作业8，2024 年4月

1. 现有一个三状态的马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$的25个连续观察数据：

$$\begin{array}{ccccccccccccc} -1, & 0, & 0, & 1, & 0, & -1, & -1, & -1, & 0, & 0, & -1, & 0, & -1, \\ -1, & -1, & 0, & 0, & 1, & 1, & 1, & 0, & -1, & 1, & 1, & 1, & \end{array}$$

   则据此估计该MC的一步转移概率矩阵.

2. 设有夏普、大金两个品牌的空气净化器在某地市场占有率开始时($n = 0$) 均为1/3(其他品牌总的市场占有率为1/3). 而每过一个月（单位时间) 顾客消费倾向的改变可以用一个三状态的马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$ 来描述,其一步转移概率(状态1、2、3分别表示购买夏普、大金、其他品牌的空气净化器

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.35 & 0.3 & 0.35 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

   (1) 问两个月后各品牌的市场占有率将变成多少?

   (2) 各品牌对市场的占有率最终会稳定于什么样的比例? （利用如下红色的公式）

   $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n-1} * \mathbf{P}, \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ ，两边取极限, 有$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)\mathbf{P}$

   可以用matlab简单跑一下验证一下计算结果.

3. 逐个随机地把球放入到a 个盒子中去（可重复放），以X_n 表示放了n 个球之后的空盒数，则$\{X_n, n \geq 0\}$ 为马氏链,

   (1) 写出该马氏链的转移概率矩阵P;

   (2) 试求放满a 个盒子的平均时间（次数）。

4. 市场上有a 种牌号的牙膏，记为$\{1, 2, \dots, a\}$. 假定消费者相继使用的牙膏牌号构成马氏链，选用第i 种牌号牙膏的消费者继续使用第i 种牌号牙膏的概率为$p_{i,i}, (0 < p_{i,i} < 1, i = 1, 2, \dots, a)$. 若他对原来使用的牙膏不满意, 就在其它$a - 1$ 种牙膏中任选一种, 即有: $p_{i,j} = \frac{1-p_{i,i}}{a-1}, (j \neq i)$， 试写出该马氏链的转移概率矩阵$P$ 并对马氏链作状态分类

5. 设一质点在正整数点上做随机游动, 质点处于正整数点i时，以概率p_i往右走一格，概率$1 - p_i$退回到点1, $p_i = e^{-\frac{1}{i}}$, $i = 1, 2, \dots$. 记X_n表示时刻n质点所处的位置,

   (1) 写出过程的状态空间, 说明该过程为Markov链.

   (2) 讨论该各状态的周期性和常返性。