期末考试试题分析

阿笠博士

June 6, 2024

注意：这份资料与涂涛班级的学生无关，这是给其他班级的学生阅读的。

1 简答题

(1) 写出$|0_A, 0_B\rangle$, $|0_A, 1_B\rangle$, $|1_A, 0_B\rangle$, $|1_A, 1_B\rangle$对应的列向量。

(2) 简述跃迁选择定则。

(3) 简述氢原子波函数描述与玻尔轨道模型的区别。

(4) 已知氢原子电子所处定态对应的主量子数$n = 2$，写出所有可能的(n, l, m)。

(5) 描述单电子光谱精细结构和超精细结构的成因。

(6) 什么是不确定关系？给出例子。

(7) 写出氢原子波函数的三个本征方程，并解释三个量子数的含义。

(8) 已知$L = 1, S = 1, J = 2$，求郎德g因子。

(9) 描述EPR佯谬。

(10) 对于双自旋体系，给出非耦合表象和耦合表象的本征态。

(11) 混合态对应Bloch球上哪些点？

(12) 描述量子不可克隆定理。

(13) 写出Hadamard算符的矩阵形式。

(14) 描述量子隐形传态，并说明是否违反了不可克隆定理，是否实现了超光速。

(15) 写出量子密钥分发安全性保证的物理原理。

2 计算题

(1) 写出$|\psi\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A + i\,|1\rangle_A)$与$|\psi\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_B + |1\rangle_B)$的直积态。

(2) 求解三个泡利算符对应的本征态和本征值。

(3) 写出快轴与水平方向夹角度为γ的半波片与1/4波片的操作矩阵。

(4) 设氢原子核外两个电子处于2s3d组态，它们在LS耦合下形成的原子态有几种？用原子态的符号表示出来。

(5) 两个态$|\psi_1\rangle$与$|\psi_2\rangle$的保真度定义为$F = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2$，计算$|\psi_1\rangle = \cos\frac{\theta_1}{2}\,|0\rangle - \sin\frac{\theta_1}{2}\,|1\rangle$与$|\psi_2\rangle = \cos\frac{\theta_2}{2}\,|0\rangle + i\sin\frac{\theta_2}{2}\,|1\rangle$的保真度。

(6) 通过CNOT门可以将四个Bell态变为直积态，写出过程。

(7) 已知$L = 2, S = 1$，计算$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$的可能取值。

(8) 推导二维量子隐形传态的过程。

3 简答题答案

(1)

$$
\begin{aligned}
|0_A, 0_B\rangle &\longleftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\\
|0_A, 1_B\rangle &\longleftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\\
|1_A, 0_B\rangle &\longleftrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\\
|1_A, 1_B\rangle &\longleftrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(2) 氢原子从(n, l, m)跃迁到$(\tilde{n}, \tilde{l}, \tilde{m})$需要满足$\tilde{l} - l = \pm 1$。

(3) 在玻尔轨道模型中，氢原子电子是沿着固定的轨道运动的；在波函数描述中，氢原子电子可以以特定的概率分布处于空间中的任何一个位置。

(4) 因为

$$l = 0, 1, ..., n-1,$$

所以$l = 0, 1$。

因为

$$m = -l, -l+1, ..., l-1, l,$$

所以当$l = 0$时$m = 0$，当$l = 1$时$m = -1, 0, 1$。

综上所述，所有可能的(n, l, m)为$(2, 0, 0), (2, 1, -1), (2, 1, 0), (2, 1, 1)$。

(5) 精细结构的成因是电子自旋角动量与轨道角动量的“自旋-轨道耦合”；超精细结构的成因是原子核自旋角动量与电子轨道角动量的“自旋-自旋耦合”。

(6) 不确定关系是指我们无法同时确定粒子的坐标(x, y, z)与动量(p_x, p_y, p_z)，即

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2},$$
$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2},$$
$$\Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}.$$

(7)

$$H\Psi_{n,l,m} = -\frac{E_0}{n^2}\Psi_{n,l,m},$$
$$L^2\Psi_{n,l,m} = l(l+1)\hbar^2\Psi_{n,l,m},$$
$$L_z\Psi_{n,l,m} = m\hbar\Psi_{n,l,m}.$$

其中n反映了氢原子的能量，l反映了氢原子角动量的大小，m反映了氢原子角动量沿着z方向分量的大小。

(8)

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)} = \frac{3}{2}.$$

(9) 爱因斯坦认为波函数不会在测量之后的瞬间发生改变，他认为这违背了狭义相对论的原理。

(10) 非耦合表象的本征态是

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \left|\uparrow\uparrow\right\rangle,\\ \Psi_2 &= \left|\uparrow\downarrow\right\rangle,\\ \Psi_3 &= \left|\downarrow\uparrow\right\rangle,\\ \Psi_4 &= \left|\downarrow\downarrow\right\rangle.\end{aligned}$$

耦合表象的本征态是

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \left|\uparrow\uparrow\right\rangle,\\ \Psi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\right\rangle),\\ \Psi_3 &= \left|\downarrow\uparrow\right\rangle,\\ \Psi_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\right\rangle).\end{aligned}$$

(详见资料“量子物理期末总结”)

(11) 混合态对应Bloch球内部点，相当于与球心距离小于1的点。

(12) 不可克隆定理是指我们无法复制一个未知的量子比特状态。

(13)

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

(14) 发送方Alice将一个量子比特与一个Bell态进行张量积，之后传送给接收方Bob，Bob利用一个Bell态与一个量子门将该量子态还原回Alice所需传输的量子比特。它不涉及克隆，因此没有违反不可克隆定理；它没有传递任何有关能量的信息，因此没有实现超光速。

(15) 量子不可克隆定理。

4 计算题答案

(1)

$$\begin{aligned}|\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B &= \frac{1}{2}(|0\rangle_A + i\,|1\rangle_A) \otimes (|0\rangle_B + |1\rangle_B)\\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B + i\,|1\rangle_A \otimes |0\rangle_B + i\,|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B)\\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + i\,|10\rangle + i\,|11\rangle).\end{aligned}$$

(2) 三个泡利算符的矩阵表示为

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$对应的本征态$\psi_x, \psi_y, \psi_z$与本征值$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$满足

$$\sigma_x \psi_x = \lambda_x \psi_x,$$
$$\sigma_y \psi_y = \lambda_y \psi_y,$$
$$\sigma_z \psi_z = \lambda_z \psi_z.$$

可得

$$\psi_x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_x^1 = 1,$$
$$\psi_x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_x^2 = -1,$$
$$\psi_y^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \lambda_y^1 = 1,$$
$$\psi_y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad \lambda_y^2 = -1,$$
$$\psi_z^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_z^1 = 1,$$
$$\psi_z^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_z^2 = -1.$$

其中上标$1, 2$表示有2个根。

(3) 半波片的操作矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix},$$

$1/4$波片的操作矩阵为

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - i\cos 2\gamma & -i\sin 2\gamma \\ -i\sin 2\gamma & 1 + i\cos 2\gamma \end{pmatrix}.$$

(4) 2s组态对应

$$l_1=0,s_1=\frac{1}{2},$$

3d组态对应

$$l_2=2,s_2=\frac{1}{2}.$$

原子的角动量取值为

$$L=l_1+l_2,l_1+l_2-1,...,|l_1-l_2|,$$

因此$L=2$。

原子的自旋取值为

$$S=s_1+s_2,s_1+s_2-1,...,|s_1-s_2|,$$

因此$S=1,0$。

原子的总角动量取值为

$$J=L+S,L+S-1,...,|L-S|,$$

因此，总共有4个组态：当$L=2,S=1$时，$J=3,2,1$，对应组态为${}^3\mathrm{D}_3,{}^3\mathrm{D}_2,{}^3\mathrm{D}_1$；当$L=2,S=0$时，$J=2$，对应组态为${}^1\mathrm{D}_2$。

(5) 因为

$$\langle\psi_1|=\cos\frac{\theta_1}{2}\langle 0|-\sin\frac{\theta_1}{2}\langle 1|,$$

根据$\langle i|j\rangle=\delta_{ij}$可得

$$\begin{aligned}\langle\psi_1|\psi_2\rangle&=\left(\cos\frac{\theta_1}{2}\langle 0|-\sin\frac{\theta_1}{2}\langle 1|\right)\left(\cos\frac{\theta_2}{2}|0\rangle+i\sin\frac{\theta_2}{2}|1\rangle\right)\\&=\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\langle 0|0\rangle+i\cos\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\langle 0|1\rangle-\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\langle 1|0\rangle-i\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\langle 1|1\rangle\\&=\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}-i\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}.\end{aligned}$$

因此

$$F=|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2=\cos^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2}+\sin^2\frac{\theta_1}{2}\sin^2\frac{\theta_2}{2}.$$

(6) 四个Bell态分别为

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

因此

$$\mathrm{CNOT}\,|\Phi^+\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{CNOT}\,|\Phi^-\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{CNOT}\,|\Psi^+\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{CNOT}\,|\Psi^-\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

(7) 总角动量取值为

$$J = L + S, L + S - 1, ..., |L - S|.$$

因此

$$J=3,2,1.$$

$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$的可能取值为

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}=\frac{1}{2}\left(J(J+1)-L(L+1)-S(S+1)\right)\hbar^2=2\hbar^2,-\hbar^2,-3\hbar^2.$$

(8) 我们首先需要引入两个概念。

(a) 对于有限维向量空间V_1,V_2,V_3，

$$V_1\otimes(V_2\otimes V_3)\cong(V_1\otimes V_2)\otimes V_3,$$

其同构映射为

$$\sum_i v_1^i\otimes(v_2^i\otimes v_3^i)\longleftrightarrow\sum_i(v_1^i\otimes v_2^i)\otimes v_3^i,$$

其中对于任意$i\in\mathbb{Z}^+$，都具有$v_1^i\in V_1,v_2^i\in V_2,v_3^i\in V_3$。

(b) 对于有限维向量空间V_1,V_2,W_1,W_2，记$\dim V_1=n_1,\dim V_2=n_2$，$E_1^1,...,E_{n_1}^1$为$V_1$上的一组基，$E_1^2,...,E_{n_2}^2$为$V_2$上的一组基。定义$\omega^1$为$V_1$到$W_1$的线性映射，$\omega^2$为$V_2$到$W_2$的线性映射：

$$\begin{array}{lcl}\omega^1(E_1^1)=w_1^1, & \cdots & \omega^1(E_{n_1}^1)=w_{n_1}^1,\\ \omega^2(E_1^2)=w_1^2, & \cdots & \omega^2(E_{n_2}^2)=w_{n_2}^2,\end{array}$$

其中$w_1^1,...,w_{n_1}^1\in W_1,w_1^2,...,w_{n_2}^2\in W_2$。
定义$\omega^1\otimes\omega^2$为$V_1\otimes V_2$到$W_1\otimes W_2$的线性映射：

$$\omega^1\otimes\omega^2\,(v_1\otimes v_2)=\omega^1(v_1)\otimes\omega^2(v_2).$$

量子隐形传态的步骤如下：

(I) 定义V_1,V_2,V_3为三个量子线路上量子比特所有状态的集合，它们均为向量空间。发送方(记为Alice)将任意量子态$|\psi\rangle=a\,|0\rangle+b\,|1\rangle\in V_1$与Bell态$|\Phi^+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)\in V_2\otimes V_3$进行张量积，得到$V_1\otimes(V_2\otimes V_3)$上的一个向量：

$$\begin{aligned}|\psi\rangle\otimes|\Phi^+\rangle&=(a\,|0\rangle+b\,|1\rangle)\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\,|0\rangle\otimes|00\rangle+a\,|0\rangle\otimes|11\rangle+b\,|1\rangle\otimes|00\rangle+b\,|1\rangle\otimes|11\rangle\right).\end{aligned}$$

(II) 根据(**??**)，我们可以将$|\psi\rangle\otimes|\Phi^+\rangle$视为$(V_1\otimes V_2)\otimes V_3$上的向量：

$$|\psi\rangle\otimes|\Phi^+\rangle\longleftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\,|00\rangle\otimes|0\rangle+a\,|01\rangle\otimes|1\rangle+b\,|10\rangle\otimes|0\rangle+b\,|11\rangle\otimes|1\rangle\right).$$

(III) 令$\omega^1,\omega^2,\omega^3,\omega^4$是向量空间$V_1\otimes V_2$到复数域$\mathbb{C}$上的线性映射，并且满足

$$\begin{aligned}
&\omega^1(|\Phi^+\rangle)=1, && \omega^1(|\Phi^-\rangle)=0, && \omega^1(|\Psi^+\rangle)=0, && \omega^1(|\Psi^-\rangle)=0,\\
&\omega^2(|\Phi^+\rangle)=0, && \omega^2(|\Phi^-\rangle)=1, && \omega^2(|\Psi^+\rangle)=0, && \omega^2(|\Psi^-\rangle)=0,\\
&\omega^3(|\Phi^+\rangle)=0, && \omega^3(|\Phi^-\rangle)=0, && \omega^3(|\Psi^+\rangle)=1, && \omega^3(|\Psi^-\rangle)=0,\\
&\omega^4(|\Phi^+\rangle)=0, && \omega^4(|\Phi^-\rangle)=0, && \omega^4(|\Psi^+\rangle)=0, && \omega^4(|\Psi^-\rangle)=1.
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle\otimes|\Phi^+\rangle=&\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\,|00\rangle\otimes|0\rangle+a\,|01\rangle\otimes|1\rangle+b\,|10\rangle\otimes|0\rangle+b\,|11\rangle\otimes|1\rangle\right)\\
=&\frac{1}{2}(a(|\Phi^+\rangle+|\Phi^-\rangle)\otimes|0\rangle+a(|\Psi^+\rangle+|\Psi^-\rangle)\otimes|1\rangle\\
&+b(|\Psi^+\rangle-|\Psi^-\rangle)\otimes|0\rangle+b(|\Phi^+\rangle-|\Phi^-\rangle)\otimes|1\rangle).
\end{aligned}$$

根据(**??**)与同构关系$\mathbb{C}\otimes V_3\cong V_3$，有四种情况：

(i) 如果接收方(记为Bob)选取了线性映射$\omega^1\otimes I$，那么

$$\omega^1\otimes I(|\psi\rangle\otimes|\Phi^+\rangle)=\frac{1}{2}(a\,|0\rangle+b\,|1\rangle).$$

它是V_3上的向量，对其进行归一化，并且转换为矩阵表示：

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$$

令其经过量子门$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in\mathrm{SU}(2)$，就能返回到Alice发送的量子态：

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$$

(ii) 如果接收方(记为Bob)选取了线性映射$\omega^2\otimes I$，那么

$$\omega^2\otimes I(|\psi\rangle\otimes|\Phi^+\rangle)=\frac{1}{2}(a\,|0\rangle-b\,|1\rangle).$$

它是V_3上的向量，对其进行归一化，并且转换为矩阵表示：

$$\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}.$$

令其经过量子门$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$，就能返回到Alice发送的量子态:

$$\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

(iii) 如果接收方(记为Bob)选取了线性映射$\omega^3 \otimes I$，那么

$$\omega^3 \otimes I(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle) = \frac{1}{2}(b\,|0\rangle + a\,|1\rangle).$$

它是V_3上的向量，对其进行归一化，并且转换为矩阵表示:

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}.$$

令其经过量子门$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$，就能返回到Alice发送的量子态:

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

(iv) 如果接收方(记为Bob)选取了线性映射$\omega^4 \otimes I$，那么

$$\omega^4 \otimes I(|\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle) = \frac{1}{2}(-b\,|0\rangle + a\,|1\rangle).$$

它是V_3上的向量，对其进行归一化，并且转换为矩阵表示:

$$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

令其经过量子门$iY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$，就能返回到Alice发送的量子态:

$$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$