

中国科学技术大学

硕士学位论文



光通信中量子接收机的理论与初步 实验研究

作者姓名：左元

学科专业：电磁场与微波技术

导师姓名：朱冰 教授

完成时间：二〇一六年五月

University of Science and Technology of China
A dissertation for master's degree



Theory Analysis and Preliminary Experimental Study of Quantum Receivers in Optical Communication System

Author: Yuan Zuo

Speciality: Electromagnetic Field and
Microwave Technology

Supervisor: Prof. Bing Zhu

Finished Time: May, 2016

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：_____

签字日期：_____

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

☐ 公开 ☐ 保密（_____ 年）

作者签名：_____

导师签名：_____

签字日期：_____

签字日期：_____

摘 要

在经典光通信系统中，由于受到散粒噪声的影响，通信系统接收机性能存在着经典极限——标准量子极限 (standard quantum limit, SQL)。近年来，随着量子信息技术的发展，利用光的量子特性设计新型的光接收机方案逐渐引起学术界的关注。这是因为，采用量子探测和测量的技术可以获取之前使用经典探测所不能获得的信息。这种方案可以让系统的性能突破标准量子极限，从而获得经典检测方案所不能达到的更低的误码率和更高的信道容量。当前对量子接收机的研究进展还比较缓慢，尚停留在理论研究和初步实验验证阶段，仍然有许多值得研究的理论和实验课题。

在本论文中，我们首先回顾一下自上个世纪六十年代量子接收机只提出以来的研究进展，然后就以下三个问题进行深入探究：

1. QAM 信号量子接收机理论研究。到目前为止，二元调制和相位调制 (PSK) 方案的量子接收机，国际上已经有较多的研究人员关注，也取得了很多具有突破意义的成果。但是对于更高阶调制的 QAM 信号，研究人员关注的还较少。本文将目前几种接收机方案推广到 QAM 信号，对 QAM 信号的量子接收机进行系统的研究。这些接收机包括 Bondurant 接收机、自适应分区检测接收机和混合接收机等三种接收机方案。通过对三种接收机方案进行对比，可以为工程上可实现的量子接收机方案设计提供参考。

2. 二元调制多符号信号条件归零接收机理论研究。相比于对单个符号的检测方案，采用联合检测思想的条件归零接收机更具有研究价值。在本文中，我们将条件归零接收机的方案应用到多脉冲脉冲位置调制 (MPPM)、编码后的 OOK 调制、编码后的 BPSK 调制信号。在此基础上，通过对接收机接收策略的优化，我们将接收机的误码率降低到经典检测方案的标准量子极限以下。

3. 量子接收机初步实验研究。作为初步实验验证工作，本文对 BPSK 的 Kennedy 接收机，进行初步的实验验证工作。实验结果表明，在相同的系统效率的情况下，我们的 Kennedy 接收机性能能够突破标准量子极限。通过替换发射端的态制备光调制器和接收端的光调制器，原则上这种方案可以用于任意 PSK 信号的量子接收机的实验研究。

关键词：量子接收机 标准量子极限 QAM 调制 量子编码 光通信

ABSTRACT

In the classical optical communication systems, due to the influence of shot noise, the receiver performances of the communication system are limited by the standard quantum limit (SQL). In recent years, with the development of quantum information technology, the optical receivers using quantum properties of light are concerned by researchers. Because the quantum detection and measurement technology can extract the information that not be obtained by classical measurement methods. It enables the performance of the system outperforming the standard quantum limit, and achieving lower bit error rate and higher channel capacity than classic detection schemes. Nowadays research progress on quantum receivers is still relatively slow. It stays in the theoretical study and experimental demonstration stage, There are still many theoretical and experimental problems worthy of study.

In this paper, we first review the research progress since the 1960's when the quantum receivers were proposed , then focus on following three issues:

1. The theory of quantum receiver for QAM signals. So far, quantum receiver for binary modulation signals and phase modulation (PSK) signals have been deeply studied, and a lot of breakthrough have been work out. But for higher order modulation such as QAM signals, the researchers are careless. This article will present several receivers for the QAM signals and compare these three receivers. These receivers include a Bon-durant receiver, adaptive partitioning detection receiver and hybrid receivers. By comparing three receivers, some information can be applied to design engineering achievable quantum receiver scheme for reference.

2. Theoretical study of conditional nulling receivers for binary modulation multi-symbol signals. Compared to a single symbol detection scheme, conditional nulling receivers using joint detection are more valuable to research. In this article, we will applied the conditional nulling receiver schemes to the multi-pulse pulse position modulation (MPPM), coding OOK modulation signals, coding BPSK modulation signals. On this basis, through optimizing the receive policy, the error probabilities of the receivers are reduced below the SQL of the classic detection scheme.

3. Initial experiment research of the quantum receivers . As an initial experimently demonstration work, we implement the Kennedy BPSK receiver in this paper to preliminary validate the Kennedy receiver theory. Experiment results show that our Kenendy

receiver can outperform the SQL in the same system efficiency condition. By replace the modulator in the phase of the preparation stage and the receive stage, such receiver can, in principle, be applied to arbitrary PSK signals.

Key Words: quantum receiver, standard quantum limit, QAM modulation, quantum code, optical communication

目 录

摘要	i
Abstract	ii
第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景简介	1
1.1.1 量子接收机研究意义	1
1.1.2 量子接收机的国内外研究现状与趋势	2
1.2 论文主要内容	4
1.2.1 QAM 信号量子接收机理论研究主要内容	4
1.2.2 二元编码信号的联合译码量子接收机理论研究主要内容	5
1.2.3 量子接收机初步实验研究主要内容	5
第 2 章 量子光通信的理论基础	7
2.1 电磁场的量子态描述	7
2.1.1 相干态	7
2.1.2 位移操作	8
2.2 经典光通信的接收方案	9
2.2.1 直接检测	9
2.2.2 零差接收	10
2.2.3 外差接收	10
2.3 量子检测与估计理论	11
2.3.1 经典最优检测	11
2.3.2 量子最优检测	13
2.3.3 平方根检测	15
2.4 现有的量子接收机简介	18
2.4.1 二元调制信号量子接收机	18
2.4.2 多元调制信号量子接收机	21
2.4.3 其它类型量子接收机	26
2.5 量子信道编码理论	27
第 3 章 QAM 信号量子接收机	29
3.1 QAM 信号接收机理论极限	29
3.1.1 标准量子极限	29

3.1.2 Helstrom 极限	31
3.2 QAM 信号 Bondurant 接收机	33
3.3 QAM 信号自适应分区检测接收机	37
3.4 QAM 信号混合接收机	41
3.5 总结	46
第 4 章 二元调制多符号条件归零接收机	48
4.1 MPPM 信号条件归零接收机	48
4.1.1 MPPM 信号标准量子极限	48
4.1.2 MPPM 信号 Helstrom 极限	50
4.1.3 MPPM 条件归零接收机	53
4.2 编码后二元调制信号条件归零接收机	58
4.2.1 Hamming 码与极化编码	58
4.2.2 编码后二元调制信号标准量子极限	60
4.2.3 编码后二元调制信号最优量子检测极限	61
4.2.4 编码后二元调制信号条件归零接收机	61
4.3 总结	64
第 5 章 量子接收机初步实验研究	65
5.1 实验原理及实验平台搭建	65
5.2 Kennedy 接收机实验验证	67
5.3 总结	68
第 6 章 总结与展望	71
6.1 研究成果总结	71
6.2 研究工作展望	72
参考文献	73
致谢	79
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果	80

图目录

2.1 常见的四种调制信号星座图	7
2.2 用波束分束器实现位移操作示意图	8
2.3 直接检测示意图	9
2.4 平衡零差检测示意图	10
2.5 平衡外差检测示意图	11
2.6 QAM 信号平方根检测 (SRM) 性能与 Helstrom 极限	17
2.7 Kennedy 接收机示意图	19
2.8 BPSK 信号 Kennedy 接收机性能曲线	20
2.9 Dolinar 接收机原理图	21
2.10 QPSK 信号 Bondurant 接收机原理图及反馈控制策略	22
2.11 4-PPM 信号条件归零接收机反馈控制策略决策树	26
3.1 QAM 信号星座图	30
3.2 16-QAM 信号外差接收判决区域划分示意图	31
3.3 QAM 信号三类点和最近邻点示意图	33
3.4 QAM 信号 Bondurant 接收机和反馈策略示意图	34
3.5 QAM 信号 Bondurant 接收机性能曲线	38
3.6 QAM 信号自适应分区检测接收机和反馈控制策略示意图	39
3.7 QAM 信号自适应分区检测接收机性能曲线	40
3.8 QAM 信号混合接收机示意图	41
3.9 四态区分的 Bondurant 接收机位移操作示意图	42
3.10 四态区分的 Bondurant 接收机接收策略和不精确归零策略示意图	43
3.11 QAM 信号混合接收机性能	45
3.12 QAM 信号三种接收机性能对比	46
4.1 MPPM 信号和直接检测示意图	49
4.2 条件归零接收机及接收过程示意图	53
4.3 条件归零接收机反馈策略决策树	55
4.4 MPPM 信号条件归零接收机性能曲线	57
4.5 4 个时隙的 MPPM 控制策略决策树	58
4.6 在每个时隙中 BPSK 调制采用的两种 Kennedy 接收方案	62
4.7 OOK 信号 Hamming 码和极化码的条件归零接收机性能	63
5.1 量子接收机实验原理图	66
5.2 Kennedy 接收机实验光路示意图	67
5.3 Kennedy 接收机实验照片	68
5.4 Kennedy 接收机实验结果	70

表目录

5.1 Kenendy 接收机实验数据.....	69
--------------------------	----

第1章 绪论

1.1 研究背景简介

1.1.1 量子接收机研究意义

在人类对世界的认知过程当中，认知的尺度从宏观到微观，从分子尺度到原子、电子尺度。物理实体所遵循的物理定律也从牛顿力学到量子力学。另一方面，在近代科学的发展过程当中，通信科学和信息技术已发展为对人类影响最大的学科分支之一。经典的通信系统一般采用电磁波为载体，在有线或无线信道中传输信息。描述经典通信中的物理规律是麦克斯韦方程组，它们是由麦克斯韦从前人的实验中总结出来的电磁学规律。受限于对光的电磁学理论，经典系统中所采用的接收方案被限定在直接检测、零差检测和外差检测等有限的几种检测方案之中。在量子信息技术和光通信中，都会存在一个基本问题，如何有效地区分相干光脉冲。在量子力学中，相干光脉冲常被数学描述为相干态^[1]。在经典光通信系统中，由于受到散粒噪声的影响，通信系统接收机性能存在着经典极限——标准量子极限 (standard quantum limit, SQL)。这个极限可以从经典假设检验出发，分析经典光接收机的性能得到^[2]。近年来，随着量子信息技术的发展，利用光的量子特性设计新型的光接收机方案逐渐引起学术界的关注，人们对探测方案的认识也被扩展到一般的正定算子值测量 (POVM)，人们意识到采用量子探测和测量的技术可以获取之前使用经典探测所不能获得的信息。二十世纪六十年代，Helstrom 等人在量子力学和检测与估计理论发展出一套量子检测预估计理论，并给出了在量子力学框架下最优检测的数学形式，发现量子最优检测能够非常有效的降低接收机的平均错误概率，突破标准量子极限，提升系统的性能^[2-5]。采用量子最优检测的系统可以获得经典检测方案所不能达到的更低的误码率^[2]和更高的信道容量^[6]。研究人员逐渐发现，这种利用量子资源进行探测的方法不但可以应用于提升经典光通信系统的性能^[2]，还可以应用于量子通信^[7]和量子计算^[8]。

另一方面，从人们对通信速度的需求上来看，研究量子接收机的意义也十分重要。量子接收机致力于对相干态进行区分，相干态是一种非常理想的信息载体，因为相干态能够在有损介质中传输仍然保持相干态，只是存在幅度的衰减和相位移动，所以接收端仍然可以有效地恢复发送的信息。利用相干态通信已经很多年了，取得了丰硕的成果，具有很高的谱效率，目前基于相干态通信可以达到 Tbps 的量级^[9]。但是随着大数据时代的到来，人们对通信速率和带宽的需求不

断增加, 工艺和技术的不断进步使得基于经典理论实现的零差和外差接收机已不断的逼近 SQL^[10], 因此研究基于量子检测与估计理论的量子接收机提升通信系统性能变得越来越重要。此外, 在深空通信领域, 由于深空通信对通信系统体积和能量效率要求很高, 相比于无线电, 激光因为具有很小的发散角, 所以具有比无线电低得多的衰减, 这使得采用激光通信成为替代无线电进行深空通信的通信手段^[11]。因为在使用相同的功率和给定的误码率的情况下, 采用量子接收机工作距离比传统的光接收方案高得多^[2], 这使得量子接收机能在很大程度上提高系统的能量效率, 因而非常适合于深空通信场景。

1.1.2 量子接收机的国内外研究现状与趋势

对于量子接收机的研究要追溯到上个世纪六十年代, C. W. Helstrom, A. S. Holevo, H. P. Yuen 等人首先从理论上分析了在量子力学的框架下, 能够实现的接收机性能极限——Helstrom 极限^[2-5,12]。结果表明, 标准量子极限是可以突破的, 并且理论上存在比标准量子极限好得多的接收方案。但是直到 1973 年, R. S. Kennedy 才从理论上提出第一种利用现有的光学元器件可以实现的接收机方案——Kennedy 接收机^[13]。Kennedy 接收机将 BPSK 信号通过本振光信号进行位移操作, 转化为 OOK 信号, 然后利用单光子探测器进行光强探测。理想情况下, 这种方案在光子数比较大的区域可以突破标准量子极限, 但是在光子数较小的情况下性能不佳, 没能突破标准量子极限。

后来, Kennedy 的学生 Dolinar 在 Kennedy 接收机的基础上增加了反馈控制策略^[14]。理想情况下, 这个方案在任何光子数区域都可以突破标准量子极限, 并且令人振奋的是, 该方案对于 BPSK 和 OOK 信号, 可以达到终极量子极限——Helstrom 极限。直到 2007 年, Cook 等人才完成对 Dolinar 接收机进行实验上的论证^[15]。由于当时实验条件的限制, 实验结果没有达到 Helstrom 极限, 但是在一个区域内可以突破标准量子极限。

1993 年, Bondurant 受到 Dolinar 的启发, 设计出了第一个 QPSK 信号的量子接收机^[16]。该方案采用位移和反馈操作, 顺序归零 4 个符号, 同时进行光子计数, 根据光子计数结果控制需要归零的符号。他的方案可以在光子数较大的区域突破标准量子极限, 但是离 Helstrom 极限还有一段距离。到了 2014 年, Müller 改进了 Bondurant 的位移策略, 这个方案没有采用精确归零, 而是采用一种最优归零策略。在光子数较大的时候, 最优归零策略近似为精确归零, 但是在光子数较小的时候, 最优归零更接近外差接收, 位移量远大于信号强度。此外, 新的策略还同时采用最大后验概率的归零顺序, 在每一次光子计数事件的时候, 计算出 4 个符号的后验概率, 选择后验概率最大的符号进行归零。在这个策略下, 改进后的 Bondurant 接收机可以在任意光子数区域突破标准量子极限^[17]。接着, Müller

将这个方案推广到任意 PSK 信号，也得到了类似的结果^[18]。

由于 Bondurant 接收机和 Dolinar 接收机一样需要实时反馈控制，这对工程实践提出了很大挑战。2011 年，马里兰大学的 Becerra 从 Bondurant 接收机得到启发，简化了实时反馈控制，采用分区前馈控制，在每一个分区内，位移量是恒定的，这样就大大减少了对前馈带宽的要求。在他的控制策略中，也采用了最大后验概率归零，该策略有效地提升了接收机性能^[19]。在 2013 年，该团队采用反馈方式实现了上述实验方案，证实了该方案实验的可行性，实验结果表明在实验条件的非理想因数下，该方案可以在较大的一个区域突破标准量子极限，最大增益达到 6dB^[20]。与此同时，日本研究组的 Sasaki 也从理论上提出了 M 阶 PSK 位移接收机方案，并对 3PSK 和 QPSK 进行数值仿真，分析了非理想因素对位移接收机的影响^[21]。2013 年，该团队又提出了一种增加了压缩操作的接收机，同时采用光子数可分辨的探测器 (PNRD) 减少暗计数对接收机的影响^[22]。在此基础上，李科等人分析了 PNRD 对模式失配的影响，发现 PNRD 能够有效的克服模式失配问题，提高接收机的鲁棒性^[23]，该结果由 Becerra 在 2014 年进行验证^[24]。

与上述思路不同的是，德国研究者 Müller 从混合接收的思路出发，针对 QPSK 信号，提出了基于零差检测和最优 Kennedy 接收机的混合接收方案^[25]。该方案首先利用一个零差接收机，将信号区分到相空间中的上半空间和下半空间，接着利用零差接收机的结果，进行位移操作，将问题变成 BPSK 信号区分问题。对于这个子问题，他采用了最优 Kennedy 接收方案。最优 Kennedy 方案是在 Kennedy 接收机中对位移量进行优化得到的。沿着这个思路，李科在他的博士论文中提出了基于零差接收和分区检测接收机的 16QAM 量子接收机，通过理论分析和数值仿真，证实这个方案也可以突破标准量子极限^[26]。

对于 PPM 信号，Dolinar 在 1982 年第一次提出 PPM 信号的条件脉冲归零 (CPN) 量子接收机^[27]。对于第一个时隙，通过一个位移操作将脉冲归零。如果第一个时隙没有探测到光子计数，接下来 M-1 个时隙就直接检测。如果第一个时隙有光子计数，那么说明第一个时隙应该是 0，接下来把剩下的 M-1 个时隙当做 M-1 阶 PPM 信号进行探测即可，整个决策过程可以用一颗二叉决策树来描述。2011 年，Chen 等人从实验上论证了 CPN 接收机的可行性，并且对 CPN 采用非精确归零的方法加以改进^[28]。

在量子信道传输经典信息是量子信息领域一个基本问题，那么通过给定的量子资源，所能传递的经典信息的上限是多少是一个很重要的问题。Paul Hausladen、Holevo 等人首先从理论上论证不论所用的量子态是纯态还是一般的混态，通过量子信道传递的经典信息量不超过 Holevo 信息^[6,29]。如何设计出合适的调制方案和检测方案一直困扰着研究者，Paul Hausladen 提出一种“超密编码”方案^[6]，对于纯态信号可以达到 Holevo 容量，极化编码是另外一种实现 Holevo 容量的方

案^[30,31]。由于单符号信道通常都无法达到 Holevo 容量，所以通常需要对多个符号进行联合检测和译码。2012 年 Lloyd 提出序贯译码方案，每一步通过一个投影测量，然后利用序贯译码策略进行译码，最终信道容量能够逼近 Holevo 容量^[32]。但是如何物理上实现这些测量方案，研究得不是很多。

国际上对量子接收机的物理实现上的研究方向主要集中在以下几点：通过策略上的优化如动态规划^[33]，对经典的反馈和归零接收机进行改进，因为接收机的位移操作可以看做一个控制变量，反馈控制策略实际上就是根据输出对控制量进行调整，整个过程可以看做一个最优控制问题进行优化；另一方面，通过增加其他光学元器件如相敏放大^[34]，在反馈控制中增加一个压缩操作，通过优化压缩操作的参数，进一步改善接收机的性能。

1.2 论文主要内容

1.2.1 QAM 信号量子接收机理论研究主要内容

到目前为止，对二元信号区分如二元相移键控 (BPSK) 和开关监控 (OOK) 的接收机研究，目前已经有较多的研究工作发表出来^[2,13-15]，例如 Dolinar 接收机能够突破 SQL，逼近 Helstrom 极限，从理论上来说已经解决了二元调制信号的最优量子检测方案的物理实现问题^[14]。而至今为止还没有找到对多个符号也能够达到 Helstrom 极限的物理可实现的量子接收机，因此研究多符号量子接收机的意义十分重要。虽然如此，但是一些能够突破标准量子极限近最优的接收机结构已相继被提出，到目前为止，研究人员提出了针对相移键控 (PSK) 的位移接收方案^[16,19,21] 和混合接收方案^[25]。但是针对 QAM 信号的研究还比较少，因此在本文中，我将 PSK 信号的 Bondurant 接收、分区自适应接收以及混合接收方案推广到 QAM 信号，研究在这种信号的配置下，这三种接收机是否也能够突破标准量子极限。

首先，我们研究最早被应用到 QPSK 信号的 Bondurant 接收机，这种接收机按照给定顺序，通过控制本振场，依次将每个符号归零，利用光子计数探测是否接收到光子，并实时反馈到本振场。通过对接收机进行数学建模，进行理论推导，求解出最终的平均错误概率。结果分别与经典外差接收方案（标准量子极限）和 Helstrom 极限进行对比，分析这种接收机的理论性能否突破标准量子极限。

然后，通过对 Bondurant 接收机的改进，将实时反馈控制改为有限的时间分区，同时将顺序归零改为按照最大后验概率的自适应归零策略。在这种设置情况下，理论推导过于复杂，所以我们采用了蒙特卡洛仿真的方法，得到这种自适应反馈控制接收机的性能曲线。

另一方面，我们也将混合接收机应用于 QAM 信号的接收，它包括一个零差

接收和一个位移接收机。这种接收机能够在突破标准量子极限的同时，简化接收策略。我通过理论分析和数值仿真研究该混合方案对 QAM 信号接收的理论性能。

通过对比前面三种接收方案，得到一些可以用于设计量子接收机的结论，例如分析反馈带宽、自适应策略、最优位移以及混合接收对最终性能的影响的大小。

1.2.2 二元编码信号的联合译码量子接收机理论研究主要内容

分析完多元高阶调制信号的量子接收机之后，我们将目光放到编码后的信号上来。之前不论对 OOK、PSK 还是 QAM，都只针对单个符号的接收。在量子信息理论中，量子信道的 Holevo 容量是指在给定的符号集合下，信道所能传递的最大交互信息量。这个容量通常采用单个符号是无法达到的，必须通过恰当编码，同时在接收端对无限长的码字做联合接收，所以研究对多个符号的联合接收十分重要^[6,29]。在本文中，我选取二元调制 OOK 和 BPSK 编码后的信号，利用条件归零 (CPN) 接收机进行接收。条件归零接收机最初被用来接收脉冲位置调制 (PPM) 信号^[27]，而 PPM 信号可以看做 OOK 信号通过一种特殊的编码得到的信号。因此，很容易想到可以将这种接收方案应用到一般的 OOK 信号编码后信号的接收。更一般的，这种接收机是否能应用到更一般的二元编码信号的联合译码接收是一个非常值得研究的问题。

本文中，首先我们对条件归零接收机建立数学模型，在每一个时间隙内，采用 Kennedy 接收机的模型建模。然后建立一个代价函数，通过优化这个代价函数，对不同时间隙的控制参数进行优化。由于这个代价函数可以分解为两个子问题求解，所以可以通过动态规划对这些控制参数进行优化。最后，通过数值仿真可以得到这种优化后的接收机在不同信号下的接收性能。

1.2.3 量子接收机初步实验研究主要内容

国际上对量子接收机实验的研究发展比理论稍晚，经过近几十年的发展，已经取得了许多里程碑式的进展。比如二元调制的 Kennedy 接收机^[35]、Dolinar 接收机^[15,35]，QPSK 的混合接收机以及自适应反馈接收机等都有了实验的验证^[20,25]。但是目前国内进行的实验研究尚未见诸报道，我们实验室在调研和理论研究的基础上，开始准备量子接收机的实验研究。在研究初期，我们进行量子接收机初步实验研究。

在本文中，我们以 C. W. Lau 2006 年的文章和 F. E. Becerra 2013 年与 2015 年的两篇实验文章为参考^[20,24,35]，搭建自己的实验平台。主要工作包括器件的调研、选型，以及器件参数的确定和相关理论仿真验证。最后，在搭建好的实验平

台上，对 BPSK 调制的 Kennedy 接收机进行初步实验验证，为日后进一步实验提供经验和参考。初步实验结果表明，在相同的系统效率情况下，即使在有模式失配和暗计数等非理想因素的情况下，我们的 Kennedy 接收机也能够突破相同系统效率对应的标准量子极限。

第2章 量子光通信的理论基础

2.1 电磁场的量子态描述

2.1.1 相干态

通信中常用相干光来传递信息，在数学上，它可以用一个正弦波来表示。在物理实现上，它可以用线偏振的电场来实现^[36]，

$$\mathbf{E}(t) = pAe^{j\omega t + \phi}. \quad (2.1)$$

上式中，符号 p 、 A 、 ω 和 ϕ 分别对应偏振矢量、幅度、频率和相位。要传递的信息被调制在场的这四个要素上面。在本文中，主要关注的是对幅度和相位的调制。这两个要素可以用一个复振幅来描述

$$\alpha = Ae^{j\phi}. \quad (2.2)$$

该复振幅也可以用相空间复平面中的一个点来表示，这种相空间图像被称作星座图。图2.1展示了 OOK、BPSK、QPSK、16-QAM 四种常见的调制信号的星座图。

在量子力学中，电磁场被量子化为若干个不同模式、不同频率的光子^[2,37,38]。单模电磁场的哈密顿量可以表示为无穷个 Fork 态的线性叠加

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}). \quad (2.3)$$

其中 \hat{a}^\dagger 和 \hat{a} 分别是产生算符和湮灭算符，乘积 $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ 是粒子数算符，他的本振态是 Fork 态 $|n\rangle$ ，满足

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (2.4)$$

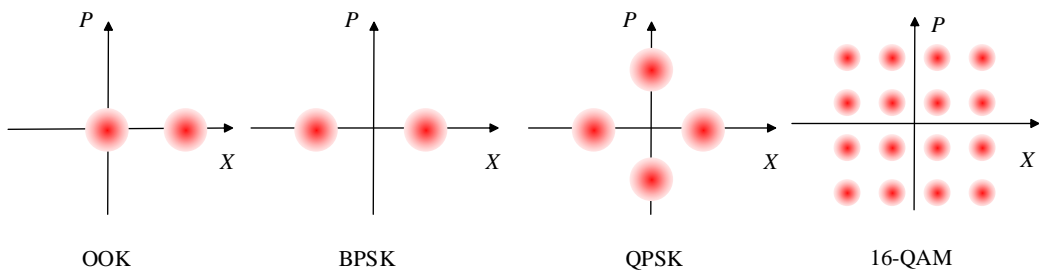


图 2.1 常见的四种调制信号星座图

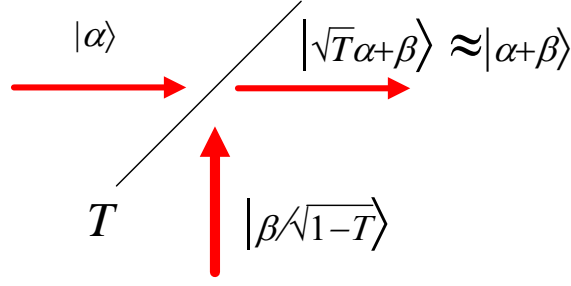


图 2.2 用波束分束器实现位移操作示意图

通信中常用的单模相干光脉冲可以用单模相干态 $|\alpha\rangle$ 来描述，它是湮灭算符的本征态

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (2.5)$$

在 Fock 态表象中，相干态可以表达为

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.6)$$

如果用光子计数器进行探测，相干态 $|\alpha\rangle$ 探测到的光子数不是一个固定的值，而是服从泊松分布

$$P_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (2.7)$$

它的平均光子数由

$$\bar{n} = |\alpha|^2 \quad (2.8)$$

给出。相干态参数 α 可以是任何复数，具有复振幅的意义^[1]。

任意两个相干态互不正交，两个相干态的内积为

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\beta\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*\beta)^n}{n!} \\ &= \exp\left(\alpha^*\beta - \frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2\right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

恒大于 0。相干态互不正交是使得相干态无法完美区分的关键原因。

数学上也常常用密度矩阵来表示信号^[39]，相干态 $|\alpha\rangle$ 也可以用密度矩阵表示为 $\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ 。

2.1.2 位移操作

相干态可以通过位移操作进行变换，位移算符定义为^[1,2,37,38]

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}). \quad (2.10)$$

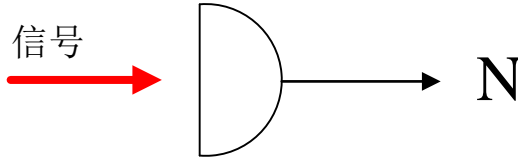


图 2.3 直接检测示意图

利用位移算符，相干态可以通过对真空态 $|0\rangle$ 位移得到

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle. \quad (2.11)$$

两个相干态之间也可以通过位移操作进行变换

$$\hat{D}(\beta) |\alpha\rangle = |\alpha + \beta\rangle. \quad (2.12)$$

在实验当中，常用一个相位稳定干涉仪或者波束分束器来实现对相干态的位移操作^[15,20,35,40]。图2.2显示的是利用一个高透过率的波束分束器，将两个入射场混合输出，近似实现了对其中一个入射场的位移操作，这种方案在量子接收机实验中经常见到。

2.2 经典光通信的接收方案

在经典光通信中，有三类常见的接收方案，他们分别是直接检测、零差接收和外差接收。这三种接收方案受散粒噪声的制约，使得每一种接收方案存在一个经典极限——标准量子极限 (Standard Quantum Limit)。接下来，我们简单介绍一下每一种接收方案的具体实现方案。

2.2.1 直接检测

在所有的调制方案中，有一类采用脉冲的有无对信息进行编码，比如开关键控 (OOK) 和脉冲位置调制 (PPM)。OOK 调制将符号 0 编码为没有光脉冲，而将符号 1 编码为有脉冲；PPM 调制则将信息编码到脉冲所在的位置上。对于这样一类的调制方案，经典光通信中常采用直接检测方案进行探测。如图2.3所示，直接检测方案直接探测信号光的强度，来判断是否存在光脉冲或者光脉冲的幅度^[41,42]。这种方案可以利用一个光电探测器或单光子探测器实现。探测器可以输出探测到的光子数目，理想情况下，对于给定的相干态，探测到 n 个光子的概率

$$\Pr(N = n | |\alpha\rangle) = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \quad (2.13)$$

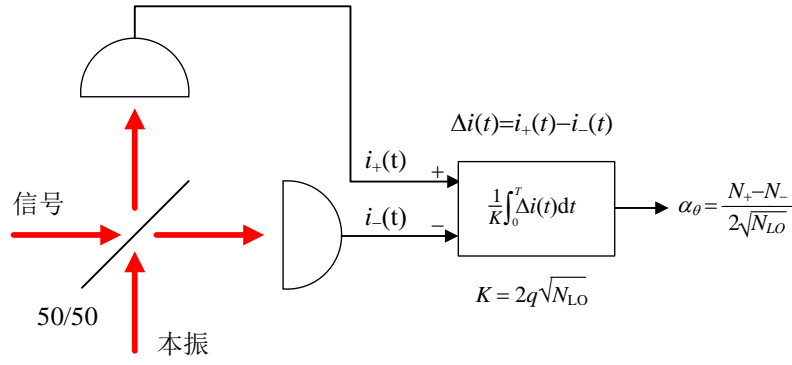


图 2.4 平衡零差检测示意图

一般地，对于信号矢态为 $|\phi\rangle$ 的情况下，检测概率为

$$\Pr(N = n | |\phi\rangle) = |\langle n | \phi \rangle|^2 \quad (2.14)$$

2.2.2 零差接收

零差接收机是一种相干检测方案，如图2.4所示，是一种平衡零差接收方案^[41,42]。这种接收方案和直接检测不同的是，需要一个本振。对于零差接收本振频率和信号频率一致。通常本振强度 a_{LO} 远大于信号强度 a_S ，两路信号通过一个 50:50 的分束器，在两个输出口得到两路新的信号 a_+ 和 a_- ，满足关系式

$$a_{\pm} = \frac{a_S \pm a_{LO}}{\sqrt{2}}. \quad (2.15)$$

这两路信号被光电探测器接收，得到两路光电流 i_{\pm} 。这两路电流通过一个放大系数为 $1/K = 1/2q\sqrt{N_{LO}}$ 的差分放大器，最后通过一个低通滤波器积分得到输出统计量

$$\alpha_\theta = \frac{N_+ - N_-}{2\sqrt{N_{LO}}}. \quad (2.16)$$

这里假定所有的器件都是理想的。当 $N_{LO} \rightarrow \infty$ 时，输出统计量服从高斯分布

$$\alpha_\theta \sim N(\text{Re}(ae^{-j\theta}), \frac{1}{4}). \quad (2.17)$$

其中 θ 是本振与信号的相位差。这种测量方案，用量子力学算符可以用湮灭算符描述为^[38,43]

$$\hat{\alpha}_\theta = \text{Re}(\hat{a}_S e^{-j\theta}). \quad (2.18)$$

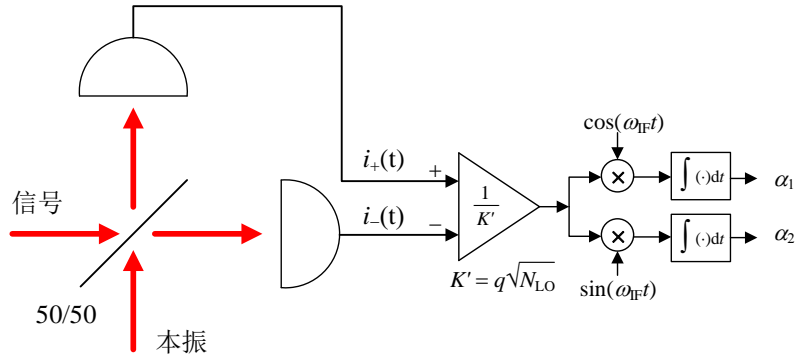


图 2.5 平衡外差检测示意图

2.2.3 外差接收

在上一小节，我们已经介绍了零差接收方案。另外一种相干接收方案是外差接收^[41,42]，它采用了与信号频率不同的本振。图2.5是一种平衡外差接收机示意图，在这种外差接收机中，频率为 ω 的信号场 a_S 与频率为 $\omega - \omega_{IF}$ 的强本振场 a_{LO} 通过一个 50:50 的分束器混合。混合后经过光电探测器，得到两路以中频 ω_{IF} 震荡的电流 i_{\pm} 。这两路电流经过一个放大系数为 $1/K' = 1/q\sqrt{N_{LO}}$ 的差分放大器，最后解调出两个正交幅度 α_1 和 α_2 。假定所有的器件都是理想的，当 $N_{LO} \rightarrow \infty$ 时，这两个统计量统计独立，分别服从高斯分布

$$\alpha_i \sim N(a_{S_i}, \frac{1}{2}). \quad (2.19)$$

其中 $a_{S_1} = \text{Re}(a_S)$ 和 $a_{S_2} = \text{Im}(a_S)$ 分别是信号场的两个正交幅度。这种测量方案，同时测量信号的两个正交幅度，用量子力学算符湮灭算符可以描述为^[38,43]

$$\hat{\alpha}_1 + j\hat{\alpha}_2 = \hat{a}_S. \quad (2.20)$$

2.3 量子检测与估计理论

2.3.1 经典最优检测

通信系统通常由发送端、信道和接收端三个部分组成。对某种特定的通信方案，发送端从 M 个符号中以先验概率分布 $\zeta_j (j = 1, 2, \dots, M)$ 选择一个发送出去。先验概率满足归一化条件

$$\sum_{j=1}^M \zeta_j = 1. \quad (2.21)$$

我们称一个假设 $H_j (j = 1, 2, \dots, M)$ 是指发送的是第 j 个符号。

在通信的接收端，接收机对电磁场进行探测，可以得到一些统计量。例如在前面介绍的三种经典监测方案中，输出的统计量分别是光子数目、 α_θ 、 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 。由于量子涨落和噪声的影响，对于给定的发送信号，这些统计量通常不是一个固定的值，而是一个随机变量。一般的，我们假设输出统计量是一个实随机向量 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 。当发送第 j 个符号时，假定它的联合分布为 $p_j(\mathbf{v}) = p_j(v_1, v_2, \dots, v_n)$ 。在通信的接收端，通过对接收到的统计量进行判决，判定发送的符号是哪一个。下面介绍两种重要的准则——贝叶斯准则和最小错误概率准则。

我们定义决策代价 C_{ij} 为，当假设 H_j 是正确的情况下，选择了假设 H_i 所需要的代价。我们期望一个决策是最优的是指该决策所需要的平均代价最小。

我们再来将决策数学化^[2,44]，定义在观测到的统计量为 \mathbf{v} 时，选择了假设 H_i 的概率为 $\pi_i(\mathbf{v})$ ， $i = 1, 2, \dots, M$ 。这些决策概率需满足条件

$$0 \leq \pi_i(\mathbf{v}) \leq 1, \sum_{i=1}^M \pi_i(\mathbf{v}) = 1. \quad (2.22)$$

一个简单的例子是一种被称为随机策略的决策方案，对于任意观测量，这种策略都是随机选择一个假设，即 $\pi_i(\mathbf{v}) \equiv 1/M, \forall i, \mathbf{v}$ 。

在上述符号的约定下，我们可以得到在假设 H_j 是正确的情况下，策略选择了假设 H_i 的条件概率为

$$\Pr\{i|j\} = \int_{\mathbb{R}^n} \pi_i(\mathbf{v}) p_j(\mathbf{v}) d^n \mathbf{v}. \quad (2.23)$$

这里 \mathbb{R} 代表实数集合， \mathbb{R}^n 代表 n 维实欧几里得空间。那么，对所有的观测结果，平均代价为

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \zeta_j C_{ij} \Pr\{i|j\} \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \zeta_j C_{ij} \int_{\mathbb{R}^n} \pi_i(\mathbf{v}) p_j(\mathbf{v}) d^n \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

对于每一个假设 H_i ，我们定义它的风险函数

$$W_i(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^M \zeta_j C_{ij} p_j(\mathbf{v}) \quad (2.25)$$

那么决策的平均代价可以改写为

$$\bar{C} = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^M W_i(\mathbf{v}) \pi_i(\mathbf{v}) d^n \mathbf{v}. \quad (2.26)$$

在式2.22条件下，最小化式2.26，这是一个凸优化问题。这个问题可以通过一个简单的观察得以解决。从式2.22和2.26可以看出，对于每一个观测结果 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ，

要使得平均代价最小，需要选择风险 $W_i(\mathbf{v})$ 最小的那一个假设。即对于每一个观测结果 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ，若

$$W_j(\mathbf{v}) < W_i(\mathbf{v}), \forall i \neq j, \quad (2.27)$$

那么

$$\pi_j(\mathbf{v}) = 1, \pi_i(\mathbf{v}) \equiv 0, \forall i \neq j. \quad (2.28)$$

为方便记函数

$$\Upsilon(\mathbf{v}) = \min_j W_j(\mathbf{v}), \quad (2.29)$$

那么对所有的观测结果 \mathbf{v} 和所有的假设 H_i ，有下式成立

$$\begin{aligned} [W_i(\mathbf{v}) - \Upsilon(\mathbf{v})]\pi_i(\mathbf{v}) &= 0, \\ W_i(\mathbf{v}) - \Upsilon(\mathbf{v}) &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

对式2.30的第一个式子求和，可以得到

$$\Upsilon(\mathbf{v}) = \sum_i^M W_i(\mathbf{v})\pi_i(\mathbf{v}), \quad (2.31)$$

因此，可以得到最小平均代价为

$$\bar{C}_{min} = \int_{\mathbb{R}^n} \Upsilon(\mathbf{v}) d^n \mathbf{v}. \quad (2.32)$$

容易验证，这样得到的平均代价确实是最小平均代价，即对任意其他的决策函数 $\{\pi'_i(\mathbf{v})\}$ ，有

$$\bar{C}' - \bar{C}_{min} = \sum_{i=1}^M \int_{\mathbb{R}^n} [W_i(\mathbf{v}) - \Upsilon(\mathbf{v})]\pi'_i(\mathbf{v}) d^n \mathbf{v} \geq 0. \quad (2.33)$$

现代文献中，常将这种最小化平均代价函数的决策称作贝叶斯准则。在这当中，有一种被称为最小错误概率准则的策略，它的决策代价系数定义为

$$C_{ii} = -1; C_{ij} = 0, \forall i \neq j. \quad (2.34)$$

在这种决策代价下，最小平均代价就是最小平均错误概率

$$P_e = 1 - \sum_{j=1}^M \zeta_j \Pr\{j|j\} = \sum_{j=1}^M \zeta_j \sum_{k \neq j} \Pr\{k|j\}. \quad (2.35)$$

在通信中，常用最小平均错误概率准则来设计接收机的接收策略。因此本文也主要以该准则来设计量子接收机。

通过经典的三种探测方式加上经典检测预估计理论所得到的最佳接收方案，它能达到的最小平均错误概率通常被称作标准量子极限 (SQL)。

2.3.2 量子最优检测

上世纪六十年代, C.W. Helstrom 和 H. P. Yuen 等人将假设检验理论与量子力学结合起来, 发展出一套适用于量子测量的量子检测与估计理论^[2,3,5]。根据这一套理论, 可以从理论上给出最优检测的数学形式, 下面我们简单回顾一下这个理论的主要内容。

在量子力学中, 一个测量在数学上被描述为一个正定算子值测量 (POVM) 算符^[2]。如果用算符 $\hat{\Pi}_i (i = 1, 2, \dots, M)$ 表示一组 POVM 测量, 那么一组完备的 POVM 测量需要满足条件

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_i &\geq 0, \\ \sum_{i=1}^M \hat{\Pi}_i &= \hat{I}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

例如, 直接检测利用 POVM 算符可以表达为

$$\hat{\Pi}_n = |n\rangle \langle n|, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.37)$$

其中 $|n\rangle$ 是 Fock 态矢量, 这是一组正交投影测量。我们说一组测量是正交投影测量是指它们满足正交条件

$$\hat{\Pi}_i \hat{\Pi}_j = 0, \forall i \neq j \quad (2.38)$$

和投影算符条件

$$\hat{\Pi}_n^2 = \hat{\Pi}_n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.39)$$

如果直接检测采用 ON-OFF 探测器, 即只能探测到有光子还是没有光子, 那么直接检测对应于一个二元测量

$$\hat{\Pi}_0 = |0\rangle \langle 0|, \hat{\Pi}_1 = \hat{I} - |0\rangle \langle 0|. \quad (2.40)$$

假设发送的信号态用密度矩阵为 $\hat{\rho}_j$, 那么将符号 j 检测为符号 i 的条件概率为

$$\Pr(i|j) = \text{Tr}(\hat{\rho}_j \hat{\Pi}_i), (i, j) = 1, 2, \dots, M. \quad (2.41)$$

那么利用上一节的符号定义, 在这样的信号和测量设置下, 总的平均代价为

$$\bar{C} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \zeta_j C_{ij} \text{Tr}(\hat{\rho}_j \hat{\Pi}_i) = \text{Tr} \sum_{i=1}^M \hat{W}_i \hat{\Pi}_i. \quad (2.42)$$

这里, 风险算符 \hat{W}_i 定义为

$$\hat{W}_i = \sum_{j=1}^M \zeta_j C_{ij} \hat{\rho}_j. \quad (2.43)$$

这样，我们得到与经典检测理论对应的优化问题。H. P. Yuen 和 C. W. Helstrom 等人给出该优化问题的一个充要条件，

$$\begin{aligned} (\hat{W}_i - \hat{\Upsilon})\hat{\Pi}_i &= \hat{\Pi}_i(\hat{W}_i - \hat{\Upsilon}) = \mathbf{0}, i = 1, 2, \dots, M, \\ \hat{W}_i - \hat{\Upsilon} &\geq \mathbf{0}, i = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (2.44)$$

其中拉格朗日算符

$$\hat{\Upsilon} = \sum_{j=1}^M \hat{\Pi}_j \hat{W}_j = \sum_{j=1}^M \hat{W}_j \hat{\Pi}_j. \quad (2.45)$$

那么，最小平均代价可以简化为

$$\bar{C}_{min} = \text{Tr}(\hat{\Upsilon}). \quad (2.46)$$

若取式2.34中的最小平均错误概率准则决策代价系数，那么最优检测问题可以简化为

$$\begin{aligned} \max_{\hat{\Pi}_i} \quad & \sum_{i=1}^M \text{Tr}(\hat{\rho}'_i \hat{\Pi}_i) \\ \text{s.t.} \quad & \hat{\Pi}_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, M \\ & \sum_{i=1}^M \hat{\Pi}_i = \hat{I}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

上式中， $\hat{\rho}'_i = \zeta_i \hat{\rho}_i$ 。该问题是一个半正定规划 (SDP) 问题，需要求解的未知矩阵个数是 M ，可以通过求解其对偶问题将问题简化为未知矩阵只有 1 个的半正定规划问题^[12]

$$\begin{aligned} \min_{\hat{X}} \quad & \text{Tr}(\hat{X}) \\ \text{s.t.} \quad & \hat{X} \geq \hat{\rho}'_i, i = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (2.48)$$

利用一种为 Matlab 编写的凸优化工具箱 CVX，可以很方便地求解上述半正定规划问题^[45,46]。

利用量子检测预估计理论计算出来的最小错误概率，通常称作这种信号的 Helstrom 极限，通常比经典检测方案所能达到的极限要低很多^[2]。

2.3.3 平方根检测

一般情况下，为了求解量子最优测量问题，需要利用数值优化工具进行数值计算，只有很少数情况下可以得到解析表达式。因此，这不利于理论研究。而平方根检测是一种解析方法，它利用通过信号矢量的 Gram 矩阵的平方根构造出来的一组 POVM 算符进行测量^[6,47]。在最小错率概率准则下，它是一种近最优的

检测方案，但是在最小均方误差准则下，它是最优测量。并且，在信号具有几何均匀对称性的情况下，它也是最小错误概率准则下的最优检测^[48-51]。在很多理论问题的研究中，由于平方根检测具有良好的解析表达式，常常被用来作为一种理论检测方案进行研究^[6,31,52]。下面，我们介绍一下这种接收方案的数学形式。

设 M 个信号由 n 维 Hilbert 空间 \mathcal{H} 中的向量表示为 $|\psi_i\rangle$ ($i = 1, 2, \dots, M$)，对应的密度矩阵为 $\hat{\rho}_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ 。这些信号张成 \mathcal{H} 中一个 $r \leq M$ 维子空间 \mathcal{U} 。当且仅当 M 个信号线性独立时，等号成立 $r = M$ 。 M 个 POVM 测量满足

$$\hat{\Pi}_i \geq 0, \sum_{i=1}^M \hat{\Pi}_i = \hat{I}_r. \quad (2.49)$$

这里 \hat{I}_r 是子空间 \mathcal{U} 上的单位矩阵。

将信号的密度矩阵和 POVM 测量矩阵分解为

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_i &= \hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_i^\dagger, \\ \hat{\Pi}_i &= \hat{\mu}_i \hat{\mu}_i^\dagger. \end{aligned} \quad (2.50)$$

重新定义信号集合矩阵 $\hat{\Gamma} = [\hat{\gamma}_1 \ \hat{\gamma}_2 \ \dots \ \hat{\gamma}_M]$ 和 POVM 测量集合矩阵 $\hat{M} = [\hat{\mu}_1 \ \hat{\mu}_2 \ \dots \ \hat{\mu}_M]$ 。Gram 矩阵定义为 $\hat{T} = \hat{\Gamma} \hat{\Gamma}^\dagger$ 和 $\hat{G} = \hat{\Gamma}^\dagger \hat{\Gamma}$ ，平方根检测给出的 POVM 测量集合矩阵为

$$\hat{M} = \hat{T}^{-\frac{1}{2}} \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma} \hat{G}^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.51)$$

可以证明这种 POVM 测量使得均方误差

$$E = \text{Tr} \left[(\hat{\Gamma} - \hat{M})^\dagger (\hat{\Gamma} - \hat{M}) \right] \quad (2.52)$$

达到最小值^[49]。

在平方根检测的 POVM 测量算符下，将信号 i 判断为 j 的条件概率为

$$\begin{aligned} \text{Pr}\{j|i\} &= \text{Tr}(\hat{\rho}_i \hat{\Pi}_j) = \text{Tr}(\hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_i^\dagger \hat{\mu}_j \hat{\mu}_j^\dagger) \\ &= \text{Tr}(\hat{\mu}_j^\dagger \hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_i^\dagger \hat{\mu}_j) = \text{Tr}(\hat{B}_{ji} \hat{B}_{ji}^\dagger). \end{aligned} \quad (2.53)$$

这里矩阵 \hat{B}_{ji} 是矩阵 $\hat{M}^\dagger \hat{\Gamma} = \hat{G}^{1/2}$ 的第 (j, i) 子块 $\hat{\mu}_j^\dagger \hat{\gamma}_i$ 。对于纯态信号集合，信号密度矩阵秩为 1，因此 $\hat{\gamma}_i$ 和 $\hat{\mu}_i$ 是一个向量，因此

$$\text{Pr}\{j|i\} = |(\hat{G}^{1/2})_{ji}|^2. \quad (2.54)$$

所以，若先验概率相同的情况下，平均错误概率为

$$P_e = 1 - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |(\hat{G}^{1/2})_{ii}|^2. \quad (2.55)$$

如果信号满足几何均匀对称性，即存在幺正矩阵 \hat{U} 使得

$$\hat{\rho}_i = \hat{U}^{i-1} \hat{\rho}_1 \hat{U}^{\dagger^{i-1}} \quad (2.56)$$

成立。那么，可以验证平方根检测满足最优检测的充要条件^[49]，即公式2.44成立。并且，此时 Gram 矩阵 \hat{G} 是循环矩阵，设 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, M)$ 是其 M 个特征值，那么式2.55可以进一步简化为^[48]

$$P_e = 1 - \frac{1}{M^2} \left(\sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \right)^2. \quad (2.57)$$

容易验证 M 阶 PSK 信号密度矩阵可以通过幺正矩阵^[48]

$$\hat{U} = \exp \left(j \frac{2\pi}{M} \hat{n} \right) \quad (2.58)$$

相似。其中 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ 是粒子数算符。对于 M 阶 PPM，对应的幺正矩阵是一个排列矩阵^[51]

$$\hat{U} = \sum_{k=1}^n \omega_n(k) \otimes \hat{I}_H \otimes \omega_n^*(k). \quad (2.59)$$

其中 $\omega_n(k)$ 是一个 n 维向量，它的第 k 维为 1，其它维都是 0。 \hat{I}_H 是一个 $H = n^{M-1}$ 阶单位矩阵。

因此，对于 OOK、 M 阶 PSK、 M 阶 PPM 信号，平方根检测都是最优检测。对于 QAM 信号，平方根检测不是最优的测量，但是非常接近最优。图2.6显示的是 16-QAM 平方根检测 (SRM) 和通过半正定规划计算出来的最优检测性能 (Helstrom) 差异。可以看到只在小信号区域有明显差异。

2.4 现有的量子接收机简介

自量子检测与估计理论提出以来，如何用现有的物理器件来实现量子接收机，成为很多研究者关心的问题。二十世纪七十年代，Kennedy 和 Dolinar 等人首先对二元调制进行探究，分别提出利用线性光学元件实现的 Kennedy 接收机和 Dolinar 接收机^[13,14]。后来，经过后续研究者的进一步探索，更多的接收方案也被提出来了。在本章中，我们回顾一下已被提出的一些重要的接收机实现方案。

2.4.1 二元调制信号量子接收机

首先，我们来看一些最简单的调制方案——二元调制。它包括被广泛应用的两种调制方案——OOK 和 BPSK。图2.1显示了他们在星座图上的图像。

这两种调制的最优量子检测性能被 Helstrom 给出^[2]，也可以通过平方根检测得到。因为这种两种调制方案是几何均匀对称的，其对应的幺正矩阵是位移算

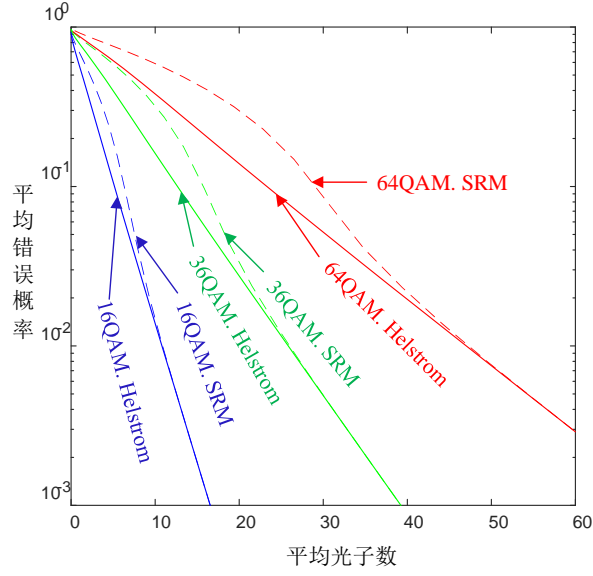


图 2.6 QAM 信号平方根检测 (SRM) 性能与 Helstrom 极限

符 $\hat{D}(\alpha)$ 和 $\hat{D}(2\alpha)$, 所以平方根检测性能就是最优量子检测的性能。我们先求出对应的 Gram 矩阵

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} 1 & \xi \\ \xi^* & 1 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

其中 ξ 是两个符号对应的向量的内积, 对于 OOK 信号,

$$\xi = \langle 0 | \alpha \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}, \quad (2.61)$$

而对 BPSK 信号,

$$\xi = \langle -\alpha | \alpha \rangle = e^{-2|\alpha|^2}. \quad (2.62)$$

利用 Gram 矩阵的表达式 2.60, 容易计算出它的两个特征值为 $\lambda_{1,2} = 1 \pm |\xi|$ 。根据式 2.57, 可得平均错误概率为

$$\begin{aligned} P_e &= 1 - \frac{1}{4}(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2})^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - |\xi|^2} \right). \end{aligned} \quad (2.63)$$

对于 BPSK 调制集合 $\{|-\alpha\rangle, |\alpha\rangle\}$, 在 1973 年的时候, Kennedy 提出^[13] 利用一个本振场, 对信号进行位移操作 $\hat{D}(\alpha)$, 将信号集合变成 OOK 调制 $\{|0\rangle, |2\alpha\rangle\}$, 然后进行直接探测, 如图 2.7 所示。如果没有检测到光子 (OFF), 就判决为信号 $|-\alpha\rangle$, 否则 (ON) 判决为信号 $|\alpha\rangle$ 。假设 H_0 代表信号 $|-\alpha\rangle$, 假设 H_1 代表信号

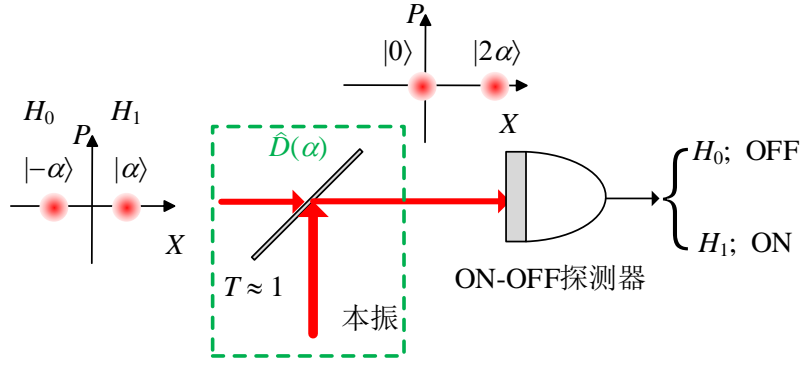


图 2.7 Kennedy 接收机示意图

$|\alpha\rangle$ 。那么，理想条件下，探测的条件概率为

$$\begin{aligned} P(\text{OFF}|H_0) &= 1, \\ P(\text{ON}|H_1) &= 1 - |\langle 0|2\alpha\rangle|^2 \\ &= 1 - e^{-4|\alpha|^2}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

在通信系统中，先验概率通常是相同的，为 $1/2$ ，那么这种探测的平均错误概率为

$$P_e = 1 - P(H_0)P(\text{OFF}|H_0) - P(H_1)P(\text{ON}|H_1) = \frac{1}{2}e^{-4|\alpha|^2}. \quad (2.65)$$

经典通信系统中，常采用零差接收来探测 BPSK 信号。这里假定 α 是实数，根据式 2.17，取 $\theta = 0$ ，可知平均错误概率为

$$\begin{aligned} P_e &= 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-2(x-\alpha)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \text{erfc}(\sqrt{2}\alpha). \end{aligned} \quad (2.66)$$

对于 BPSK 信号，经典的零差接收机性能也叫它的标准量子极限 (SQL)。当光子数很大时，利用余误差函数 erfc 的 Chernoff 界^[53]，当 $x \gg 1$ 时， $\text{erfc}(x) \approx e^{-x^2}$ ，可以得到 BPSK 零差接收机的渐进性能为

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}(\sqrt{2}\alpha) \approx \frac{1}{2} e^{-2\alpha^2}. \quad (2.67)$$

对比式 2.65 和 2.67 可以看出，当光子数较大时，Kennedy 接收机的性能比经典的零差接收具有指数倍的增益。对式 2.63 做大信号近似，可得在 $|\alpha|^2 \gg 1$ 时，

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - e^{-4|\alpha|^2}}) \\ &\approx \frac{1}{4} e^{-4|\alpha|^2}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

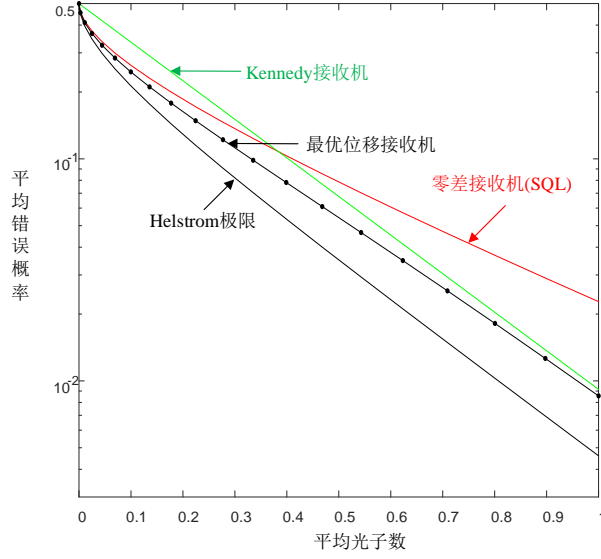


图 2.8 BPSK 信号 Kennedy 接收机性能曲线

对比式2.65和2.68可以看出，在大信号时，Kennedy 接收机与理想的最优量子检测只相差一个常数因子 $1/2$ ，即 Kennedy 接收机距最优量子检测只相差 3dB。数值仿真结果如图2.8所示，可以看到在光子数较小的时候，Kennedy 接收机性能没有突破标准量子极限，只在大信号时能够突破标准量子极限。

为了解决 Kennedy 接收机在小信号时的不足，一种采用最优位移的广义 Kennedy 接收机（也叫最优位移接收机）被提出^[54]。这种接收机采用与 Kennedy 接收机相同的结构，但是采用的位移操作是 $\hat{D}(\beta)$ ，其中位移参数 β 通过优化得到。在这种参数配置下，易得接收机的错误概率为

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2}(1 - e^{-|\alpha-\beta|^2} + e^{-|\alpha+\beta|^2}) \\ &= \frac{1}{2} - e^{-\alpha^2-\beta^2} \sinh(2\alpha\beta). \end{aligned} \quad (2.69)$$

最优位移参数通过求解方程 $\partial P_e / \partial \beta = 0$ 得到，即

$$\tanh(2\alpha\beta) = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (2.70)$$

从图2.8中可以看到，最优位移接收机在光子数较小的时候也能突破标准量子极限。随着光子数增大，最优位移接收机和 Kennedy 接收机性能越来越接近。事实上，当光子数很大时， $\tanh(2\alpha\beta) \rightarrow 1$ ，最优位移量 $\beta \rightarrow \alpha$ 。

1973 年，Kennedy 的学生 Dolinar 提出 Dolinar 接收机。在 Kennedy 接收机的基础上，Dolinar 接收机增加了对本振的实时反馈控制^[14]。如图2.9所示，位移操作 $\hat{D}(\beta)$ 的位移量 β 在两个策略 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 中选择，每一次单光子探测器接收到一个光子，就切换到另一个位移策略上去。并且每一个位移策略都是随时间

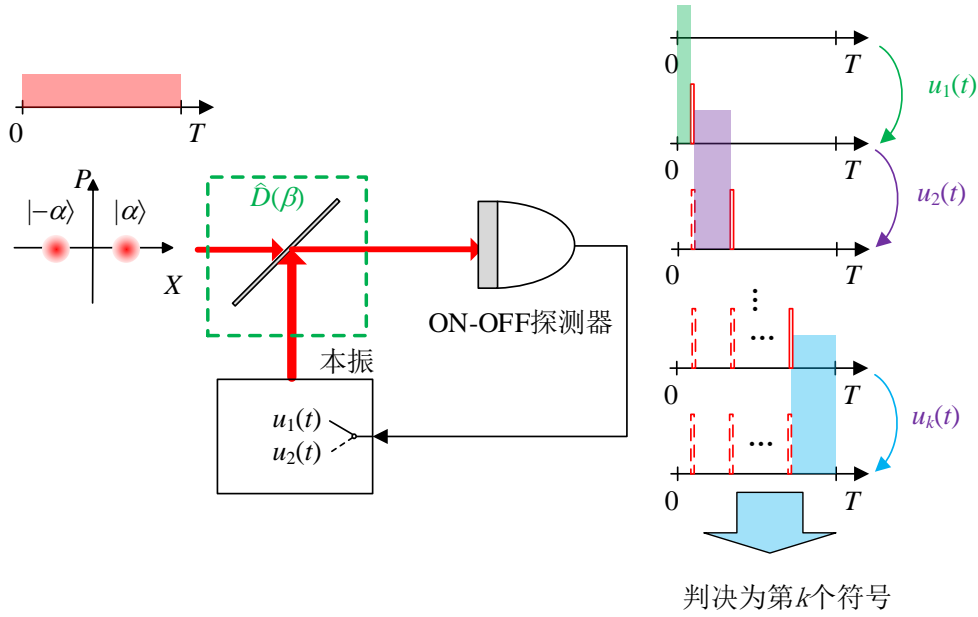


图 2.9 Dolinar 接收机原理图

变化的函数。这里本振的最优控制策略可以通过最优控制理论优化得到^[55]。当本振采用最优控制策略的情况下，可以证明 Dolinar 接收机可以达到 Helstrom 极限，是理论上的最优检测方案^[14,55]。2007 年，Cook 等人从实验上实现了 OOK 调制的 Dolinar 接收机^[15]。

Dolinar 接收机需要实时反馈控制，这对工程实现要求过高。一些分区检测方案通过将信号在时间上或者能量上分成若干份，然后分别采用最优位移接收，弥补了这个不足^[56-58]。当分区数目趋近于无穷大时，这种接收机的理论性能和 Dolinar 接收机一致^[58]。

2.4.2 多元调制信号量子接收机

上一小节，我们回顾了最简单的调制信号——二元调制。这一节我们回顾一下目前研究的比较多的多元调制信号——PSK 调制和 PPM 调制。

QPSK 信号用相干态可以表示为

$$|\alpha_i\rangle = |\alpha e^{j\frac{\pi}{2}(i-2)}\rangle, i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.71)$$

我们先来计算一下它的标准量子极限，对于 QPSK 信号，外差接收机的性能就是它的标准量子极限。利用式 2.19 或式 2.19，可以得外差接收机平均错误概率为^[2,48]

$$\begin{aligned}
 P_e &= 1 - \frac{1}{\pi} \int_{Q_1} \exp(-|\beta - \alpha|^2) d^2\beta \\
 &= 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dr \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \exp(-\alpha^2 - r^2 + 2\alpha r \cos \theta) r d\theta.
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

上式中 Q_1 代表复平面上的区域 $\{\beta | -\pi/4 \leq \arg \beta < \pi/4\}$ 。

因为 QPSK 具有几何均匀对称性，所以平方根检测就是其最优检测。QPSK 信号对应的 Gram 矩阵为

$$G = \begin{bmatrix} 1 & e^{-n} & e^{-2n} & e^{-n} \\ e^{-n} & 1 & e^{-n} & e^{-2n} \\ e^{-2n} & e^{-n} & 1 & e^{-n} \\ e^{-n} & e^{-2n} & e^{-n} & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.73}$$

这里 $n = |\alpha|^2$ 是信号平均光子数。根据 Gram 矩阵可以计算出它的四个特征值为

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1,2,3,4} &= e^{-2n} (e^n - 1)^2, e^{-2n} (e^n + 1)^2, \\
 &\quad e^{-2n} (e^{2n} - 1), e^{-2n} (e^{2n} - 1).
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

因此，根据式 2.57 可得

$$P_e = 1 - \frac{1}{4} \left(\sqrt{1 - e^{-2n}} + 1 \right)^2. \tag{2.75}$$

在大光子数 $n \gg 1$ 近似条件下，渐近性能为

$$\begin{aligned}
 P_e &= 1 - \frac{1}{4} (2 - e^{-2n} + 2\sqrt{1 - e^{-2n}}) \\
 &\approx 1 - \frac{1}{4} (2 - e^{-2n} + 2 - e^{-2n}) \\
 &= \frac{1}{2} e^{-2n} = \frac{1}{2} e^{-2|\alpha|^2}.
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

1993 年，MIT 林肯实验室的 R. S. Bondurant 将 Dolinar 接收机的反馈策略推广到 QPSK 信号，提出两种 Bondurant 接收机。这两种接收机只在反馈策略上有所差异，其它都相同^[16]。如图 2.10 (a) 所示，Bondurant 接收机由波束分束器、单光子探测器以及一个受反馈控制的本振构成。

第一种 Bondurant 接收机可以用图 2.10 (b) 来说明，在符号开始的时候，接收机选择假设 H_1 ，即假设接收到的符号为 $|\alpha_1\rangle$ ，反馈策略控制本振将符号 1 归零，即控制位移操作 $\hat{D}(\beta) = \hat{D}(-\alpha_1)$ 。如果在整个符号周期都没有光子计数时间发生，那么选择假设 H_1 输出。否则，在符号周期中的某个时刻，单光子探测器探测到光子，那么假设不成立。接着，反馈策略立即控制本振，归零符号 2，即选

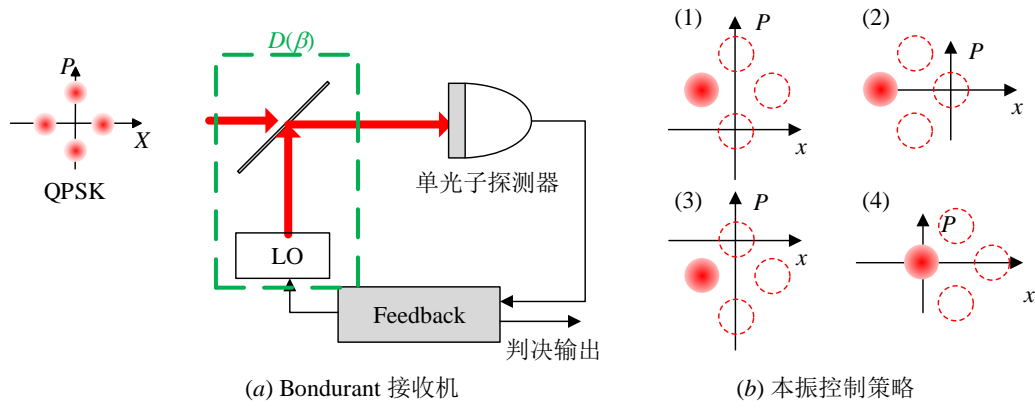


图 2.10 QPSK 信号 Bondurant 接收机原理图及反馈控制策略

择假设 H_2 。然后重复上一步，如果继续有光子计数，则归零符号 3，选择假设 H_3 。如果仍然有光子计数，那么归零符号 4，选择假设 H_4 。理想情况下，最多有 3 个光子计数时间发生。符号周期结束的时候，选择当前的假设输出。和 Dolinar 接收机一样，Bondurant 接收机也采用实时反馈控制策略，但是在每两个光子到达的时间间隔之间，Bondurant 接收机的本振是恒定的。

若先验概率相同，第一种 Bondurant 接收机的平均错误概率为^[16]

$$P_e = \left(\frac{3}{4} + |\alpha|^2\right)e^{-2|\alpha|^2}. \quad (2.77)$$

当平均光子数较大的时候，渐近性能为

$$P_e \approx |\alpha|^2 e^{-2|\alpha|^2}. \quad (2.78)$$

对比 2.76 和 2.78 可以看出，第一种 Bondurant 接收机渐近性能的指数项与最优检测相同。

对于第二种 Bondurant 接收机，也是依次归零符号 1 符号 2，但是在第 2 个光子到达的时候，反馈控制策略有所不同。设 t_1 和 t_2 分别代表第 1 个光子和第 2 个光子达到的时间。

(a) 如果 $t_1 \leq t_2 - t_1$ ，那么归零符号 3，如果没有光子计数发生了，则选择假设 3，否则选择假设 4。

(b) 如果 $t_1 > t_2 - t_1$ ，那么归零符号 4，如果没有光子计数发生了，则选择假设 4，否则选择假设 3。

在这种策略配置下，接收机的平均错误概率为^[16]

$$P_e = \frac{9}{4}e^{-2n} - 2e^{-3n} + ne^{-3n} + \frac{1}{2}e^{-4n} - ne^{-4n}. \quad (2.79)$$

上式中 $n = |\alpha|^2$ 为信号平均光子数。当光子数很大时，略去高阶小量，得到第 2 中 Bondurant 接收机渐近性能为

$$P_e \approx \frac{9}{4}e^{-2n} = \frac{9}{4}e^{-2|\alpha|^2}. \quad (2.80)$$

对比 2.75 和 2.80 两式可知，第 2 中 Bondurant 接收机渐近性能和最优检测只相差一个常数，比第一种 Bondurant 接收机前进了一步。

这两种接收机虽然在信号较大的时候可以突破标准量子极限，但是在小信号的时候，并没有突破标准量子极限。后来 Müller 借鉴最优位移接收机的思想，采用不精确归零的方法，改进了小信号时的性能，使得 Bondurant 接收机可以在任意光子数都能突破标准量子极限^[17,18]。

由于 Bondurant 接收机也需要实时反馈控制，因此不利于工程实现。后续的研究者 Izumi 通过前馈的方式，将每一个 PSK 信号分成若干份，采用 Bondurant 接收机相似的策略进行前馈^[21]。通过这种方式减少了反馈带宽的需求，但是同时却增加了资源的消耗。

后面的研究者 Becerra 将最大后验概率归零策略加入归零顺序之中，在每一次前馈的过程中，选择在当前时刻具有最大后验概率的符号，进行归零^[19]。这种策略，可以有效地降低接收机的平均错误概率。2013 年，Becerra 用反馈的方式从实验上对这种策略进行了验证^[20]。并且，考虑到非理想因素如暗计数、模式失配的影响，将接收端的探测器换成具有光子数分辨能力的探测器，可以有效地提高接收机的鲁棒性，可以降低暗计数和模式失配带来的不利影响^[22,23]。这个结论也在 2015 年被 Becerra 通过实验验证^[24]。

至此，原则上可以在实验上实现具有鲁棒性的量子接收机，但是理论上的最优检测如何实现，仍然是一个需要继续研究的问题。

与上述思想不同的是，Müller 等人提出一种利用一个零差接收机和一个 Kennedy 接收机实现 QPSK 信号接收的混合接收机^[25]。这种方案不用反馈控制，简化了 QPSK 信号接收机的实现。这种结构也被 K. Li 推广到 16-QAM 信号^[26]。

在前面我们回顾了 PSK 信号的量子接收机，接下来我们回顾一下 PPM 信号量子接收机研究现状。

首先，我们来计算一下 M 阶 PPM 的标准量子极限。M 阶 PPM 信号有 M 个时隙，第 i 个符号只有第 i 个时隙有脉冲，其他时隙都没有脉冲。以 4-PPM 为例，4 个信号可以用直积态可以表示为

$$|\alpha\rangle|0\rangle|0\rangle|0\rangle, |0\rangle|\alpha\rangle|0\rangle|0\rangle, |0\rangle|0\rangle|\alpha\rangle|0\rangle, |0\rangle|0\rangle|0\rangle|\alpha\rangle. \quad (2.81)$$

在经典光通信中采用直接探测对 PPM 信号进行检测，如果第 k 个时隙探测到光子，就判决为第 k 个符号；如果所有的时隙都没探测到光子，那么就随机选择一

个符号输出。因此这种接收策略的平均错误概率为

$$P_e = \frac{M-1}{M} e^{-|\alpha|^2}. \quad (2.82)$$

对于 4-PPM 信号，平均错误概率为

$$P_e = \frac{3}{4} e^{-|\alpha|^2}. \quad (2.83)$$

接着我们来求 M 阶 PPM 信号的 Helstrom 极限，因为 PPM 信号具有几何均匀对称性，所以平方根检测性能就是其最优量子检测的性能，也就是 Helstrom 极限。首先我们计算其 Gram 矩阵

$$G = \begin{bmatrix} 1 & e^{-n} & e^{-n} & e^{-n} \\ e^{-n} & 1 & e^{-n} & e^{-n} \\ e^{-n} & e^{-n} & 1 & e^{-n} \\ e^{-n} & e^{-n} & e^{-n} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

其中 $n = |\alpha|^2$ ，可以看到，Gram 矩阵每一行除了对角元为 1，其他元素都为 e^{-n} 。它是一个循环矩阵，其特征值可以通过对第一行元计算 M 点离散傅里叶变换求得^[59]，

$$\lambda_1 = 1 + (M-1)e^{-n}, \lambda_{2\dots M} = 1 - e^{-n}. \quad (2.85)$$

所以 M 阶 PPM 最优量子检测的平均错误概率为

$$P_e = 1 - \frac{1}{M^2} (\sqrt{1 + (M-1)e^{-n}} + (M-1)\sqrt{1 - e^{-n}})^2. \quad (2.86)$$

当光子数很大时，对上式进行近似，保留二阶项 e^{-2n} ，可得其渐近性能为

$$P_e \approx \frac{(M-1)}{4} e^{-2|\alpha|^2}. \quad (2.87)$$

早在 1982 年，Dolinar 就提出一种适用于 PPM 信号的条件归零 (CPN) 接收机^[27]。我们接下来以 4-PPM 信号为例，来简单介绍一下这种接收机。

条件归零接收机所用的器件和结构与图 2.10 (a) 所示的 Boundurant 接收机一致，不同的是其反馈控制策略。在 PPM 信号的每一个时隙中，条件归零接收机调整它的本振使得位移操作为 $\hat{D}(-\alpha)$ 或者 $\hat{D}(0)$ 。当位移操作选择 $\hat{D}(-\alpha)$ 时，接收机在当前时刻归零脉冲，然后进行直接探测。当位移操作选择 $\hat{D}(0)$ 时，相当于就是直接检测。以 4PPM 为例，它的决策策略可以用如图 2.11 所示的决策树表示出来。条件归零接收机首先归零第一个时隙，如果没有光子计数，后三个时隙都进行直接探测，若都没探测到光子，则判决为符号 1，否则若第 k 个时隙出现光子计数，那么判决为符号 k 。如果第一个时隙探测到光子，那么后三个时隙当做一个 3PPM 信号的条件归零接收机。

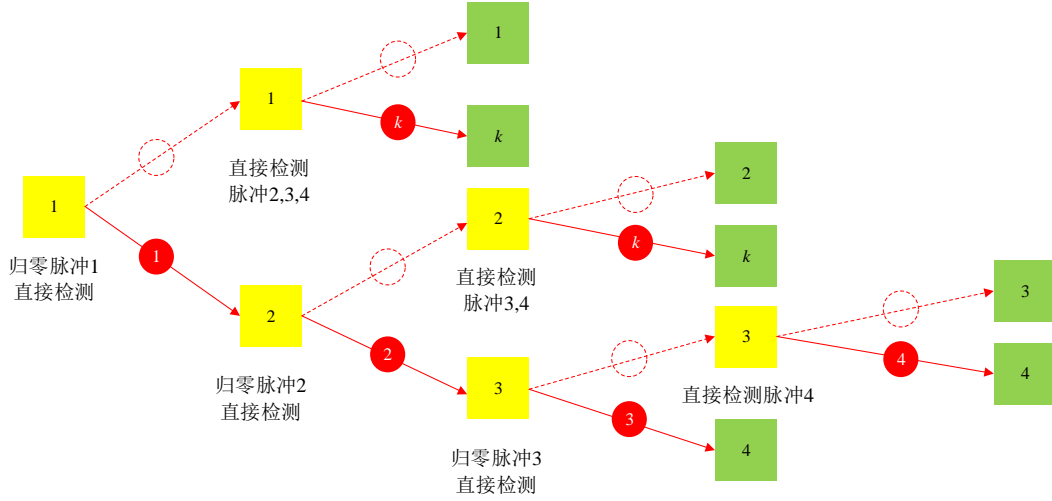


图 2.11 4-PPM 信号条件归零接收机反馈控制策略决策树

容易求得，条件归零接收机的平均错误概率为^[27,34]

$$P_e = \frac{1}{M} [(1 - e^{-|\alpha|^2})^M + M e^{-|\alpha|^2} - 1]. \quad (2.88)$$

当光子数很大的时候，其渐近性能为

$$P_e \approx \frac{M-1}{2} e^{-2|\alpha|^2}. \quad (2.89)$$

与式2.87对比，可以看到条件归零接收机与最优检测在大光子数时只相差 3dB。

与最优位移接收机思想类似，如果在条件归零接收机每一个时隙里，采用不精确归零，则可进一步提升接收机在小信号时的性能^[34]。2012 年，这两种条件归零接收机被实验验证^[28]。Guha 等人还提出，可以增加一个相敏放大器 (PSA)，从而在位移操作上增加一个压缩操作，可以进一步提升接收机的性能^[34]。2014 年，P. Dalla 等人将条件归零接收机的控制策略进一步改进，在每一个时隙里面采用 Dolinar 接收机或者不精确归零接收机，并且每一个时隙的控制参数都不相同，这些参数通过动态规划算法进行优化，最终将接收机的性能进一步降低到非常接近 Helstrom 极限^[33]。

2.4.3 其它类型量子接收机

在上一小节，我们介绍了目前已经研究得比较多的几种量子接收机实现方案。除此之外，还有一些方案也值得借鉴和研究。2013 年，S. Guha 等人提出针对任意相干态检测的量子接收机^[60]，随后该研究组继续提出一种更方便实现的贯序波形归零 (SWN) 接收机，用于实现任意相干态接收^[61]。另外，K. Blume 等人提出一种基于有限资源量子计算的量子接收机^[62]，为研究量子接收机提供新的思路。

与最小错误概率准则不同的是, 基于最大无歧义概率准则设计的无歧义态区分 (USD) 接收机也被研究人员关注, 这种测量方案理论上不存在错判的概率, 但是存在无法判断的概率^[63]。

2.5 量子信道编码理论

在经典信息论中, 用 Shannon 熵来度量一个经典概率分布的不确定度^[64], 在量子信息论中, 描述系统不确定度的是 von Neumann 熵, 定义为^[65,66]

$$S(\hat{\rho}) = -\text{Tr}(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho}). \quad (2.90)$$

$\hat{\rho}$ 是密度矩阵, 若 $\hat{\rho}$ 的特征值为 λ_x , 那么上式可以改写为

$$S(\hat{\rho}) = -\sum_x \lambda_x \log_2 \lambda_x. \quad (2.91)$$

这与 Shannon 熵的形式一致, 为方便记, 可以定义 $0 \log_2 0 = 0$, 便于后续表达。

通过量子信道传递经典信息需要在发送端将要发送的符号 $x \in X$ 映射到对应的量子态 $\hat{\rho}_x$, 然后将它发送出去, 设该信道为 \mathcal{H} , 每一个量子态对应的先验概率为 p_x 。这些量子态构成一个混合量子态 $\sum_x p_x \hat{\rho}_x$, 它的熵满足如下不等式^[65]

$$\sum_x p_x S(\hat{\rho}_x) \leq S(\sum_x p_x \hat{\rho}_x) \leq \sum_x p_x S(\hat{\rho}_x) + H(p_x). \quad (2.92)$$

其中 $H(p_x)$ 表示先验分布 p_i 的 Shannon 熵。

在接收端, 接收机采用一组 POVM 测量 $\hat{\Pi}_y$ 进行探测, 每一个测量对应的输出为 $y \in Y$, 探测的条件概率为

$$P(x|y) = \text{Tr}(\Pi_x \hat{\rho}_y). \quad (2.93)$$

那么该系统传递的交互信息量为

$$I_1(p_x, \hat{\Pi}_x) = \sum_x p_x \sum_y P(y|x) \log_2 \frac{P(y|x)}{\sum_z p_z P(y|z)}. \quad (2.94)$$

对于给定的符号集合, 记交互信息量的最大值为

$$C_1 = \sup_{p_x, \hat{\Pi}_y} I_1(p_x, \hat{\Pi}_x). \quad (2.95)$$

它是通过该符号集合对应的单个量子信道 \mathcal{H} 所能获取的最大信息量。

与上述类似的讨论, 我们考虑该单个量子信道的直积信道 $\mathcal{H}^{\otimes n} = \mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}$, 此时输入符号集合为 X^n , 对于其中的每一个符号序列 $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 我们将它映射到直积态

$$\hat{\rho}_u = \hat{\rho}_{x_1} \otimes \hat{\rho}_{x_2} \otimes \cdots \otimes \hat{\rho}_{x_n}. \quad (2.96)$$

设 p_u 是该序列的先验概率，接收端采用 POVM 测量 $\hat{\Pi}_u$ 进行探测，我们可以得到交互信息量 $I_n(p_u, \hat{\rho}_u)$ ，记交互信息量最大值为

$$C_n = \sup_{p_u, \hat{\Pi}_u} I_n(p_u, \hat{\Pi}_u). \quad (2.97)$$

它满足超加性

$$C_n + C_m \leq C_{n+m} \quad (2.98)$$

在经典的无记忆信道中，只能取等号，在量子信道中，可以取不等号，它存在极限

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n/n. \quad (2.99)$$

该极限被称为信道 \mathcal{H} 的信道容量。经过 A. S. Holevo, P. Hausladen, W. K. Wootters 等人的努力，证明了对任意量子态 $\{\hat{\rho}_x\}$ ，信道 \mathcal{H} 的容量为^[6,29,67]

$$C = \max_{p_x} \left[S\left(\sum_x p_x \hat{\rho}_x\right) - \sum_x p_x S(\hat{\rho}_x) \right]. \quad (2.100)$$

这个容量也称为量子信道 \mathcal{H} 的 Holevo 容量。利用式2.92，可知

$$C \leq \max_{p_x} H(p_x). \quad (2.101)$$

当且仅当各量子态之间互相正交时取等号。

如果将量子态放宽到任意量子态，可以证明，对于能量和带宽受限的条件下，玻色子场可以最大化信道容量^[68]。取符号集合 $X = \mathbb{N}$ ， $\hat{\rho}_n = |n\rangle \langle n|$ 为 Fock 态，且先验分布 $p_n = N^n(1+N)^{-(n+1)}$ ，其中 N 为发送的平均光子数。此时具有的最大容量

$$C(N) = (N+1) \log_2(N+1) - N \log_2 N. \quad (2.102)$$

量子信道编码定理指出，可以通过对某些特定的长度为 N 的编码码字，进行联合检测，就有可能随着长度 N 的增大，交互信息量可以任意逼近 Holevo 容量^[6,29]。因此，两个重要的任务就是找到合适的编码以及有效的联合检测方案。1996 年，Hausladen 采用随机编码和平方根检测的方案证实对纯态信号集合可以逼近 Holevo 容量。近年来，结构化光学接收机^[69]、序贯测量方案^[32] 以及无歧义态区分方案^[70] 逼近 Holevo 容量已被报道。此外通过极化编码和平方根检测的方案也被证明可以逼近 Holevo 容量^[31]。但是这些接收机实现都还比较复杂，不利于工程实现，因此探索方便工程实现的联合检测接收机是一件十分重要的事情。

第3章 QAM 信号量子接收机

在上一章中，我们回顾了现有的一些量子接收机实现方案，包括二元检测和多元的 PSK 和 PPM 检测量子接收机。但是到目前为止，专门针对 QAM 信号设计的量子接收机研究还比较少。然而，QAM 信号具有很高的频谱效率，已被应用到大容量光通信系统之中^[71]。因此，研究 QAM 信号量子接收机是一件很有必要的事情。

3.1 QAM 信号接收机理论极限

3.1.1 标准量子极限

在经典通信系统中，常用外差接收机检测 QAM 信号，这种接收机的性能也叫 QAM 信号的标准量子极限 (SQL)^[48]。设 M 阶 QAM 信号由 M 个相干态构成，图3.1 显示的是 16-QAM 和 36-QAM 星座图。假设 M 阶 QAM 信号每一个正交幅度 X 或 P 都可以取 L 个不同的值，那么 $M = L^2, L = 3, 4, 5, \dots$ 。设这 L 元基本符号集合为

$$\Omega = \{-(L-1) + 2(i-1) | i = 1, 2, \dots, L\}. \quad (3.1)$$

那么 M 阶 QAM 信号可以表示为

$$|\alpha_{uv}\rangle = |\alpha(u + jv)\rangle, (u, v) \in \Omega. \quad (3.2)$$

这里 $j = \sqrt{-1}$ 。例如，16-QAM 信号就可以用相干态表示为

$$\begin{aligned} |\alpha_{1,1}\rangle &= |\alpha(1 + j)\rangle, \\ |\alpha_{1,3}\rangle &= |\alpha(1 + j3)\rangle, \\ |\alpha_{1,-1}\rangle &= |\alpha(1 - j)\rangle, \\ &\vdots \\ |\alpha_{-3,-3}\rangle &= |\alpha(-3 - j3)\rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

这里取 $\alpha > 0$ ，那么 M 阶 QAM 信号信号平均光子数为

$$\begin{aligned} n &= |\alpha|^2 \frac{1}{M} \sum_{u \in \Omega} \sum_{v \in \Omega} (u^2 + v^2) \\ &= \frac{2}{3} (M-1) |\alpha|^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

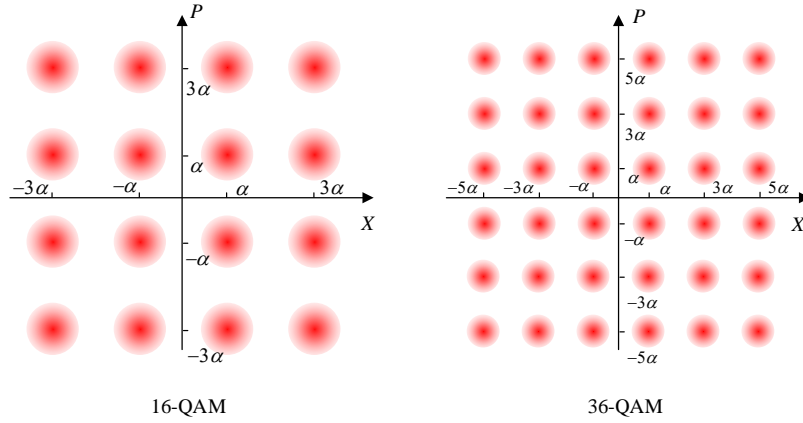


图 3.1 QAM 信号星座图

下面我们来计算一下 QAM 信号的标准量子极限。利用式2.19可得理想情况下，外差接收机的概率密度函数为^[48]

$$p(x_c, x_s|u, v) = \frac{1}{\pi} \exp[-(x_c - u\alpha)^2 - (x_s - v\alpha)^2] \quad (3.5)$$

这里 x_c 和 x_s 对应于式2.19中的 α_1 和 α_2 ，是接收机输出的两个正交幅度观测量。根据贝叶斯检测理论，最优判决区域为

$$D_{u',v'} = \{(x_c, x_s) | D_L(u')\alpha < x_c \leq D_U(u')\alpha, D_L(v')\alpha < x_s \leq D_U(v')\alpha\} \quad (3.6)$$

这里 D_U 和 D_L 是两个上下界函数，对给定的参数 L ，定义为

$$D_L(u) = \begin{cases} -\infty & u < -(L-2) \\ (u-1) & \text{其他} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$D_U(u) = \begin{cases} \infty & u > L-2 \\ (u+1) & \text{其他} \end{cases}$$

即将复平面划分成如图3.2所示的 M 个判决区域，将输出统计量落在某个区域的结果判决为在该区域内的符号。那么，外差接收机的平均错误概率为

$$P_e = 1 - \frac{1}{M} \sum_{u \in \Omega} \sum_{v \in \Omega} \iint_{D_{u,v}} p(x_c, x_s|u, v) dx_c dx_s \quad (3.8)$$

$$= 1 - \frac{1}{M} [1 + (L-1) \operatorname{erf}(\alpha)]^2.$$

因此，当平均光子数很大时，即 $|\alpha|^2 \gg 1$ ，利用余误差函数的 Chernoff 界^[53]，可得 QAM 信号外差接收机的渐近性能为

$$P_e \approx 2(1 - \frac{1}{L})e^{-\alpha^2}. \quad (3.9)$$

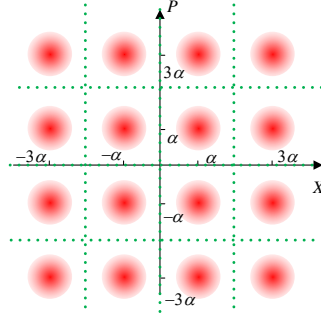


图 3.2 16-QAM 信号外差接收判决区域划分示意图

3.1.2 Helstrom 极限

与 PSK 信号和 PPM 信号不同的是, QAM 信号不再具有几何均匀对称性, 因此, 无法通过平方根检测的方法得到 QAM 信号 Helstrom 极限的解析表达式, 需要通过数值优化的方法, 求解优化问题 2.48。为此, 需要将信号用密度矩阵表示出来。由于 M 个信号互不正交, 因此这 M 个信号张成 M 维 Hilbert 空间。因为是纯态信号, 所以每一个信号都可以用一个向量表达。为此需要选择一组标准正交基 $|e_i\rangle, i = 1, 2, \dots, M$ 。一种选取的方法是用 Fork 态做标准正交基, 也可以利用 Schmidt 正交化的方法生成一组基向量^[59]。这里, 为方便计我们选用 Fork 态 $|n\rangle$ 作为标准正交基, 在这组基向量下, 每一个信号都是一个无穷维向量,

$$c_n = \langle n|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \quad (3.10)$$

它满足归一化条件

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1. \quad (3.11)$$

为了便于计算, 需要将这个无穷维向量截断成有限维向量。这里采用如下准则, 给定一个足够小的 ϵ , 选取截断后向量长度 l 满足

$$\sum_{n=0}^{l-1} c_n^2 \geq 1 - \epsilon. \quad (3.12)$$

例如, 当 $\alpha = 1, \epsilon = 10^{-4}$ 时, 信号 $|\alpha\rangle$ 可以近似表达为一个 7 维向量,

$$|\alpha\rangle = [0.6065, 0.6065, 0.4289, 0.2476, 0.1238, 0.0554, 0.0226]^T. \quad (3.13)$$

对于 M 个 QAM 信号集合, 在计算的时候需要将每一个信号向量 c_i 截断成维数相同的向量 \tilde{c}_i 。截断后的向量长度 L 满足

$$\begin{aligned} L &= \max_i l_i \\ s.t. \quad &\sum_{n=0}^{l_i-1} c_{in}^2 \geq 1 - \epsilon, i = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (3.14)$$

这里 c_{in} 代表第 i 个信号向量 \mathbf{c}_i 的第 n 维。上式选取的长度 L 可以保证 M 个信号都满足式3.12。

将信号表达为 L 维向量 $\tilde{\mathbf{c}}$ 后, 信号的密度矩阵可以表达为

$$\hat{\rho}_i = \tilde{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{c}}^T. \quad (3.15)$$

接下来, 我们就可以利用 CVX 工具箱^[45,46] 求解半正定规划问题2.48, 从而得到 Helstrom 极限对应的平均错误概率。

为了得到一些解析结论, 我们采用平方根检测来近似 QAM 信号的最优检测。 M 阶 QAM 信号的 Gram 矩阵由下式给出

$$\begin{aligned} \hat{G}_{ij} &= \langle \alpha_i | \alpha_j \rangle \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2[(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2]\right), (i, j) = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (3.16)$$

易知当 $|\alpha| \gg 1$ 时, 除了对角元素为 1 之外, 其他元素都很小, 我们将 Gram 矩阵分解为一个单位阵和一个 \hat{Z} 阵

$$\hat{G} = \hat{I} + \hat{Z}. \quad (3.17)$$

且 $\|\hat{Z}\| \ll 1$, 那么利用矩阵幂级数可以得到 Gram 矩阵的平方根近似为

$$\hat{G}^{1/2} \approx \hat{I} + \frac{1}{2}\hat{Z} - \frac{1}{8}\hat{Z}^2. \quad (3.18)$$

因为 \hat{Z} 的对角元素为 0, 所以

$$\hat{G}_{ii}^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{8}\hat{Z}_{ii}^2. \quad (3.19)$$

为了计算 \hat{Z}^2 , 我们将信号按照复平面的位置分为角点、边界点、内点三类, 如图3.3(a)所示。易知对于 M 阶 QAM 信号, 三种点对应的数目分别为 4、 $4(L-2)$ 、 $(L-2)^2$, 其中 $L^2 = M$ 。并且定义一个信号的最近邻点为与该信号在复平面内距离最近的点, 易知角点有 2 个最近邻点, 边界点有 3 个最近邻点, 而内点有 4 个最近邻点, 如图3.3(b)所示。

因为

$$\begin{aligned} (\hat{Z}^2)_{ii} &= \sum_k Z_{ik}Z_{ki} \\ &= \sum_{k \neq i} \exp\{-|\alpha|^2[(u_i - u_k)^2 + (v_i - v_k)^2]\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

如果忽略高阶小量, 那么只有最近邻点的值保留下来, 所以

$$(\hat{Z}^2)_{ii} \approx \begin{cases} 2e^{-4|\alpha|^2} & \text{角点} \\ 3e^{-4|\alpha|^2} & \text{边界点} \\ 4e^{-4|\alpha|^2} & \text{内点.} \end{cases} \quad (3.21)$$

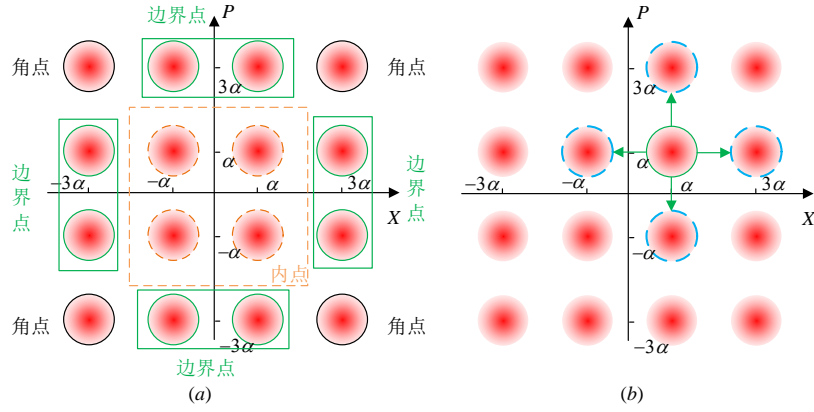


图 3.3 QAM 信号三类点和最近邻点示意图

所以由2.55式，QAM 信号的平方根检测渐近错误概率为

$$\begin{aligned}
 P_e &\approx 1 - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |1 - \frac{1}{8}(\hat{Z}^2)_{ii}|^2 \\
 &\approx 1 - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (1 - \frac{1}{4}(\hat{Z}^2)_{ii}) \\
 &\approx \frac{1}{4M} [4 \times 2e^{-4|\alpha|^2} + 4(L-2) \times 3e^{-4|\alpha|^2} \\
 &\quad + (L-2)^2 \times 4e^{-4|\alpha|^2}] \\
 &= (1 - \frac{1}{L})e^{-4|\alpha|^2}.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

因为平方根检测在平均光子数较大的时候，与最优检测几乎一致，所以可以认为该渐近性能就是 Helstrom 极限在平均光子数较大时的渐近性能。比较3.9式和3.22式可知，采用量子检测的手段，接收机的性能将有指数倍的增益。

3.2 QAM 信号 Bondurant 接收机

为了探测 QAM 信号，我们借鉴了 QPSK 信号第一种 Bondurant 接收机的思想，将这种接收策略应用到 QAM 信号的接收。如图3.4所示，这种接收机由一个高透过率的波束分束器、一个单光子探测器和一个与信号场高相干的本振构成。

为了说明接收机接收过程，我们将 M 个 M 阶 QAM 信号按顺序依次编号为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$ 。记符号到来的初始时刻为 $t = 0$ ，符号持续的时间为 T 。接收机按照图3.4所示的策略进行反馈控制，反馈策略可以归纳如下：

1. 在 $t = 0$ 时刻，控制本振使得位移操作 $\hat{D}(\beta) = \hat{D}(-\alpha_1)$ ，即将符号 1 归零，同时选择假设 H_1 ：当前的符号为 α_1 。

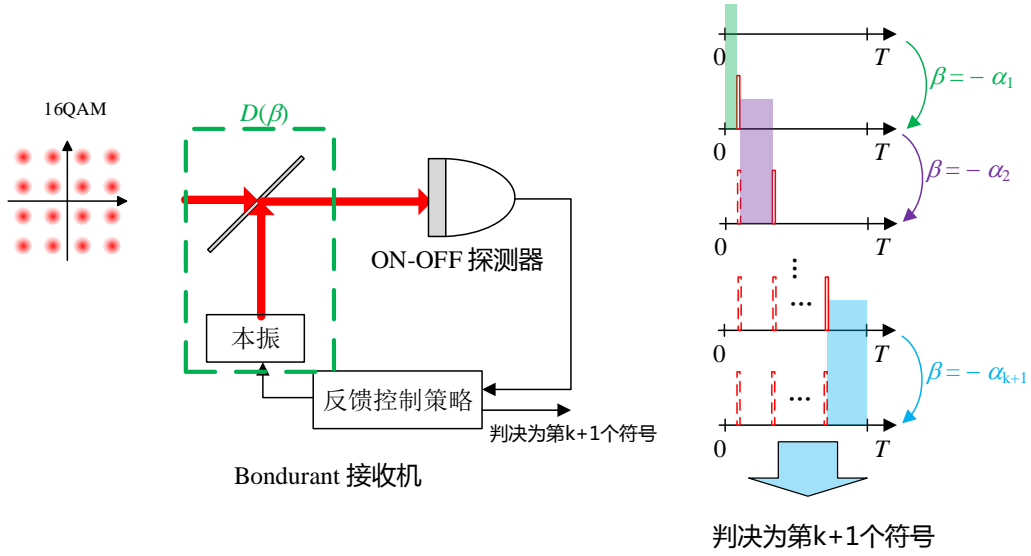


图 3.4 QAM 信号 Bondurant 接收机和反馈策略示意图

2. 在任意 $0 < t < T$ 时刻，如果没有发生光子计数事件，那么保持当前的假设和本振，继续接收信号；如果在 t_i 时刻发生了第 i 个光子计数事件，那么将当前的假设由 H_i 转变为 H_{i+1} ，同时控制本振归零下一个符号，即 $\hat{D}(\beta) = \hat{D}(-\alpha_{i+1})$ 。然后继续接收信号。

3. 重复步骤 2 直到 $t = T$ 时刻，信号接收完毕，输出当前的假设 H_i 作为对该符号的判决。

假设发送的信号是 α_k ，在该符号周期内，发生了 k' 个光子计数事件，这 k' 个光子计数事件发生的时间为 $t_i, (i = 1, 2, \dots, k')$ ，仅当 $k' = k - 1$ 的时候，接收机判决输出的假设为 H_k ，它对应的概率分布为

$$p(t_1, t_2, \dots, t_{k-1} | k) = \prod_{i=1}^{k-1} w(t_i | k). \quad (3.23)$$

假定 $t_0 = 0$ ，这里

$$w(t_i | k) = \frac{|\alpha_k - \alpha_i|^2}{T} \exp\left(-|\alpha_k - \alpha_i|^2 \frac{t_i - t_{i-1}}{T}\right). \quad (3.24)$$

代表在发送的信号为 α_k 时，在半开时间区间 $(t_{i-1}, t_i]$ 内，恰好在 t_i 时刻发生了光子计数的概率密度。所以，在发送的信号为 α_k 时接收机判决为 α_k 的条件概率为

$$\Pr\{k | k\} = \int \int \cdots \int_{0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < T} p(t_1, t_2, \dots, t_{k-1} | k) dt_1 dt_2 \cdots dt_{k-1}. \quad (3.25)$$

对于第 k 个信号, 上述积分为 $k-1$ 重, 为了便于分析, 对给定的符号 $|\alpha_k\rangle$ 定义如下函数

$$Q_i^k(t) = \begin{cases} 1 & i = 1, \\ \int_t^1 dt'_{i-1} n_{k,i-1} e^{-n_{k,i-1}(1-t)} Q_{i-1}(t'_{i-1}) & 1 < i \leq k. \end{cases} \quad (3.26)$$

上式中 $n_{k,l} = |\alpha_k - \alpha_l|^2$ 。接下来, 我们利用3.24式将3.25式进行改写, 作变量代换 $t_i \rightarrow T t'_{k-i}$, 那么3.25式化为

$$\begin{aligned} \Pr\{k|k\} &= \int_0^1 dt'_{k-1} n_{k,1} e^{-n_{k,1}t'_{k-1}} \int_{t'_{k-1}}^1 dt'_{k-2} \frac{n_{k,2}}{T} e^{-n_{k,2}(t'_{k-2}-t'_{k-1})} \\ &\quad \cdots \int_{t'_1}^1 dt'_1 n_{k,k-1} e^{-n_{k,k-1}(t'_1-t'_2)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

对式3.26反复递归可得 $Q_k(t)$ 表达式, 对照上式有 $\Pr\{k|k\} = Q_k(0)$ 。因此, 我们可以用递归式3.26来求上述积分。

下面, 我们来证明一个断言, 对给定的 k, m 和从充分大的 α , 存在一组与 t 无关的, 关于 $n_0 = |\alpha|^2$ 的 $m-1$ 阶多项式 $A_i^m \geq 0$, 使得下式成立

$$Q_m^k(t) \geq 1 - \sum_{i=1}^{m-1} A_i^m e^{-n_{k,i}(1-t)}, (m = 1, 2, \dots, k). \quad (3.28)$$

当 $m = 1$ 时, 显然成立。假设上式在 $m < 1$ 时成立, 那么在 $m+1$ 时, 有

$$\begin{aligned} Q_{m+1}^k(t) &\geq \int_t^1 dt'_m n_{k,m} e^{-n_{k,m}(1-t)} \left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} A_i^m e^{-n_{k,i}(1-t_m)} \right) \\ &\geq 1 - \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq m-1 \\ n_{k,i} = n_{k,m}}} n_{k,m} A_i^m - 1 \right) e^{-n_{k,m}(1-t)} \\ &\quad - \sum_{\substack{1 \leq i \leq m-1 \\ n_{k,i} \neq n_{k,m}}} \left(-\frac{n_{k,m}}{n_{k,i} - n_{k,m}} A_i^m e^{-n_{k,i}(1-t)} + \frac{n_{k,m}}{n_{k,i} - n_{k,m}} A_i^m e^{-n_{k,m}(1-t)} \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

因此, 只要取正 $m+1$ 阶多项式使得

$$\begin{aligned} A_i^{m+1} &\geq -\frac{n_{k,m}}{n_{k,i} - n_{k,m}} A_i^m, i < m \text{ 且 } n_{k,i} \neq n_{k,m} \\ A_i^{m+1} &\geq 0, i < m \text{ 且 } n_{k,i} = n_{k,m} \\ A_m^{m+1} &\geq -1 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq m-1 \\ n_{k,i} = n_{k,m}}} n_{k,m} A_i^m + \sum_{\substack{1 \leq i \leq m-1 \\ n_{k,i} \neq n_{k,m}}} \frac{n_{k,m}}{n_{k,i} - n_{k,m}} A_i^m. \end{aligned} \quad (3.30)$$

成立即可，于是命题得证。利用这个命题，因为 $n_{k,i} \geq 4|\alpha|^2, (k \neq i)$ ，所以 QAM 信号 Bondurant 接收机的渐近性能上界为

$$P_e \leq C_{M-1}(|\alpha|^2)e^{-4|\alpha|^2}. \quad (3.31)$$

其中 $C_{M-1}(|\alpha|^2)$ 是 $|\alpha|^2$ 的 $M-1$ 阶正多项式。作为一个特例，如果 $n_{k,i} \neq n_{k,m}$ 对所有的 $i \neq m$ 成立，那么式3.29中的第一个求和不存在，从而可以将命题加强为：存在一组与 t 和 α 无关的常数 $A_i^m \geq 0$ ，使得3.28式成立。从而存在足够大的常数 C 使得当 $|\alpha| \gg 1$ 时有

$$P_e \leq Ce^{-4|\alpha|^2}. \quad (3.32)$$

这与最优量子检测的渐进平均错误概率只相差一个常系数。

另一方面，对于充分大的 α ，有

$$w(t_i|k) \geq \frac{4|\alpha|^2}{T} \exp\left(-4|\alpha|^2 \frac{t_i - t_{i-1}}{T}\right). \quad (3.33)$$

所以

$$\begin{aligned} \Pr\{k|k\} &\geq \int_0^1 dt'_{k-1} 4|\alpha|^2 e^{-4|\alpha|^2 t'_{k-1}} \int_{t'_{k-1}}^1 dt'_{k-2} 4|\alpha|^2 e^{-4|\alpha|^2 (t'_{k-2} - t'_{k-1})} \\ &\quad \cdots \int_{t'_1}^1 dt'_1 4|\alpha|^2 e^{-4|\alpha|^2 (t'_1 - t'_2)} \\ &= 1 - [4|\alpha|^2 + (4|\alpha|^2)^2 + \cdots + (4|\alpha|^2)^{k-2}] e^{-4|\alpha|^2} \\ &= 1 - \frac{(4|\alpha|^2)^{k-1} - 4|\alpha|^2}{4|\alpha|^2 - 1} e^{-4|\alpha|^2}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

因此，也可以得到渐近误差上界为式3.31。对比式3.9和3.31，可知 QAM 信号 Bondurant 接收机比外差接收具有指数倍增益，它的渐近性能与量子最优检测性能只相差一个多项式。

为了精确求解接收机的平均错误概率，需要计算多重积分3.25，对于低维情况如 16-QAM 信号，还能在比较快的时间里计算出来，但是对于更高维情况如 36-QAM、64-QAM 信号，计算时间较慢。这里采用 Monte Carlo 仿真的方法计算接收机的性能，仿真步骤可以归纳如下：

1. 从信号的初始时刻 $t = 0$ 开始，选择假设 H_1 ，并控制本振使得 $\beta = -\alpha_1$ 。
2. 设当前 t 时刻发生的光子计数个数为 i ，由于光子到达的过程可以看做一个泊松点过程，因此两个光子到达的时间间隔服从强度为 I 的指数分布^[72]。这里 $I = |\alpha_m - \alpha_{i+1}|/T$ 是当前进入探测器的光强， α_m 是实际的信号， $\beta = -\alpha_{i+1}$ 。因此可以通过服从该指数分布的随机数发生器产生一个随机数 τ 作为下一个光子发生前所经历的时间。

3. 如果 $t + \tau < T$, 那么将当前时刻更新为 $t + \tau$, 更新当前的假设为 H_{i+1} , 并利用反馈控制本振使得 $\beta = -\alpha_{i+2}$, 即归零符号 $i + 2$, 然后继续重复步骤 1; 如果 $t + \tau \geq T$, 那么说明在信号剩下的时间里面没有光子计数事件发生, 输出当前的假设作为判决输出, 判断接收机是否判断错误。

4. 重复步骤 2 - 3 足够多次, 记录接收机判断错误的频率作为接收机平均错误概率的估计值。

这种方法的计算精度与问题的维度无关^[73], 计算时间只随仿真点数和信号数目线性增长, 能够有效求解高阶 QAM 接收机平均错误概率的问题。每一次仿真都是一个独立重复事件, 用随机变量 ξ 表示输出结果, $\xi = 0$ 表示接收机判断错误, $\xi = 1$ 表示接收机判断正确。那么有

$$E\xi = p, \text{Var}\xi = p(1 - p). \quad (3.35)$$

重复该独立事件 N 次, 得到估计值

$$\tilde{p} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i. \quad (3.36)$$

该统计量的期望与方差为

$$E\tilde{p} = p, \text{Var}\tilde{p} = \frac{p(1 - p)}{N}. \quad (3.37)$$

若 $p \ll 1$, 那么它的标准差约为 $\sqrt{p/N}$, 为了得到一定精度的仿真结果, 可以选择适当的 N 和一个小量 ϵ , 使得 $\Delta p/p < \epsilon$ 。当 N 很大时, 随机变量 \tilde{p} 可以认为近似服从正态分布, 可以利用 3σ 原则选取 $\Delta p = 3\sqrt{\text{Var}\tilde{p}}$ 因此若取 $\epsilon = 0.1$ 计算精度, 那么有

$$N > \frac{300}{p}. \quad (3.38)$$

例如, 要在平均错误概率大约在 10^{-5} 的时候, 保证 $\epsilon = 0.1$ 的计算精度, 需要的仿真点个数为 3×10^7 。

我们以 16-QAM 信号和 36-QAM 信号位移, 通过数值仿真分析, 得到 Bondurant 接收机的性能曲线如图 3.5 所示。从图中可以看到, 当平均光子数较小时, Bondurant 接收机性能没有突破标准量子极限, 当平均光子数较大时, Bondurant 接收机的性能就可以突破标准量子极限, 并且随着光子数的增大, 这种优势就越大, 这与上面的理论分析一致。

3.3 QAM 信号自适应分区检测接收机

由于 Bondurant 接收机需要实时反馈控制, 对系统反馈带宽和资源消耗要求较高, 不利于工程实现。因此, 可以借鉴用自适应分区检测的方法加以改进。我

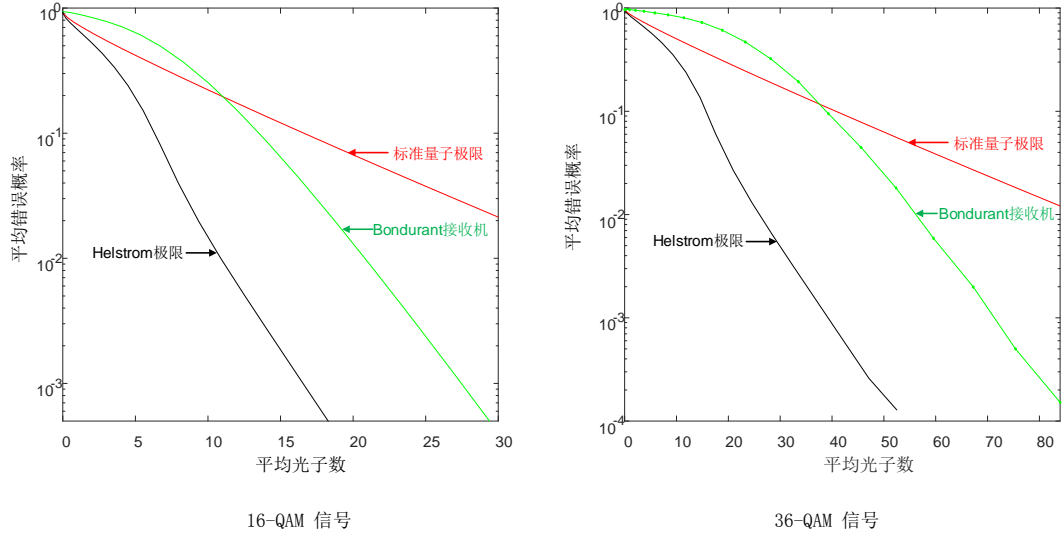


图 3.5 QAM 信号 Bondurant 接收机性能曲线

们将 QPSK 信号的自适应分区检测接收机推广到任意 QAM 信号，研究在 QAM 信号配置下，这种接收机的性能是否也能突破标准量子极限。

如图3.6所示，QAM 信号自适应分区检测接收机结构与 Bondurant 接收机一致，所不同的在接收策略上。接收机将信号在时间上分成若干个分区，在每一个分区里面，不论是否有光子计数事件发生，本振都是恒定的。只有分区结束了，才会采用反馈控制策略去更新本振，因此对反馈带宽的要求大大降低了。

在信号的起始时刻，将每个符号的先验概率设为相同 $P_m^{prior} = 1/M$ 。并随机选择一个符号进行归零，即控制本振使得 $\hat{D}(\beta) = \hat{D}(-\alpha_{i_0})$ 。设总分区数目为 N ，在第 i 个分区时，先验概率为 $P_{m,i}^{prior}$ ，控制参数 $\beta = -\alpha_{u_i}$ ，($u_i \in \{1, 2, \dots, M\}$)。设第 i 个分区结束了之后，对于 ON-OFF 探测器，探测器则只能判断是否有光子计数发生，对应的条件概率为

$$P\{k|\alpha_m, \beta\} = \begin{cases} 1 - e^{-|\alpha_m - \beta|^2/N}, & k > 0, \text{ON} \\ e^{-|\alpha_m - \beta|^2/N}, & k = 0, \text{OFF}. \end{cases} \quad (3.39)$$

如果是具有光子数分辨能力的探测器 (PNRD)，则对应的条件概率为

$$P\{k|\alpha_m, \beta\} = e^{-|\alpha_m - \beta|^2/N} \frac{|\alpha_m - \beta|^{2k}}{Nk!}. \quad (3.40)$$

那么在第 i 个分区结束的时候，对应的后验概率为

$$P_{m,i}^{post} = \frac{P_{m,i}^{prior} P\{k|\alpha_m, \beta = -\alpha_{u_i}\}}{\sum_{m=1}^M P_{m,i}^{prior} P\{k|\alpha_m, \beta = -\alpha_{u_i}\}}. \quad (3.41)$$

其中后验概率最大的符号为

$$m^* = \arg \max_m P_{m,i}^{post}. \quad (3.42)$$

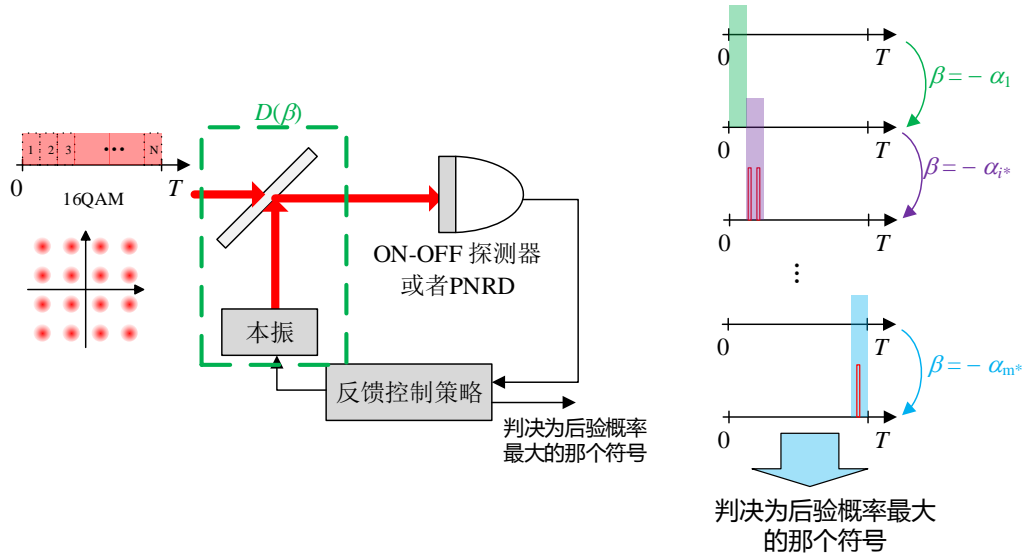


图 3.6 QAM 信号自适应分区检测接收机和反馈控制策略示意图

若所有的分区都已经探测完毕，则输出假设 H_{m^*} 。否则将下一个分区的先验概率设为 $P_{m,i+1}^{prior} = P_{m,i}^{post}$ ，同时通过反馈控制本振使得 $\beta = -\alpha_{m^*}$ ，即归零后验概率最大的符号，选择当前的假设为 H_{m^*} 。然后重复上述步骤直到所有的分区都探测完毕。

可以预计随着分区数目增大，接收机的性能会越来越好，当 $N \rightarrow \infty$ 时，就与 Bondurant 接收机的实时反馈控制一致了。在这种极限下，如果一个分区没有光子计数事件发生，那么条件概率

$$P\{k=0|\alpha_m, \beta = \alpha_{u_i}\} = e^{-|\alpha_m - \alpha_{u_i}|^2/N} \frac{1}{N}. \quad (3.43)$$

中最大的仍然是 α_{u_i} ，即最大的仍然是当前选择的符号。因此接收机只在有光子计数事件发生的时候，才更改本振。所以在 $N \rightarrow \infty$ 的极限情况，只需要修改 Bondurant 接收机的第 3 步即可。蒙特卡洛仿真步奏可以归纳如下：

1. 从信号的初始时刻 $t=0$ 开始，选择假设 H_1 ，并控制本振使得 $\beta = -\alpha_1$ ，此时 M 个先验概率为 $P_{m,1}^{prior} = 1/M, (m=1, 2, \dots, M)$ 。

2. 设当前 t 时刻发生的光子计数个数为 $i-1$ ，当前位移参数 $\beta = \alpha_{u_i}$ ，由于光子到达的过程可以看做一个泊松点过程，所以距下一个光子计数事件发生的时间间隔服从强度为 I_{m,u_i} 的指数分布^[72]。这里 $I_{m,u_i} = |\alpha_m - \alpha_{u_i}|/T$ 是当前进入探测器的光强， α_m 是实际的信号， $\beta = -\alpha_{u_i}$ 是当前的控制参数。因此可以通过服从该指数分布的随机数发生器产生一个随机数 τ 作为下一个光子发生前所经历的时间。

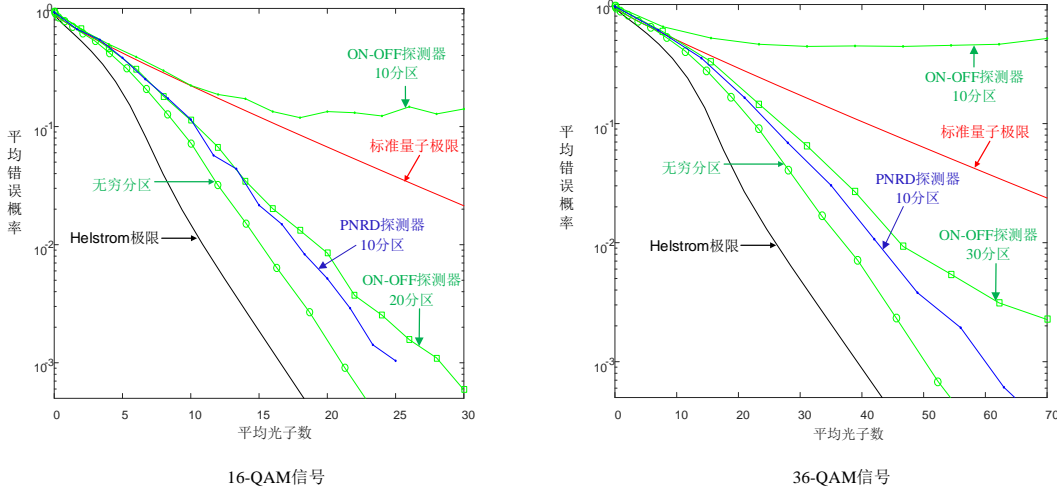


图 3.7 QAM 信号自适应分区检测接收机性能曲线

3. 如果 $t + \tau < T$ ，那么将当前时刻更新为 $t + \tau$ ，该事件对应的条件概率为

$$P\{\Delta t = \tau | \alpha_m, \beta = \alpha_{u_i}\} = e^{-I_{m,u_i}\tau/T} \frac{I_{m,u_i}}{T}. \quad (3.44)$$

根据上式和3.41可以计算出该事件发生后 M 个后验概率 $P_{m,i}^{post}$ ，从从选择出最大后验概率对应的符号 $\alpha_{u_{i+1}}$ ，然后更新当前的假设为 $H_{u_{i+1}}$ ，并利用反馈控制本振使得 $\beta = -\alpha_{u_{i+1}}$ ，即归零符号 u_{i+1} ，然后继续重复步骤 1；如果 $t + \tau \geq T$ ，那么说明在信号剩下的时间里面没有光子计数事件发生，输出当前的假设作为判决输出，判断接收机是否判断错误。

4. 重复步奏 2-3 足够多次，记录接收机判断错误的频率作为接收机平均错误概率的估计值。

我们选取了 16-QAM 和 36-QAM 信号进行仿真分析，并且针对不同分区数目和不同的探测器进行了研究。Monte Carlo 仿真结果如图3.7所示。对比 ON-OFF 探测器不同分区的曲线，可以看出随着分区数目的增大，接收机的平均错误概率都在降低，当分区数目趋近于无穷时，错误概率达到最低，从图中可以看到，它可以在任意光子数都能突破标准量子极限。但是分区数目较少的时候，比如只有 10 个分区，可以看到 16-QAM 信号和 36-QAM 信号的自适应分区检测接收机都没能突破标准量子极限。并且随着光子数增加，接收机性能出现了饱和现象。而这种现象可以通过具有光子数分辨能力的探测器解决。对比都采用 10 个分区的情况下，ON-OFF 探测器和 PNRD 探测器，采用 PNRD 探测器都能够突破标准量子极限，没有出现饱和的现象，这是因为每一个分区发生的光子计数数目也携带信息，当光子数较强的时候，每个分区发生多个光子计数时间的概率大大增加，而这些信息采用 ON-OFF 探测器是无法获取的。从图中还可以看到，

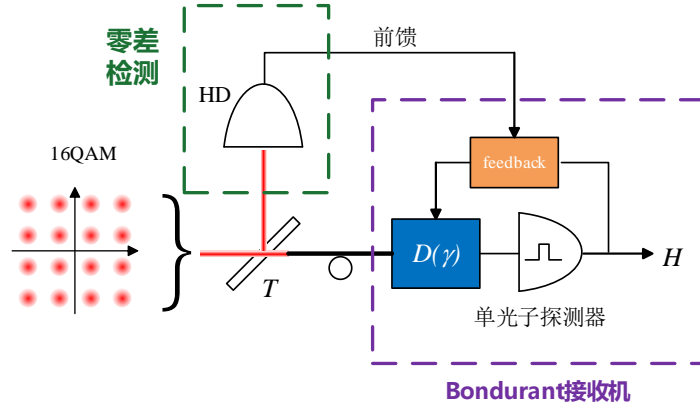


图 3.8 QAM 信号混合接收机示意图

对于 16-QAM 信号，10 分区的 PNRD 和 20 分区的 ON-OFF 的性能接近，对于 36-QAM 信号，10 分区的 PNRD 和 30 分区的 ON-OFF 的性能接近，因此 PNRD 可以在达到相同的错误概率的情况下减少分区数目。此外，采用 PNRD 能够有效地克服暗计数、模式适配等非理想因素也被报道^[22,23]。通过仿真分析，我们可以认为对于一般的 QAM 信号，这种接收机都能突破标准量子极限。在工程实现的时候，可以通过 PNRD 增加系统鲁棒性减少分区数目，从而减少反馈带宽。

3.4 QAM 信号混合接收机

另外一种实现多元调制量子接收机的方法是采用混合接收方案^[25,26]。对于一般的 QAM 信号，混合接收机该如何设计是这一节的主要内容。

对于 QAM 信号，混合接收机可以用如图3.8所示的结构实现。它包含两个部分——零差接收和 Bondurant 接收机。M 阶 QAM 信号首先经过一个透过率为 T 的分束器 (BS) 分成两部分，一部分给零差接收机 (HD)，零差接收机通过一组 POVM 测量进行探测，

$$\hat{\Pi}_v^{HD} = \int_{D_v} dp |p\rangle \langle p|, v \in \Omega. \quad (3.45)$$

其中符号 Ω 与式3.1定义一致，积分区域定义如下

$$D_v = \{p | D_L(v)r\alpha < p \leq D_U(v)r\alpha\}. \quad (3.46)$$

其中 $r = \sqrt{1-T}$ 是反射系数， D_L 和 D_U 是式3.7定义的两个上下界函数。如图3.9所示，零差检测不同的判定区域对应一个按照 P 分量分割的分区，经过零差接收后，就可以知道信号所在的区域。

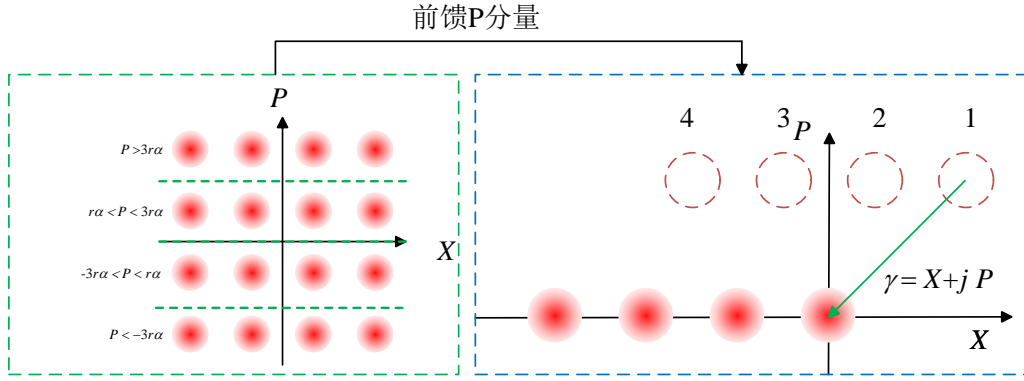


图 3.9 四态区分的 Bondurant 接收机位移操作示意图

正确探测出信号所在区域的概率可以用下式计算出来

$$\begin{aligned} P^{HD}\{v|\alpha_{uv}\} &= \int_{D_v} |\langle p|r\alpha_{uv} \rangle|^2 dp \\ &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf}(\sqrt{2}(D_U(v) - v)r\alpha) - \operatorname{erf}(\sqrt{2}(D_L(v) - v)r\alpha) \right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

代入上下界得到

$$P^{HD}\{v|\alpha_{uv}\} = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + \operatorname{erf}(\sqrt{2}r\alpha)) & v \neq \pm(L-1), \\ \operatorname{erf}(\sqrt{2}r\alpha) & v = \pm(L-1). \end{cases} \quad (3.48)$$

所以该零差接收机的平均正确概率为

$$P_c^{HD} = \frac{1}{L} \left(1 + (L-1) \operatorname{erf}(\sqrt{2}r\alpha) \right) \quad (3.49)$$

当光子数很大时，利用余误差函数的 Chernoff 界^[53] 可得

$$P_c^{HD} \approx 1 - \left(1 - \frac{1}{L}\right) e^{-2r^2\alpha^2}. \quad (3.50)$$

若采用 50:50 的分束器，那么

$$P_c^{HD} \approx 1 - \left(1 - \frac{1}{L}\right) e^{-\alpha^2}. \quad (3.51)$$

零差接收机探测的结果将前馈给后面的位移接收机，用于位移接收机调整位移操作的策略控制。如图3.9所示，如果零差探测得到正确的结果，那么后面就变成一个 L 态区分问题，这个 L 态区分可以用 Bondurant 接收机实现。为了进行位移操作，Bondurant 接收需要知道位移参数 $\gamma = X + jP$ 的 P 分量，对于不同的分区，这个分量值不同，对于该 L 态区分问题，这个分量的值是相同的，这个值通过前面的零差接收机前馈得到。

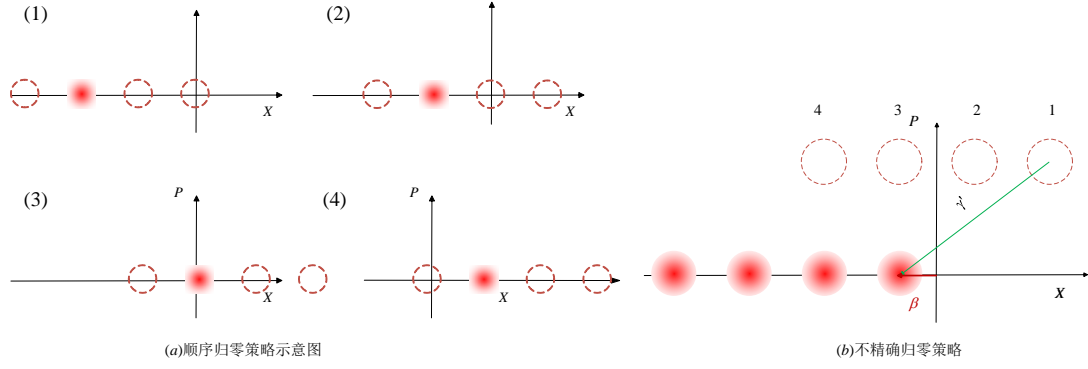


图 3.10 四态区分的 Bondurant 接收机接收策略和不精确归零策略示意图

Bondurant 接收机的接收策略如图 3.10 所示，在信号到达 Bondurant 接收机时，Bondurant 接收机利用前馈得到的 P 值，开始调整本振归零符号 1，接着在每一个光子计数时间发生的时候，按照 $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow L$ 顺序依次归零对应符号。理想情况下，对于图中信号 3，由于最多发生 2 个光子计数事件，图 3.10 (a.4) 的情况是不能到达的。

按照上述策略，该 L 态区分的 Bondurant 接收机的条件概率可以通过 3.25 式计算得到。具体而言对信号 α_{uv} 有

$$P^{DR}\{u|\alpha_{uv}\} = \int_0^1 dt_1 n_{u,1} e^{n_{u,1} t_1} \int_{t_1}^1 dt_2 n_{u,2} e^{n_{u,2} (t_2 - t_1)} \dots \int_{t_{k-2}}^1 dt_{k-1} n_{u,k-1} e^{n_{u,k-1} (t_{k-1} - t_{k-2})}, u \in \Omega. \quad (3.52)$$

这里我们将时间对符号周期进行归一化了，其中 k 为信号 α_{uv} 探测正确时，符号周期结束时刻接收机对应的归零符号序数，满足 $v = (L - 1) - 2k$ ，且正确探测时，发生的光子计数事件数目为 $k - 1$ 个。上式中 $n_{v,i} = 4t^2 |\alpha(k - i)|^2$ ，这里 $t = \sqrt{T}$ 。

利用 Bondurant 接收机的渐近性能，注意到 $n_{v,i} \neq n_{v,l}$ 对所有的 $i \neq l$ 成立，所以可得当光子数很大时

$$P_c^{DR} \approx 1 - C e^{-4t^2 \alpha^2}. \quad (3.53)$$

所以，两个接收机联合探测的正确概率为

$$\begin{aligned}
 P_c &= \frac{1}{M} \sum_{u,v} P^{HD}\{v|\alpha_{uv}\} P^{DR}\{u|\alpha_{uv}\} \\
 &= \frac{1}{M} \sum_v P^{HD}\{v|\alpha_{uv}\} \sum_u P^{DR}\{u|\alpha_{uv}\} \\
 &= \left(\frac{1}{L} \sum_v P^{HD}\{v|\alpha_{uv}\} \right) \left(\frac{1}{L} \sum_u P^{DR}\{u|\alpha_{uv}\} \right) \\
 &= P_c^{HD} P_c^{DR}.
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

这里 P_c^{HD} 和 P_c^{DR} 分别是零差接收机平均正确探测概率和 Bondurant 接收机的平均正确探测概率。当光子数很大时，利用式3.50和3.53 可得这种混合接收机的平均错误概率渐近性能为

$$\begin{aligned}
 P_e &\approx \left(1 - \left(1 - \frac{1}{L} \right) e^{-2r^2 \alpha^2} \right) \left(1 - C e^{-4t^2 \alpha^2} \right) \\
 &\approx \left(1 - \frac{1}{L} \right) e^{-2r^2 \alpha^2} + C e^{-4t^2 \alpha^2}.
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

如果取 50:50 的分束器，即 $r^2 = t^2 = 0.5$ ，那么

$$P_e \approx \left(1 - \frac{1}{L} \right) e^{-\alpha^2}. \tag{3.56}$$

与经典外差接收机3.9式相比，这种混合接收机误码率低 3dB。容易看到，当 $2r^2 = 4t^2$ 时，具有最佳的渐近性能，此时 $r^2 = 2t^2 = 2/3$ ，即需要采用一个反射率为 2/3 的分束器，此时最佳渐进性能为

$$P_e \approx \left(1 - \frac{1}{L} + C \right) e^{-\frac{4}{3} \alpha^2}. \tag{3.57}$$

与经典外差接收机3.9式相比，在大信号的时候，这种接收机具有指数倍的增益。

正如最优位移接收机那样，我们也可以在 Bondurant 接收机位移操作时，采用不精确归零如图3.10(b) 所示。由于采用不精确归零，所以对于 M 阶 QAM 信号，存在一定概率发生 L 个甚至超过 L 个光子计数事件，在这种策略当中，我们将这种情形都判定为第 L 个符号。假定这个附加的位移量恒定为 β ，那么对应

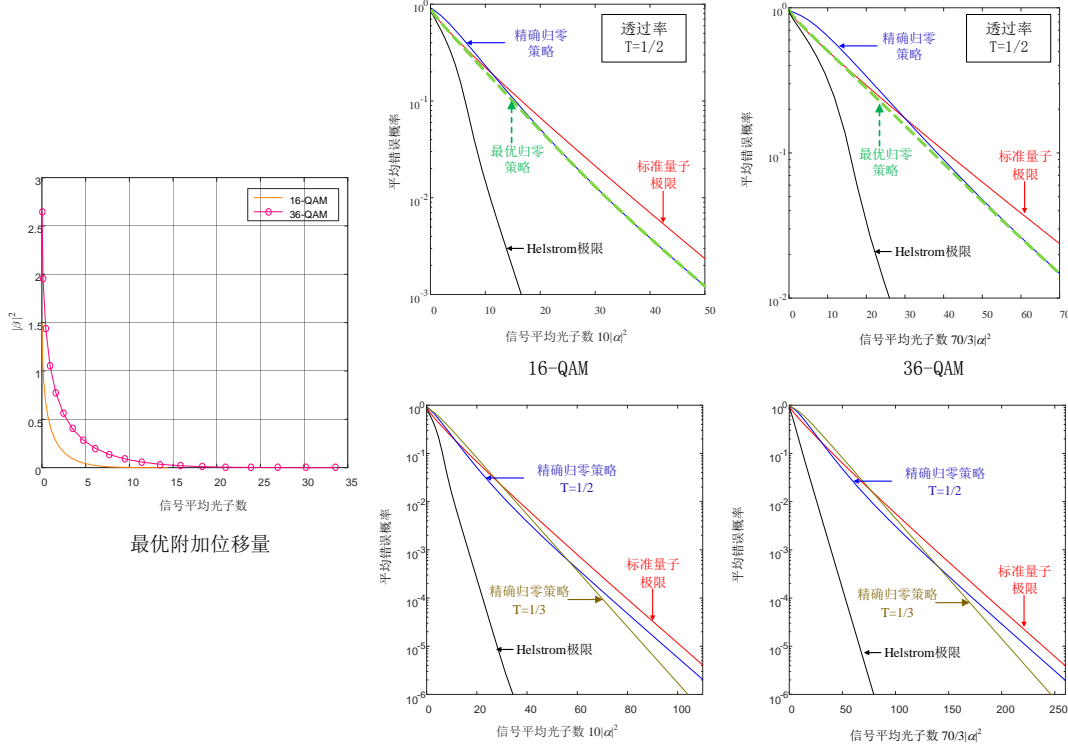


图 3.11 QAM 信号混合接收机性能

的条件概率为

$$\begin{aligned}
 P^{DR}\{u|\alpha_{uv}\} &= \int_0^1 dt_1 n_{u,1} e^{n_{u,1}t_1} \int_{t_1}^1 dt_2 n_{u,2} e^{n_{u,2}(t_2-t_1)} \\
 &\quad \cdots \int_{t_{k-2}}^1 dt_{k-1} n_{u,k-1} e^{n_{u,k-1}(t_{k-1}-t_{k-2})} (e^{n_{u,k}(1-t_{k-1})}), \\
 &\quad u \in \Omega \text{ 且 } u \neq -(L-1); \\
 P^{DR}\{u|\alpha_{uv}\} &= \int_0^1 dt_1 n_{u,1} e^{n_{u,1}t_1} \int_{t_1}^1 dt_2 n_{u,2} e^{n_{u,2}(t_2-t_1)} \\
 &\quad \cdots \int_{t_{k-3}}^1 dt_{k-2} n_{u,k-2} e^{n_{u,k-2}(t_{k-2}-t_{k-3})} (1 - e^{n_{u,k-1}(1-t_{k-2})}), \\
 &\quad u = -(L-1).
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

在这里 $n_{v,i} = 4r^2|\alpha(k-i)|^2 + |\beta|^2$ 是存在附加位移量时实际的平均光子数。为了得到最优的附加位移量 β ，我们对 P^{DR} 进行数值优化，

$$\beta^* = \arg \max_{\beta} P^{DR}(\beta). \tag{3.59}$$

我们对 16-QAM 信号和 36-QAM 信号进行数值仿真，透过率取 $T = 1/2$ 和 $T = 1/3$ ，仿真结果如 3.11 图所示。对比两种位移策略的性能曲线，可以看到随着光子数的增大，两种位移策略都能突破标准量子极限，但是采用精确归零策略

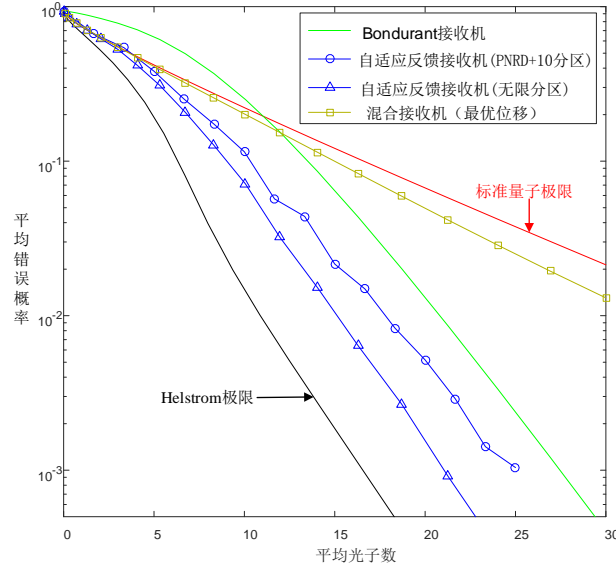


图 3.12 QAM 信号三种接收机性能对比

的接收机，在小信号时性能比较差，而不精确归零策略则可以改善小信号时接收机的性能。并且，随着光子数的增大，附加位移量迅速减小，因此不精确归零策略的混合接收机渐近性能与精确归零一致。再对比不同的透过率，可以看到，虽然在大信号近似时， $T = 1/3$ 是最优透过率，但是在信号较小的时候，透过率为 $1/2$ 时性能更好。随着光子数增大，透过率 $T = 1/2$ 对应的曲线与标准量子极限的差异趋近于 3dB，不再增加，而透过率 $T = 1/3$ 对应的曲线与标准量子极限的差异随光子数增加而增加，这与之前的理论分析一致。

3.5 总结

在这一章，我们系统地分析了三种 QAM 信号量子接收机方案，Bondurant 接收机、自适应分区检测接收机以及混合接收机，图3.12显示对于 16-QAM 信号，这三种接收机性能的一个对比。首先，这三种接收机在光子数较大的时候都能突破标准量子极限，Bondurant 接收机在小信号的时候性能很差，混合接收机通过最优位移策略改善了小信号时的性能。其次，混合接收机性能最差，通过前面分析可知，如果透过率为 $1/2$ ，那么其大信号渐近平均错误概率与标准量子极限仅相差 3dB，而另外两种接收机都比标准量子极限低一个指数项，也就是具有指数倍的增益。即使在最佳透过率 $T = 1/3$ 的情况下，因为在图3.12所示的平均光子数范围内，最佳透过率性能还不如 $T = 1/2$ 时的性能，所以还是比另外两种接收策略性能要差。对于高阶调制，采用混合接收机所减少的资源消耗很少，因此对于 QAM 调制信号，不建议采用混合接收机进行探测。最后，通过自适应分区检

测的方法, Bondurant 接收机需要实时反馈控制以及小信号时的缺陷都被解决了, 因此自适应分区检测接收机具有非常高的实用价值, 并且通过前面的理论分析, 它的大信号渐近性能与 Helstrom 极限非常接近, 可以认为它是一种可实用化的近最优检测方案。

通过对现有的量子接收机的观察, 我们可以发现, 对本振的反馈控制策略是导致接收机最终性能的关键。在我们的分析中, Bondurant 接收在两个光子到达的时间间隔期间, 采用恒定的位移量, 而当一个光子到达探测器的时候, 立即调整本振。自适应分区检测接收在每一个分区, 也采用的是恒定的位移量。因此, 如果不采用恒定的位移量, 而是随时间变化的位移量, 能否找到这样一种最优的控制策略是一个数学难题。到目前为止, Dolinar 接收机解决了二元信号的最优控制策略问题, 令人惊喜的是这种最优控制策略给出了最优量子检测的接收性能。但是对于更高阶的问题, 如 QPSK、QAM 信号, 这个数学难题尚未解决, 需要进一步的研究工作。另外, 这种最优控制策略是否能够达到 Helstrom 极限也不知道, 如果最优控制策略不能达到这个极限, 那么对于高阶调制信号, 如何设计接收机使得接收性能达到 Helstrom 极限也是一个有待研究的问题。

第4章 二元调制多符号条件归零接收机

在上一章，我们系统讨论了高阶调制 QAM 信号的接收方案，至此，常见的调制方案都有比较系统的研究。在这些方案中，通常都是针对单个符号设计的接收方案，而正如第二章所述，采用针对编码后的多个符号设计的联合检测方案才有可能逼近 Holevo 容量。因此这一章我们来讨论最简单的二元调制方案的一种联合检测方案——条件归零接收机。

4.1 MPPM 信号条件归零接收机

首先，我们来考虑一种特殊的编码方案，多脉冲脉冲位置调制 (MPPM) 信号。与 PPM 信号的思想一样，信息被调制在脉冲的位置上面，具有很高的能量效率，这在深空通信中具有潜在的应用价值^[11]。与 PPM 信号不同的是，它的每一个符号通常采用两个或者两个以上的脉冲来加载信息。采用这种方式，可以在保证较高能量效率的同时，还能有效的克服 PPM 信号低频谱效率的缺点^[74]。这在深空通信如地月通信、卫星到卫星通信等场景具有潜在的优势^[11,75]。

4.1.1 MPPM 信号标准量子极限

首先，我们从数学上定义 MPPM 信号符号集合。设每一个 MPPM 信号符号有 M 个时隙，对每一个符号，都有 L 个时隙有脉冲，而其他 $M - L$ 个时隙没有脉冲，我们称这种 MPPM 信号为 L-M-PPM 信号，如图4.1(a)所示。一般的，我们只考虑 $L \geq 2$ 的情形， $L = 1$ 时就退化为单脉冲 PPM 的情形。容易知道，这样的 L-M-PPM 信号的符号集合个数为

$$\binom{M}{L} = \frac{M(M-1)\cdots(M-L+1)}{L!}. \quad (4.1)$$

例如当 $M = 4, L = 2$ 时，2-4-PPM 信号有 $\binom{4}{2} = 6$ 个，如果用 1 代表有脉冲，而用 0 代表没有脉冲，那么这些信号可以编码为二进制码字 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_M)$ ，对 2-4-PPM 信号这 6 个码字为

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \quad (4.2)$$

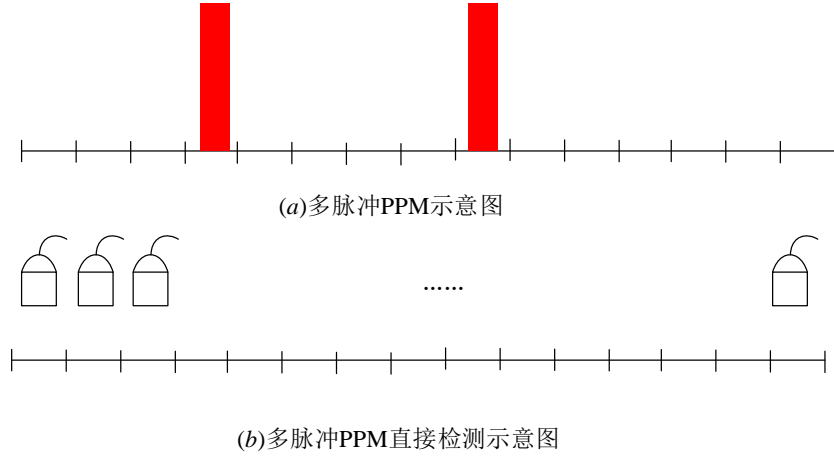


图 4.1 MPPM 信号和直接检测示意图

在将这些码字映射到量子态时，我们用相干态 $|0\rangle$ 和 $|\alpha\rangle$ 分别代表 0 和 1，用直积态

$$|\gamma_1\rangle \otimes |\gamma_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\gamma_M\rangle, |\gamma_i\rangle = \begin{cases} |0\rangle, & c_i = 0, \\ |\alpha\rangle, & c_i = 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

来表示每一个码字对应的信号。

在经典的光通信系统中，与 PPM 信号一样，采用直接检测的方法对 MPPM 信号进行探测^[76]。直接检测探测方法利用一个 ON-OFF 探测器，对每一个时隙进行独立的探测。设每一个时隙的输出为 o_i ，如果有脉冲 $o_i = 1$ ，否则 $o_i = 0$ 。那么 M 个时隙对应的 M 个输出构成输出序列 $\mathbf{o} = (o_1, o_2, \cdots, o_M)$ 。当所有的 M 个时隙都探测完毕，然后通过最大似然准则进行译码判决^[76]。如果所有码字的先验概率是相同的（通信中通常都满足），这种判决准则使得平均错误概率最低。对于给定的码字 \mathbf{c}_i ，输出序列为 \mathbf{o} 的条件概率为

$$\Pr\{\mathbf{o}|\mathbf{c}_i\} = \prod_{k=1}^M (1 - e^{-c_{ik}n})^{o_k} (e^{-c_{ik}n})^{1-o_k}. \quad (4.4)$$

其中 $\mathbf{c}_i = (c_{i1}, \cdots, c_{iM})$ 和 $\mathbf{o} = (o_1, \cdots, o_M)$ 分别为码字和输出序列， $n = |\alpha|^2$ 是一个脉冲的平均光子数。最大似然准则通过计算对给定的输出序列 \mathbf{o} 每一个符号对应的条件概率，选择出条件概率最大的符号进行判决，该条件概率也称似然函数。

理想情况下，实际检测到脉冲数目 $K \leq L$ ，此时上述条件概率也即是似然函数变为

$$\Lambda_i = \Pr\{\mathbf{o}|\mathbf{c}_i\} = \begin{cases} (1 - e^{-n})^K (e^{-n})^{L-K}, & o_k \leq c_{ik} \forall k, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.5)$$

对于给定的码符号集合, L 是相同的, 所以根据最大似然准则, 对给定的输出序列 \mathbf{o} , 只要满足 $o_k \leq c_{ik} \forall k$ 的码字对应的似然函数是相同的。此时随机选择一个判决输出。因此, 对给定的码字 \mathbf{c}_i , 在检测到 K 个脉冲时接收机正确探测的概率为

$$\Pr\{\mathbf{c}_i|\mathbf{c}_i\} = \frac{1}{\binom{M-K}{L-K}} \binom{L}{K} (1 - e^{-n})^K (e^{-n})^{L-K}. \quad (4.6)$$

所以, 这种检测方案的平均正确概率为

$$\begin{aligned} P_c &= \frac{1}{\binom{M}{L}} \sum_{i=1}^{\binom{M}{L}} \sum_{K=0}^L \Pr\{\mathbf{c}_i|\mathbf{c}_i, K\} \\ &= \sum_{K=0}^L \frac{1}{\binom{M-K}{L-K}} \binom{L}{K} (1 - e^{-n})^K (e^{-n})^{L-K}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

下面我们考虑大信号近似, 即当 $n \gg 1$ 时, 可以忽略少检测到的脉冲数目大于 1 个的情况的概率, 即

$$\begin{aligned} \Pr\{\mathbf{c}_i|\mathbf{c}_i\} &\approx (1 - e^{-n})^L + \frac{L}{M - L + 1} (1 - e^{-n})^{L-1} e^{-n} \\ &\approx 1 - L \left(1 - \frac{1}{M - L + 1}\right) e^{-n}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

因此, 这种检测方案的渐近性能为

$$\begin{aligned} P_e &\approx L \left(1 - \frac{1}{M - L + 1}\right) e^{-n} \\ &= L \left(1 - \frac{1}{M - L + 1}\right) e^{-|\alpha|^2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.1.2 MPPM 信号 Helstrom 极限

一般而言, MPPM 信号并不具有几何均匀对称性, 为了求得这种信号的最优量子检测的性能, 需要如 QAM 信号那样求解半正定规划问题 2.48。因此, 我们需要得到密度矩阵。与 QAM 信号不同的是, MPPM 信号是直积态, 如果采用 QAM 信号那种将每一个时隙的信号在 Fork 态中展开, 然后截取长度为 l 的向量, 那么要表达整个直积态信号, 所需要的向量维度为 l^M , 将随着时隙数目 M 指数增长, 这将为计算带来困难。所以这里我们采用 Smit 正交化的方法^[77,78], 构造一组新的基向量 $|e_i\rangle$ 。为方便计, 我们用矢量 $|\psi_i\rangle$ 表示这 $N = \binom{M}{L}$ 个直积态信

号, 那么基向量 $|e_i\rangle$ 可以表达为

$$\begin{aligned} |u_1\rangle &= |\psi_1\rangle, |e_1\rangle = \frac{|u_1\rangle}{\sqrt{\langle u_1|u_1\rangle}} \\ |u_2\rangle &= |\psi_2\rangle - \langle e_1|\psi_2\rangle |e_1\rangle, |e_2\rangle = \frac{|u_2\rangle}{\sqrt{\langle u_2|u_2\rangle}} \\ &\vdots \\ |u_N\rangle &= |\psi_N\rangle - \sum_{k=1}^{N-1} \langle e_k|\psi_N\rangle |e_k\rangle, |e_N\rangle = \frac{|u_N\rangle}{\sqrt{\langle u_N|u_N\rangle}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

设在该基向量上, $|\psi_i\rangle = \mathbf{c}_i = (c_{i1} \ c_{i2} \ \dots \ c_{in})^T$, 那么有

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1, c_{1k} = 0 \quad k > 1; \\ c_{ii} &= \sqrt{G_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |c_{ik}|^2}, c_{ik} = 0 \quad k > i, \\ c_{ij} &= \langle e_j|\psi_i\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\langle u_j|u_j\rangle}} \left(\langle \psi_j|\psi_i\rangle - \sum_{k=1}^{j-1} \langle \psi_j|e_k\rangle \langle e_k|\psi_i\rangle \right) \\ &= \frac{1}{c_{jj}} \left(G_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{jk}^* c_{ik} \right), \quad j < i. \end{aligned} \quad (4.11)$$

这里 $G_{ji} = \langle \psi_j|\psi_i\rangle$ 为 Gram 矩阵元素, 对 L-M-PPM 信号, 任意两个信号之间的内积为

$$\langle \psi_j|\psi_i\rangle = e^{-1/2d(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j)n} \quad (4.12)$$

这里 $d(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j)$ 这两个码字的 Hamming 距离。利用上述结果, 可以得到信号的密度矩阵为

$$\hat{\rho}_i = |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i^\dagger. \quad (4.13)$$

这里 \mathbf{c}_i^\dagger 表示 \mathbf{c}_i 的共轭转置。一旦将密度矩阵表达为有限维矩阵之后, 就可以利用 CVX 工具箱^[45,46] 进行数值求解了。

进一步, 利用2.48式, 我们可以得到一个平均错误概率的近似上界。我们接下来要证明, 一般地, 当信号光强很大时即 $n \gg 1$, 存在非负实数 A_i 使得下式成立

$$\begin{aligned} c_{ii} &\geq 1 - A_i e^{-1/2d_{\min}n}, \\ c_{ij} &\leq A_i e^{-1/2d_{\min}n}, i \neq j. \end{aligned} \quad (4.14)$$

其中 $d_{\min} = \min_{i \neq j} d(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j)$ 是码符号集合的最小 Hamming 距离, 容易验证当 $i \neq j$ 时, 有 $G_{ij} \leq e^{-1/2d_{\min}n}$ 。

当 $i = 1$ 时, 显然成立。我们假设当 $i \leq m$ 时成立, 那么当 $i = m + 1$ 时, 存在非负实数 A_1, \dots, A_{m+1} , 当 $n \gg 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 c_{m+1,j} &\leq \frac{G_{j,m+1}}{c_{jj}} \\
 &\leq \frac{e^{-1/2d_{\min}n}}{1 - A_j e^{-1/2d_{\min}n}} \\
 &\leq e^{-1/2d_{\min}n} (1 + 2A_j e^{-1/2d_{\min}n}) \\
 &\leq A_{m+1} e^{-1/2d_{\min}n}. \\
 c_{m+1,m+1} &\geq \sqrt{1 - \sum_{k=1}^m A_k e^{-1/2d_{\min}n}} \\
 &\geq 1 - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m A_k e^{-1/2d_{\min}n} \\
 &\geq 1 - A_{m+1} e^{-1/2d_{\min}n}.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

这里取 $A_{m+1} = \max(1 + 2 \max_j A_j, \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m A_k)$ 即可, 所以上述命题成立, 根据式2.48, 可得

$$X_{ii} = \langle e_i | \hat{X} | e_i \rangle \geq \langle e_i | \hat{\rho}'_i | e_i \rangle = \frac{1}{N} c_{ii}. \tag{4.16}$$

所以平均错误概率

$$\begin{aligned}
 P_e &= 1 - \text{Tr}(\hat{X}) = 1 - \sum_i X_{ii} \\
 &\leq \frac{1}{N} \sum_i A_i e^{-d_{\min}n}.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

即最优量子检测具有不高于 $e^{-d_{\min}n}$ 形式的渐近性能上界。事实上, 上述结论可以推广到任意量子态集合, 采用最优检测其平均错误概率的渐近性能上界不高于 $e^{-n_{\min}}$, 其中 $n_{\min} = \min_{ij} |\alpha_i - \alpha_j|^2$, 这里 α_i 对应于相干态 $|\alpha_i\rangle$ 。

利用平方根检测, 我们可以得到 MPPM 大信号时精确渐近性能。因为

$$\hat{Z}_{ii}^2 \approx \sum_{d=d_{\min}} e^{-d_{\min}n} = B_i e^{-d_{\min}n}. \tag{4.18}$$

这里 $Z = I - G$, 假定 $n \gg 1$, 略去高阶小量, 其中 B_i 是与码字 \mathbf{c}_i 距离等于最

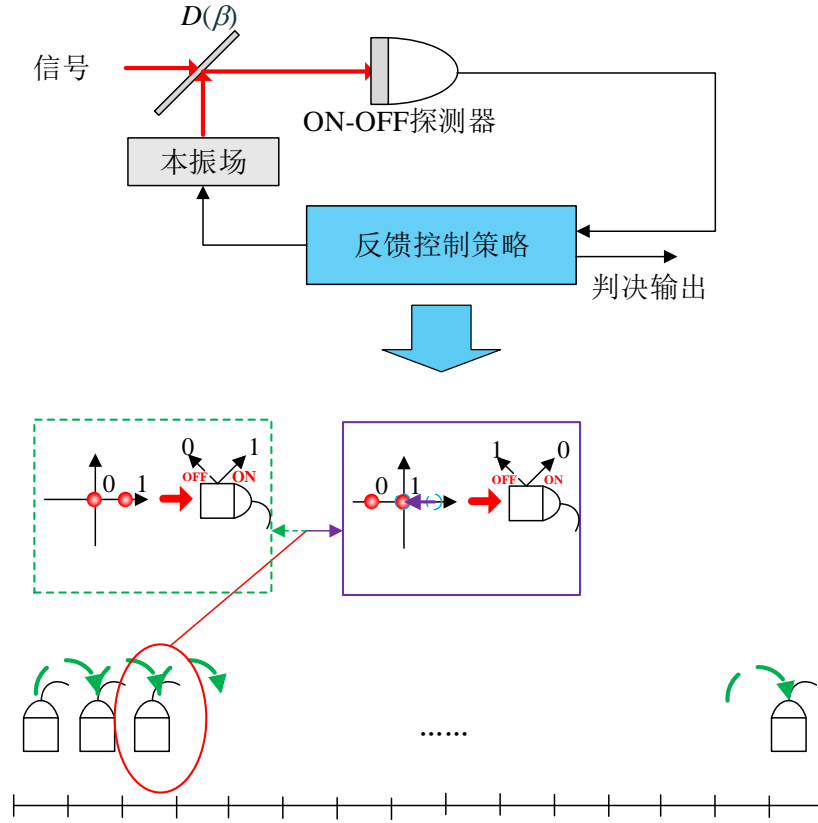


图 4.2 条件归零接收机及接收过程示意图

小距离码字的个数。所以由 3.19 式，我们有

$$\begin{aligned}
 P_e &\approx 1 - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(1 - \frac{1}{8} \hat{Z}_{ii}^2\right)^2 \\
 &\approx \frac{1}{4M} \sum_{i=1}^M \hat{Z}_{ii}^2 \\
 &\approx \frac{1}{4M} \sum_i B_i e^{-d_{\min} n} \\
 &\approx \frac{1}{2M} D e^{-d_{\min} n}.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

这里 D 是码间距离等于最小距离的码字对数。例如，对单脉冲 PPM 信号，任意两个码字间距离都是最小距离 2，所以 $D = \frac{M(M-1)}{2}$ ，从而它的渐近误差性能为 $\frac{(M-1)}{4} e^{-2n}$ 。与式 2.87 对比可以看到，两种方法求得的结果一致。

4.1.3 MPPM 条件归零接收机

在第二章中，我们简单地介绍了 Dolinar 在 1982 年提出的，针对 PPM 信号设计的条件归零 (CPN) 接收机。我们将该接收机推广到更一般的情况，用来接

收 MPPM 信号。

如图4.2所示，在每一个时隙，信号通过一个高透过率分束器与本振发生干涉，即对信号进行了位移操作，对 MPPM 信号而言，位移操作被限定在 $\hat{D}(0)$ 和 $\hat{D}(-\alpha)$ 中选择一个。位移后的信号进入单光子探测器或者 ON-OFF 探测器，它对应于一个二元 POVM 测量

$$\hat{\Pi}_0 = |0\rangle\langle 0|, \hat{\Pi}_1 = \hat{I} - |0\rangle\langle 0|. \quad (4.20)$$

如果采用 $\hat{D}(0)$ 位移操作，即该时隙采用直接探测，我们记为 A 类探测，那么

$$\begin{aligned} p_{0|0} &= \text{Tr}[\hat{\Pi}_0 |0\rangle\langle 0|] = 1, \\ p_{1|1} &= \text{Tr}[\hat{\Pi}_1 |\alpha\rangle\langle \alpha|] = 1 - e^{-n}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

这里 $n = |\alpha|^2$ 是脉冲的平均光子数， $p_{0|0}$ 代表信号在该时隙里没有光脉冲输出为 0 的条件概率， $p_{1|1}$ 代表信号在该时隙里没有光脉冲输出为 0 的条件概率。此时单个符号探测的平均错误概率为

$$P_e^A = p_1 e^{-n}. \quad (4.22)$$

这里 p_1 代表有脉冲的先验概率。如果采用 $\hat{D}(-\alpha)$ 位移操作，即该时隙归零脉冲后再采用直接探测，我们记为 B 类探测，那么

$$\begin{aligned} p_{0|0} &= \text{Tr}[\hat{\Pi}_0 \hat{D}(-\alpha) |0\rangle\langle 0| \hat{D}^\dagger(-\alpha)] = e^{-n}, \\ p_{1|1} &= \text{Tr}[\hat{\Pi}_1 \hat{D}(-\alpha) |\alpha\rangle\langle \alpha| \hat{D}^\dagger(-\alpha)] = 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

此时单个符号探测的平均错误概率为

$$P_e^B = p_0 e^{-n}. \quad (4.24)$$

这里 p_0 代表没有脉冲的先验概率。

反馈策略通过探测器接收到的历史结果和当前结果来决定下一个时隙采用哪一种位移操作，即下一个时隙的位移量可以表示为历史的输出和当前的输出的函数。设当前时隙为 k ，历史输出为 $\zeta_{k-1} = (z_1, z_2, \dots, z_{k-1})$ ，那么下一个时隙的位移量为

$$\beta_{k+1} = \beta_{k+1}([\zeta_{k-1}, z_k]) = \beta_{k+1}(\zeta_k). \quad (4.25)$$

如果当前时隙的输出为 $z_k = 0$ ，即没有光子计数时间发生，那么下一个时隙的位移量为 $\beta([\zeta_{k-1}0]) = \beta^{z_1 \dots z_{k-1} 0}$ ，如果 $z_k = 1$ ，则 $\beta([\zeta_{k-1}1]) = \beta^{z_1 \dots z_{k-1} 1}$ ，整个策略可以表示为一颗决策树如图4.3所示。

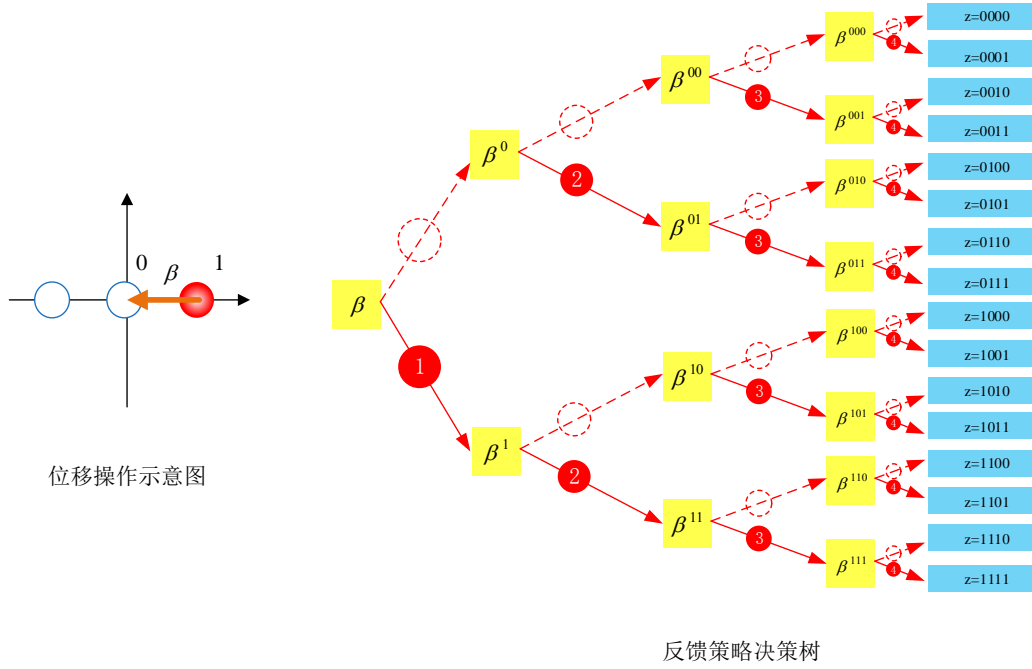


图 4.3 条件归零接收机反馈策略决策树

当 M 个时隙都探测完毕，设探测器的输出序列为 $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_M]$ ，我们采用最大后验概率准则 (MAP) 进行判决，判决函数

$$h(\mathbf{z}) = \arg \max_i p_{i,\mathbf{z}}. \quad (4.26)$$

这里 $p_{i,\mathbf{z}}$ 代表发送第 i 个符号，同时输出序列为 \mathbf{z} 的联合概率。那么对所有的符号，平均正确探测的概率为

$$P_c = \sum_{\mathbf{z}} p_{h(\mathbf{z}),\mathbf{z}} = \sum_{\mathbf{z}} \max_i p_{i,\mathbf{z}}. \quad (4.27)$$

当 M 个符号的先验概率一致时，最大后验概率准则与最大似然准则的结果一致。

现在，我们需要确定函数 $\beta_k(\zeta_k)$ 的形式。一种简单的取法是 $\beta_k \equiv 0$ ，即每一个时隙都采用直接探测，此时就是经典的检测方案。通过观察4.22式和4.24式我们可以知道 $p_1 < p_0$ 时，即有脉冲的先验概率比较大，适合采用 B 类探测，反之适合采用 A 类探测。我们可以采取最大后验概率位移策略

$$\beta_k(\zeta_{k-1}) = \begin{cases} 0, & \text{符号 } m_k^*(\zeta_{k-1}) \text{ 的第 } k \text{ 个时隙没有脉冲,} \\ -\alpha, & \text{符号 } m_k^*(\zeta_{k-1}) \text{ 的第 } k \text{ 个时隙有脉冲.} \end{cases} \quad (4.28)$$

$$m_k^*(\zeta_{k-1}) = \arg \max_i p_{i,[z_1, \dots, z_{k-1}]}.$$

一般地, 采用最大后验概率策略设计的反馈策略并不一定是最优策略。为了得到最优策略, 我们首先来定义优化目标函数^[33]

$$J_k(s_k, \beta_{k+1}) = \sum_{z' \in \mathcal{Z}_{M-K}} p_{h([\zeta_k, z']), [\zeta_k, z']} (k = 0, 1, \dots, M-1) \quad (4.29)$$

$$J_M(s_M, \beta_{M+1}) = p_{h(\zeta_M), \zeta_M} = p_{h(z), z}.$$

这里 $s_k = s_k(\zeta_k) = [p_{1, \zeta_k}, \dots, p_{M, \zeta_k}]$ 是状态向量, 与前面的输出序列有关, 且初始状态 $s_0 = [p_1, \dots, p_M] = [1/M, \dots, 1/M]$ 对应于 M 个先验概率。 $\mathcal{Z}_K = \{0, 1\}^{\otimes K}$, 是 K 维输出序列的状态空间。容易验证, 目标函数具有如下性质

$$J_0 = \sum_{z \in \mathcal{Z}_M} p_{h(z), z} = P_c. \quad (4.30)$$

即 J_0 就是我们最终需要优化的最大平均正确概率。进一步, 我们可以验证 J_k 具有递归关系

$$\begin{aligned} J_k(s_k, \beta_k) &= \sum_{z' \in \mathcal{Z}_{M-K}} p_{h([\zeta_k, z']), [\zeta_k, z']} \\ &= \sum_{z' \in \mathcal{Z}_{M-K-1}} p_{h([\zeta_k, 0, z']), [\zeta_k, 0, z']} + \sum_{z' \in \mathcal{Z}_{M-K-1}} p_{h([\zeta_k, 1, z']), [\zeta_k, 1, z']} \\ &= J_{k+1}(s_{k+1}([\zeta_k 0]), \beta_{k+1}([\zeta_k 0])) + J_{k+1}(s_{k+1}([\zeta_k 1]), \beta_{k+1}([\zeta_k 1])). \end{aligned} \quad (4.31)$$

并且状态向量具有如下更新方程

$$s_{k+1}([\zeta_k z_{k+1}]) = s_k \odot [p_{z_{k+1}|1}, p_{z_{k+1}|2}, \dots, p_{z_{k+1}|M}]. \quad (4.32)$$

其中 \odot 是按照元素相乘的哈达马积, $p_{z_{k+1}|i}$ 表示在发送码字为第 i 个码字时, 第 $k+1$ 个时隙输出为 z_{k+1} 的概率。

为了最大化 P_c , 我们需要优化 J_0 , 原则上我们可以让 β_k 取任意复数, 这里我们限定它只能取 $\{0, -\alpha\}$ 中的一个。根据上述递归关系, 我们可以将该优化问题分解为两个子问题, 记 $J_k^* = \max_{\beta_{k+1}} J_k(s_k, \beta_{k+1})$, 那么有

$$J_k^*(s_k(\zeta_k)) = J_{k+1}^*(s_k([\zeta_k 0])) + J_{k+1}^*(s_k([\zeta_k 1])) \quad (4.33)$$

因此, 可以利用动态规划算法进行优化, 从最后一层进行计算, 每一步都对状态空间中的所有状态进行一次计算, 计算完毕后再计算前面一层, 直到第 0 层^[33]。但是由于状态空间过大, 对 N 个信号, 为了得到足够的精度, 需要将状态中每一个元素离散化至少 10^3 个点, 因而每一层需要计算的状态数目为 10^{3N} 个。由于控制参数被我们限定在两个数范围内取值, 所以对于时隙数目不是很大的情况下, 我们直接进行递归计算会更加有效。我们的算法可以归纳如下:

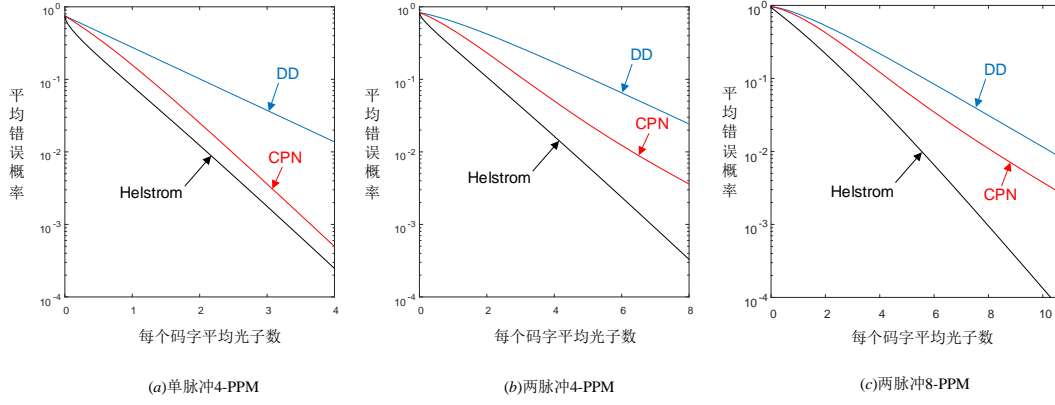


图 4.4 MPPM 信号条件归零接收机性能曲线

1. 设置初始状态向量 $s_0 = [1/M, 1/M, \dots, 1/M]$ 。
2. 对每一个 $\beta_1 \in \{0, -\alpha\}$, 计算 $J_0(s_0, \beta_1)$, 那么最优正确检测概率和第一个时隙的最优控制策略为

$$P_c = \max_{\beta_1 \in \{0, -\alpha\}} J_0(s_0, \beta_1),$$

$$\beta_1^* = \arg \max_{\beta_1 \in \{0, -\alpha\}} J_0(s_0, \beta_1).$$
(4.34)

我们在计算 J_k 的时候, 需要计算它的两个子问题。对给定的 k, s_k, β_{k+1} , J_k 可以通过如下算法进行计算:

1. 如果 $k = M$, 根据4.29 式, 我们直接返回 s_k 中的最大值作为结果。对于其他情况, 我们进入步骤 2。
2. 对当前的状态 s_k 和控制参数 β_{k+1} , 利用条件概率4.21式和4.23式, 代入状态转移方程4.32 中计算出新的状态 $s_{k+1}([\zeta_k, 0])$ 和 $s_{k+1}([\zeta_k, 1])$ 。
3. 然后计算递归两个子问题, 对每一个 β_{k+2} , 分别计算 $J_{k+1}([s_{k+1}, 0], \beta_{k+2})$ 和 $J_{k+1}([s_{k+1}, 1], \beta_{k+2})$, 设他们的最大值分别为 J_{k+1}^0 和 J_{k+1}^1 , 那么返回 $J_{k+1}^0 + J_{k+1}^1$ 作为当前函数的计算结果。同时可以得到下一个时隙的最优控制策略 β_{k+2}^0 和 β_{k+2}^1 , 分别对应 $z_k = 0$ 和 $z_k = 1$ 时的最优控制参数。

利用上述算法, 我们分别对 4 个时隙的单脉冲 PPM、4 个时隙两脉冲 PPM 和 8 个时隙两脉冲 PPM 信号进行数值仿真计算, 仿真结果如图4.4所示。对于单脉冲情况下, 就是 4-PPM 信号, 其中蓝色的线代表直接检测 (DD) 方案, 也就是标准量子极限, 红色的线代表条件归零接收机 (CPN), 黑色的线代表 Helstrom 量子极限, 经过对比发现, 虽然通过动态规划优化出来的策略与 Dolinar 的策略有所差异, 如图4.5所示, 但是其性能与 Dolinar 的 CPN 接收机是相同的, 能够无条件的突破标准量子极限, 即在任意光子数下平均错误概率都比标准量子极限要低。这表明, 最优控制策略并不是唯一的, 而是存在多个最优控制策略。对于两

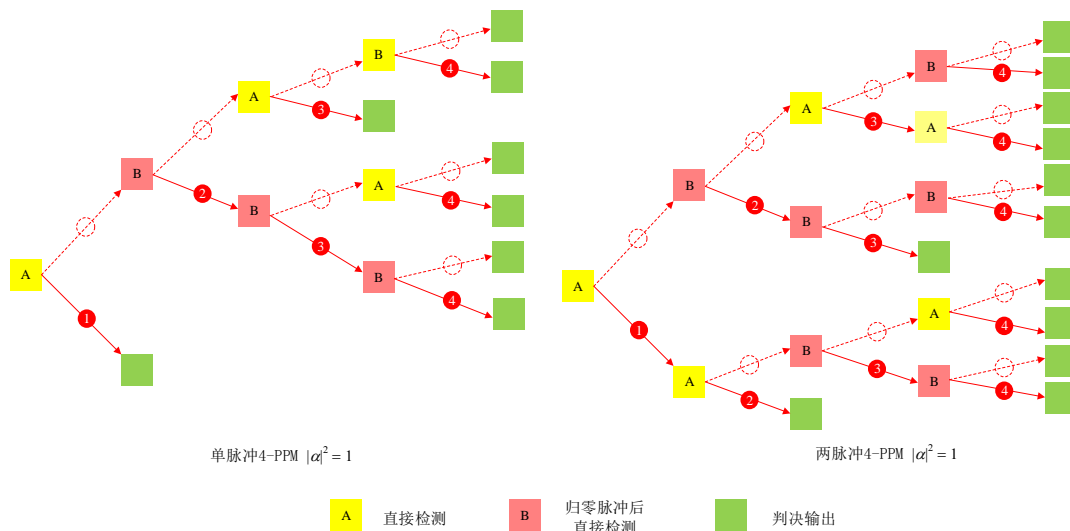


图 4.5 4 个时隙的 MPPM 控制策略决策树

脉冲情况，从图4.4可以看到，不论是 2-4-PPM 还是 2-8-PPM 信号，最优控制策略下的条件归零接收机可以无条件的突破标准量子极限。

4.2 编码后二元调制信号条件归零接收机

在上一小节中，我们讨论了 MPPM 信号，它可以看做一种特殊的二进制编码信号，在这一节里，我们来讨论对任意二进制编码信号，采用最优控制策略的条件归零接收机，能否突破传统检测方案的标准量子极限。

4.2.1 Hamming 码与极化编码

首先我们来讨论两种重要的编码，Hamming 码和极化编码，以这两种编码为例，分析我们这种采用最优控制策略的条件归零接收机的性能。

Hamming 码是一种古老的编码方式，它是一类参数为 $(2^m - 1, 2^m - 1 - m, m)$ 的二进制线性码^[64]。它的生成矩阵为 $G = [I_k | A^T]$ ，其中 I_k 是 $k = 2^m - 1 - m$ 维单位矩阵， A^T 的每一行是一个长度为 m 的非零二进制向量，不能为单位向量且两两独立，这种向量一共有 $2^m - 1 - m$ 个，按照任意一种排列方式组合成矩阵 A^T 。它对应的校验矩阵为 $H = [A | I_m]$ 满足校验方程 $HG^T = 0$ 。一般的，我们称这种码字为 $[2^m - 1, 2^m - 1 - m]$ Hamming 码。例如 $[7, 4]$ Hamming 码的生成

矩阵为

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

利用生成矩阵，我们可以得到所有的码字为

$$c_i = x_i G, i = 0, 1, \dots, 2^m - 1. \quad (4.36)$$

其中 x_i 为数字 i 的 m 位二进制表达。

极化编码是一种利用信道极化特性设计的编码方案^[30,79,80]，采用这种编码方案能够逼近 Holevo 容量^[31]。极化编码也可以看做一种特殊的 Reed-Muller(RM)码，可以通过如下方法生成^[81]。首先生成 n 阶 RM 码的生成矩阵

$$G_{RM}(n, n) = F^{\otimes n}. \quad (4.37)$$

其中

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$F^{\otimes n}$ 表示 n 阶张量积。例如， $G_{RM}(3, 3)$ 为

$$G_{RM}(3, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

极化编码只选取满足特定条件的行构成生成矩阵。首先我们通过如下递归关系计算极化率向量 $z_N = (z_{N,1}, \dots, z_{N,N})$

$$\begin{aligned} z_{1,1} &= 1/2, \\ z_{2k,j} &= \begin{cases} 2z_{k,j} - z_{k,j}^2 & 1 \leq j \leq k, \\ z_{k,j-k}^2 & k+1 \leq j \leq 2k. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.40)$$

接着，我们构造 $(1, \dots, N)$ 的一个排列 $\pi_N = (i_1, \dots, i_N)$ ，使得在此排列下，极化向量 z_N 是递减的。那么，对于任意 $N = 2^n$ ， $1 \leq K \leq N$ ， $[N, K]$ 极化编码

矩阵 $G_P(N, K)$ 是由 $G_{RM}(n, n)$ 中行数在 (i_1, i_2, \dots, i_K) 中的行构成的子阵。例如 $n = 3, K = 5$ 时, 极化向量前 5 个元素对应的下标为 $(8, 4, 6, 7, 2)$, 所以

$$G_P(8, 5) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

4.2.2 编码后二元调制信号标准量子极限

在经典检测方案中, 符号探测与译码是两个独立的过程, 因此对编码后的二元调制信号, 接收机也是通过直接探测每一个时隙进行探测的, 最后采用最大似然译码准则进行译码。对于 OOK 调制, 设符号集合为 $\{|0\rangle, |\alpha\rangle\}$, 这一章 α 都取实数, 在每一个时隙里面, 与 MPPM 一样采用直接探测, 可以用式 4.20 的二元 POVM 测量表示, 其对应的条件概率由式 4.21 给出。而对 BPSK 调制, 设符号集合为 $\{|-\alpha\rangle, |\alpha\rangle\}$, 在每一个时隙里面, 采用的是零差接收方式, 对应于二元 POVM 测量

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_0 &= \int_{-\infty}^0 |x\rangle \langle x| dx, \\ \hat{\Pi}_1 &= \int_0^{\infty} |x\rangle \langle x| dx. \end{aligned} \quad (4.42)$$

而条件概率为

$$\begin{aligned} p_{0|0} &= \int_{-\infty}^0 |\langle x | -\alpha \rangle|^2 dx = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf}(\sqrt{2}\alpha)) \\ p_{1|1} &= \int_0^{\infty} |\langle x | \alpha \rangle|^2 dx = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf}(\sqrt{2}\alpha)) \end{aligned} \quad (4.43)$$

这里用 0 表示符号 $|-\alpha\rangle$, 而用 1 表示符号 $|\alpha\rangle$, 用 $p_{0|0}$ 和 $p_{1|1}$ 分别表示在符号 0 和符号 1 的情况下, 探测正确的概率。在大信号近似下, 利用余误差函数的 Chernoff 界^[53], 可得

$$p_{0|0} = p_{1|1} = 1 - \frac{1}{2}e^{-2\alpha^2}. \quad (4.44)$$

因此对应的平均错误概率为

$$p_e \approx \frac{1}{2}e^{-2\alpha^2}. \quad (4.45)$$

对一般的编码信号, 精确地分析误符号率十分困难, 但是可以采用上一章动态规划的方法, 设置控制参数都为 0, 就可以得到精确的数值结果。为了便于进一步分析, 这里我们采用近似分析, 只考虑在大信号近似的情况下, 即 $|\alpha| \gg 1$

时，接收机的误符号率。我们假设码字的最小 Hamming 距离为 d_{\min} ，那么在一个码字内，发生 $f = \lceil d_{\min}/2 \rceil$ 个比特错误将无法通过译码纠错，它的概率近似为 Ae^{-fn} ，其中 A 为某个常数，参数

$$n = \begin{cases} |\alpha|^2 & \text{OOK,} \\ 2|\alpha|^2 & \text{BPSK.} \end{cases} \quad (4.46)$$

因为发生更多比特错误的概率是它的高阶小量，可以忽略，所以经典的探测方案大信号近似下，平均错误概率 $\sim e^{-\lceil d_{\min}/2 \rceil n}$ ，例如，(7,4)Hamming 码的最小 Hamming 距离为 3，所以它的误符号率 $\sim e^{-2n}$ 。而 (8,5) 极化码最小 Hamming 距离为 2，所以它的误符号率 $\sim e^{-n}$ 。

4.2.3 编码后二元调制信号最优量子检测极限

根据上一节的分析，我们知道对一个码符号集合，只要得到符号集合的 Gram 矩阵，就可以利用最优量子检测的极限可以通过半正定规划的方法得到精确。对于任意编码的二元调制信号，Gram 矩阵都可以写为

$$G_{i,j} = e^{1/2d(c_i,c_j)n}. \quad (4.47)$$

其中 c_i 是第 i 个码字， $d(c_i, c_j)$ 是两个码字的 Hamming 距离，参数 n 如前面的定义。根据 Gram 矩阵，就可以利用 CVX 工具箱^[45,46] 求解问题 2.48 得到最优解了。

为了方便分析，我们也采用大信号近似，根据前面的结论，大信号时的平均错误概率约为 $\frac{D}{2M}e^{-d_{\min}n}$ ，这里 d_{\min} 为码字的最小 Hamming 距离，而 D 为码符号集合中 Hamming 距离等于 d_{\min} 的码字对数。

4.2.4 编码后二元调制信号条件归零接收机

对于编码后的二元调制信号，包括 OOK 调制和 BPSK 调制，我们采用与 MPPM 相似的接收机结构，只是接收策略不同。

与 MPPM 信号类似，编码后的 OOK 信号在每一个时隙里面的测量策略是一样的，都是从直接检测和归零脉冲后再直接检测这两种测量方案中，根据历史输出和优化策略选择一种进行探测。而对于 BPSK 调制，则有所不同。在每一个时隙里面，编码后的 BPSK 调制条件归零接收机在两种 Kennedy 接收机中选择一个进行探测。

如图 4.6 所示，第一种 Kennedy 接收机通过一个位移操作 $\hat{D}(\alpha)$ ，将 BPSK 符号集合变成 OOK 调制 $\{|0\rangle, |2\alpha\rangle\}$ 然后直接探测，它对应于二元 POVM 测量

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_0 &= \hat{D}(\alpha)^\dagger |0\rangle \langle 0| \hat{D}(\alpha), \\ \hat{\Pi}_1 &= \hat{D}(\alpha)^\dagger (\hat{I} - |0\rangle \langle 0|) \hat{D}(\alpha). \end{aligned} \quad (4.48)$$

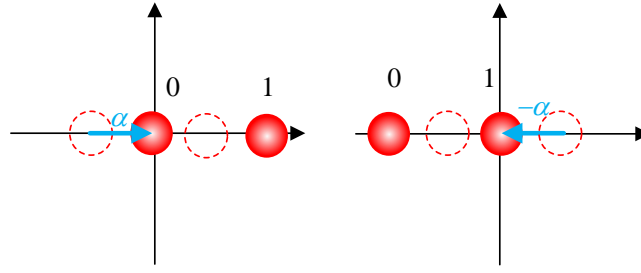


图 4.6 在每个时隙中 BPSK 调制采用的两种 Kennedy 接收方案

在这组 POVM 测量下，探测的条件概率为

$$\begin{aligned} p_{0|0} &= 1, \\ p_{1|1} &= 1 - e^{-4|\alpha|^2}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

这里我们用 $p_{0|0}$ 表示在信号 0 的情况下，输出为 0，即没有光子计数发生，而 $p_{1|1}$ 表示在信号 1 的情况下，输出为 1，即发生了光子计数事件。第二种 Kennedy 接收机通过一个位移操作 $\hat{D}(-\alpha)$ ，将 BPSK 符号集合变成 $\{|-2\alpha\rangle, |0\rangle\}$ 然后直接探测，它对应于二元 POVM 测量

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \hat{D}(-\alpha)^\dagger |0\rangle \langle 0| \hat{D}(-\alpha), \\ \Pi_1 &= \hat{D}(-\alpha)^\dagger (\hat{I} - |0\rangle \langle 0|) \hat{D}(-\alpha). \end{aligned} \quad (4.50)$$

在这组 POVM 测量下，探测的条件概率为

$$\begin{aligned} p_{0|0} &= e^{-4|\alpha|^2}, \\ p_{1|1} &= 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

利用上述结果，我们就可以利用式 4.32 更新状态方程了，进而采用动态规划的方法对控制策略进行优化。我们选择了 (7,4)Hamming 码和 (8,4) 极化码进行数值仿真，仿真结果如图 4.7 所示。可以看到，对于 OOK 调制这两种不同的编码方案，条件归零接收机可以在任意光子数下突破经典检测的极限。当每个符号的平均光子数为 14 时，因为每一个 Hamming 码码字平均有 3.5 个脉冲，因此每个脉冲的平均光子数为 4，此时采用条件归零接收机可以有近 3dB 的收益。对于极化码，当每个符号的平均光子数为 14 时，因为每一个极化码码字平均有 4 个脉冲，因此每个脉冲的平均光子数为 3.5，此时采用条件归零接收机有 7.4dB 的收益。对于 BPSK 调制这两种不同的编码方案，可以看到条件归零接收机在信号较大时才能突破经典检测的极限，而在码字信号平均光子数小于 1 时，这种接收方案反而会比零差接收机要差。但是当光子数增大时，这种接收方案比经典接收方

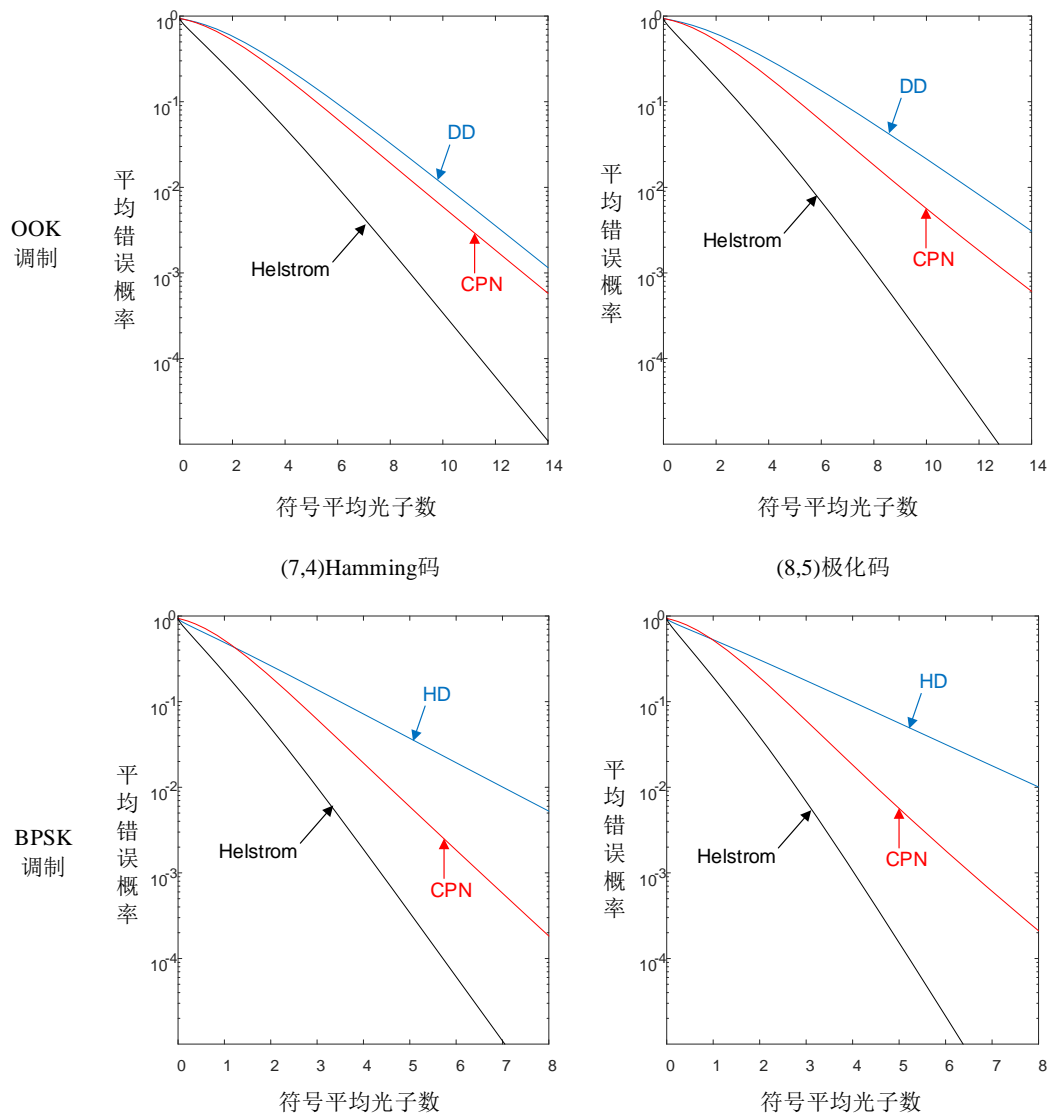


图 4.7 OOK 信号 Hamming 码和极化码的条件归零接收机性能

案的收益随着显著增大。对比 OOK 和 BPSK 两种调制，可以发现要达到相同的误码率，在相同的编码情况下，采用 BPSK 调制的条件归零接收机所需要的能量更低，因而具有更高的能量效率。

4.3 总结

在这一章中，首先我们通过理论分析，得出了这些信号的标准量子极限渐近性能为 $e^{-\lceil d_{\min}/2 \rceil \alpha^2}$ ，而 Helstrom 极限大信号近似为 $e^{-d_{\min} \alpha^2}$ 。接着我们从 MPPM 信号到编码后的二元调制信号，详细阐述了条件归零接收机如何用来接收这一类信号的。经过数值仿真分析，我们通过对二元调制类的编码信号分析，表明采用条件归零接收这种联合检测方案，比传统的单符号独立探测，然后译码的方案，具有更低的误符号率。因而具有很大的潜力被应用到长距离深空通信和更高容量的光通信当中。

在这一章中，虽然我们只对 MPPM、Hamming 码和极化码进行分析，但是通过这些分析，我们有理由相信对一般的二元量子编码，这种条件归零接收机都能突破标准量子极限。

在我们的接收机策略当中，在每个时隙我们限定它们可能的测量方案只有两种，或者说控制参数只能去两个值。事实上，如果我们放开这个约束条件，在每一个时隙控制参数可以取任意复数，甚至在每一个时隙里可以随时间变化，就像 Dolinar 接收机那样，我们相信那会得到更好的性能，但是直接优化或者简单地采用动态规划进行优化，计算复杂度过高，如何通过有效的算法降低计算复杂度是一个非常有价值的问题，有待进一步研究。

第 5 章 量子接收机初步实验研究

前面两章，我们分别研究了单符号的 QAM 信号量子接收机，以及多个符号的编码后二元调制信号量子接收机。通过理论分析和数值仿真分析，我们证明了我们提出的量子接收机能够突破经典检测极限——标准量子极限。然而到目前为止，从实验上对量子接收机进行论证的工作仅停留在有限的几种方案当中，对于更多的方案以及他们的工程实现还有待进一步研究。为了后续的实验研究工作，我们在现阶段进行量子接收机实验平台搭建工作，希望能够完成初步的实验研究。

5.1 实验原理及实验平台搭建

最早对量子接收机进行实验验证的工作要追溯到 2006 年 C. W. Lau 等人开始进行二元调制信号的 Kennedy 接收机实验和 Dolinar 接收机的实验验证^[35]，但是很遗憾受限于实验条件，C. W. Lau 等人设计的 Dolinar 接收机实验没能突破标准量子极限。当时实验装置采用空间光路，位移操作通过一个空间光马赫曾德干涉仪实现，由于对幅度调制的精确控制达不到要求，使得 Dolinar 接收机性能不理想。到 2007 年，R. L. Cook 终于从实验上验证了 Dolinar 接收机能够达到 Helstrom 极限^[15]。从这两个实验及后续的一些实验来看^[19,20,24,25,28,82-85]，实验上目前实现量子接收机的难点在于具有光子数分辨能力的高量子效率低暗计数的单光子探测器和对位移操作的精确实现。对于前者，实验上通过采用死区时间小并且探测效率在 65% 左右的 APD 单光子探测器实现，也有实验采用超导 TES 单光子探测器以达到非常高的量子效率^[85]。而具有光子数分辨能力的探测器能够使得接收机鲁棒性更强已被理论和实验验证^[22-24]。这里我们考虑超导探测器需要很低的温度控制，对实验环境要求太高，所以我们采用大多数研究组都采用的 APD 单光子探测器。我们采购的是 EXCELITAS 公司型号为 SPCM-AQRH-16 单光子探测器，典型的死区时间为 20ns，暗计数只有 25cps，在 633nm 波段探测效率 >65%。对于位移操作，实验上有两种实现方案，一种是利用一个马赫曾德干涉仪，它通过主动的反馈控制将两个臂的光程差进行锁定，以保证足够的位移操作精度^[20,24]；另一种方案是利用偏振复用方式，其中一个偏振当做信号而另一个偏振分量当做本振，最后通过一个偏振器 (PBS) 进行干涉^[82,83]。因为在这种方案中，本振和信号通过相同的光路，所以不存在干涉的两个臂的光程差不稳定的问题，但是这种方案对信道保偏性和调制器的偏振特性要求较高，只适合空间光

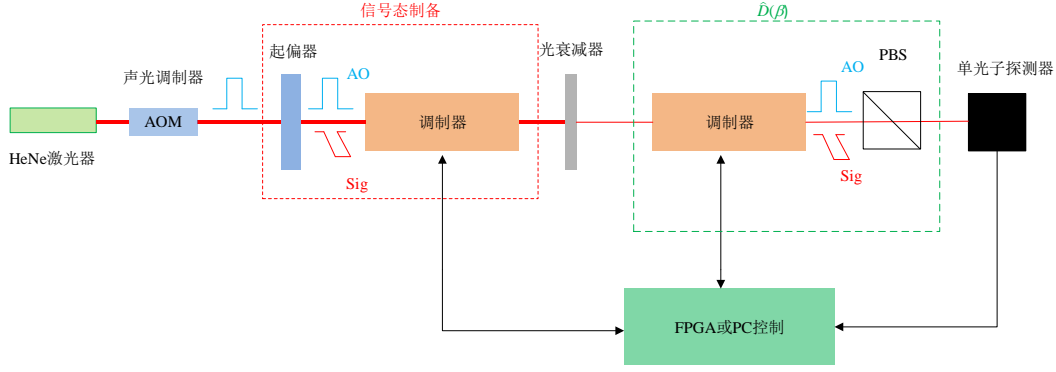


图 5.1 量子接收机实验原理图

路。由于后面一种方案便于在空间光路中实现，所以我们采用后面这种方案实现精密的位移操作。

实验原理图如图5.1所示，HeNe 激光器发出的连续光经过声光调制器 (AOM) 被斩成光脉冲，然后经过 45° 放置的起偏器得到强度相等的水平偏振分量和垂直偏振分量。其中水平偏振分量作为信号态 (Sig)，垂直偏振分量作为辅助场 (AO)，在接收端被用作本振场 (LO)。接着，调制器通过基于非线性晶体的电光调制器，对两个偏振分量进行相移，由于非线性特性导致相移量存在一个差值 $\Delta\phi$ 。对于 BPSK 调制，通过控制调制电压使得 $\Delta\phi$ 取 0 和 π ，对于一般的 PSK 调制只需要控制调制电压就行。最后信号通过光衰减器模拟的有损空间信道，到达接收端，这样就完成了信号态的制备。用琼斯矩阵表示为

$$|\psi_{Sig,AO}\rangle(\Delta\phi) = \begin{bmatrix} e^{j\Delta\phi} \sqrt{n_{Sig}} \\ \sqrt{n_{AO}} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

在接收端接收机通过一个电光调制器和一个偏振器实现位移操作，然后进行光子计数。设调制器导致的相移为 $\Delta\phi' + \pi$ ，PBS 的极化矢量为 $\vec{p} = [\sqrt{T} \quad \sqrt{1-T}]$ ， T 为透过率，那么进入单光子计数器钱的光场为

$$\langle \vec{p} | \psi_{Sig,AO}\rangle(\Delta\phi + \Delta\phi') = \sqrt{T} \sqrt{n_{Sig}} - \sqrt{1-T} \sqrt{n_{AO}} e^{j(\Delta\phi + \Delta\phi')} \quad (5.2)$$

若 PSB 与信号偏振态的夹角 θ 非常小，那么透过率 $T = \cos^2 \theta \approx 1$ ，那么上述相当于完成位移操作

$$\hat{D}(\beta) = \hat{D}(\sqrt{n_{AO}} \sqrt{1-T} e^{j\Delta\phi'}). \quad (5.3)$$

特别的，当 $T = \frac{n_{AO}}{n_{Sig} + n_{AO}}$ 时，到达探测的脉冲中的平均光子数为

$$\bar{n} = \frac{n_{Sig} n_{AO}}{n_{Sig} + n_{AO}} \left| 1 - e^{j\Delta\phi + j\Delta\phi'} \right|^2. \quad (5.4)$$

当且仅当 $\Delta\phi + \Delta\phi'$ 是 2π 的整数倍时，恰好光强为 0，此时位移操作恰好把信号场归零。

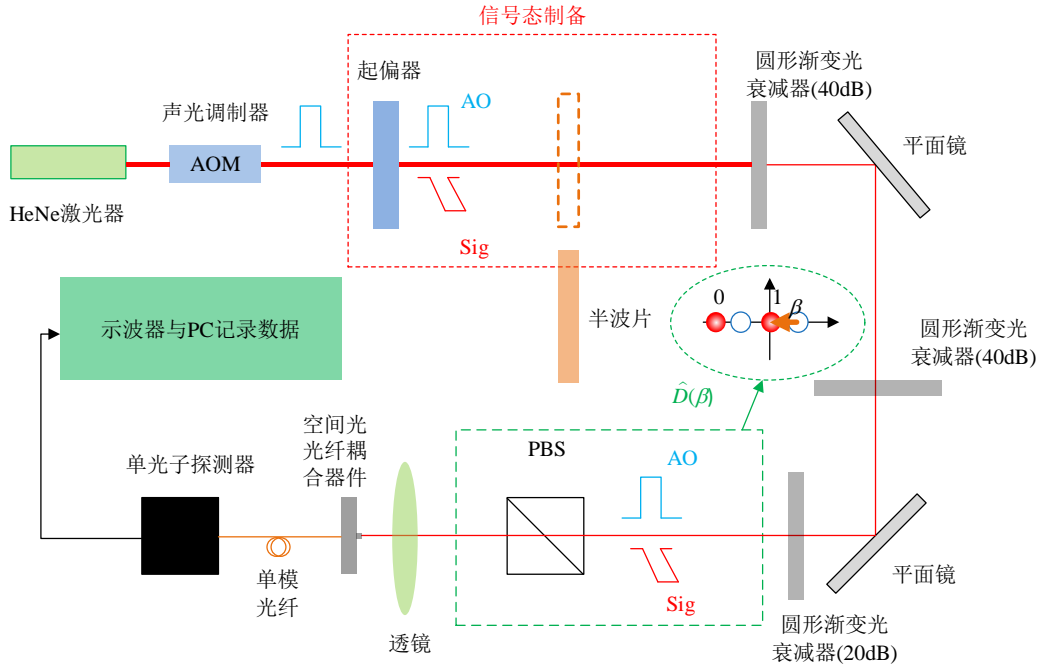


图 5.2 Kennedy 接收机实验光路示意图

5.2 Kennedy 接收机实验验证

作为初步实验研究工作，我们对最简单的 Kennedy 接收机进行实验验证。对于 Kennedy 接收机，我们可以简化实验结构。在接收端由于采用的是恒定的位移场，所以接收端不需要电光调制器。在发送端，由于只需要产生 0 和 π 相位的相移量，所以可以用一个可移动半波片替代调制器。

实验光路示意图如图 5.2 所示，实验照片如图 5.3 所示。线偏振的信号光通过一个半波片进行调制，激光器采用 JSDU 公司生产的型号为 1508P-2 的氦氖激光器，它输出 0.5mW 的 632.8nm 的线偏光，偏振度高达 500:1。如果没有半波片意味着相移为 0，对应于符号 $|\alpha\rangle$ ；如果发送光路插入了半波片意味着相移为 π ，对应于符号 $|\pi-\alpha\rangle$ 。而在接收端，没有加半波片，意味着位移操作为 $\hat{D}(-\alpha)$ 。实验光路取夹角为 45° ，因此系统效率最高为 50%。通过采用一个偏振度高达 1000:1 的偏振分束器，可以使得接收端最大光强与最小光强之比达到 1:0.55%，相当于条纹可见度为 98.9%。三个渐变衰减片组合后，提供最大到 100dB 的衰减量，用以模拟深空光通信中的大损耗空间光路，对应到达接收端的光强水平为每个光脉冲中平均光子数单光子量级。实验中取每个光脉冲宽度为 5us，每次试验对符号 $|\alpha\rangle$ 和 $|\pi-\alpha\rangle$ 各重复 2×10^4 次。在实验过程中，可以通过调节其中一个最大衰减系数为 20dB 的衰减片，得到不同光强下的信号，从而得到不同平均光子数下的平均错误概率。最后进行光强探测的是 Excelitas 公司生产的型号为 SPCM-AQRH16

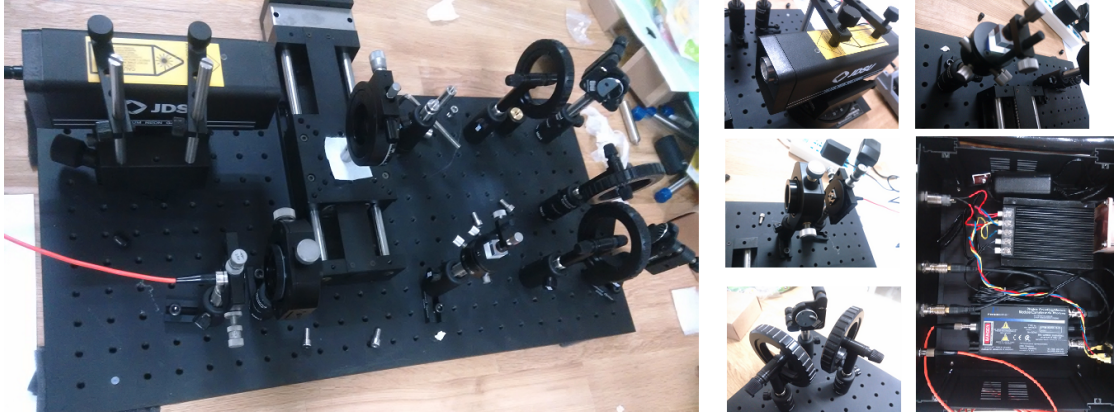


图 5.3 Kennedy 接收机实验照片

的单光子探测器。该探测器在 632.8nm 光波长出的探测效率为 65%。初步实验中该探测效率和耦合损耗的可以计入空间光路损耗。该探测器暗计数标称为 25cps，实验当中由于环境杂散光等原因使得实际噪声光子计数比该数值要大。实测的暗计数为 35.9cps，因此一个光脉冲内的暗计数相当于 1.795×10^{-4} 个。系统由于采用空间光路耦合，因此对环境光干扰很敏感，实验中将接收端用遮光黑色纸盒减少环境光干扰和激光器的散射光干扰，使环境光干扰降低至少 10dB。

考虑到上述非理想环境下的条纹可见度和暗计数的情况下，采用 ON-OFF 探测的 Kennedy 接收机平均错误概率为

$$P_e = \frac{1}{2}(1 - e^{-4\eta|\alpha|^2 - v} + e^{-2\eta(1-\xi)|\alpha|^2 - v}). \quad (5.5)$$

上式中， $\eta = 50\%$ 为系统固有的效率， $\xi = 98.9\%$ 是条纹可见度， $v = 1.795 \times 10^{-4}$ 是暗计数。

在实验过程中，通过改变可变衰减器的衰减量，可以制备不同接收端接收光强下的相干光脉冲。实验结果如图5.4所示，其中实验结果用方块表示出来，实验结果数据见表5.1，理论计算值用蓝色实线标出，可以看到，实验结果与理论值十分吻合。我们还看到，虽然实验中的 Kennedy 接收机没能突破效率为 1 的标准量子极限 (SQL)，但是突破了本系统固有效率为 50% 的标准量子极限，最大的收益达到 1dB。因此，我们从实验上初步验证了在相同系统效率的情况下，我们实验环境下的 Kennedy 接收机能够突破标准量子极限。

5.3 总结

在本章中，我们通过调研目前在实验室中实现的量子接收机实验方案，并设计了自己的量子接收机试验方案。通过对 Kennedy 接收机的实验，我们初步验证了这种实验方案的可行性。这是国内首次从实验上证实量子接收机理论的先驱性工作。在 Kennedy 接收机实验中，我们的方案系统效率只有 50%，在后续的

表 5.1 Kenendy 接收机实验数据

每脉冲平均光子数	平均错误概率
0.011	0.4898
0.020	0.4814
0.022	0.4791
0.043	0.4604
0.055	0.4499
0.097	0.4153
0.129	0.3898
0.170	0.3604
0.247	0.3099
0.272	0.2969
0.316	0.2728
0.389	0.2345
0.476	0.1975
0.571	0.1659
0.651	0.1444
0.658	0.1418
0.678	0.1355
0.721	0.1269
0.734	0.1252
0.960	0.0815
1.066	0.0662
1.353	0.0417
1.569	0.0309
1.615	0.0312

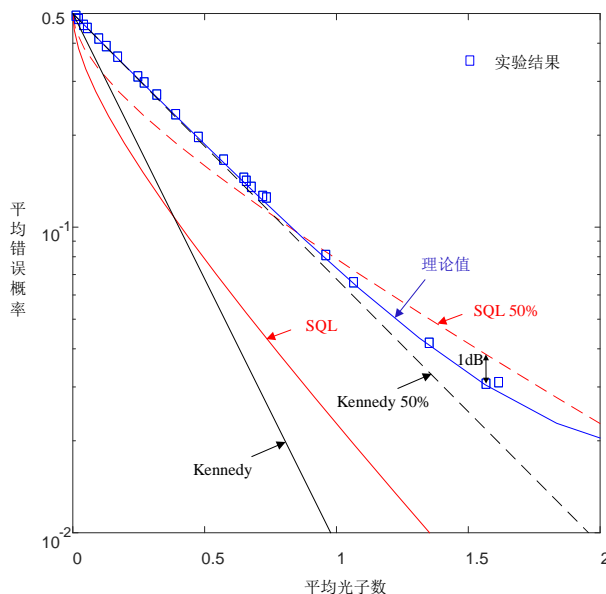


图 5.4 Kennedy 接收机实验结果

实验中，需要提升系统效率。我们利用偏振器实现了 98.9% 的条纹可见度，但是与国外报告的实验方案相比，还是有较大差距。Becerra 团队利用相位稳定干涉仪实现了 99.7% 的条纹可见度^[20]。而事实上，对接收机影响最大的非理想因素就是干涉的条纹可见度^[23]。因此，有必要改进实验方案和器件，进一步提高干涉的条纹可见度。

从工程实现的角度来看，我们的实验方案和国际上现有的实现方案中的本振都与信号同源^[19,20,24,25,28,82-85]。我们实验当中使用的偏振复用的方案便于实现，但是对光通信信道系统的偏振特性要求较高，难以应用到光纤链路当中。而马赫曾德干涉仪的方案在发射端与接收端相距很远的时候难以保证相位稳定，从而无法保证足够的条纹可见度。因此如何实现高精度的光学相位跟踪和幅度跟踪成为工程上实现量子接收机最关键的技术之一。

第6章 总结与展望

6.1 研究成果总结

在本论文研究内容的第一部分中,我们首先通过理论分析,我们得到了 QAM 信号的标准量子极限和 Helstrom 极限的渐近性能分别为 $e^{-\alpha^2}$ 和 $e^{-4\alpha^2}$, 这里 α 为相空间中,符号间最小距离的一半,具体定义见第3章。由此可见如果采用最优量子检测方案,接收机的性能将有指数倍的提升。接着我们对 Bondurant 接收机、自适应分区检测接收机和混合接收机等三类 QAM 信号量子接收机进行理论分析和数值仿真分析我们发现这三类接收机都能突破标准量子极限,且在较大信号时的理论渐近性能分析显示,这三种接收机比经典检测接收机的标准量子极限都有指数倍的收益。相比较而言,自适应分区检测接收机最适合工程实现,因为它只需要有限带宽的反馈控制即可,并且可以采用光子数可分辨的探测器减少分区数目并改善系统的鲁棒性。QAM 调制信号被广泛应用到大容量光通信中,如果进一步采用量子接收机作为接收端,这将有利于进一步提升通信的信道容量,进一步延长通信中继的距离。

在本论文研究工作的第二部分中,我们将目光从单个符号的检测放到多个符号的联合检测上来。我们分析了 OOK 调制和 BPSK 调制下的多个符号联合检测问题,这其中包括 MPPM 信号、编码后的 OOK 调制信号和编码后的 BPSK 调制信号。首先我们通过理论分析,得出了这些信号的标准量子极限渐近性能为 $e^{-[d_{\min}/2]\alpha^2}$, 而 Helstrom 极限大信号近似为 $e^{-d_{\min}\alpha^2}$, 这里 α 为每个脉冲对应的复振幅, d_{\min} 为最小码间距离,详细定义见第4章。接着采用 Schmidt 正交化的方法解决了他们的 Helstrom 极限数值求解问题。最后,我们研究了针对这些调制信号的条件归零接收机的性能。我们通过动态规划算法优化接收机的控制策略,最终将接收机的误码率降低到经典检测方案的标准量子极限以下。这种采用最优控制的条件归零接收机有望被应用到深空光通信中,用来接收 MPPM 信号。这将极大地提高深空光通信的频谱利用率,从而进一步提高通信的信道容量。针对二进制编码信号,这种联合监测方案将进一步降低误符号率,能够进一步提高系统的能量效率。

在本论文研究工作的第三部分中,我们设计了一个量子接收机实验方案,并从实验上初步验证了 Kennedy 接收机的可行性。实验结果表明在我们的实验条件下, Kennedy 接收机可以突破相同系统效率的标准量子极限,最大增益达到 1dB。这为进一步的实验方案设计提供了实验经验的积累。这种接收方案也有望

应用到实际的自由空间深空光通信中,将进一步降低误码率、提升通信系统的信道容量。

总的来说,本论文的创新点可以归纳如下:

1. 得到了 QAM 信号和编码后二进制调制信号的标准量子极限和 Helstrom 极限表达式。
2. 将 Schmidt 正交化应用到求解一般信号的 Helstrom 极限的问题当中,将求解算法复杂度降低。
3. 系统地研究了 QAM 信号三种量子接收机方案及其性能,证实了这三种方案都能突破标准量子极限,并且给出了工程应用的方案建议。
4. 系统地研究了 MPPM 信号和编码后二进制调制信号的条件归零接收机方案及其特性,将动态规划算法应用到接收策略优化当中,证实了使用条件归零接收机能够降低误码率,提升系统效率。

6.2 研究工作展望

在我们的研究过程中,我们虽然解决了一些现有的问题,但是仍然存在一些非常有价值的问题有待进一步研究。对于 QAM 信号,我们可以将控制策略变为时变控制,那么如何设计最佳的控制策略使得接收机的误码率进一步接近 Helstrom 极限。进一步,如何设计接收机对多元调制信号都能达到 Helstrom 极限。对于联合检测方案,时变的最优控制策略仍然有待解决,这种接收方案对极化编码能否逼近 Holevo 容量也是一个有待研究的问题。最后,对于工程实现方面,如何在工程上实现精确的位移操作,在本地实现高精度的光学相位和幅度跟踪是一个极大的挑战。我们相信,未来的研究者在解决这些难题之后,量子接收机应用到实际的光通信系统中将指日可待,那时光通信的信道容量将得到进一步提升,尤其是在能量受限和对能量效率要求很高的深空光通信中。

参考文献

- [1] GLAUBER R J. Coherent and incoherent states of the radiation field[J]. Physical Review, 1963, 131(6): 2766.
- [2] HELSTROM C W. Quantum detection and estimation theory[M]. [S.l.]: Academic press, 1976.
- [3] HELSTROM C W. Detection theory and quantum mechanics[J]. Information and Control, 1967, 10(3): 254–291.
- [4] YUEN H P, LAX M. On optimal quantum receivers for digital signal detection[J]. Proceedings of the IEEE, 1970, 58(10): 1770–1773.
- [5] YUEN H P, KENNEDY R S, LAX M. Optimum testing of multiple hypotheses in quantum detection theory[J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 1975, 21(2): 125–134.
- [6] HAUSLADEN P, JOZSA R, SCHUMACHER B, et al. Classical information capacity of a quantum channel[J]. Physical Review A, 1996, 54(3): 1869.
- [7] GISIN N, THEW R. Quantum communication[J]. Nature photonics, 2007, 1(3): 165–171.
- [8] LADD T D, JELEZKO F, LAFLAMME R, et al. Quantum computers[J]. Nature, 2010, 464(7285): 45–53.
- [9] JINNO M, MIYAMOTO Y, HIBINO Y. Networks: Optical-transport networks in 2015[J]. nature photonics, 2007, 1(3): 157–159.
- [10] TSUKAMOTO S, KATOH K, KIKUCHI K. Unrepeated transmission of 20-Gb/s optical quadrature phase-shift-keying signal over 200-km standard single-mode fiber based on digital processing of homodyne-detected signal for group-velocity dispersion compensation[J]. Photonics Technology Letters, IEEE, 2006, 18(9): 1016–1018.
- [11] HEMMATI H. Deep space optical communications: Vol 11[M]. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006.
- [12] ELDAR Y C, MEGRETSKI A, VERGHESE G C. Designing optimal quantum detectors via semidefinite programming[J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 2003, 49(4): 1007–1012.
- [13] KENNEDY R. A near-optimum receiver for the binary coherent state quantum channel. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge (MA)[R]. [S.l.]: Technical Report January 1973, MIT Research Laboratory of Electronics Quarterly Progress Report 108, .
- [14] DOLINAR S. An optimum receiver for the binary coherent state quantum channel, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge (MA)[R]. [S.l.]: Technical Report, October

- 1973, MIT Research Laboratory of Electronics, Quarterly Progress Report 111, .
- [15] COOK R L, MARTIN P J, GEREMIA J M. Optical coherent state discrimination using a closed-loop quantum measurement[J]. *Nature*, 2007, 446(7137): 774–777.
- [16] BONDURANT R S. Near-quantum optimum receivers for the phase-quadrature coherent-state channel[J]. *Optics letters*, 1993, 18(22): 1896–1898.
- [17] MÜLLER C R, LEUCHS G, MARQUARDT C. QPSK Receiver outperforming the Standard Quantum Limit for any Signal Power[C] // CLEO: QELS_Fundamental Science. 2014: FM3A–6.
- [18] MÜLLER C R, LEVEN A, BULOW H, et al. M-ary phase shift keying receiver beating the standard quantum limit for any signal power[C] // Optical Communication (ECOC), 2014 European Conference on. 2014: 1–3.
- [19] BECERRA F, FAN J, BAUMGARTNER G, et al. M-ary-state phase-shift-keying discrimination below the homodyne limit[J]. *Physical Review A*, 2011, 84(6): 062324.
- [20] BECERRA F, FAN J, BAUMGARTNER G, et al. Experimental demonstration of a receiver beating the standard quantum limit for multiple nonorthogonal state discrimination[J]. *Nature Photonics*, 2013, 7(2): 147–152.
- [21] IZUMI S, TAKEOKA M, FUJIWARA M, et al. Displacement receiver for phase-shift-keyed coherent states[J]. *Physical Review A*, 2012, 86(4): 042328.
- [22] IZUMI S, TAKEOKA M, EMA K, et al. Quantum receivers with squeezing and photon-number-resolving detectors for M-ary coherent state discrimination[J]. *Physical Review A*, 2013, 87(4): 042328.
- [23] LI K, ZUO Y, ZHU B. Suppressing the errors due to mode mismatch for M-ary PSK quantum receivers using photon-number-resolving detector[J]. *IEEE Photonics Technology Letters*, 2013, 25: 2182–2184.
- [24] BECERRA F, FAN J, MIGDALL A. Photon number resolution enables quantum receiver for realistic coherent optical communications[J]. *Nature Photonics*, 2015, 9(1): 48–53.
- [25] MÜLLER C R, USUGA M A, WITTMANN C, et al. Quadrature phase shift keying coherent state discrimination via a hybrid receiver[J]. *New Journal of Physics*, 2012, 14(8): 083009.
- [26] 李科. 空间光通信系统中量子接收机的设计与分析 [D]. [S.l.]: 中国科学技术大学, 2014.
- [27] DOLINAR JR S. A near-optimum receiver structure for the detection of M-ary optical PPM signals[J]. *The Telecommunications and Data Acquisition Progress Report 42-72*, October–December 1982, 1982: 30–42.
- [28] CHEN J, HABIF J L, DUTTON Z, et al. Optical codeword demodulation with error rates below the standard quantum limit using a conditional nulling receiver[J]. *Nature Photonics*, 2012, 6(6): 374–379.

- [29] HOLEVO A S. The capacity of quantum channel with general signal states[J]. arXiv preprint quant-ph/9611023, 1996.
- [30] WILDE M M, GUHA S. Polar codes for classical-quantum channels[J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 2013, 59(2): 1175–1187.
- [31] GUHA S, WILDE M M. Polar coding to achieve the Holevo capacity of a pure-loss optical channel[C] // Information Theory Proceedings (ISIT), 2012 IEEE International Symposium on. 2012: 546–550.
- [32] GIOVANNETTI V, LLOYD S, MACCONE L. Achieving the Holevo bound via sequential measurements[J]. Physical Review A, 2012, 85(1): 012302.
- [33] DALLA POZZA N, LAURENTI N. Adaptive discrimination scheme for quantum pulse-position-modulation signals[J]. Physical Review A, 2014, 89(1): 012339.
- [34] GUHA S, HABIF J L, TAKEOKA M. Approaching Helstrom limits to optical pulse-position demodulation using single photon detection and optical feedback[J]. Journal of Modern Optics, 2011, 58(3-4): 257–265.
- [35] LAU C-W, VILNROTTER V A, DOLINAR S, et al. Binary quantum receiver concept demonstration[C] // Lasers and Applications in Science and Engineering. 2006: 61050J–61050J.
- [36] DJORDJEVIC I, RYAN W, VASIC B. Fundamentals of Optical Communication[G] // Coding for Optical Channels. [S.l.]: Springer, 2010: 25–73.
- [37] GERRY C, KNIGHT P. Introductory quantum optics[M]. [S.l.]: Cambridge university press, 2005.
- [38] MANDEL L, WOLF E. Optical coherence and quantum optics[M]. [S.l.]: Cambridge university press, 1995.
- [39] 瓦尔特, 顾莱纳, 汪厚基, et al. 量子力学导论 [M]. [S.l.]: 北京: 北京大学出版社, 2001.
- [40] PARIS M G. Displacement operator by beam splitter[J]. Physics Letters A, 1996, 217(2): 78–80.
- [41] GAGLIARDI R M, KARP S. Optical communications[J]. New York, Wiley-Interscience, 1976. 445 p., 1976, 1.
- [42] GAGLIARDI R M, KARP S. 光通信技术与应用 [M]. [S.l.]: 北京: 电子工业出版社, 1998.
- [43] YUEN H P, SHAPIRO J H. Optical communication with two-photon coherent states–Part III: Quantum measurements realizable with photoemissive detectors[J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 1980, 26(1): 78–92.
- [44] 沈凤麟, 叶中付, 钱玉美. 统计信号分析与处理 [M]. [S.l.]: 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2002.
- [45] GRANT M, BOYD S. CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1[EB/OL]. 2014.

- <http://cvxr.com/cvx>.
- [46] GRANT M, BOYD S. Graph implementations for nonsmooth convex programs[G] // BLONDEL V, BOYD S, KIMURA H. Lecture Notes in Control and Information Sciences : Recent Advances in Learning and Control. [S.l.] : Springer-Verlag Limited, 2008 : 95 – 110.
 - [47] HAUSLADEN P, WOOTTERS W K. A ‘pretty good’ measurement for distinguishing quantum states[J]. Journal of Modern Optics, 1994, 41(12) : 2385 – 2390.
 - [48] KATO K, OSAKI M, SASAKI M, et al. Quantum detection and mutual information for QAM and PSK signals[J]. Communications, IEEE Transactions on, 1999, 47(2) : 248 – 254.
 - [49] ELDAR Y C, FORNEY JR G D. On quantum detection and the square-root measurement[J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 2001, 47(3) : 858 – 872.
 - [50] CARIOLARO G, PIEROBON G. Performance of quantum data transmission systems in the presence of thermal noise[J]. Communications, IEEE Transactions on, 2010, 58(2) : 623 – 630.
 - [51] CARIOLARO G, PIEROBON G. Theory of quantum pulse position modulation and related numerical problems[J]. Communications, IEEE Transactions on, 2010, 58(4) : 1213 – 1222.
 - [52] SASAKI M, KATO K, IZUTSU M, et al. Quantum channels showing superadditivity in classical capacity[J]. Physical Review A, 1998, 58(1) : 146.
 - [53] CHANG S-H, COSMAN P C, MILSTEIN L B. Chernoff-type bounds for the Gaussian error function[J]. Communications, IEEE Transactions on, 2011, 59(11) : 2939 – 2944.
 - [54] TAKEOKA M, SASAKI M. Discrimination of the binary coherent signal: Gaussian-operation limit and simple non-Gaussian near-optimal receivers[J]. Physical Review A, 2008, 78(2) : 022320.
 - [55] GEREMIA J. Distinguishing between optical coherent states with imperfect detection[J]. Physical Review A, 2004, 70(6) : 062303.
 - [56] VILNROTTER V A. Quantum receiver for distinguishing between binary coherent-state signals with partitioned-interval detection and constant-intensity local lasers[J]. NASA IPN Progress Report, 2012, 42 : 189.
 - [57] LI K, ZHU B. Optimal partitioned-interval detection binary quantum receiver with practical devices[C] // 2013 IEEE Photonics Society Summer Topical Meeting Series. .
 - [58] SYCH D, LEUCHS G. Optimal receiver for binary coherent signals[J]. arXiv preprint arXiv:1404.5033, 2014.
 - [59] 张贤达. 矩阵分析与应用 [M]. [S.l.] : 清华大学出版社有限公司, 2004.
 - [60] da SILVA M P, GUHA S, DUTTON Z. Achieving minimum-error discrimination of an arbitrary set of laser-light pulses[J]. Physical Review A, 2013, 87(5) : 052320.
 - [61] NAIR R, GUHA S, TAN S-H. Realizable receivers for discriminating coherent and multicopy quantum states near the quantum limit[J]. Physical Review A, 2014, 89(3) : 032318.

- [62] BLUME-KOHOUT R, CROKE S, ZWOLAK M. Ideal state discrimination with an $O(1)$ -qubit quantum computer[J]. arXiv preprint arXiv:1201.6625, 2012.
- [63] BECERRA F, FAN J, MIGDALL A. Implementation of generalized quantum measurements for unambiguous discrimination of multiple non-orthogonal coherent states[J]. Nature communications, 2013, 4.
- [64] 姜丹. 信息论与编码 [M]. [S.l.]: 中国科学技术大学出版社, 2001.
- [65] NIELSEN M A, 尼尔森, 庄, et al. 量子计算和量子信息 [M]. [S.l.]: 清华大学出版社, 2005.
- [66] NIELSEN M A, CHUANG I L. Quantum computation and quantum information[M]. [S.l.]: Cambridge university press, 2010.
- [67] HOLEVO A S. Bounds for the quantity of information transmitted by a quantum communication channel[J]. Problemy Peredachi Informatsii, 1973, 9(3): 3–11.
- [68] YUEN H P, OZAWA M. Ultimate information carrying limit of quantum systems[J]. Physical review letters, 1993, 70(4): 363.
- [69] GUHA S. Structured optical receivers to attain superadditive capacity and the Holevo limit[J]. Physical review letters, 2011, 106(24): 240502.
- [70] TAKEOKA M, KROVI H, GUHA S. Achieving the Holevo capacity of a pure state classical-quantum channel via unambiguous state discrimination[C] // Information Theory Proceedings (ISIT), 2013 IEEE International Symposium on. 2013: 166–170.
- [71] WINZER P J. High-spectral-efficiency optical modulation formats[J]. Lightwave Technology, Journal of, 2012, 30(24): 3824–3835.
- [72] 宏生, 奚. 随机过程引论 [M]. [S.l.]: 中国科学技术大学出版社, 2009.
- [73] OWEN A B. Monte Carlo theory, methods and examples[M]. 2013.
- [74] SUGIYAMA H, NOSU K. MPPM: a method for improving the band-utilization efficiency in optical PPM[J]. Lightwave Technology, Journal of, 1989, 7(3): 465–472.
- [75] WASEDA A, SASAKI M, TAKEOKA M, et al. Numerical evaluation of PPM for deep-space links[J]. Journal of Optical Communications and Networking, 2011, 3(6): 514–521.
- [76] SIMON M, VILNROTTER V. Multi-pulse pulse-position modulation signaling for optical communication with direct detection[J]. IPN Progress Report, 2003, 42: 155.
- [77] 李炯生, 查建国, 王新茂. 线性代数 [M]. [S.l.]: 中国科学技术大学出版社, 2010.
- [78] 张韵华, 奚梅成, 陈效群. 数值计算方法与算法 [M]. [S.l.]: 科学出版社, 2007.
- [79] ARIKAN E. Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels[J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 2009, 55(7): 3051–3073.
- [80] KORADA S B. Polar codes for channel and source coding[D]. [S.l.]: Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2009.

- [81] ARIKAN E, OTHERS. A performance comparison of polar codes and Reed-Muller codes[J]. IEEE Commun. Lett, 2008, 12(6): 447–449.
- [82] WITTMANN C, TAKEOKA M, CASSEMIRO K N, et al. Demonstration of near-optimal discrimination of optical coherent states[J]. Physical review letters, 2008, 101(21): 210501.
- [83] WITTMANN C, ANDERSEN U L, TAKEOKA M, et al. Demonstration of coherent-state discrimination using a displacement-controlled photon-number-resolving detector[J]. Physical review letters, 2010, 104(10): 100505.
- [84] TSUJINO K, FUKUDA D, FUJII G, et al. Sub-shot-noise-limit discrimination of on-off keyed coherent signals via a quantum receiver with a superconducting transition edge sensor[J]. Optics express, 2010, 18(8): 8107–8114.
- [85] TSUJINO K, FUKUDA D, FUJII G, et al. Quantum receiver beyond the standard quantum limit of coherent optical communication[J]. Physical review letters, 2011, 106(25): 250503.

致 谢

光阴似箭，我的七年学习生涯转眼间就快结束了。遥想当年刚进入科大时的意气风发，对未来的学习生活充满憧憬。在这毕业之际，一时感慨万千。首先，我要衷心感谢我的导师朱冰教授。自从本科进入实验室开始，在这将近4年的时间里，朱冰老师对我学习上和科研上给予了悉心的指导，帮助我从科研的大门口开始了真正意义上的研究工作。朱老师治学严谨、科研经验丰富，善于发掘本质问题，常常一针见血指出科研中的问题。本论文的完成，从选题到研究工作的完成过程，都离不开朱老师的细心指导。

感谢实验室杨利老师，她学术造诣深厚，为人亲切，在研究生期间给予我亲切的鼓励。感谢实验室苏觉老师，他对我的鼓励让我感受到实验室的人情味。

感谢实验室已毕业的李科师兄，在大四、研一和研二期间，亲自带领我从量子接收机的入门课题开始，到后续的深入研究。在整个过程中，李科师兄总是不厌其烦地解答我研究中的问题。即使在毕业之后，也不断的督促我和指导我的研究工作。另外，我也要感谢已毕业的王晓飞师兄、许华醒师兄，在实验室的时候给我的指导和帮助。

感谢研究生师兄陈林勋、朱圣强，与在实验室与他们一起科研和生活的日子让我记忆深刻。他们对学习的认真深刻地影响着我，在找工作期间也作为过来人给予我细心的指导。

感谢博士师姐陈田，她科研的认真和永不放弃的毅力给我留下深刻的印象。在科研和论文完成期间也和她多番讨论，这些讨论给与我灵感和帮助。感谢惠军和仇楠师弟，在实验室期间一直给与我实验上的帮助。

感谢实验室的师弟师妹们，与他们在一起的研究生生活，让我感受到实验室的温馨。

感谢远在纽约的大学同学王洋，在我完成会议论文期间，给予我英语上的帮助，感谢和我一起度过这七年时间的所有同学，和他们一起学习，度过这七年的校园生活，让我倍感温馨。

感谢我的父母，没有他们的支持，我是不可能顺利完成学业的，感谢我的女友对我学习的支持和鼓励。

感谢在学习期间所有帮助过和关心过我的父母、师长、同学和朋友，在美好的校园生活即将结束之际，谨以此文献给我逝去的青春，献给关心过我的你们！

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

已发表论文

1. **Yuan Zuo**, Tian Chen, Bing Zhu, "Conditional Pulse Nulling Receiver for Multi-pulse PPM and Binary Quantum Coding Signals", (ICWOC 2016, Beijing)
2. **Yuan Zuo**, Ke Li, Bing Zhu, "16-QAM Quantum Receiver with Hybrid Structure Outperforming the Standard Quantum Limit", (APOP 2016, Shanghai)
3. Li K, **Zuo Y**, Zhu B. Suppressing the errors due to mode mismatch for M-ary PSK quantum receivers using photon-number-resolving detector[J]. IEEE Photonics Technology Letters, 2013, 25: 2182-2184.