2 与 Poisson 过程相关的若干分布

- **定义 2.2.1** 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度 λ 的 Poisson 过程，若事件发生间隔序列 $\{T_n, n \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.
- **定理 2.2.2** 定义 2.1.1 $\Longleftrightarrow$ 定义 2.2.1

证明：$\Longrightarrow$ $\surd$.
($\Longleftarrow$) 由指数分布无记忆性知，$\{N(t), t \geq 0\}$ 具有平稳独立增量性．下仅证 $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$．注意到 $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ 及

$$S_n \leq t \Longleftrightarrow N(t) \geq n,$$

得

$$\mathrm{P}\left(N(t) \geq n\right) = \mathrm{P}\left(S_n \leq t\right) = \cdots = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad n \geq 0.$$

于是，$\mathrm{P}\left(N(t) = n\right) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$, $n \geq 0$. ∎

- **定义 2.2.1** 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度 λ 的 Poisson 过程, 若事件发生间隔序列 $\{T_n, n \geq 1\}$ iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.
- **定理 2.2.2** 定义 2.1.1 $\Longleftrightarrow$ 定义 2.2.1

证明: $\Longrightarrow$ $\surd$.
$(\Longleftarrow)$ 由指数分布无记忆性知, $\{N(t), t \geq 0\}$ 具有平稳独立增量性. 下仅证 $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$. 注意到 $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ 及

$$S_n \leq t \Longleftrightarrow N(t) \geq n,$$

得

$$\mathrm{P}\left(N(t) \geq n\right) = \mathrm{P}\left(S_n \leq t\right) = \cdots = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad n \geq 0.$$

于是, $\mathrm{P}\left(N(t) = n\right) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n!$, $n \geq 0$. ∎

定义 2.2.1 的应用:

- 利用 $S_n \le t \Longleftrightarrow N(t) \ge n$, 可以求出 $\Gamma(n,\lambda)$ 的 cdf 和 pdf.
- 局部几何方法:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(t < S_n < t+h) &= \mathrm{P}(N(t+h) - N(t) = 1, N(t) = n-1) + o(h) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \lambda h + o(h), \end{aligned}$$

于是 $\Gamma(n,\lambda)$ 的 pdf 为

$$f_{S_n}(t) = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t > 0.$$

- 有利于将 Poisson 过程推广到更新过程.
- 有利于做 Poisson 过程的计算机模拟仿真.

定义 2.2.1 的应用:

- 利用 $S_n \le t \Longleftrightarrow N(t) \ge n$, 可以求出 $\Gamma(n,\lambda)$ 的 cdf 和 pdf.
- 局部几何方法:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(t < S_n < t+h\right) &= \mathrm{P}\left(N(t+h)-N(t)=1, N(t)=n-1\right)+\circ(h) \\ &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\lambda h+\circ(h), \end{aligned}$$

于是 $\Gamma(n,\lambda)$ 的 pdf 为

$$f_{S_n}(t)=e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t>0.$$

- 有利于将 Poisson 过程推广到更新过程.
- 有利于做 Poisson 过程的计算机模拟仿真.

定义 2.2.1 的应用:

- 利用 $S_n \le t \Longleftrightarrow N(t) \ge n$, 可以求出 $\Gamma(n,\lambda)$ 的 cdf 和 pdf.
- 局部几何方法:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(t < S_n < t+h\right) &= \mathrm{P}\left(N(t+h) - N(t) = 1, N(t) = n-1\right) + \circ(h) \\ &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot \lambda h + \circ(h), \end{aligned}$$

于是 $\Gamma(n,\lambda)$ 的 pdf 为

$$f_{S_n}(t) = e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t > 0.$$

- 有利于将 Poisson 过程推广到更新过程.
- 有利于做 Poisson 过程的计算机模拟仿真.

如何从得到的一条样本路径去估计λ?

参数λ的极大似然估计
若在$[0, T]$上观察Poisson过程$\{N(t), 0 \le t \le T\}$的一条路径:

$$S_1 \le \cdots \le S_n \le T.$$

由定义2.2.1, 知道S_1, $S_2 - S_1, \cdots, S_n - S_{n-1}$为独立同分布的参数为$\lambda$的指数分布, 于是我们可以写出似然函数($S_0 = 0$)

$$L(s_1, \cdots, s_n) = \lambda^n \exp\{-\lambda \sum_{i=0}^{n-1}(s_{i+1} - s_i)\} = \lambda^n e^{-\lambda s_n}.$$

取对数求导得$\hat{\lambda} = n/S_n$.

如何从得到的一条样本路径去估计λ?

参数λ的极大似然估计
若在$[0, T]$上观察Poisson过程$\{N(t), 0 \le t \le T\}$的一条路径:

$$S_1 \le \cdots \le S_n \le T.$$

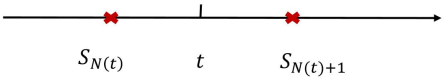
由定义2.2.1, 知道S_1, $S_2 - S_1, \cdots, S_n - S_{n-1}$为独立同分布的参数为$\lambda$的指数分布, 于是我们可以写出似然函数($S_0 = 0$)

$$L(s_1, \cdots, s_n) = \lambda^n \exp\{-\lambda \sum_{i=0}^{n-1}(s_{i+1} - s_i)\} = \lambda^n e^{-\lambda s_n}.$$

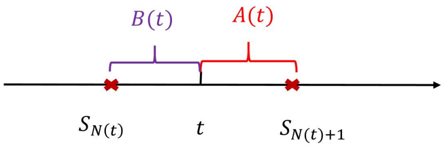
取对数求导得$\hat{\lambda} = n/S_n$.

§2.2 与 Poisson 过程相关的若干分布

Inspection paradox: $S_n - S_{n-1} \sim Exp\{\lambda\}$, $S_{N(t)} - S_{N(t)-1}$呢?



$S_{N(t)} - S_{N(t)-1}$?



$A(t)$是指数分布?

关心$P(A(t) \leq x, B(t) \leq y)$. 利用图形我们知道在$x + y$这段时间内至少有两次, 太复杂了, 于是我们考虑下面这种

$$P(A(t) > x, B(t) > y)$$

于是

$$P(A(t) > x, B(t) > y) = P(N(x+y) = 0) = \exp\{-\lambda(x+y)\}$$

令$y=0$, 即得到

$$P(A(t) > x, B(t) > 0) = P(A(t) > x) = \exp(-\lambda x).$$

有了随机化后，$S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$还是指数分布吗？我只是在t时刻看了一眼，就变换了分布？ 比如从一组独立同分布的样本中按照某种随机因素选了一部分样本出来，这些选出来的样本就不同于总体的分布了，跟随机化因素有关。
比如，假设一堆灯泡的寿命服从均值为β的某个分布，如果你是一个检查员，从亮着的灯泡里面随机抽取一个灯泡检查它的寿命，那么有，这个灯泡的寿命期望$E(T)$=灯泡已经亮着的时间$+\beta > \beta$.

$$E[S_{N(t)+1} - S_{N(t)}] = E[E(S_{n+1} - S_n | N(t) = n)] \stackrel{?}{=} \lambda.$$

问：

$$S_k | N(t) = n?$$

到达时间的条件分布

$\{N(t), t \geq 0\}$是Poisson过程，则对任何$0 < s < t$

$$P\left(T_1 \leq s | N(t) = 1\right) = \frac{s}{t}$$

由于Poisson过程具有平稳和独立增量性，已知$[0, t]$上有一个时间发生的条件下，事件发生的时间S_1应该服从$[0, t]$的均匀分布. 自然想法：

1. 能否推广到$N(t) = n$的情形？
2. 是否为Poisson过程特有的现象？

2.2.3 到达时间的条件分布

- **定理 2.3.1** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda)$，则

$$\Big[(S_1, S_2, \ldots, S_n)\Big| N(t) = n\Big] \stackrel{\mathrm{d}}{=} \Big(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\Big),$$

其中 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ iid $\sim U(0, t)$，$U_{1:n} < U_{2:n} < \cdots < U_{n:n}$ 为 $U_1, \ldots, U_n$ 的次序统计量.

※ $\Big(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\Big)$ 的联合 pdf 为

$$g(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad \forall\, 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t.$$

2.2.3 到达时间的条件分布

- **定理 2.3.1** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda)$，则

$$\Big[(S_1, S_2, \ldots, S_n) \Big| N(t) = n\Big] \overset{\mathrm{d}}{=} \Big(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\Big),$$

其中 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ iid $\sim U(0, t)$，$U_{1:n} < U_{2:n} < \cdots < U_{n:n}$ 为 $U_1, \ldots, U_n$ 的次序统计量.

※ $\big(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\big)$ 的联合 pdf 为

$$g(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{n!}{t^n}, \quad \forall\, 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t.$$

预备或者回顾知识

设 $(T_1,\ldots,T_n)$由概率密度函数为分布函数的导数定义

$$f(t_1,\cdots,t_n) = \lim_{\Delta t_i\to 0}\frac{P\{t_i\le T_i<t_i+\Delta t_i, i=1,2,\cdots,n\}}{\Delta t_1\cdots\Delta t_n},$$

对条件分布类似

$$\begin{aligned}&f_{S_1,\cdots S_n|N(t)=n}(t_1,\cdots,t_n|n)\\ &=\lim_{\Delta t_i\to 0}\frac{P\{t_i\le S_i<t_i+\Delta t_i, i=1,2,\cdots,n|N(t)=n\}}{\Delta t_1\cdots\Delta t_n}\end{aligned}$$

证明 注意到对充分小的增量 Δt_i，事件 $\{N(t)=n$ 和 $t_i \le S_i < t_i+\Delta t_i,\ i=1,\cdots,n\}$意味着

(i) 在 $[t_i, t_i+\Delta t_i),\ i=1,\cdots n$ 中恰恰发生了一件事 $\lambda\Delta t_i$

(ii) 在 $[0,t_1),[t_1+\Delta t_1,t_2),\cdots,[t_{n-1}+\Delta t_{n-1},t_n),[t_n+\Delta t_n,t]$ 中没有发生事件.
$e^{-\lambda t_1}, e^{-\lambda(t_1-t_1-\Delta t_1)},\cdots, e^{-\lambda(t_n-t_{n-1}-\Delta t_{n-1})}, e^{-\lambda(t-t_n-\Delta t_n)}$,

则由独立增量和平稳增量有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left\{t_i \le S_i < t_i+\Delta t_i, i=1,2,\cdots,n; |N(t)=n\right\}\\
&=\frac{\mathrm{P}\left\{t_i \le S_i < t_i+\Delta t_i, i=1,2,\cdots,n; N(t)=n\right\}}{\mathrm{P}\left(N(t)=n\right)}\\
&=\frac{\lambda\Delta t_1\cdots\lambda\Delta t_n e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda(t_2-t_1-\Delta t_1)}\cdots e^{-\lambda(t_n-t_{n-1}-\Delta t_{n-1})} e^{-\lambda(t-t_n-\Delta t_n)}}{e^{\lambda t}(\lambda t)^n/(n!)}\\
&=\frac{n!}{t^n}\left(\Delta t_1\cdots\Delta t_n\cdot e^{\lambda\sum_{i=1}^n \Delta t_i}+o(\Delta t_1\cdots\Delta t_n)\right),
\end{aligned}
$$

因此我们有

$$
\begin{aligned}
& f_{S_1,\cdots S_n|N(t)=n}(t_1,\cdots,t_n|n) \\
= & \lim_{\Delta t_i\to 0} \frac{n!\Delta t_1\cdots\Delta t_n\cdot e^{\lambda\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i} + o(\Delta t_1\cdots\Delta t_n)}{t^n\Delta t_1\cdots\Delta t_n} \\
= & \lim_{\Delta t_i\to 0} \frac{n!}{t^n} e^{\lambda\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i} = \frac{n!}{t^n}.
\end{aligned}
$$

∎

注　直观上, 在给定 $(0,t]$ 上发生 n 个事件的条件下，如果将n 个事件发生时刻看作是不排序的随机变量，那么可以看作是相互独立并且是服从 $(0,t]$ 上均匀分布的随机变量.

因此我们有

$$
\begin{aligned}
& f_{S_1,\cdots S_n|N(t)=n}(t_1,\cdots,t_n|n) \\
= & \lim_{\Delta t_i\to 0} \frac{n!\Delta t_1\cdots\Delta t_n\cdot e^{\lambda\sum_{i=1}^n\Delta t_i}+o(\Delta t_1\cdots\Delta t_n)}{t^n\Delta t_1\cdots\Delta t_n} \\
= & \lim_{\Delta t_i\to 0}\frac{n!}{t^n}e^{\lambda\sum_{i=1}^n\Delta t_i}=\frac{n!}{t^n}.
\end{aligned}
$$

∎

注 直观上, 在给定 $(0,t]$ 上发生 n 个事件的条件下，如果将n 个事件发生时刻看作是不排序的随机变量，那么可以看作是相互独立并且是服从 $(0,t]$ 上均匀分布的随机变量.

推论: 若$s < t, 0 \leq m \leq n$，那么有

$P(N(s) = m \mid N(t) = n) = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}$

推论: $\{N(t), t \geq 0\}$ 为参数λ 的Poisson过程，$\forall s, t > 0$，若$s > t$，则

$$E[N(s) \mid N(t) = i] = i + \lambda(s - t)$$

若$s \leq t$，则

$$E[N(s) \mid N(t) = i] = \frac{s}{t} i$$

- 定理 2.3.1* 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 P(λ)，则

$$\Big[(S_1, S_2, \ldots, S_n) \Big| S_{n+1} = t\Big] \stackrel{\mathrm{d}}{=} \Big(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\Big),$$

其中 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ iid $\sim U(0, t)$，$U_{1:n} < U_{2:n} < \cdots < U_{n:n}$ 为 $U_1, \ldots, U_n$ 的次序统计量.

证法一：直接利用 $(T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}) \longleftrightarrow (S_1, S_2, \ldots, S_{n+1})$ 初等变换.

证法二：利用

$$\begin{aligned}
&[(S_1, S_2, \ldots, S_n)|S_{n+1} = t] \\
&\quad = [(S_1, S_2, \ldots, S_n)|N(t-) = n, N(t) - N(t-) = 1] \\
&\quad \stackrel{\mathrm{d}}{=} [(S_1, S_2, \ldots, S_n)|N(t-) = n] \\
&\quad \stackrel{\mathrm{d}}{=} [(S_1, S_2, \ldots, S_n)|N(t) = n]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

- **定理 2.3.1*** 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 P(λ)，则

$$\left[(S_1, S_2, \ldots, S_n) \middle| S_{n+1} = t\right] \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\right),$$

其中 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ iid $\sim U(0, t)$，$U_{1:n} < U_{2:n} < \cdots < U_{n:n}$ 为 $U_1, \ldots, U_n$ 的次序统计量.

证法一：直接利用 $(T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}) \longleftrightarrow (S_1, S_2, \ldots, S_{n+1})$ 初等变换.

证法二：利用

$$\begin{aligned} &[(S_1, S_2, \ldots, S_n)|S_{n+1} = t] \\ &= [(S_1, S_2, \ldots, S_n)|N(t-) = n, N(t) - N(t-) = 1] \\ &\stackrel{\mathrm{d}}{=} [(S_1, S_2, \ldots, S_n)|N(t-) = n] \\ &\stackrel{\mathrm{d}}{=} [(S_1, S_2, \ldots, S_n)|N(t) = n]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

▶ 定理 2.3.1* 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda)$，则

$$\left[(S_1, S_2, \ldots, S_n) \,\middle|\, S_{n+1} = t\right] \overset{\mathrm{d}}{=} \Big(U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n}\Big),$$

其中 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ iid $\sim U(0,t)$，$U_{1:n} < U_{2:n} < \cdots < U_{n:n}$ 为 $U_1, \ldots, U_n$ 的次序统计量.

证法一：直接利用 $(T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}) \longleftrightarrow (S_1, S_2, \ldots, S_{n+1})$ 初等变换.

证法二：利用

$$\begin{aligned}
&[(S_1, S_2, \ldots, S_n)|S_{n+1} = t] \\
&\quad = \quad [(S_1, S_2, \ldots, S_n)|N(t-) = n, N(t) - N(t-) = 1] \\
&\quad \overset{\mathrm{d}}{=} \quad [(S_1, S_2, \ldots, S_n)|N(t-) = n] \\
&\quad \overset{\mathrm{d}}{=} \quad [(S_1, S_2, \ldots, S_n)|N(t) = n]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

例:. 向某保险公司索赔的次数形成一个强度是λ 的Poisson过程，第i 次索赔金额为C_i ，满足$E[C_i]=u$, 且独立于索赔次数和索赔到达时刻. 已知银行存款贴现率为α ，求$[0,t]$ 内索赔总金额在$t=0$ 处的贴现平均值.

【解】设S_i 为第i 次赔款到达时间，$R(t)$ 为所有理赔的贴现值，根据贴现公式我们知道

$$R(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} C_i e^{-\alpha S_i}$$

从而根据全期望公式

$$\begin{aligned}
E[R(t)] &= E[E[R(t)\mid N(t)]] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[R(t)\mid N(t)=n]P(N(t)=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} C_i e^{-\alpha S_i}\mid N(t)=n\right] e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} uE\left[e^{-\alpha S_i}\mid N(t)=n\right] e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}
\end{aligned}$$

而其中我们可以知道，S_i 的条件分布是均匀分布的次序统计量，但是求和排次序与不排次序值不变，于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[e^{-\alpha S_i}\mid N(t)=n\right]&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[e^{-\alpha U_{(i)}}\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[e^{-\alpha U_i}\right]=\frac{1}{t}\int_0^t e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\alpha t}\left(1-e^{-\alpha t}\right)\end{aligned}$$

代入原式，即得

$$E[R(t)]=\frac{\lambda u}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$$

推论: 设$N(t)$为参数λ的Poisson过程, S_n为其达到时刻, 则我们有对任意$[0,\infty)$上的可积的函数f

$$E\left\{\sum_{k=1}^{\infty} f\left(S_k\right)\right\} = \lambda \int_0^{\infty} f(t)dt$$

特别,

$$E\left\{\sum_{k=1}^{N(t)} f\left(S_k\right)\right\} = \lambda \int_0^{t} f(t)dt$$

设$N(t)$是标准的Poisson过程，$\{Y_k, k \geq 1\}$为独立同分布的随机变量，与$N(t)$独立。称

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$$

为复合Poisson过程。

其特征函数为

$$\varphi_X(u) = E\exp(juX(t)) = E[\varphi_Y(u)^{N(t)}] = G_{N(t)}(\varphi_Y(u)) = e^{\lambda t(\varphi_Y(u)-1)}.$$

其矩母函数为

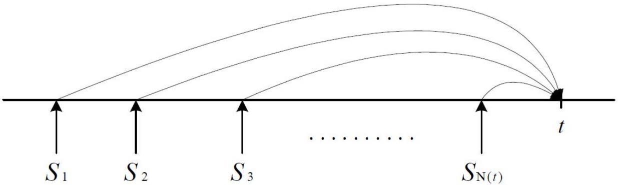
$$g_X(u) = E\exp(uX(t)) = E[g_Y(u)^{N(t)}] = \phi_{N(t)}(g_Y(u)) = e^{\lambda t(g_Y(u)-1)}.$$

- 【例 2.3(A)】 假设乘客按 P(λ) 过程到达火车站, 火车于时刻 t 开出. 求 $(0,t]$ 时段到达乘客的等待时间总和的期望, 即

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\right].$$

应用定理 2.3.1:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\right]=\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\middle|N(t)\right]\right\}=\mathbb{E}\left[\frac{t}{2}N(t)\right]=\frac{\lambda t^2}{2}.$$

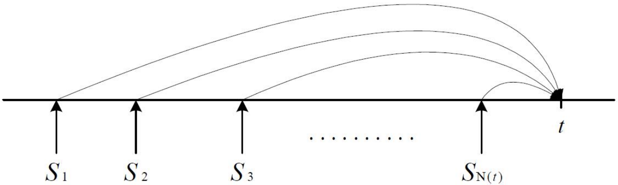


▶【例 2.3(A)】 假设乘客按 P(λ) 过程到达火车站, 火车于时刻 t 开出. 求 $(0, t]$ 时段到达乘客的等待时间总和的期望, 即

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\right].$$

应用定理 2.3.1:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\right]=\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)\middle| N(t)\right]\right\}=\mathbb{E}\left[\frac{t}{2}N(t)\right]=\frac{\lambda t^2}{2}.$$



- 【例 2.3(C)】 一元件易收到冲击，冲击按 P(λ) 过程到达，第 i 个冲击带来的损伤为 D_i. 假设 $\{D_i, i \geq 1\}$ iid, 且独立于 P 过程，损伤随时间按负指数衰减，且可以叠加. 于是 t 时刻元件的总损伤为

$$D(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-S_k)}, \quad \alpha > 0,$$

求 $\mathbb{E}D(t)$.

应用定理 2.3.1:

$$\mathbb{E}[D(t)|N(t)=n] = \mathbb{E}D \cdot e^{-\alpha t}\mathbb{E}\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha U_k} = n \cdot \mathbb{E}D \cdot \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha t}.$$

▶【例 2.3(C)】 一元件易收到冲击，冲击按 P(λ) 过程到达，第 i 个冲击带来的损伤为 D_i. 假设 $\{D_i, i \geq 1\}$ iid, 且独立于 P 过程，损伤随时间按负指数衰减，且可以叠加. 于是 t 时刻元件的总损伤为

$$D(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-S_k)}, \quad \alpha > 0,$$

求 $\mathbb{E}D(t)$.

应用定理 2.3.1:

$$\mathbb{E}[D(t)|N(t)=n] = \mathbb{E}D \cdot e^{-\alpha t}\mathbb{E}\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha U_k} = n \cdot \mathbb{E}D \cdot \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha t}.$$

在另一个独立的Poisson过程($N_2(t) \sim HPP(\lambda_2)$)的任意两个间隔时间一个Poisson过程($N_1(t) \sim HPP(\lambda_1)$)发生的次数服从几何分布.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(N_1(T_1^2) = k\right) &= \int_0^\infty \mathrm{P}\left(N_1(T_1^2) = k \mid T_1^2 = t\right)\lambda_2 t e^{-\lambda_2 t} dt \\
&= \int_0^\infty \mathrm{P}\, \underbrace{\left(N_1(t) = k \mid T_1^2 = t\right)}_{\text{独立}} \lambda_2 t e^{-\lambda_2 t} dt \\
&= \int_0^\infty \mathrm{P}\left(N_1(t) = k\right)\lambda_2 t e^{-\lambda_2 t} dt \\
&= \lambda_2 \int_0^\infty \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} dt \\
&= \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k, \quad k = 0, 1, \ldots
\end{aligned}
$$

设$N(t)$是标准的Poisson过程，$\{Y_k, k \geq 1\}$为独立同分布的随机变量，且$P(Y_1 = c_k) = p_k, k = 0, 1, 2, \ldots$，与$N(t)$独立。考虑一复合Poisson过程

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k.$$

其生成函数为

$$\phi_X(z) = \mathbb{E}z^{X(t)} = \mathbb{E}[\phi_Y(z)^{N(t)}] = \phi_{N(t)}(\phi_Y(z)) = e^{\lambda t(\phi_Y(z)-1)}.$$

其中$\phi_Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n$，代入有

$$\phi_X(z) = e^{\lambda p_1 t(z-1)} e^{\lambda p_1 t(z^2-1)} \cdots e^{\lambda p_1 t(z^n-1)} \cdots .$$

因此有，$N_j(t)$ 是强度λp_j的Poisson过程，

$$X(t) = N_1(t) + 2N_2(t) + \cdots + mN_m(t) + \cdots .$$

每个复合Poisson过程的分布函数是独立Poisson过程的整数线性组合。

任意独立的Poisson过程的线性组合也是一个复合Poisson过程
即，独立的Poisson过程$N_j(t) \sim HPP(\lambda_j)$,

$$X(t) = a_1 N_1(t) + a_2 N_2(t) + \cdots + a_n N_n(t)$$

是一个复合Poisson过程。

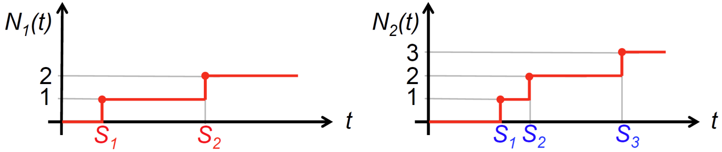
利用生成函数

$$\begin{aligned}
\phi_X(z) &= \mathbb{E} z^{\sum_{j=1}^n a_j N_j(t)} \\
&= = \prod_{j=1}^n \mathbb{E} z^{a_j N_j(t)} \\
&= = \prod_{j=1}^n \phi_{N_j(t)}(z^{a_j}) = \prod_{j=1}^n e^{\lambda_j t (z^{a_j} - 1)} = e^{\lambda t \sum_{j=1}^n (z^{a_j} - 1)\lambda_j / \lambda}
\end{aligned}$$

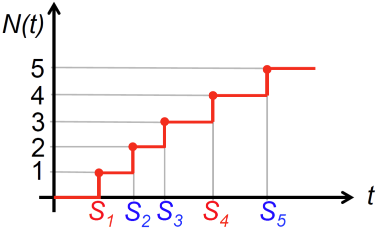
其中$\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j$, 于是可以写为$X(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$, $N(t) \sim HPP(\lambda)$.

§2.2 Superposition of Poisson processes

设 $\{N_i(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda_i)$，$i = 1, 2$，且两个过程相互独立，记



- 则 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ 也是Poisson过程



$N_1(t) - N_2(t)$? 还是Poisson分布吗？复合Poisson过程

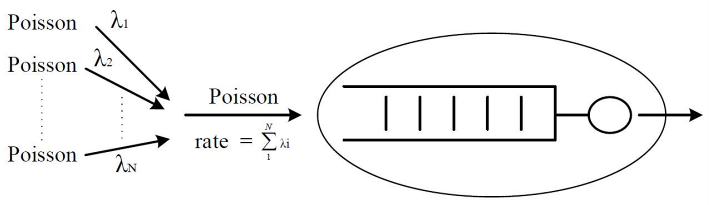
▶ 定理 2.3.2 设 $\{N_i(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda_i)$, $i = 1, 2$, 且两个过程相互独立, 记

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t),$$

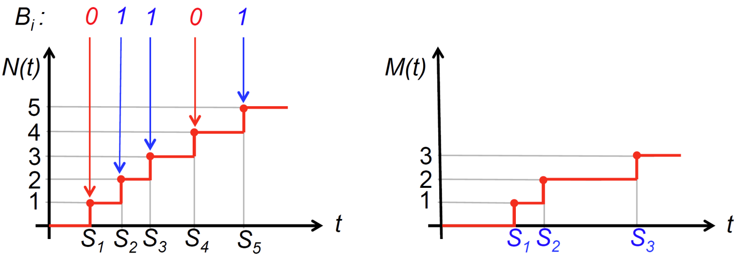
则

$$\{N(t), t \geq 0\} \text{ 为 } \mathrm{P}\,(\lambda_1 + \lambda_2).$$

※ 利用指数分布的无记忆性说明 $\{N(t), t \geq 0\}$ 具有平稳独立增量性

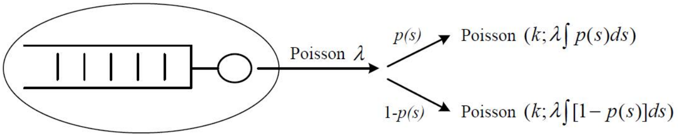


- 设$B_{\mathbb{N}} = B_1, B_2, \ldots$ 是一列Bernoulli (p) 随机变量序列，看成一种“奖赏”.
- $N(t) \sim HPP(\lambda)$独立于$B_{\mathbb{N}}$.
- $M(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} B_i$也是Poisson过程, 且与$N(t) - M(t)$相互独立.
，参数为λp.

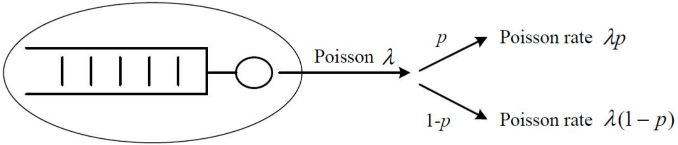


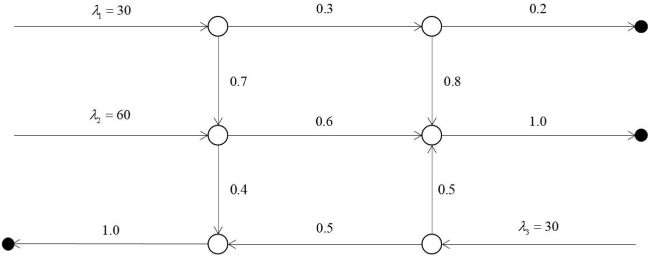
非齐次的“稀疏”与齐次的“稀疏”

Decomposition of a Poisson Process



special case: If $p(s) = p$ is constant, then

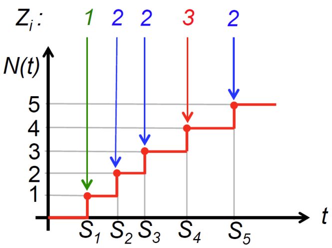


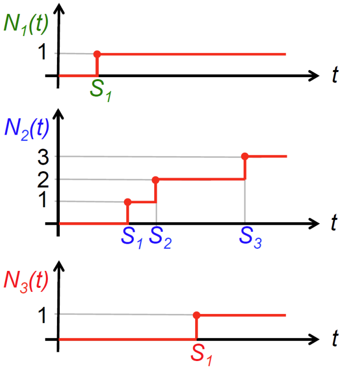

$\lambda_1 = 30$
0.3
0.2
0.7
0.8
$\lambda_2 = 60$
0.6
1.0
0.4
0.5
1.0
0.5
$\lambda_3 = 30$

§2.2 Splitting of a Poisson process

- 设$Z_{\mathbb{N}} = Z_1, Z_2, \ldots$是独立同分布的序列，且$Z_i \in \{1, \ldots, m\}$.
- $N(t) \sim HPP(\lambda)$独立于$Z_{\mathbb{N}}$.
- $N_k(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} \mathbb{I}\{Z_i = k\}$, $k = 1, \ldots, m$.
- 则我们有

$$N_k(t) \sim HPP(\lambda \mathrm{P}(Z_i = k))$$





定理 2.3.1 的应用：Poisson 过程事件分类

设时刻 s 发生的事件以概率 $p(s)$ 划入 I 型，以概率 $1-p(s)$ 划入 II 型.
$N_i(t)=(0,t]$ 时段发生的 i 型事件个数，$i=1,2$.

- 命题 2.3.2 设 $\{N(t),t\geq 0\}$ 为 HPP(λ)，则 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 独立，且

$$N_1(t)\sim \mathrm{Poisson}(\lambda p t), \qquad N_2(t)\sim \mathrm{Poisson}(\lambda(1-p)t),$$

其中

$$p=\frac{1}{t}\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s, \quad t>0.$$

※ 命题 2.3.2 可以推广到分成有限或可列类事件情形

定理 2.3.1 的应用：Poisson 过程事件分类

设时刻 s 发生的事件以概率 $p(s)$ 划入 I 型，以概率 $1-p(s)$ 划入 II 型.

$N_i(t) = (0,t]$ 时段发生的 i 型事件个数，$i=1,2$.

- 命题 2.3.2 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 HPP(λ)，则 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 独立，且

$$N_1(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda p t), \qquad N_2(t) \sim \mathrm{Poisson}(\lambda(1-p)t),$$

其中

$$p = \frac{1}{t}\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s, \quad t > 0.$$

※　命题 2.3.2 可以推广到分成有限或可列类事件情形

证明：对任意 $m, n \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(N_1(t)=m, N_2(t)=n\right) \\
=\ &\underbrace{\mathrm{P}\left(N_1(t)=m, N_2(t)=n \middle| N(t)=m+n\right)}_{\Delta_{m,n}} \cdot \mathrm{P}\left(N(t)=m+n\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_{m,n} &= \mathrm{P}\left(\begin{array}{l} \text{于 } S_1, S_2, \ldots, S_{m+n} \text{ 时刻发生事件} \\ \text{划入 I, II 型分别为 } m,\ n \text{ 个} \end{array} \middle| N(t)=m+n \right) \\
&= \mathrm{P}\left(\begin{array}{l} \text{于 } U_{1:(m+n)}, U_{2:(m+n)}, \ldots, U_{(m+n):(m+n)} \text{ 时刻} \\ \text{发生事件划入 I, II 型分别为 } m,\ n \text{ 个} \end{array} \right) \\
&= \mathrm{P}\left(\begin{array}{l} \text{于 } U_1, U_2, \ldots, U_{m+n} \text{ 时刻发生} \\ \text{事件划入 I, II 型分别为 } m,\ n \text{ 个} \end{array} \right) \\
&= \binom{m+n}{m} p^m (1-p)^n,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
p &= \mathrm{P}(\text{于 } U \text{ 发生事件划入 I 型}) \\
&= \mathbb{E}[\mathrm{P}(\text{于 } U \text{ 发生事件划入 I 型} | U)] = \mathbb{E}p(U) \\
&= \frac{1}{t}\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(N_1(t) = m, N_2(t) = n) \\
&\quad = e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^m}{m!}\cdot e^{-\lambda(1-p)t}\frac{(\lambda(1-p)t)^n}{n!}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

▶※ 在命题 2.3.2 中，若 $p(s) \equiv p$，则 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda p)$，$\{N_2(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda(1-p))$，且相互独立.

其中

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{P}\,(\text{于 } U \text{ 发生事件划入 I 型}) \\ &= \mathbb{E}[\mathrm{P}\,(\text{于 } U \text{ 发生事件划入 I 型} | U)] = \mathbb{E}p(U) \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\,(N_1(t) = m, N_2(t) = n) \\ &= e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda(1-p)t}\frac{(\lambda(1-p)t)^n}{n!}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

▶※ 在命题 2.3.2 中，若 $p(s) \equiv p$, 则 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda p)$, $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda(1-p))$, 且相互独立.

其中

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{P}\,(\text{于 } U \text{ 发生事件划入 I 型}) \\ &= \mathbb{E}[\mathrm{P}\,(\text{于 } U \text{ 发生事件划入 I 型}|U)] = \mathbb{E}p(U) \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\,(N_1(t) = m, N_2(t) = n) \\ &\quad = e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda(1-p)t}\frac{(\lambda(1-p)t)^n}{n!}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

▶※ 在命题 2.3.2 中，若 $p(s) \equiv p$，则 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda p)$，$\{N_2(t), t \geq 0\}$ 为 $\mathrm{P}(\lambda(1-p))$，且相互独立.

§2.3 Poisson 过程的“稀疏”

例题： 考虑一个道路上汽车行驶的问题。已知每分钟，在某地经过的汽车数目服从速率为$\frac{2}{3}$ 的泊松过程。其中10% 是卡车，90% 是轿车。如果知道刚才的一个小时内，经过了10 辆卡车，问刚才的一个小时内，经过的车的数量的期望是多少？

- 这个题乍一看，10 辆卡车，占了10%，所以张口就来会经过100 辆车。如果得到了这么一个答案，就说明第一印象往往会给人带来很严重的偏差。

- 首先这是一个很明显的可以通过拆分(也就是稀疏) 解决的问题。既然我们知道汽车到来的速率为$\frac{2}{3}$，那么根据稀疏，我们可以把汽车拆分为"卡车" 和“轿车”，那么根据上述定理就不难得到，卡车到来的速率为$\frac{2}{30}$，轿车到来的速率为$\frac{18}{30}$，并且二者相互独立。

- 简单计算得

$$\mathbb{E}(N(60) \mid N_1(60) = 10) = \mathbb{E}(N_1(60) \mid N_1(60) = 10) + \mathbb{E}(N_2(60) \mid N_1(60) = 10)$$

$$= 10 + \mathbb{E}\left(N_2(60)\right) = 10 + 60 \times \frac{18}{30} = 46$$

例题： 考虑一个道路上汽车行驶的问题。已知每分钟，在某地经过的汽车数目服从速率为$\frac{2}{3}$的泊松过程。其中10% 是卡车，90% 是轿车。如果知道刚才的一个小时内，经过了10 辆卡车，问刚才的一个小时内，经过的车的数量的期望是多少？

- 这个题乍一看，10 辆卡车，占了10%，所以张口就来会经过100 辆车。如果得到了这么一个答案，就说明第一印象往往会给人带来很严重的偏差。

- 首先这是一个很明显的可以通过拆分(也就是稀疏) 解决的问题。既然我们知道汽车到来的速率为$\frac{2}{3}$，那么根据稀疏，我们可以把汽车拆分为"卡车" 和“轿车”，那么根据上述定理就不难得到，卡车到来的速率为$\frac{2}{30}$，轿车到来的速率为$\frac{18}{30}$，并且二者相互独立。

- 简单计算得

$$\mathbb{E}(N(60) \mid N_1(60) = 10) = \mathbb{E}(N_1(60) \mid N_1(60) = 10) + \mathbb{E}(N_2(60) \mid N_1(60) = 10)$$

$$= 10 + \mathbb{E}\left(N_2(60)\right) = 10 + 60 \times \frac{18}{30} = 46$$

例题： 考虑一个道路上汽车行驶的问题。已知每分钟，在某地经过的汽车数目服从速率为$\frac{2}{3}$ 的泊松过程。其中10% 是卡车，90% 是轿车。如果知道刚才的一个小时内，经过了10 辆卡车，问刚才的一个小时内，经过的车的数量的期望是多少？

- 这个题乍一看，10 辆卡车，占了10% ，所以张口就来会经过100 辆车。如果得到了这么一个答案，就说明第一印象往往会给人带来很严重的偏差。

- 首先这是一个很明显的可以通过拆分(也就是稀疏) 解决的问题。既然我们知道汽车到来的速率为$\frac{2}{3}$ ，那么根据稀疏，我们可以把汽车拆分为"卡车" 和"轿车"，那么根据上述定理就不难得到，卡车到来的速率为$\frac{2}{30}$ ，轿车到来的速率为$\frac{18}{30}$ ，并且二者相互独立。

- 简单计算得

$$\mathbb{E}(N(60) \mid N_1(60) = 10) = \mathbb{E}(N_1(60) \mid N_1(60) = 10) + \mathbb{E}(N_2(60) \mid N_1(60) = 10)$$

$$= 10 + \mathbb{E}\left(N_2(60)\right) = 10 + 60 \times \frac{18}{30} = 46$$

例题： 考虑一个道路上汽车行驶的问题。已知每分钟，在某地经过的汽车数目服从速率为$\frac{2}{3}$ 的泊松过程。其中10% 是卡车，90% 是轿车。如果知道刚才的一个小时内，经过了10 辆卡车，问刚才的一个小时内，经过的车的数量的期望是多少？

- 这个题乍一看，10 辆卡车，占了10%，所以张口就来会经过100 辆车。如果得到了这么一个答案，就说明第一印象往往会给人带来很严重的偏差。

- 首先这是一个很明显的可以通过拆分(也就是稀疏) 解决的问题。既然我们知道汽车到来的速率为$\frac{2}{3}$，那么根据稀疏，我们可以把汽车拆分为"卡车" 和“轿车”，那么根据上述定理就不难得到，卡车到来的速率为$\frac{2}{30}$，轿车到来的速率为$\frac{18}{30}$，并且二者相互独立。

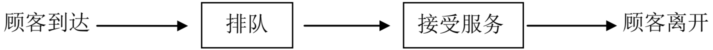
- 简单计算得

$$\mathbb{E}(N(60) \mid N_1(60)=10) = \mathbb{E}(N_1(60) \mid N_1(60)=10) + \mathbb{E}(N_2(60) \mid N_1(60)=10)$$

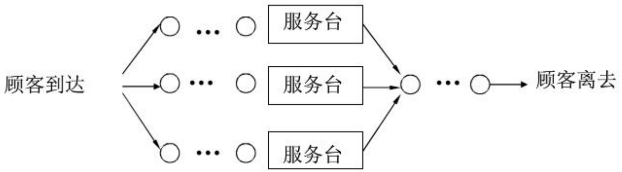
$$= 10 + \mathbb{E}\left(N_2(60)\right) = 10 + 60 \times \frac{18}{30} = 46$$

如果主服务器到达的顾客数为一个Poisson过程，我们有k个服务终端，这样我们把服务终端的顾客按次序分配，即第i个终端的到达间隔即为k个指数分布的和，不再是Poisson过程，而是一个Erlang随机过程。

随机服务系统



如：（1）多服务台并联



（2）多服务台串联

随机服务系统分类： D.G. Kendall 于 1953 年提出的分类方法，基于顾客到达间隔时间、服务时间分布和服务台个数三个特征. 记号：

$$X/Y/Z,$$

- X 处填写表示顾客相继到达时间间隔分布的代码，
- Y 处填写表示服务时间分布的代码，
- Z 处填写系统服务台的个数.

X 可取“M”、“GI”、“D”等，Y 可取“M”、“G”、“D”等，其中

- M —— 指数分布（其无记忆性决定过程的 Markov 性）
- GI —— 一般相互独立的时间间隔分布
- D —— 确定的时长，退化分布
- G —— 服务时间的一般分布

§2.3 Poisson 过程性质

随机服务系统分类： D.G. Kendall 于 1953 年提出的分类方法，基于顾客到达间隔时间、服务时间分布和服务台个数三个特征. 记号：

$$X/Y/Z,$$

- X 处填写表示顾客相继到达时间间隔分布的代码，
- Y 处填写表示服务时间分布的代码，
- Z 处填写系统服务台的个数.

X 可取 "M"、"GI"、"D" 等，Y 可取 "M"、"G"、"D" 等，其中

- M —— 指数分布（其无记忆性决定过程的 Markov 性）
- GI —— 一般相互独立的时间间隔分布
- D —— 确定的时长，退化分布
- G —— 服务时间的一般分布

随机服务系统分类： Kendall 扩充记号

$$X/Y/Z/A/B/C \quad \text{或} \quad [X/Y/Z]:[A/B/C],$$

其中前三项意义同前不变，

- A 处填写系统容量限制数 N,
- B 处填写顾客源数目 m,
- C 处填写系统服务规则，常见的有如下四种：

  (1) 先到先服务 (FCFS, First Come First Serve)

  (2) 后到先服务 (LCFS, Last Come First Serve)

  (3) 有优先权的服务 (PR, Priority)

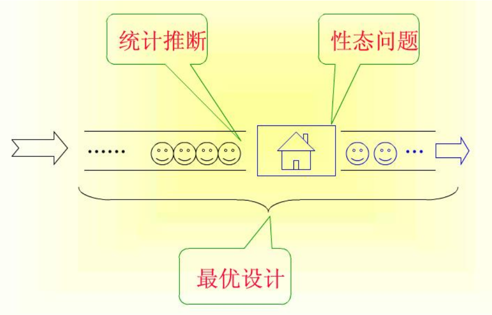
  (4) 随机服务 (SIRO, Service in Random Order)

随机服务系统举例：

- $M/G/k$ 系统：顾客到达时间间隔服从指数分布（到达过程为 Poisson 过程），服务台提供的服务时间具有一般的分布，系统有 k 个服务台.
- $\mathrm{GI}/D/\infty$ 系统：顾客到达时间间隔独立且具有一般分布（到达过程为更新过程），服务台提供的服务时间是固定常数，系统有无穷多个服务台.
- $M/G/1/N/\infty/\mathrm{FCFS}$ 系统

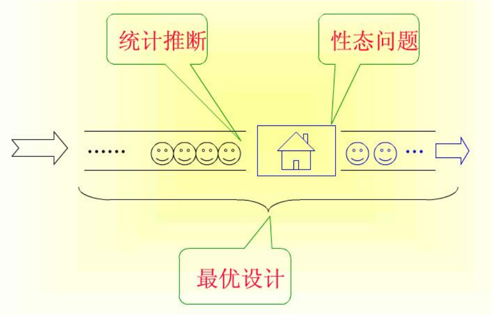
§2.3 Poisson 过程性质

随机服务系统研究：



系统指标：平均队长、平均服务时间、平均等待时间、流失顾客比例、期望休闲期长度、期望忙期长度，等

随机服务系统研究：



系统指标：平均队长、平均服务时间、平均等待时间、流失顾客比例、期望休闲期长度、期望忙期长度，等

- 【例】 设 $T_1, T_2, \ldots, T_n$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$, 证明 $nT_{1:n}$, $(n-1)(T_{2:n}-T_{1:n})$, …, $(n-k+1)(T_{k:n}-T_{(k-1):n}), \ldots, T_{n:n}-T_{(n-1):n}$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

※ 引入 Poisson 过程, 再应用定理 2.3.2 和指数分布的无记忆性

模型:

- 设 n 个元件寿命分别为 $T_1, T_2, \ldots, T_n$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$, 元件一旦失效立即用同一型号元件替换, 每个元件是独立工作. 记 $N(t)$ 为 $(0, t]$ 时间段失效的元件个数, 则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 HHP$(n\lambda)$, 其首个事件（失效）发生时刻为 $T_{1:n} \sim \mathrm{Exp}(n\lambda)$.
- 当第一个失效发生时, 扔掉该元件, 把该时刻点记为时间起点（0 点）, 考虑余下的正在工作的 $(n-1)$ 个元件, 一旦失效立即给与替换, 则 $T_{2:n}-T_{1:n} \sim \mathrm{Exp}((n-1)\lambda)$, 且独立于 $T_{1:n}$.
- 余下略.

▶ 【例】 设 $T_1, T_2, \ldots, T_n$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$, 证明 $nT_{1:n}$, $(n-1)(T_{2:n}-T_{1:n})$, …, $(n-k+1)(T_{k:n}-T_{(k-1):n}), \ldots, T_{n:n}-T_{(n-1):n}$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

※ 引入 Poisson 过程，再应用定理 2.3.2 和指数分布的无记忆性

模型：

- 设 n 个元件寿命分别为 $T_1, T_2, \ldots, T_n$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$, 元件一旦失效立即用同一型号元件替换，每个元件是独立工作. 记 $N(t)$ 为 $(0, t]$ 时间段失效的元件个数, 则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 HHP$(n\lambda)$, 其首个事件（失效）发生时刻为 $T_{1:n} \sim \mathrm{Exp}(n\lambda)$.
- 当第一个失效发生时，扔掉该元件，把该时刻点记为时间起点（0 点），考虑余下的正在工作的 $(n-1)$ 个元件，一旦失效立即给与替换，则 $T_{2:n}-T_{1:n} \sim \mathrm{Exp}((n-1)\lambda)$, 且独立于 $T_{1:n}$.
- 余下略.

▶【例】 设 $T_1, T_2, \ldots, T_n$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$, 证明 $nT_{1:n}$, $(n-1)(T_{2:n}-T_{1:n})$, ..., $(n-k+1)(T_{k:n}-T_{(k-1):n}), \ldots, T_{n:n}-T_{(n-1):n}$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

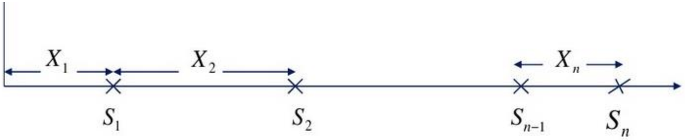
※ 引入 Poisson 过程，再应用定理 2.3.2 和指数分布的无记忆性

模型:

- 设 n 个元件寿命分别为 $T_1, T_2, \ldots, T_n$ iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$, 元件一旦失效立即用同一型号元件替换，每个元件是独立工作. 记 $N(t)$ 为 $(0, t]$ 时间段失效的元件个数, 则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 HHP$(n\lambda)$, 其首个事件（失效）发生时刻为 $T_{1:n} \sim \mathrm{Exp}(n\lambda)$.
- 当第一个失效发生时，扔掉该元件，把该时刻点记为时间起点（0点），考虑余下的正在工作的 $(n-1)$ 个元件，一旦失效立即给与替换，则 $T_{2:n}-T_{1:n} \sim \mathrm{Exp}((n-1)\lambda)$, 且独立于 $T_{1:n}$.
- 余下略.

第 2 章　Poisson 过程

- Poisson 过程定义
- 与 Poisson 过程相关的若干分布
- 更新过程



T_1

Poisson 过程的一个自然推广

▶ 定义 3.1.1 设 $\{T_n, n \geq 1\}$ iid $\sim F$, $F(0-) = 0$, $F(0) < 1$, 记 $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$, $n \geq 1$. 定义一个计数过程

$$N(t) = \sup\{n: \ S_n \leq t, \ n \geq 0\}, \quad t \geq 0,$$

则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一个更新过程.

※

- "事件" vs "更新". 站在更新点看未来, 过程未来演化规律相同.
- "$F(0) < 1$" 避免平凡情形发生, 且 $\mu = \mathbb{E}X \in (0, +\infty]$.
- 于一点发生的更新数可以是一个随机变量, 服从 $\text{Geo}^*(\overline{F}(0))$. 注意 0 点与其它点的差异.
- $N(t) < \infty$, 且 $N(t) = \max\{n: \ S_n \leq t, n \geq 0\}$.

- $N(t)$ 分布:

$$\mathrm{P}\left(N(t) \geq n\right) = \mathrm{P}\left(S_n \leq t\right) = F^{(n)}(t),$$

$$\mathrm{P}\left(N(t) = n\right) = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t), \quad n \geq 0.$$

- 更新函数：$m(t) = \mathbb{E}N(t)$

▶ 命题 3.2.1 $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t)$.

证明　注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(N(t) = n\right) &= \mathrm{P}\left(N(t) \geq n\right) - \mathrm{P}\left(N(t) \geq n+1\right)\\ &= F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t).\end{aligned}$$

※ $F^{(0)}(t) = 1_{[0,\infty)}(t)$, 常数 0 退化随机变量的 cdf

因此我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}N(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nF^{(n)}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} nF^{(n+1)}(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nF^{(n)}(t) - \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)F^{(n)}(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t).\end{aligned}$$

∎

§3.2 更新方程

方法二： 注意到

$$N(t)=\sum_{n=1}^{\infty}1_{\{S_n\le t\}}.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}N(t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[1_{\{S_n\le t\}}]=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}\{S_n\le t\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}F^{(n)}(t).\end{aligned}$$

$\blacksquare$