量子物理第二次作业答案

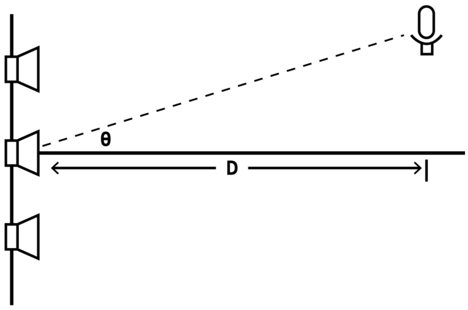
by mobius

2024/4/9

[3月12日作业]

> **9.三个扬声器排成直线,相距d，播放单频声音信号$s_j(t)=Acos(\omega t+\varphi_j),j=1,2,3.$**
>
> **远处一个麦克风在夹角为θ的方向接收声音。欲使麦克风处消音，三个初相位$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$应该满足什么关系?**

不妨设麦克风到扬声器所在直线的垂直距离为D，如图所示



麦克风离扬声器足够远时，三个扬声器麦克风距离分别有：

$$r_1=\sqrt{D^2+(Dtan\theta-d)^2}\approx\frac{D}{cos\theta}-dsin\theta \tag{1}$$

$$r_2=\frac{D}{cos\theta} \tag{2}$$

$$r_3=\sqrt{D^2+(Dtan\theta+d)^2}\approx\frac{D}{cos\theta}+dsin\theta \tag{3}$$

麦克风消音意味着扬声器发出的三列球面波在麦克风处的复振幅之和为0：

$$\frac{A}{r_1}exp\{i(kr_1+\varphi_1)\}+\frac{A}{r_2}exp\{i(kr_2+\varphi_2)\}+\frac{A}{r_3}exp\{i(kr_3+\varphi_3)\}=0 \tag{4}$$

带入化简后有（分母处的r_1,r_2,r_3可近似认为相等）：

$$exp\{i(-kdsin\theta+\varphi_1)\}+exp\{i\varphi_2\}+exp\{i(kdsin\theta+\varphi_3)\}=0 \tag{5}$$

解得(具体过程见附录)：

$$2\varphi_2=\varphi_1+\varphi_3+2k\pi \tag{6}$$

> **11.牛顿环从中间数第 5 暗环和第 15 暗环直径分别是 0.70mm 和 1.70mm。设入射单色光的波长为 589nm。**
>
> **（1）求透镜凸面的曲率半径。**
>
> **（2）若在牛顿环间隙充满折射率为 1.33 的水，这两个暗环的直径变为多大?**

(1)由牛顿环干涉公式，暗纹满足：

$$r_m^2=(m+1)R\lambda \tag{7}$$

故曲率半径有：

$$R=\frac{r_{15}^2-r_5^2}{10\lambda}=0.102m \tag{8}$$

(2)此时暗纹条件满足：

$$2nh-\frac{\lambda}{2}=(m+\frac{1}{2})\lambda \tag{9}$$

故暗环半径变为：

$$r_m^2=\frac{1}{n}(m+1)R\lambda \tag{10}$$

带入数据得:

$$d_5=0.61mm,d_{15}=1.47mm \tag{11}$$

注: 有同学会疑惑直接用（7）式算得结果相差很大，实际上是由于存在灰尘或其他因素，致使牛顿环装置中心处两表面不是严格密接（详见《光学（重排本）》），为了消除这种误差，我们在这里使用的是做差法计算。

[3月14日作业]

> **12.在折射率为 1.5 的玻璃表面，镀上一层折射率为 1.30 的透明薄膜。对于 550nm 的黄绿光垂直入射的情形，为了增强透射光束强度，应使反射光干涉相消。求膜的厚度。**

上下表面都是光疏介质到光密介质的界面，此时两反射光间无半波损耗，故相消条件有:

$$2nh=\frac{\lambda}{2} \tag{12}$$

故膜的最小厚度:

$$h=\frac{\lambda}{4n}=\frac{550nm}{4\times 1.3}=105.77nm \tag{13}$$

> **13.用波长 589.3nm 的钠黄光作为夫琅禾费单缝衍射的光源，测得第二极小到干涉图样中心的距离为 0.30cm。改用未知波长的单色光源，测得第三极小到中心的距离为 0.42cm。求未知波长。**

对单缝夫琅和费衍射，在傍轴条件下暗条纹满足:

$$sin\theta=\frac{x}{z}=m\frac{\lambda}{a} \tag{14}$$

带入题中数据可得:

$$\begin{gathered}\frac{x_1}{z}=2\frac{\lambda_1}{a}\\ \frac{x_2}{z}=3\frac{\lambda_2}{a}\end{gathered} \tag{15}$$

故未知波长:

$$\lambda_2=\frac{2x_2}{3x_1}\lambda_1=550.0nm \tag{16}$$

> **16.用氦氖激光器发出的波长为 632.8nm 的红光，垂直入射到平面透射光栅上，测得第一级极大出现在 38°方向。**
>
> **（1）求光栅常数。（2）能否看到第二级极大?**

(1)由光栅方程:

$$dsin\theta=m\lambda \tag{17}$$

带入$m=1$可得光栅常数:

$$d=1.03\times 10^{-6}m \tag{18}$$

(2)带入$m=2$可得第二级极大的位置:

$$sin\theta>1 \tag{19}$$

因此无法看到第二级极大

[3月19日作业]

> **18.四个偏振片依次前后排列。每个偏振片的透振方向，均相对于前一偏振片沿顺时针方向转过 30°角。不考虑吸收、反射等光能损失，则透过此偏振片系统的光强是入射光强的多少倍?**

设入射光为线偏振光，其光强为I_0，初始偏振方向与第一个偏振片夹角为θ，则透过偏振片系统后光强I_1满足:

$$I_1 = (cos\theta cos^3\frac{\pi}{6})^2 I_0 = (\frac{27}{64}cos^2\theta)I_0 \tag{20}$$

故透过此偏振片系统的光强是入射光强的$\frac{27}{64}cos^2\theta$ 倍

若假设入射光为自然光，则满足

$$I_1 = \frac{27}{128}I_0 \tag{21}$$

> **19.有一空气-玻璃界面，光从空气一侧入射时，布儒斯特角是 58°，求光从玻璃一侧入射时的布儒斯特角。**

光从空气一侧入射时有：

$$tan\theta_{b1} = \frac{n_2}{n_1} \tag{22}$$

光从玻璃一侧入射时有：

$$tan\theta_{b2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{tan\theta_{b1}} \tag{23}$$

故光从玻璃入射的布儒斯特角：

$$\theta_{b2} = 32^\circ \tag{24}$$

[3月21日作业]

> **21.利用普朗克辐射公式，求斯特藩-玻尔兹曼定律常数σ。**

由普朗克公式：

$$u_T(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1} \tag{25}$$

则黑体辐射本领为:

$$R_T = \frac{c}{4}\int_0^\infty u_T(\nu)d\nu = \frac{2\pi h}{c^2}\int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/k_BT}-1} \tag{26}$$

令 $x = \frac{h\nu}{k_BT}$，则 $\nu = \frac{k_BT}{h}x$，$d_\nu = \frac{k_BT}{h}dx$，上式可化为：

$$R_T = \frac{2\pi h}{c^2}(\frac{k_BT}{h})^4\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} = \frac{2\pi k_B^4T^4}{c^2h^3}\frac{\pi^4}{15} = \frac{2\pi^5k_B^4}{15c^2h^3}T^4 = \sigma T^4 \tag{27}$$

则斯特藩-玻尔兹曼定律常数有：

$$\sigma = \frac{2\pi^5k_B^4}{15c^2h^3} \tag{28}$$

> **25.能量为 0.41MeV 的 X 射线光子与静止的自由电子碰撞，反冲电子的速度为0.6c，求散射光的波长和散射角**

由碰撞前后能量守恒可得：

$$h\nu_0 + m_ec^2 = h\nu + \frac{m_ec^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{29}$$

带入数据得散射光波长有：

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 0.0044nm \tag{30}$$

散射角满足公式：

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0} = \frac{2h}{m_ec}sin^2\frac{\theta}{2} \tag{31}$$

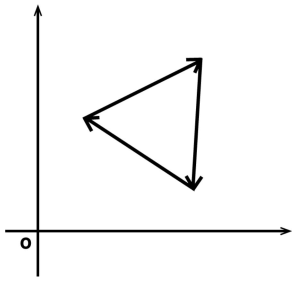
得到散射角为：

$$\theta = 65^\circ \tag{32}$$

[附录]

- **(5)式求解过程：**

我们在复平面进行处理，(5)式可视作复平面内三个模长为 1，幅角分别为$-kdsin\theta+\varphi_1, \varphi_2, kdsin\theta+\varphi_3$的矢量之和等于 0，则问题转化成三个矢量头尾相接构成等边三角形，矢量两两夹角为120°



①若按$-kdsin\theta+\varphi_1, \varphi_2, kdsin\theta+\varphi_3$的顺序依次排列，则有

$$\varphi_2-(-kdsin\theta+\varphi_1)=\frac{2\pi}{3}+2p\pi \tag{33}$$
$$(kdsin\theta+\varphi_3)-\varphi_2=\frac{2\pi}{3}+2q\pi$$

消去$-kdsin\theta$则得到：

$$2\varphi_2=\varphi_1+\varphi_3+2k\pi \tag{34}$$

②若按$-kdsin\theta+\varphi_1, kdsin\theta+\varphi_3, \varphi_2$的顺序依次排列，则有

$$(kdsin\theta+\varphi_3)-(-kdsin\theta+\varphi_1)=\frac{2\pi}{3}+2p\pi \tag{35}$$
$$\varphi_2-(kdsin\theta+\varphi_3)=\frac{2\pi}{3}+2q\pi$$

消去$-kdsin\theta$则得到：

$$2\varphi_2=\varphi_1+\varphi_3+2k\pi \tag{36}$$

综上所述，两种情况解得均为：

$$2\varphi_2=\varphi_1+\varphi_3+2k\pi \tag{38}$$