

Phương Pháp Đếm Chữ Số Trong Hệ Đếm Cơ Số Bất Kỳ (Dành Cho Thi Cử Không Dùng Máy Tính)

Hướng dẫn giải chi tiết

1 Vấn đề và Thách thức

Các bài toán thường gặp có dạng: "Có bao nhiêu chữ số d xuất hiện trong biểu diễn cơ số b của các số thập phân từ X đến Y?"

Khó khăn:

- Nếu khoảng $(Y - X)$ nhỏ (ví dụ 10 số): Có thể liệt kê và đếm.
- Nếu khoảng $(Y - X)$ lớn (ví dụ 20-50 số trở lên): Việc đổi từng số sang cơ số mới rất tốn thời gian và dễ sai sót.

2 Chiến thuật "Kép khoảng & Xét hàng"(Mẹo đi thi)

Thay vì đổi tất cả các số thập phân sang cơ số mới, hãy làm theo quy trình 3 bước sau:

1. **Bước 1 (Chốt biên):** Chỉ đổi 2 số mốc (đầu và cuối) sang cơ số mục tiêu để xác định khoảng trong hệ mới.
2. **Bước 2 (Xét cấu trúc):** Nhìn vào sự thay đổi của các hàng (hàng đơn vị, hàng chục/bát/thập lục...).
3. **Bước 3 (Đếm theo mẫu):** Áp dụng quy tắc lặp của các con số.

3 Ví dụ 1: Khoảng nhỏ - Đếm Nhị phân

Đề bài: Có bao nhiêu chữ số 1 trong biểu diễn nhị phân của các số thập phân từ 22 đến 32 (tính cả hai đầu mút)?

Bước 1: Chốt biên

- Đầu: $22_{10} = 16 + 4 + 2 = 10110_2$
- Cuối: $32_{10} = 32 = 100000_2$

Khoảng cần xét: $10110_2 \rightarrow 100000_2$.

Bước 2: Phân tích nhanh (Phương pháp liệt kê thông minh)

Vì khoảng này ngắn (khoảng 11 số), ta có thể viết nhanh dựa trên quy luật tăng dần của nhị phân (cộng 1 vào đuôi):

Đáp án: Có tổng cộng 36 chữ số 1.

Thập phân	Nhi phân	Số lượng số 1
22	10110	3
23	10111 (đuôi 0 thành 1)	4
24	11000 (nhớ 1 liên tiếp)	2
25	11001	3
26	11010	3
27	11011	4
28	11100	3
29	11101	4
30	11110	4
31	11111 (toute số 1)	5
32	100000 (qua ngưỡng mũ 5)	1
TỔNG		36

4 Ví dụ 2: Khoảng rộng - Đếm Bát phân (Octal)

Đề bài: Có bao nhiêu chữ số 6 trong biểu diễn bát phân của các số thập phân từ 675 đến 700?

Dây là dạng bài cần dùng mèo vì khoảng rộng (26 số), việc đổi từng số rất lâu.

Bước 1: Chốt biên sang hệ 8

- 675_{10} : $675 \div 8 = 84$ dư 3 $\rightarrow 84 \div 8 = 10$ dư 4 $\rightarrow 10 \div 8 = 1$ dư 2. $\Rightarrow 1243_8$
- 700_{10} : Ta biết $700 = 675 + 25$.
 $25_{10} = 31_8$.
 $1243_8 + 31_8 = 1274_8$ (Cộng trong hệ 8: $3 + 1 = 4$, $4 + 3 = 7$).
 $\Rightarrow 1274_8$

Khoảng cần xét trong hệ bát phân: Từ 1243_8 đến 1274_8 .

Bước 2: Phân tích cấu trúc (Mẹo tách hàng)

Dãy số chạy: 1243, 1244, ..., 1274.

Ta thấy 2 chữ số đầu "12" cố định. Ta chỉ quan tâm 2 chữ số cuối chạy từ **43** đến **74**.

Cần tìm số lượng chữ số **6**.

Cách đếm nhanh: Tách thành Hàng chục (vị trí thứ 2 từ phải sang) và Hàng đơn vị (vị trí cuối).

A. Xét Hàng chục (Vị trí 8^1)

Trong khoảng $43 \rightarrow 74$ (hệ 8), hàng chục sẽ chạy qua các đầu số: 4, 5, 6, 7.

- Đầu 4 (43...47): Không có số 6.
- Đầu 5 (50...57): Không có số 6.
- **Đầu 6 (60...67):** Có số 6.
 - Từ 1260_8 đến 1267_8 .
 - Số lượng số: $7 - 0 + 1 = 8$ số.
 - Vậy có **8 chữ số 6** nằm ở hàng chục.
- Đầu 7 (70...74): Không có số 6.

B. Xét Hàng đơn vị (Vị trí 8^0)

Chữ số 6 ở hàng đơn vị xuất hiện mỗi khi hàng đơn vị đếm đến 6. Ta xét từng dải của hàng chục:

- Dải 4 (43...47): Có chứa đuôi 6 không? **Có** (1246). $\rightarrow 1$ số.
- Dải 5 (50...57): Có chứa đuôi 6 không? **Có** (1256). $\rightarrow 1$ số.

- Dải 6 (60...67): Có chứa đuôi 6 không? **Có** (1266). \rightarrow 1 số.
- Dải 7 (70...74): Có chứa đuôi 6 không? **Không** (chỉ chạy đến 4). \rightarrow 0 số.

Tổng số chữ số 6 ở hàng đơn vị = $1 + 1 + 1 = 3$.

Bước 3: Tổng hợp

- Số chữ số 6 ở hàng chục: 8
- Số chữ số 6 ở hàng đơn vị: 3
- **Tổng cộng:** $8 + 3 = 11$ **chữ số 6**.

5 Tổng kết Mẹo cho học sinh

1. **Đừng đổi hết:** Luôn đổi số đầu và số cuối sang hệ cơ số để bài yêu cầu trước.
2. **Cộng trong hệ cơ số:** Nếu biết số đầu là A và cần đếm thêm n đơn vị, hãy thực hiện phép cộng $A + n$ ngay trong hệ cơ số đó để tìm số cuối nhanh hơn.
3. **Chia để trị:** Nếu khoảng rộng, hãy đếm số lần xuất hiện ở hàng đơn vị riêng, hàng chục riêng, rồi cộng lại.
4. **Lưu ý số lặp:** Đừng quên các số như 1266 (chứa hai số 6). Phương pháp tách hàng ở trên (đếm hàng chục riêng, hàng đơn vị riêng) sẽ tự động xử lý đúng trường hợp này mà không bị sót hay trùng.