Lineaire algebra

matrices manipuleren

Een matrix blok is een getallenschema. Het bestaat uit rijen en kolommen. Een vector is een matrix, met één kolom en meerdere rijen. Een vector wordt gebruikt om een grootte en richting aan te geven. Het wordt onder andere gebruikt bij snelheid en kracht.

Matrix optellen:
Op basis van positie wordt elk getal opgeteld.

$$\text{Matrix } A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{Matrix } B = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 8+9 & 5+7 \\ 3+7 & 2+8 \\ 2+5 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 10 & 10 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrix aftrekken:
Ook op basis van positie wordt er afgetrokken.

$$\text{Matrix } A = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 7 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{Matrix } B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 7 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 8-4 & 8-3 \\ 7-1 & 4-1 \\ 4-4 & 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hadamardproduct:
Bij het vermenigvuldigen van het hadamardproduct worden de rijen vermenigvuldigd met elkaar. Ook op basis van positie.

$$\text{Matrix } A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 9 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{Matrix } B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 9 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \cdot 8 & 7 \cdot 2 \\ 7 \cdot 9 & 9 \cdot 3 \\ 5 \cdot 5 & 5 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 14 \\ 63 & 27 \\ 25 & 35 \end{pmatrix}$$

Matrix vermenigvuldiging:
Bij het matrix vermenigvuldiging vermenigvuldig je stapsgewijs een rij met een kolom. Hiervoor geldt dat het aantal kolommen van de eerste matrix gelijk is aan het aantal rijen van het tweede. Zo wordt het inproduct berekend. Een matrix en vector kan ook met elkaar vermenigvuldigd worden, zolang deze regel van toepassing is.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 + 9 \cdot 1 & 4 \cdot 2 + 9 \cdot 4 \\ 6 \cdot 5 + 8 \cdot 1 & 6 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 29 & 44 \\ 38 & 44 \\ 19 & 22 \end{pmatrix}$$

Matrix-scalar vermenigvuldiging:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 9 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad B = 7$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 \cdot 7 & 5 \cdot 7 \\ 6 \cdot 7 & 9 \cdot 7 \\ 9 \cdot 7 & 10 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 35 \\ 42 & 63 \\ 63 & 70 \end{pmatrix}$$

Vector optellen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad A + B$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Vector aftrekken:

$A = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \end{pmatrix} \quad A - B$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Vector vermenigvuldigen:

$A = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Vector delen:

$A = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A / B$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vector-scalar vermenigvuldiging:

$A = 2 \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Determinant

De determinant betekent letterlijk de bepalende factor. Het geeft de oppervlakte en volume van een matrix.

Determinant:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(5 \cdot 6) - (2 \cdot 2) = 30 - 4 = 26$$
$$(1 \cdot 6) - (3 \cdot 2) = 6 - 6 = 0$$
$$(1 \cdot 2) - (3 \cdot 5) = 2 - 15 = -13$$

$$(26 \cdot 1 \cdot 1) + (0 \cdot 2 \cdot -1) + (-13 \cdot 0 \cdot 1)$$
$$26 + 0 + 0 = 26$$

Getransponeerde matrix

De getransponeerde matrix moet berekend worden om de inverse matrix te krijgen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Vectoren inproduct

Het inproduct van 2 vectoren zegt iets over de hoek die de vectoren met elkaar te maken hebben.

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 12 + 6 = 18$$

Inverse matrix

Bij de inverse matrix geldt daarbij dat de aangegeven matrix vermenigvuldigd wordt met de inverse matrix ervan dat er 1 komt.

De inverse matrix bepaal je door de volgende stappen:

1. De determinant bepalen
2. De getransponeerde matrix bepalen
3. Van de A^T de determinant van alle 2x2 matrices bepalen
4. De adjunct matrix bepalen
5. Het resultaat van de adjunct matrix delen door de determinant
6. Controleer door $AxA^{-1} = 1$

De determinant en de getransponeerde matrix heb ik al eerder bepaald.

De determinant van alle 2x2 matrices:

$$\begin{array}{lll} 5\cdot 6 - 2\cdot 2 & 2\cdot 6 - 2\cdot 0 & 2\cdot 2 - 5\cdot 0 \\ 1\cdot 6 - 2\cdot 3 & 1\cdot 6 - 3\cdot 2 & 1\cdot 2 - 1\cdot 0 \\ 1\cdot 2 - 5\cdot 3 & 1\cdot 2 - 3\cdot 2 & 1\cdot 5 - 2\cdot 1 \end{array}$$

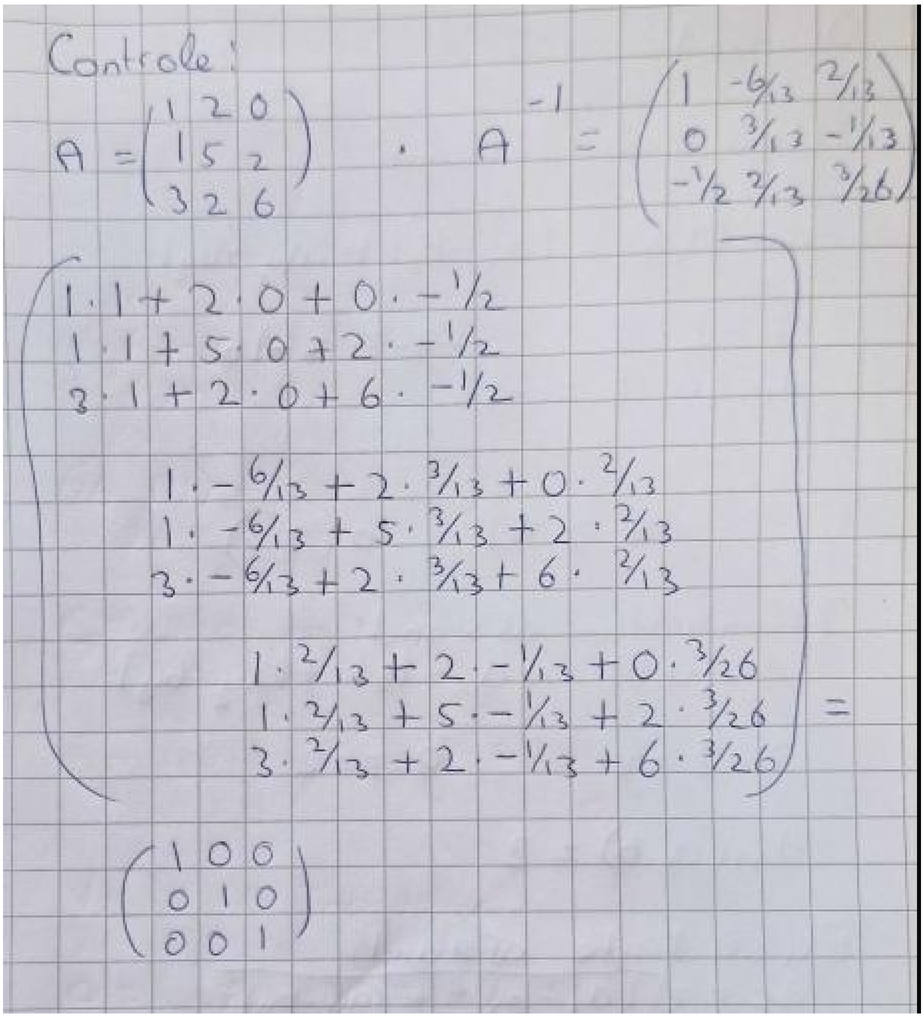
$$\begin{pmatrix} 26 & 12 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -13 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

De adjunct matrix:

$$\begin{pmatrix} 26 & -12 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \\ -13 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Het resultaat delen door de determinant:

$$\begin{pmatrix} 26 & -12 & 4 \\ 6 & 6 & -2 \\ -13 & 4 & 3 \end{pmatrix} / 26 = \begin{pmatrix} 1 & -6/13 & 2/13 \\ 0 & 3/13 & -1/13 \\ -1/2 & 2/13 & 3/26 \end{pmatrix}$$



Controle:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -6/13 & 2/13 \\ 0 & 3/13 & -1/13 \\ -1/2 & 2/13 & 3/26 \end{pmatrix}$$

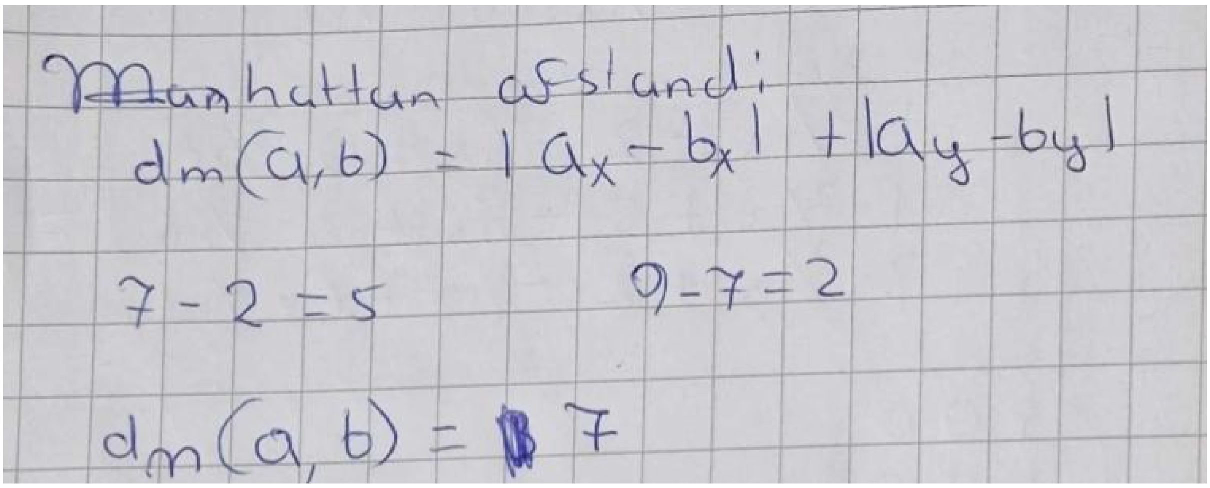
$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 0\cdot -1/2 \\ 1\cdot 1 + 5\cdot 0 + 2\cdot -1/2 \\ 3\cdot 1 + 2\cdot 0 + 6\cdot -1/2 \\ 1\cdot -6/13 + 2\cdot 3/13 + 0\cdot 2/13 \\ 1\cdot -6/13 + 5\cdot 3/13 + 2\cdot 2/13 \\ 3\cdot -6/13 + 2\cdot 3/13 + 6\cdot 2/13 \\ 1\cdot 2/13 + 2\cdot -1/13 + 0\cdot 3/26 \\ 1\cdot 2/13 + 5\cdot -1/13 + 2\cdot 3/26 \\ 3\cdot 2/13 + 2\cdot -1/13 + 6\cdot 3/26 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Afstand

Manhattan afstand:

Met de manhattan afstand meet je de absolute afstand tussen 2 punten.



Manhattan afstand:

$$d_m(a,b) = |a_x - b_x| + |a_y - b_y|$$

$7 - 2 = 5$ $\quad$ $9 - 7 = 2$

$$d_m(a,b) = 7$$

Euclidische afstand:

Met de euclidische afstand meet je de directe/kortste afstand tussen 2 punten.

Euclidische afstand:

$$d_E = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}$$

$(7-2)^2 = 25$ $\quad$ $(9-7)^2 = 4$

$$d_E(a,b) = \sqrt{25+4} = \sqrt{29} = 5,39$$