

## 作业6, 2024 年

1. 某网站负责某项职业考试的网上报名工作, 该项考试共有A、B、C三门课程, 考生中报考这三门课程的考生所占的比例分别为35%、40% 和25%, 而三门考试的报名费分别为30元、30元和50元. 设考生按速率为 $\lambda$ 的泊松过程到该网站报名, 其中 $\lambda = 10$ 人/天, 若以 $X(t)$  表示到第 $t$  天为止该网站收到的报名费总额, 试求 $X(t)$  的期望 $EX(t)$ 、方差 $Var(X(t))$  和矩母函数 $g_{X(t)}(\mu) = Ee^{\mu X(t)}$ 。

2. 对 Markov 链  $X_n, n \geq 0$ , 试证条件

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$

等价于对所有时刻  $n, m$  及所有状态  $i_0, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m$  有

$$\begin{aligned} P\{X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m \mid X_0 = i_0, \dots, X_n = i\} \\ = P\{X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m \mid X_n = i_n\} \end{aligned}$$

3. 考虑状态  $0, 1, 2$  上的一个 Markov 链  $X_n, n \geq 0$ , 它有转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$$

初始分布为  $p_0 = 0.3, p_1 = 0.4, p_2 = 0.3$ , 试求概率  $P\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2\}$ 。

4. 信号传送问题。信号只有  $0, 1$  两种, 分为多个阶段传输。在每一步上出错的概率为  $\alpha$ 。  $X_0 = 0$  是送出的信号, 而  $X_n$  是在第  $n$  步接收到的信号。假定  $X_n$  为一 Markov 链, 它有转移概率矩阵  $P_{00} = P_{11} = 1 - \alpha, P_{01} = P_{10} = \alpha, 0 < \alpha < 1$ 。试求

(a) 两步均不出错的概率  $P\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0\}$ ,

(b) 试求两步传送后收到正确信号的概率。

5.  $A, B$  两罐总共装有  $N$  个球。作如下试验: 在时刻  $n$  先  $N$  个球中等概率地任取一球。然后从  $A, B$  两罐中任选一个, 选中  $A$  的概率为  $p$ , 选中  $B$  的概率为  $q$ 。之后再选出的球放入选好的罐中。设  $X_n$  为每次试验时  $A$  罐中的球数。试求此 Markov 过程的转移概率矩阵。