Hw 1 & HW2 & 其他

T1 $X(t)$ 二阶矩存在的随机过程. 证明: $X(t)$ 宽平稳 $\Leftrightarrow$ $EX(s)$ 与 $E\,X(s)X(s+t)$ 不依赖于 s.

证明. 由宽平稳定义知 $\{X(t)\}$ 宽平稳 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \mu_X(s) = EX(s) \text{ 为常数} & ① \\ Var(X(s)) < \infty & ② \\ Cov(X(t), X(s)) \text{ 只与 } t-s \text{ 有关} & ③ \end{cases}$

而 $Cov(X(t),X(s)) = E[X(t)X(s)] - EX(t)EX(s)$, 故 ③① $\Leftrightarrow$ $EX(s)$ 与 $EX(s)X(t+s)$ 不依赖于 s. 而② 为题中条件

从而 $X(t)$ 宽平稳 $\Leftrightarrow$ $EX(s)$ 与 $EX(s)X(s+t)$ 不依赖于 s.

T2. $U_1 \dots U_n \overset{iid}{\sim} U(0,1)$ $\quad I(t,x) \hat{=} \begin{cases} 1 & x \le t \\ 0 & x > t \end{cases}$ $\quad X(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(t,U_k)$, $0 \le t \le 1$. 求 $EX(t)$ 和 $Cov(X(t),X(s))$

解. $EX(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[I(t,U_k)] \overset{U_i\ iid}{=} E[I(t,U_1)] = t$. $\quad 0 \le t \le 1$.

$$Cov(X(t),X(s)) = Cov\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(t,U_k), \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} I(s,U_l)\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} Cov(I(t,U_k), I(s,U_l))$$

$$\underset{U_i\ iid}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Cov(I(t,U_k), \overset{I(s,U_k)}{\cancel{I(t,U_k)}}) \cancel{= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(E[I(t,U_k)] - E^2[I(t,U_k)]\right)}$$

$$= \frac{1}{n}\cdot Cov(I(t,U_1), I(s,U_1)) = \frac{1}{n}\cdot\left(E[I(t,U_1)I(s,U_1)] - E[I(t,U_1)]E[I(s,U_1)]\right)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot(\min\{t,s\} - ts), \quad 0 \le t,s \le 1.$$

$E[I(t,U_1)I(s,U_1)] = P(U_1 \le t, U_1 \le s) = P(U_1 \le \min\{t,s\}) = \min\{t,s\}$

T3. Z_1, Z_2 i.i.d. $\sim N(0,\sigma^2)$. $X(t) \hat{=} Z_1\cos\lambda t + Z_2 \sin\lambda t$, 求 $EX(t)$ 和 $Cov(X(t),X(s))$, 是否宽平稳?

解: 由题意, $EX(t) = (EZ_1)\cos\lambda t + (EZ_2)\sin\lambda t = 0$

$$Cov(X(t),X(s)) = Cov(Z_1\cos\lambda t + Z_2\sin\lambda t, Z_1\cos\lambda s + Z_2\sin\lambda s) \overset{Z_1,Z_2\ i.i.d}{=} Cov(Z_1,Z_1)\cos\lambda t\cos\lambda s + Cov(Z_2,Z_2)\sin\lambda t\sin\lambda s$$

$$= \sigma^2\cos(\lambda(t-s))$$

再加上 $Var(X(t)) = Cov(X(t),X(t)) = \sigma^2 < \infty$, 有 $X(t)$ 宽平稳.

T4. $X(t) \sim$ Poisson $t \ge 0$ 满足 (i) $X(0)=0$; (ii) $t>s$, $X(t)-X(s) \sim Poi(\lambda(t-s))$ (iii) 过程独立增量 求 $EX(t)$, $Cov(X(t),X(s))$, 宽平稳

解. 由题意, $EX(t) \overset{(i)}{=} E[X(t)-X(0)] \overset{(ii)}{=} \lambda t$, $Var X(t) = Var(X(t)-X(0)) \overset{(ii)}{=} \lambda t$

$X(t)-X(s)$ 与 $X(s)$ 独立

$$Cov(X(t),X(s)) = EX(t)X(s) - EX(t)EX(s) \overset{\text{不妨} t>s}{=} E[(X(t)-X(s))X(s)] + E[X^2(s)] - \lambda^2 ts = \lambda(t-s)\cdot\lambda s + \cancel{(\lambda s)} - \lambda^2 ts$$

$+(\lambda s)^2$

$$= \lambda^2(ts - s^2) + \lambda s - \lambda^2 ts + \lambda^2 s^2 = \lambda s.$$

由于 $Cov(X(t),X(s))$ 与 s 有关 (或与 $\min\{t,s\}$ 有关), $X(t)$ 不为宽平稳过程.

注: Poisson 分布 X 有 $EX=\lambda$, $Var X = \lambda$, $EX^2 = Var X + (EX)^2 = \lambda + \lambda^2$.
$Poi(\lambda)$

T6 Z_1, Z_2 i.i.d. $P(Z_1=1)=P(Z_1=-1)=\frac{1}{2}$ $X(t)\triangleq Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t$, $t\in\mathbb{R}$. 证$\{X(t)\}$宽平稳, 是否严平稳?

证明. $EX(t)=EZ_1\cos\lambda t+EZ_2\sin\lambda t=0 \quad t\in\mathbb{R}$

$Cov(X(t),X(s)) = Cov(Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t,\ Z_1\cos\lambda s+Z_2\sin\lambda s) \overset{Z_1,Z_2\ i.i.d.}{=} Cov(Z_1,Z_1)\cos\lambda t\cos\lambda s + Cov(Z_2,Z_2)\sin\lambda t\sin\lambda s$

$\underset{Var(Z)=1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=1}{=} \cos[\lambda(t-s)]$ 只与 $t-s$ 有关

$Var(X(t))=1<\infty$.

$\Rightarrow X(t)$ 宽平稳.

由 $X(t)$ 矩母函数为 $g_{X(t)}(u)=Ee^{uX(t)} = E[\exp\{u(Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t)\}] = E[\exp\{u\cdot Z_1\cos\lambda t\}]\cdot E[\exp\{u\cdot Z_2\sin\lambda t\}]$

$=\frac{1}{4}[\exp(-u\cos\lambda t)+\exp(u\cos\lambda t)][\exp(-u\sin\lambda t)+\exp(u\sin\lambda t)] \quad u\in\mathbb{R}$

知 $X(t)$ 分布与 $t\in\mathbb{R}$ 有关, 故 $\{X(t)\}$ 不为严平稳.

作业2 T1. $\{X_n, n=0,\pm1,\dots\}$ 有 $X_n=\sum_{k=1}^{m}(A_k\cos n\omega_k+B_k\sin n\omega_k)$, $A_1,\dots,A_m,B_1,\dots,B_m$ 均值为0且两两不相关 r.v.

$EA_k^2=EB_k^2=\sigma_k^2$, $1\le k\le m$, $0<\omega_k<2\pi$. 考察其平稳性.

$EX_n=\sum_{k=1}^{m}E(A_k\cos n\omega_k+B_k\sin n\omega_k)=\sum_{k=1}^{m}(\cos n\omega_k EA_k+\sin n\omega_k EB_k)=0.$

$Cov(X_p,X_q)=Cov\left(\sum_{k=1}^{m}A_k\cos p\omega_k+B_k\sin p\omega_k,\ \sum_{l=1}^{m}A_l\cos q\omega_l+B_l\sin q\omega_l\right)$

$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}Cov(A_k\cos p\omega_k+B_k\sin p\omega_k,\ A_l\cos q\omega_l+B_l\sin q\omega_l)$

$\overset{不相关}{=}\sum_{k=1}^{m}Cov(A_k\cos p\omega_k+B_k\sin p\omega_k,\ A_k\cos q\omega_k+B_k\sin q\omega_k)$

$=\sum_{k=1}^{m}[\cos p\omega_k\cos q\omega_k Var(A_k)+\sin p\omega_k\sin q\omega_k Var(B_k)]$

$=\sum_{k=1}^{m}\cos\omega_k(p-q)\sigma_k^2$ 只与 $p-q$ 有关.

$Var(X_n)=\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^2<\infty$.

综上有 X_n 宽平稳.

T2(书上T9)

$\cancel{P(X^2+Y^2\ge\frac{3}{4}, X>Y)=\frac{1}{2}\cdot(\pi\cdot1-\pi\cdot\frac{3}{4})=\frac{\pi}{8}}$ $\cancel{\Rightarrow P(X^2+Y^2\ge\frac{3}{4}\mid X>Y)=\frac{1}{4}}$

$\cancel{P(X>Y)=\frac{\pi}{2}}$

$P(X^2+Y^2\ge\frac{3}{4}, X>Y)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}(\pi\cdot1-\pi\cdot\frac{3}{4})=\frac{1}{8}$. $P(X>Y)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow P(X^2+Y^2\ge\frac{3}{4}, X>Y)=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$.

T3 (书上T11) X, Y i.i.d. 证明 $E(X|X+Y=z)=E(Y|X+Y=z)$. 试求基于 $X+Y=z$ 的 X 的最佳预报, 求预报误差 $E(X-\varphi(X+Y))^2$.

① 由 X,Y i.i.d. 有 $E(X|X+Y=z)=\int x\cdot f_{X|X+Y}(x|x+y)\,dx$, $E(Y|X+Y=z)=\int y\cdot f_{Y|X+Y}(y|x+y)\,dy$

其中 $f_{X|X+Y}=f_{Y|X+Y}$ 从而条件期望相同, 即 $E(X|X+Y=z)=E(Y|X+Y=z)$.

② 由上式有 $E(X+Y|X+Y=z)=z=2E(X|X+Y=z) \Rightarrow E(X|X+Y=z)=\frac{z}{2}$.

③ $E(X-\varphi(X+Y))^2=E\left(X-\frac{X+Y}{2}\right)^2=E\left(\frac{X-Y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(EX^2+EY^2-2EXY\right)\underset{X,Y\text{ i.i.d.}}{=}\frac{1}{2}\left[EX^2-(EX)^2\right]=\frac{1}{2}Var(X)$.

T4. (书上T(?)) $X_1 \dots X_n$ i.i.d. $\sim exp(\lambda)$, 证 $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n,\lambda)$, $f(t)=\lambda\exp\{-\lambda t\}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$, $t\geq 0$. (特征函数)

版本一: (矩母函数) $g_T(t)\overset{iid}{=}(g_{X_1}(t))^n=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$, $t<\lambda$. 这里 $T=\sum_{i=1}^n X_i$, $g_{X_1}(t)=\lambda\int e^{(t-\lambda)x}dx=\frac{\lambda}{\lambda-t}$, $t<\lambda$.

而 $\Gamma(n,\lambda)$ 矩母函数为 $g(t)=\int_0^\infty e^{tx}\cdot\lambda\cdot\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-(\lambda-t)x}dx$

$\overset{(*)}{=}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)!}{(\lambda-t)^n}=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$, $t<\lambda$.

(*) 由 $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-(\lambda-t)x}dx=\underbrace{\cancel{-\frac{1}{\lambda-t}x^{n-1}\cdot e^{-(\lambda-t)x}\Big|_0^\infty}}_{0}+\int_0^\infty\frac{1}{\lambda-t}\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}e^{-(\lambda-t)x}dx=\dots$ 不断分部积分得.

版本二 (特征函数) $T=\sum_{i=1}^n X_i$ 特征函数 $\varphi_T(t)=Ee^{itT}=\left(Ee^{itX_1}\right)^n=\left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^n$.

$Ee^{itX_1}=\int_0^\infty e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\cdot\frac{1}{\lambda-it}$

类似有 $\Gamma(n,\lambda)$ ~~矩母~~特征函数 $\varphi(t)=\int_0^\infty e^{itx}\lambda\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}dx=\left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^n$.

综合有 $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n,\lambda)$.

T5: 到阳极电子数目 $N(t)\sim Poi(\lambda t)$, X_j 携带能量相互独立且与 $N(t)$ 独立, 并均 $\sim U[1,2]$ 设 $S(t)=\sum_{j=1}^{N(t)}X_j$, 求 $ES(t)$, $Var(S(t))$.

解. 由书P9 例1.12结论, $EX_j=\int_1^2\frac{1}{1}\cdot x\,dx=\frac{3}{2}$. $EN(t)=\lambda t$.

$$(1.24)\begin{cases} EY=EN\cdot EX \\ EY^2=EN\cdot VarX+EN^2\cdot E^2X \\ VarY=EN\cdot VarX+E^2X\cdot VarN \end{cases}$$

$VarX_j=\int_1^2 x^2\cdot 1\,dx-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{3}-\frac{9}{4}=\frac{1}{12}$. $VarN(t)=\lambda t$

故 $ES(t)=EN(t)EX_j=\frac{3}{2}\lambda t$

$VarS(t)=EN\cdot VarX+E^2X\cdot VarN=\lambda t\cdot\frac{1}{12}+\cancel{\left(\frac{9}{4}+\frac{1}{12}\right)}\frac{9}{4}\lambda t=\frac{7}{3}\lambda t$.

补充:

T1 保险: $N(t)\sim Poi(5t)$ Y_i 表示第 i 个出险者应获赔偿, $Y_i\sim U(1,3)$ $\{Y_i, i\geq 1\}$ i.i.d. 求 $X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 的 $EX(t)$, $VarX(t)$, $g_{X(t)}(s)$.

(均匀分布 $g_X(s)=\dfrac{e^{bs}-e^{as}}{(b-a)s}$)

解: $E[X(t)|N(t)=n]=nEY=2n \quad (EY_i=2,\ VarY_i=\frac{1}{3}) \Rightarrow EX(t)=E[E(X(t)|N(t)=n)]=2E[N(t)]=10t.$

$VarX(t)=E[N(t)]VarY+E^2Y\cdot Var(N(t))=5t\cdot\frac{1}{3}+4\cdot 5t=\frac{65}{3}t.$

$\cancel{g_{X(t)}(s)=Ee^{sX(t)}=E[E[e^{sX(t)}|N(t)]]=E[e^{sY_1}\cdots e^{sY_n}]}$

$g_{X(t)}(s)=E[e^{sX(t)}]=E[E(e^{sX(t)}|N(t))]$, 而 $E[e^{sX(t)}|N(t)=n]=E[e^{sY_1}\cdots e^{sY_n}]\overset{Y_i\ iid}{=\!=}E[e^{sY_1}]^n \quad (*)$

由 $g_{Y_i}(s)=\dfrac{e^{bs}-e^{as}}{(b-a)s}$, $Y_i\sim U(a,b)$ 有 $(*)=(g_Y(s))^n$, 其中 $g_Y(s)=\dfrac{e^{3s}-e^{s}}{2s}$

从而 $g_{X(t)}(s)=E[(g_Y(s))^{N(t)}]=\sum_{n=0}^{\infty}(g_Y(s))^n\cdot\frac{(5t)^n}{n!}e^{-5t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5t\cdot g_Y(s))^n}{n!}e^{-5t}=e^{g_Y(s)\cdot 5t}\cdot e^{-5t}=e^{(g_Y(s)-1)\cdot 5t}.$

T2. $X(t)=Y\cos(\omega t+\Theta)$, 其中 ω 为常数, $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$, $\Theta\sim U[0,2\pi]$, Y 与 Θ 独立. 试判断 $X(t)$ 是否宽平稳.

① $EX(t)\overset{Y\perp\Theta}{=}EY\cdot E\cos(\omega t+\Theta)$, 而 $E\cos(\omega t+\Theta)=\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=\frac{1}{2\pi}\sin(\omega t+\theta)\Big|_0^{2\pi}=0.$

$\Rightarrow EX(t)\equiv 0$

② $VarX(t)=EX^2(t)-(EX(t))^2=EX^2(t)=EY^2\cdot E\cos^2(\omega t+\Theta)$

$E\cos^2(\omega t+\Theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(\omega t+\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\omega t+2\theta)+1}{2}d\theta=\frac{1}{4\pi}\cdot 2\pi=\frac{1}{2}.$

$\therefore\ Var X(t)=\frac{1}{2}(\mu^2+\sigma^2)<\infty.$

③ $Cov(X(t),X(s))=Cov(Y\cos(\omega t+\Theta),Y\cos(\omega s+\Theta))$

$\overset{EX(t)\equiv 0}{=}E[Y^2\cos(\omega t+\Theta)\cos(\omega s+\Theta)]$

$\overset{Y\perp\Theta}{=}EY^2\,E[\cos(\omega t+\Theta)\cos(\omega s+\Theta)]$

$=(\mu^2+\sigma^2)\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(\omega t+\theta)\cos(\omega s+\theta)d\theta$

$=\frac{1}{2}(\mu^2+\sigma^2)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega(t+s)+2\theta)+\cos(\omega(t-s))d\theta$

$=\frac{1}{2}(\mu^2+\sigma^2)\cos(\omega(t-s))$ 只与 $t-s$ 有关.

综上有 $X(t)$ 宽平稳.