

ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA CƠ KHÍ – BỘ MÔN CƠ ĐIỆN TỬ



**BÀI TẬP LỚN MÔN HỌC
KỸ THUẬT ROBOT**

**THIẾT KẾ, TÍNH TOÁN VÀ MÔ
PHỎNG ROBOT BA BẬC TỰ DO
BẰNG SOLIDWORK VÀ MATLAB**

SVTH: Trần Đặng Trung Đức – 1510815

Trần Công Vinh – 1614132

Nguyễn Mạnh Thiện – 1613321

Lâm Phùng Phước Vinh – 1652704

GVHD: TS. Phạm Công Bằng

TP.HCM, 01/ 2021

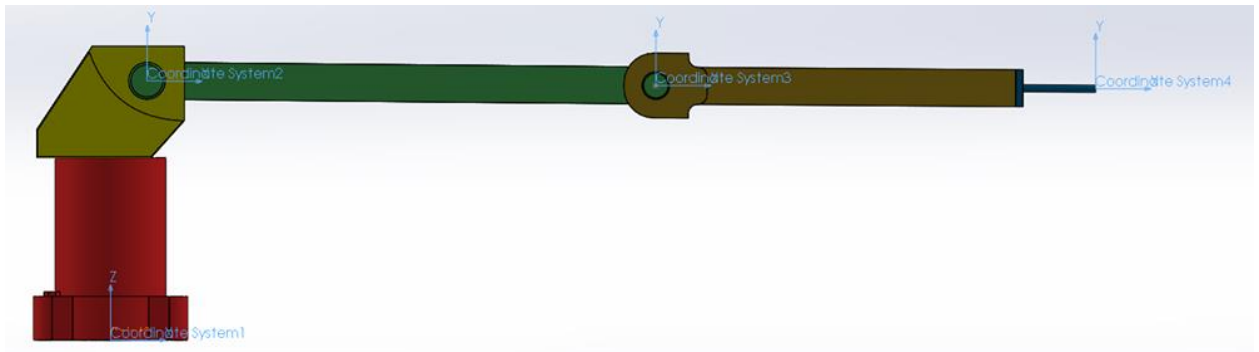
Mục lục

1. 1. Tính toán động học robot	2
1.1. Tính toán động học thuận, động học nghịch của robot	3
1.1.1. Xác định hệ tọa độ các khâu	3
1.1.2. Động học thuận	4
1.1.3. Động học nghịch	6
1.2. Điều kiện có nghiệm của bài toán động học nghịch và vùng không gian làm việc của robot	10
1.3. Mô phỏng	12
2. Tính toán động lực học robot	13
2.1. Ma trận jacobí, điểm kỳ dị và không gian làm việc của robot	14
2.1.1. Tìm vận tốc và ma trận jacobí	14
2.1.2. Tìm điểm kỳ dị	14
2.2. Phương trình chuyển động sử dụng Newton-Euler và Lagrange	17
2.2.1. Phương pháp Newton-Euler	17
2.2.2. Phương pháp Lagrange	22
2.3. Mô phỏng	26
2.3.1. Kiểm tra công thức tính torque	26
2.3.2. Hoạch định robot vẽ đường thẳng	27
3. Mô phỏng điều khiển matlab	30
3.1. Lý thuyết điều khiển hệ phi tuyến MIMO	31
3.1.1. Lý thuyết.....	31
3.1.2 Sơ đồ khối điều khiển hệ thống.....	31
3.2 Mô phỏng điều khiển	32
3.2.1 Mô phỏng điều khiển từ điểm tới điểm	32
3.2.2 Mô phỏng điều khiển từ hoạch điểm theo đường thẳng.....	38

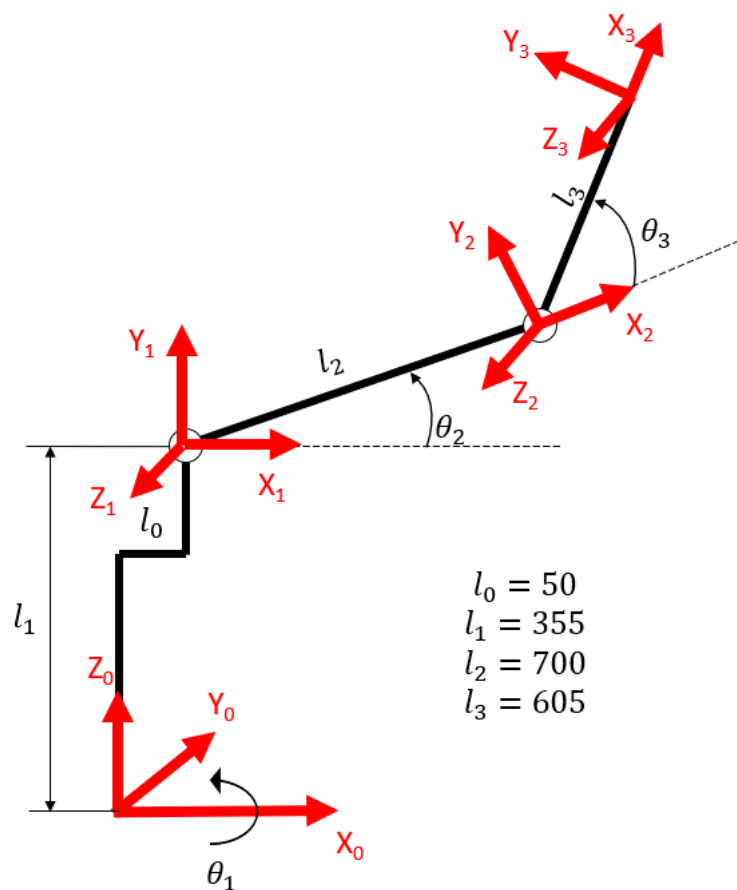
1. TÍNH TOÁN ĐỘNG HỌC ROBOT

1.1 Tính toán động học thuận, động học nghịch của robot

1.1.1. Xác định hệ tọa độ các khâu:



Hình 1.1: Hệ tọa độ trên Solidwork



Hình 1.2: Kích thước của robot và các hệ trục tọa độ

Hệ tọa độ các khâu được xác định như hình trên

1.1.2. Động học thuận:

Từ bảng kích thước cơ bản ở hình trên ta có bảng ma trận DH như sau (đơn vị mm):

Khâu	a	α	d	θ
1	50	90^0	355	θ_1
2	700	0	0	θ_2
3	605	0	0	θ_3

Dựa vào ma trận DH, ta tính các ma trận chuyển vị giữa các khâu – khớp:

$$\text{Khâu 1: } T_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & \sin(\theta_1) & 50 \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & 0 & -\cos(\theta_1) & 50 \sin(\theta_1) \\ 0 & 1 & 0 & 355 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Khâu 2: } T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & 700 \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 700 \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Khâu 3: } T_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & 605 \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & 605 \sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

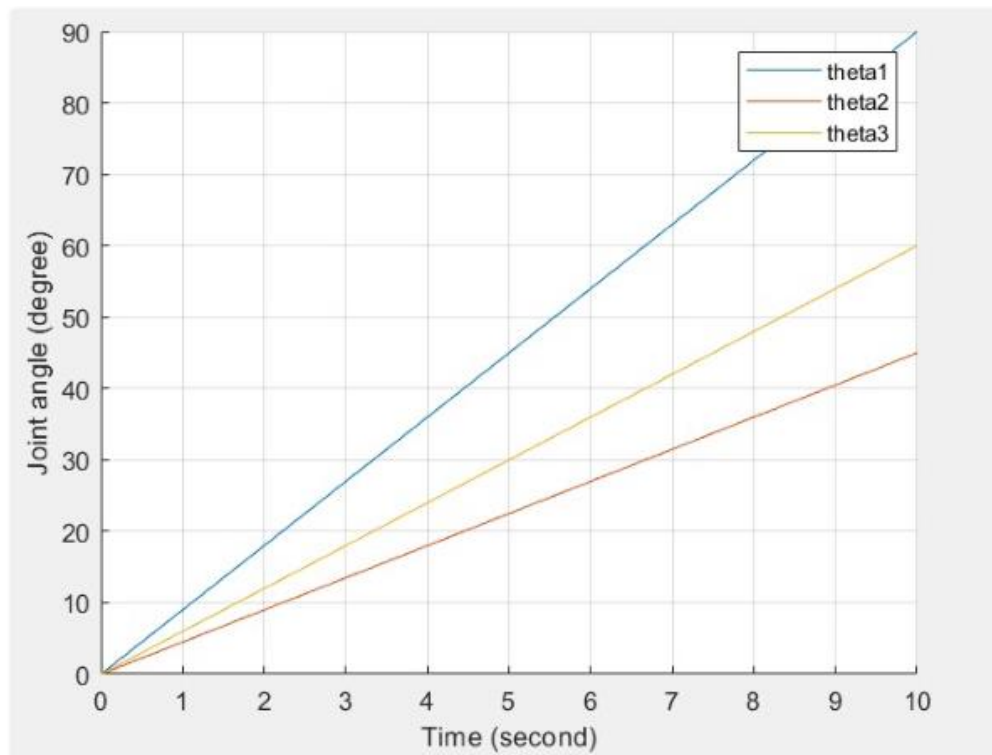
Từ đó ta tính được ma trận DH thể hiện mối quan hệ giữa điểm đầu hàn với góc tọa độ toàn cục: $T = T_1 * T_2 * T_3$

$$\text{Vậy } T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \cos(\theta_2 + \theta_3) & -\cos(\theta_1) \sin(\theta_2 + \theta_3) & \sin(\theta_1) & A \\ \sin(\theta_1) \cos(\theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1) \sin(\theta_2 + \theta_3) & -\cos(\theta_1) & B \\ \sin(\theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_2 + \theta_3) & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trong đó:

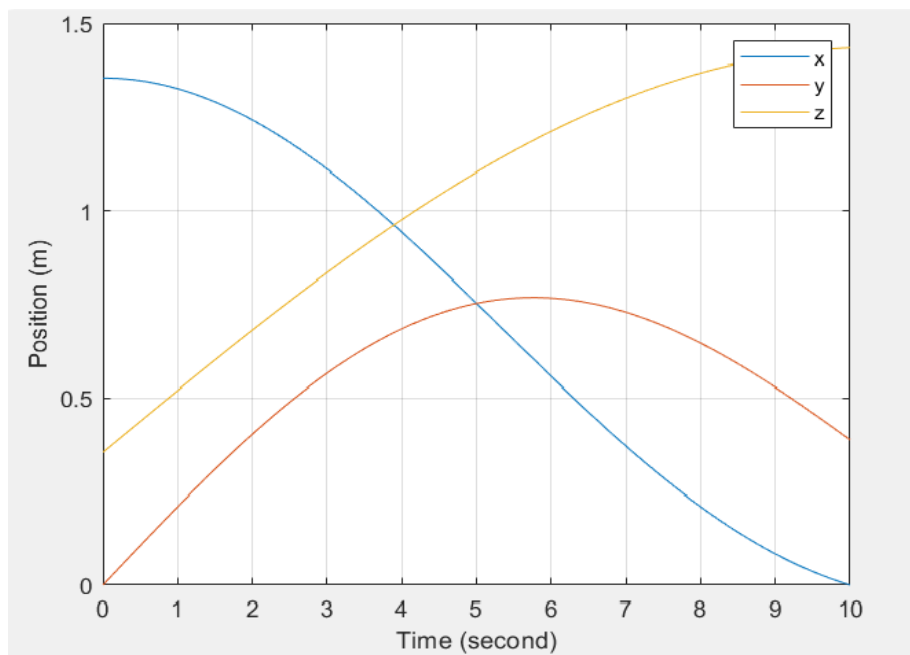
$$\begin{cases} A = l_0 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ B = l_0 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ C = l_2 \sin(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + l_1 \end{cases}$$

Tiến hành mô phỏng kết quả với Matlab và Simulink, ứng với đầu vào như hình sau:

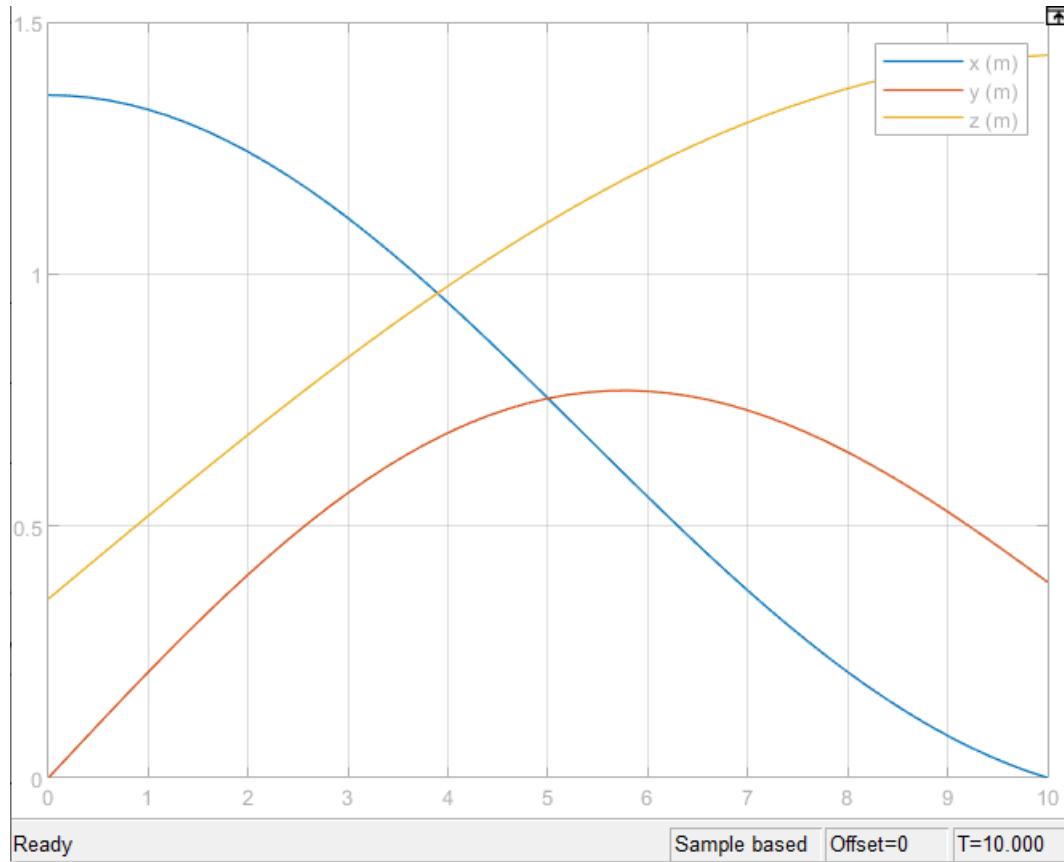


Hình 1.3: Đầu vào θ của động học thuận

Kết quả như sau:



Hình 1.4: Kết quả động học thuận trong Matlab



Hình 1.5: Kết quả động học thuận Simulink

1.1.3. Động học nghịch:

Với tọa độ x, y, z cho trước, lời giải $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ của bài toán động học nghịch sẽ là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x = l_0 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ y = l_0 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ z = l_2 \sin(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + l_1 \end{cases}$$

Tiến hành giải hệ phương trình trên ta tìm được 2 nghiệm:

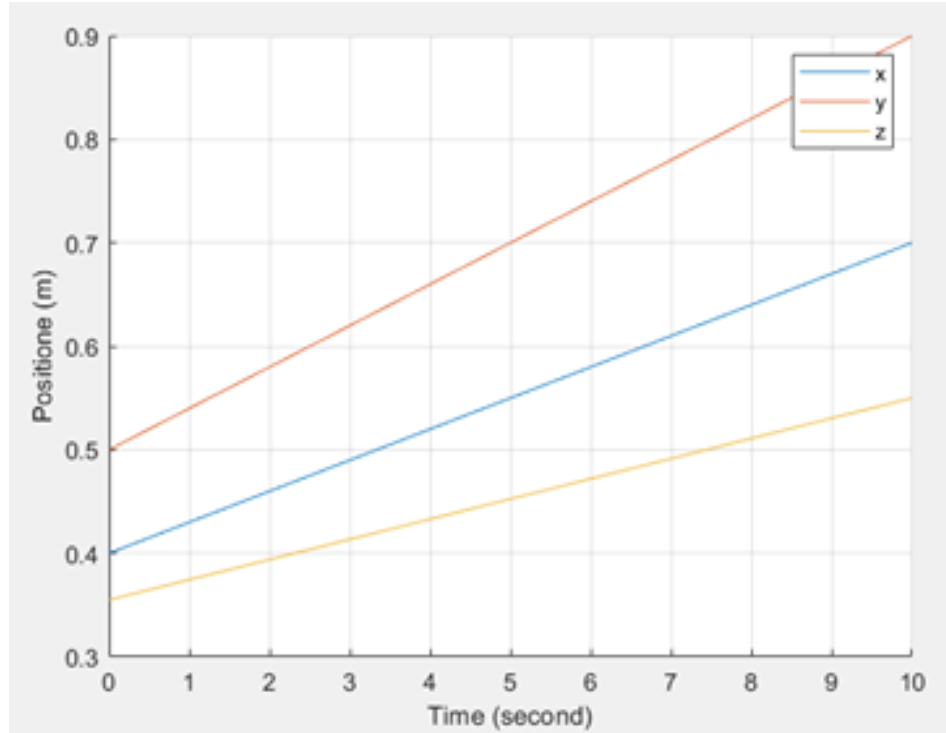
$$\begin{cases} \theta_1 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ (nếu } x > 0\text{); } \theta_1 = 180^\circ + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ (nếu } x < 0\text{);} \\ \theta_1 = 90^\circ \text{ (nếu } x = 0; y > 0\text{); } \theta_1 = -90^\circ \text{ (nếu } x = 0; y < 0\text{)} \\ \theta_2 = \arctan\left(\frac{z-355}{\sqrt{x^2+y^2}-50}\right) - \arccos\left(\frac{(\sqrt{x^2+y^2}-50)^2 + (z-355)^2 + 123975}{1400\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2}-50)^2 + (z-355)^2}}\right) \\ \theta_3 = 180^\circ - \arccos\left(\frac{856025 - (\sqrt{x^2+y^2}-50)^2 - (z-355)^2}{847000}\right) \end{cases} \quad (I)$$

Hoặc:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ (nếu } x > 0\text{)}; \theta_1 = 180^\circ + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ (nếu } x < 0\text{)}; \\ \theta_1 = 90^\circ \text{ (nếu } x = 0; y > 0\text{)}; \theta_1 = -90^\circ \text{ (nếu } x = 0; y < 0\text{)} \\ \theta_2 = \arctan\left(\frac{z-355}{\sqrt{x^2+y^2}-50}\right) + \arccos\left(\frac{(\sqrt{x^2+y^2}-50)^2 + (z-355)^2 + 123975}{1400\sqrt{(\sqrt{x^2+y^2}-50)^2 + (z-355)^2}}\right) \\ \theta_3 = 180^\circ + \arccos\left(\frac{856025 - (\sqrt{x^2+y^2}-50)^2 - (z-355)^2}{847000}\right) \end{array} \right. \quad (\text{II})$$

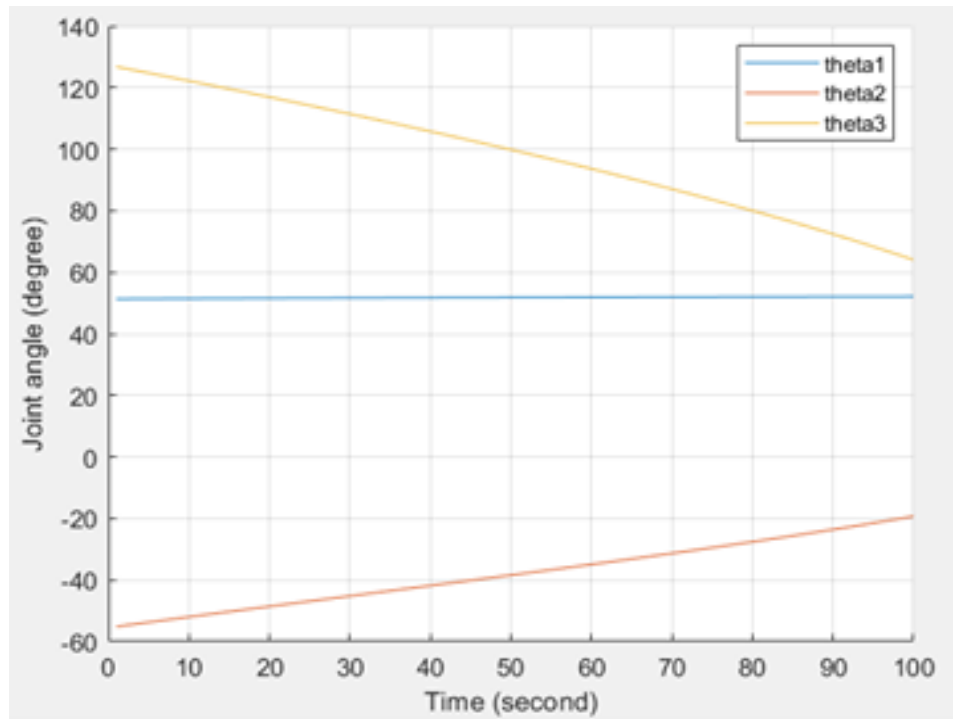
Kiểm tra kết quả tính động học nghịch:

- Sử dụng bộ số liệu tọa độ điểm như hình vẽ dưới đây:



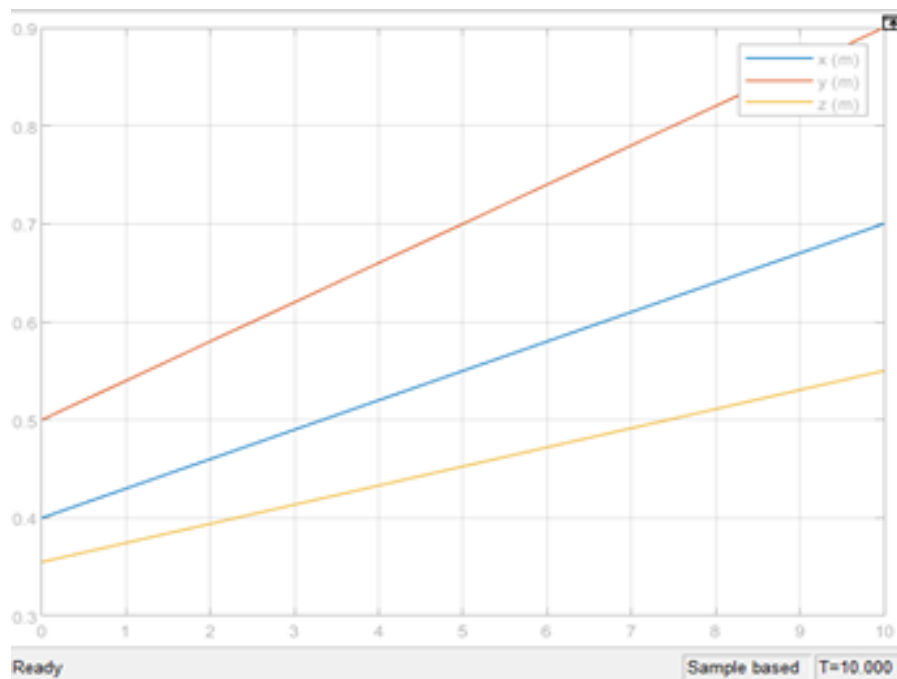
Hình 1.6: Bộ số liệu kiểm tra kết quả động học nghịch.

- Tính ra kết quả θ_1 , θ_2 , θ_3 tương ứng như hình dưới:



Hình 1.7: Kết quả θ_1 , θ_2 , θ_3 giải ra từ nghiệm bài toán động học nghịch.

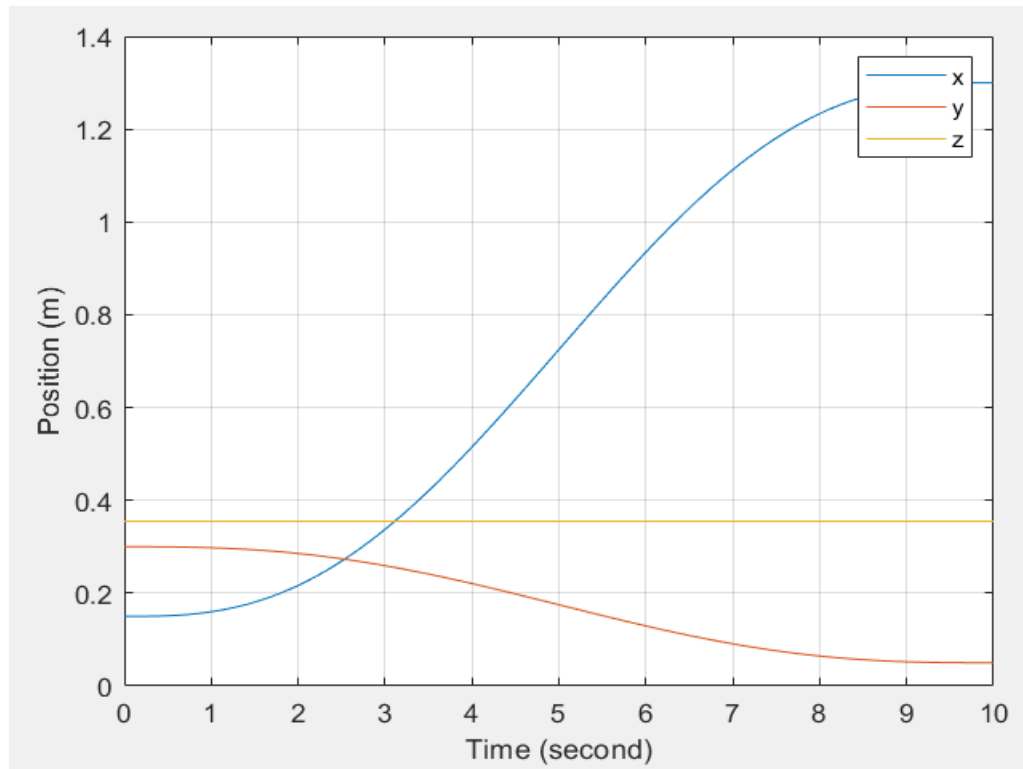
- Thay kết quả θ_1 , θ_2 , θ_3 vào, tính ra tọa độ điểm và so sánh với tọa độ ban đầu. Ta nhận thấy 2 tọa độ điểm đều giống nhau. Vậy kết quả động học nghịch trên là đúng.



Hình 1.8: Kết quả kiểm tra

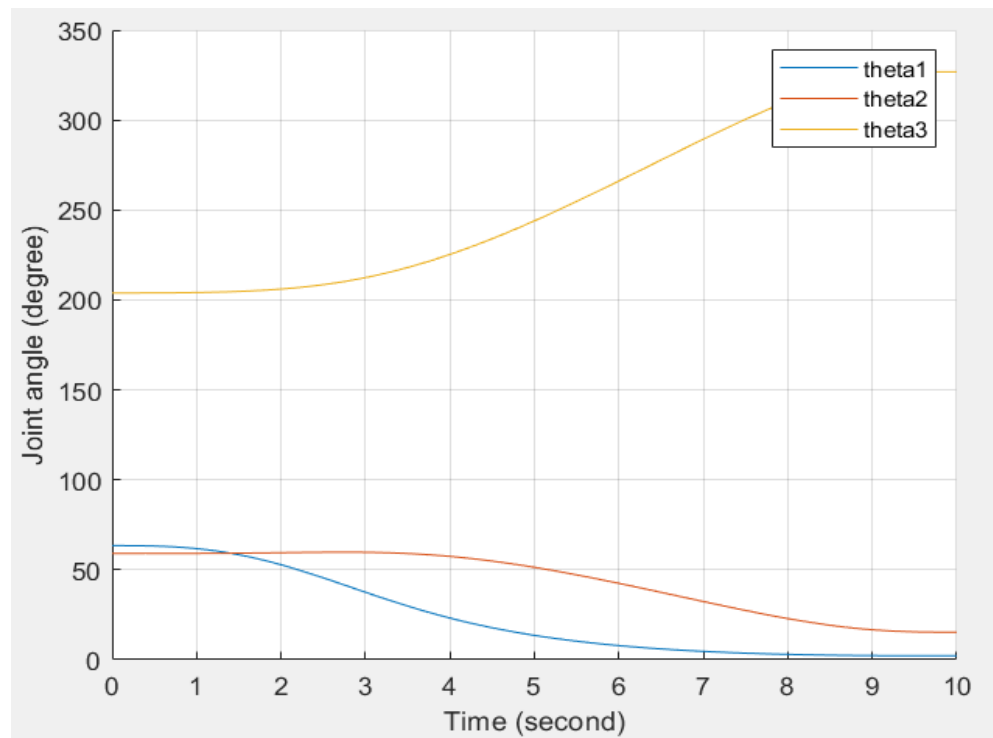
Hoạch định theo bậc 5 bằng Matlab ứng với dịch chuyển từ điểm có tọa độ $x=150$,

$y=300, z=350$ tới điểm $x=1250, y=50, z=350$.



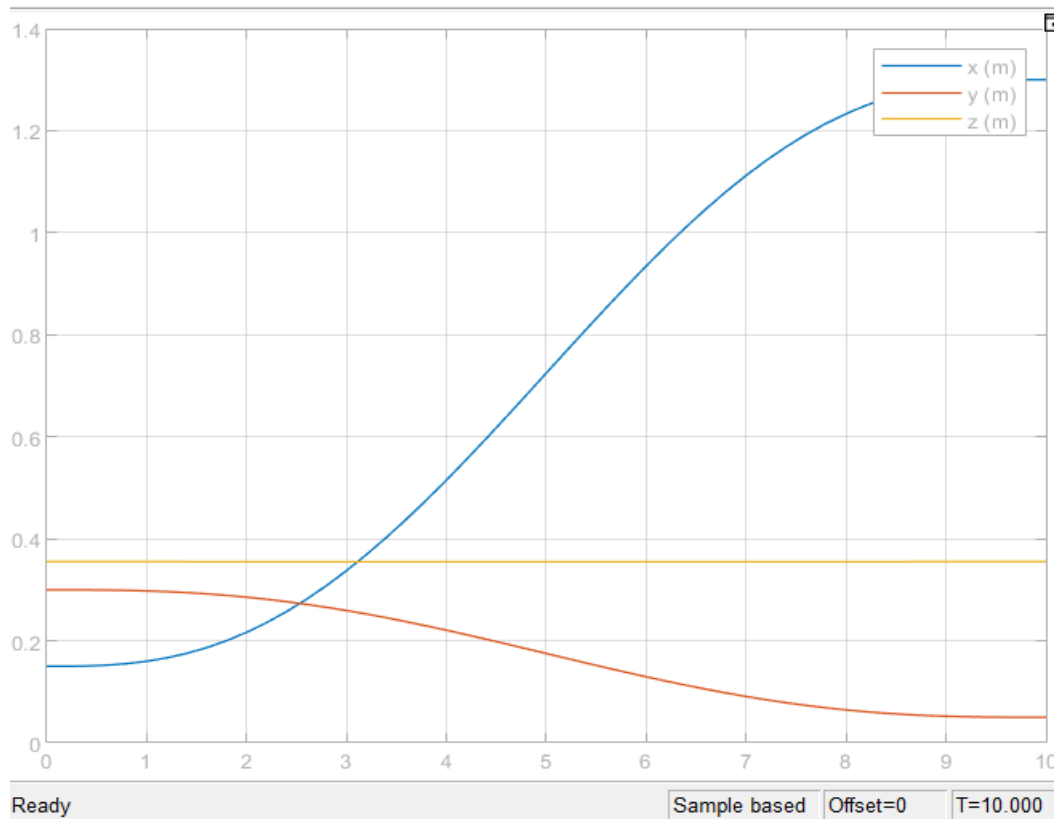
Hình 1.9: Sự thay đổi của x, y, z theo thời gian khi hoạch định bậc 5

Khi đó, giá trị $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ tương ứng sẽ là:



Hình 1.10: Sự thay đổi của $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ tương ứng

Kết quả này khi thay vào Simulink sẽ được:



Hình 1.11: Kết quả hoạch định bậc 5 bằng Simulink

1.2 Điều kiện có nghiệm của bài toán động học nghịch và vùng không gian làm việc của robot

Do đặc tính cấu tạo của robot nên các góc $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ không thể thay đổi từ 0° tới 360° .

Các góc $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ phải thỏa các ràng buộc sau:

$$\begin{cases} 0^\circ \leq \theta_1 \leq 360^\circ \\ 0^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ \\ 0^\circ \leq \theta_3 \leq 124^\circ \text{ hoặc } 236^\circ \leq \theta_3 \leq 360^\circ \end{cases}$$

Khi đó tọa độ x, y, z của không gian làm việc sẽ bị giới hạn lại so với khi các góc $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ thay đổi tự do.

Ngoài ra, để bài toán động học nghịch có nghiệm $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ thì các tọa độ x, y, z phải thỏa thêm 1 số điều kiện nữa.

Tổng hợp lại ta sẽ có điều kiện để bài toán có nghiệm và vùng không gian làm việc của

robot là những điểm có tọa độ x, y, z thỏa các điều kiện sau:

$$+ \text{ Nếu } z > a \text{ thì } e^2 \leq (\sqrt{x^2 + y^2} - b)^2 + (z - a)^2 \leq (c + d)^2$$

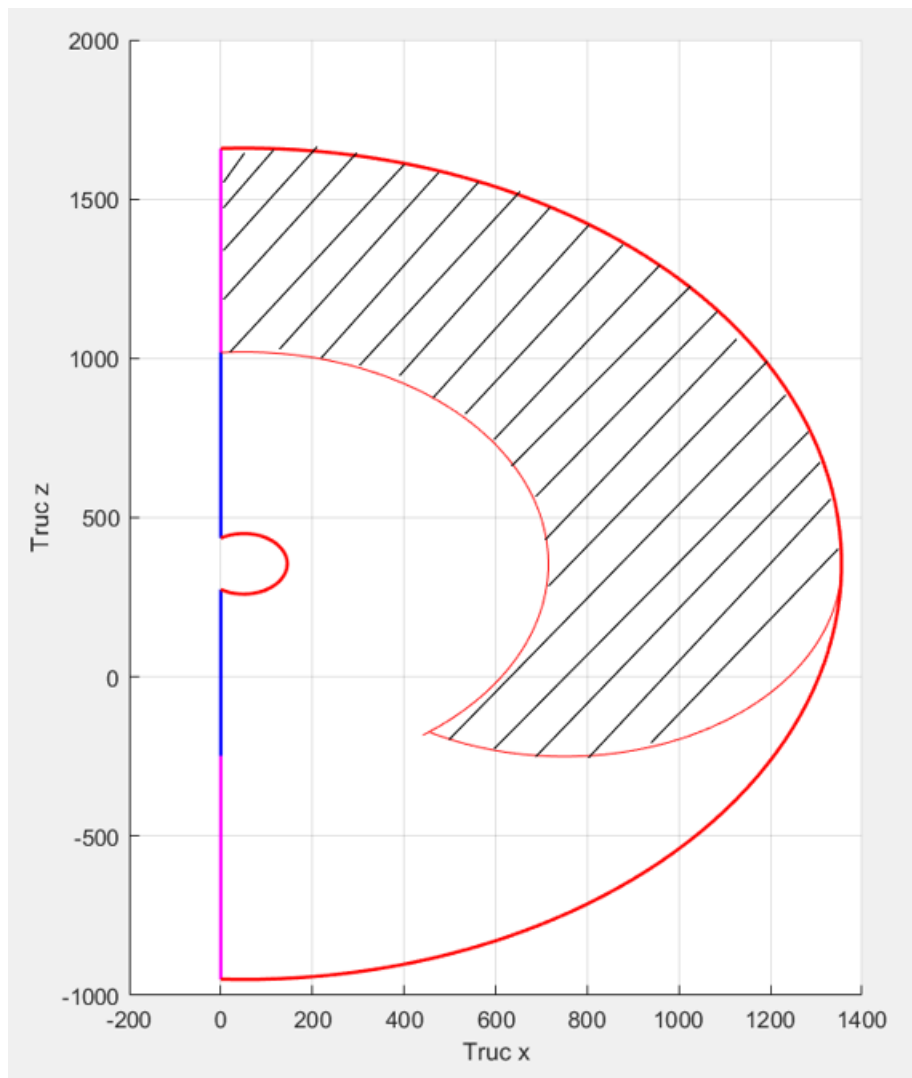
$$+ \text{ Nếu } z \leq a \text{ thì } \begin{cases} e^2 \leq (\sqrt{x^2 + y^2} - b)^2 + (z - a)^2 \\ (\sqrt{x^2 + y^2} - b - c)^2 + (z - a)^2 \leq d^2 \end{cases}$$

$$\text{Với } a=355; b=50; c=700; d=605; e = \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd\cos(180^\circ - 124^\circ)}$$

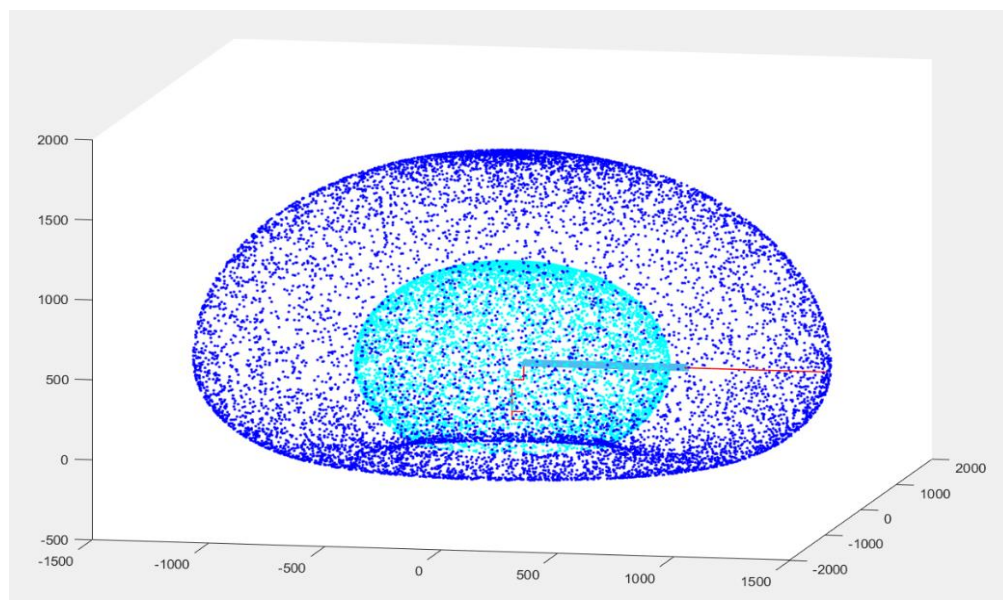
$$+ \text{ Nếu } z > 355 \text{ thì } 665^2 \leq (\sqrt{x^2 + y^2} - 50)^2 + (z - 355)^2 \leq 1305^2$$

$$+ \text{ Nếu } z \leq 355 \text{ thì } \begin{cases} 660^2 \leq (\sqrt{x^2 + y^2} - 50)^2 + (z - 355)^2 \\ (\sqrt{x^2 + y^2} - 750)^2 + (z - 355)^2 \leq 605^2 \end{cases}$$

Không gian làm việc là phần gạch chéo của hình dưới quay quanh trục Oz:



Hình 1.13a: Vẽ không gian làm việc trên mặt phẳng xOz .



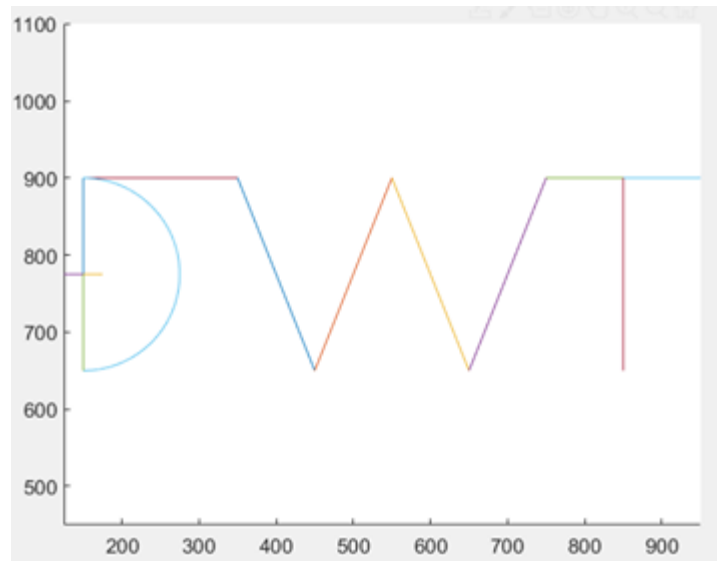
Hình 1.13b: Vẽ không gian làm việc trong không gian.

1.3 Mô phỏng

Mô phỏng chuyển động của robot để viết chữ cái đầu của tên thành viên nhóm:

Mặt phẳng được lựa chọn để viết các chữ cái đầu của tên thành viên nhóm (các chữ cái D- V- V- T) là mặt phẳng có cao độ $z=360$.

Tọa độ các chữ cái như sau:



Hình 1.14: Tọa độ các chữ cái.

2.TÍNH TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC ROBOT

2.1. Ma trận Jacobi, điểm kỳ dị và không gian làm việc của robot.

2.1.1. Tìm vận tốc và ma trận Jacobi:

Từ tọa độ của đầu công tác ở ma trận động học thuận:

$$\begin{cases} x = l_0 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ y = l_0 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ z = l_2 \sin(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + l_1 \end{cases}$$

Ta có:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -l_0 s_1 - l_2 s_1 c_2 - l_3 s_1 c_{23} & -l_2 c_1 s_2 - l_3 c_1 s_{23} & -l_3 c_1 s_{23} \\ l_0 c_1 + l_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23} & -l_2 s_1 s_2 - l_3 s_1 s_{23} & -l_3 s_1 s_{23} \\ 0 & l_2 c_2 + l_3 c_{23} & l_3 c_{23} \end{bmatrix}$$

Với $l_0 = 50(mm)$; $l_1 = 355(mm)$; $l_2 = 700(mm)$; $l_3 = 605(mm)$

2.1.2. Tìm điểm kỳ dị:

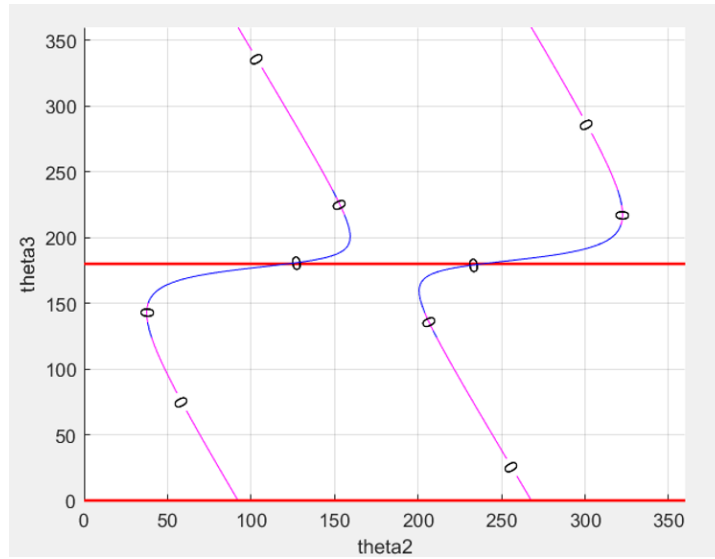
Các điểm kỳ dị của robot là nghiệm của phương trình $\det(J) = 0$

$$\Leftrightarrow \det(J) = 0$$

$$\Leftrightarrow [-21,175 \sin \theta_3 - 296,450 \sin \theta_3 \cos \theta_2 - 256,2175 \sin \theta_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \times 10^6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \theta_3 = 0 \\ 10 + 140 \cos \theta_2 + 121 \cos(\theta_2 + \theta_3) = 0 \end{cases} \quad (I)$$

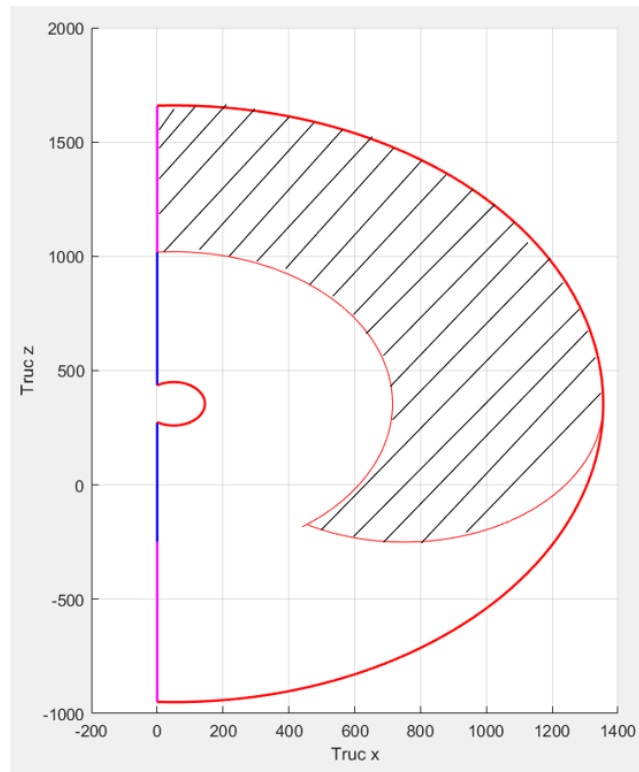
Nghiệm của hệ (I) tập hợp những điểm được vẽ trên đồ thị sau:



Hình 2.1: Tập hợp điểm kỳ dị theo θ_2 và θ_3

Với góc θ_1 bất kỳ, các góc θ_2, θ_3 nằm trên những đường thuộc đồ thị trên sẽ là những điểm kỳ dị.

Tọa độ của điểm kỳ dị trong workspace:



Hình 2.2: Tọa độ các điểm kỳ dị trong workspace

Mặt cắt của workspace qua trục $z=0$ (nếu thực hiện phép quay hình trên quanh trục z sẽ ra toàn bộ workspace và các điểm kỳ dị của robot trong không gian)

Trong hình trên điểm kỳ dị là điểm trên những đường nét đậm; workspace là vùng được gạch đen chéo.

Nhận xét: Như vậy ta có thể thấy các điểm kỳ dị sẽ nằm ở biên của workspace theo trục z và vòng ngoài workspace.

2.2. Phương trình chuyển động sử dụng Newton-Euler và Lagrange

2.2.1. Phương pháp Newton – Euler:

Công thức tính Newton-Euler:

Công thức gia tốc, gia tốc góc, vận tốc dài, gia tốc dài tại khâu thứ i chiều lên hệ trục tọa độ thứ i, không bao gồm các công thức tính toán cho trường hợp khâu tịnh tiến.

$${}^i\omega_i = {}_{i-1}^iR \left({}^{i-1}\omega_{i-1} + \dot{\theta}_i^{i-1}\hat{Z}_{i-1} \right)$$

$${}^i\dot{\omega}_i = {}_{i-1}^iR \left({}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + \ddot{\theta}_i^{i-1}\hat{Z}_{i-1} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times \dot{\theta}_i^{i-1}\hat{Z}_{i-1} \right)$$

$${}^i\dot{v}_i = {}_{i-1}^iR \left({}^{i-1}\dot{v}_{i-1} + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_i + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_i) \right)$$

$${}^i\dot{v}_{Ci} = {}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^iP_{Ci} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^iP_{Ci})$$

Thực hiện tính toán cho robot:

Điều kiện đầu của robot như sau:

$$\begin{aligned} {}^0\omega_0 &= [0 \ 0 \ 0]^T & {}^0v_0 &= [0 \ 0 \ 0]^T & {}^0\dot{\omega}_0 &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ {}^1P_1 &= [l_0 \ l_1 \ 0]^T & {}^2P_2 &= [l_2 \ 0 \ 0]^T & {}^3P_3 &= [l_3 \ 0 \ 0]^T \\ {}^1P_{C1} &= [0 \ 0 \ 0]^T & {}^2P_{C2} &= [0 \ 0 \ 0]^T & {}^3P_{C3} &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ {}^0Z_0 &= [0 \ 0 \ 1]^T & {}^1Z_1 &= [0 \ 0 \ 1]^T & {}^2Z_2 &= [0 \ 0 \ 1]^T; \\ {}^0\dot{v}_0 &= g.Z = [0 \ 0 \ g]^T \end{aligned}$$

Sử dụng Newton-Euler, tính được các kết quả sau:

- Vận tốc góc:

$${}^1\omega_1 = {}^0R \left({}^0\omega_0 + \dot{\theta}_1^0\hat{Z}_0 \right) = [0 \ \dot{\theta}_1 \ 0]^T$$

$${}^2\omega_2 = {}^1R \left({}^1\omega_1 + \dot{\theta}_2^1\hat{Z}_1 \right) = [\dot{\theta}_1 \sin(\theta_2) \ \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2) \ \dot{\theta}_2]^T$$

$${}^3\omega_3 = {}^2R \left({}^2\omega_2 + \dot{\theta}_3^2\hat{Z}_2 \right) = [\dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \ \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3]^T$$

- Gia tốc góc:

$${}^1\dot{\omega}_1 = {}^0R \left({}^0\dot{\omega}_0 + \ddot{\theta}_1^0\hat{Z}_0 + {}^0\omega_0 \times \dot{\theta}_1^0\hat{Z}_0 \right) = [0 \ \ddot{\theta}_1 \ 0]^T$$

$${}^2\dot{\omega}_2 = {}^1R \left({}^1\dot{\omega}_1 + \ddot{\theta}_2^1\hat{Z}_1 + {}^1\omega_1 \times \dot{\theta}_2^1\hat{Z}_1 \right)$$

$$= [\ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \ \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \ \ddot{\theta}_2]^T$$

$${}^3\dot{\omega}_3 = {}^3R \left({}^2\dot{\omega}_2 + \ddot{\theta}_3^2 \hat{Z}_2 + {}^2\omega_2 \times \dot{\theta}_3^0 \hat{Z}_2 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

- Gia tốc dài từng khâu:

$${}^1\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} -l_0 \dot{\theta}_1^2 \\ g \\ -l_0 \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} g \cdot \sin\theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 - l_2 \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos^2 \theta_2 - l_0 \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos \theta_2 \\ l_2 \ddot{\theta}_2 + g \cdot \cos\theta_2 + l_0 \dot{\theta}_1^2 \cdot \sin\theta_2 + l_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos\theta_2 \cdot \sin\theta_2 \\ (l_2 + 1) \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin\theta_2 - l_0 \ddot{\theta}_1 - l_2 \ddot{\theta}_1 \cdot \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

$${}^3\dot{v}_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Với a, b, c tính được như sau:

$a =$

$$\begin{aligned} & \sin\theta_3 \cdot (l_2 \ddot{\theta}_2 + g \cdot \cos\theta_2 + l_0 \dot{\theta}_1^2 \cdot \sin\theta_2 + l_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos\theta_2 \cdot \sin\theta_2) \\ & + \cos\theta_3 \cdot (g \cdot \sin\theta_2 - l_0 \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos\theta_2 - l_2 \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos^2 \theta_2 - l_0 \dot{\theta}_2^2) \\ & - l_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ & - l_3 (\dot{\theta}_1 \cdot \cos\theta_2 \cos\theta_3 - \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3) \cdot (\dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3) \\ & - l_3 \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \end{aligned}$$

$b =$

$$\begin{aligned} & l_3 (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) + l_3 (\dot{\theta}_1 \cdot \cos\theta_2 \sin\theta_3 + \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3) \cdot \dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 \\ & - l_3 \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 + l_0 \sin\theta_3 \cdot \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) - g \sin\theta_2 + l_0 \dot{\theta}_1^2 \cos\theta_2 \\ & + \cos\theta_3 [l_3 (l_2 \ddot{\theta}_2 + g \cdot \cos\theta_2) + l_0 \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2 + l_2 \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3] \end{aligned}$$

$c =$

$$\begin{aligned}
& l_3 \sin \theta_3 (\ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \cos \theta_2 + \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \cos \theta_2) - l_0 \ddot{\theta}_1 \\
& + l_3 \cos \theta_3 (\dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin \theta_2 - \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin \theta_2) \\
& - (l_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + l_3 \dot{\theta}_2 + l_3 \dot{\theta}_3 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3) \\
& + 2l_2 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin \theta_2
\end{aligned}$$

- Gia tốc dài tại khối tâm từng khâu:

$${}^i \dot{v}_{C_i} = {}^i \dot{v}_i + {}^i \dot{\omega}_i \times {}^i P_{C_i} + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i P_{C_i})$$

$${}^1 \dot{v}_{C_1} = \begin{bmatrix} -l_0 \dot{\theta}_1^2 \\ g \\ -l_0 \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^2 \dot{v}_{C_2} = \begin{bmatrix} g \cdot \sin \theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 - l_2 \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos^2 \theta_2 - l_0 \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos \theta_2 \\ l_2 \ddot{\theta}_2 + g \cdot \cos \theta_2 + l_0 \dot{\theta}_1^2 \cdot \sin \theta_2 + l_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \sin \theta_2 \\ (l_2 + 1) \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin \theta_2 - l_0 \ddot{\theta}_1 - l_2 \ddot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

$${}^3 \dot{v}_{C_3} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Với giá trị a, b, c ở trên.

- Vận tốc dài từng khâu:

$${}^1 v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_0 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^2 v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \dot{\theta}_2 \\ -l_0 \dot{\theta}_1 - l_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

$${}^3 v_3 = \begin{bmatrix} l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 \\ l_3 \dot{\theta}_2 + l_3 \dot{\theta}_3 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 \\ l_3 \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \sin \theta_3 - l_2 \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 - l_3 \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \cos \theta_3 - l_0 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

➔ Từ đó tính toán τ_1, τ_2, τ_3 .

Tính toán lực tác dụng lên khối tâm từng khâu:

$$F_1 = m_1 \dot{v}_{C1} = m_1 \cdot \begin{bmatrix} -l_0 \dot{\theta}_1^2 \\ g \\ -l_0 \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = m_2 \dot{v}_{C2} = m_2 \cdot \begin{bmatrix} g \cdot \sin \theta_2 - l_2 \dot{\theta}_1^2 - l_2 \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos^2 \theta_2 - l_0 \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos \theta_2 \\ l_2 \ddot{\theta}_2 + g \cdot \cos \theta_2 + l_0 \dot{\theta}_1^2 \cdot \sin \theta_2 + l_2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \sin \theta_2 \\ (l_2 + 1) \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin \theta_2 - l_0 \ddot{\theta}_1 - l_2 \ddot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = m_3 \dot{v}_{C3} = m_3 \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Với $\dot{v}_{C1} = \dot{v}_1$, $\dot{v}_{C2} = \dot{v}_2$, $\dot{v}_{C3} = \dot{v}_3$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tính toán momen từng khâu:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = M(\theta) \ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta)$$

$$\text{Với } \ddot{\theta} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 2l_2 l_3 m_3 \cos \theta_3 + l_2^2 m_2 + l_2^2 m_3 + l_3^2 m_3 & l_2 l_3 m_3 \cos \theta_3 + l_3^2 m_3 \\ 0 & l_2 l_3 m_3 \cos \theta_3 + l_3^2 m_3 & l_3^2 m_3 \end{bmatrix}$$

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ gl_3 m_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + gl_2(m_2 + m_3) \cos \theta_2 \\ l_3 m_3 g \cos(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix}$$

Với các giá trị:

$$M_{11} = \frac{l_2^2(m_2 + m_3)}{2} \cos(2\theta_2) + \frac{l_3^2 m_3}{2} \cos(2\theta_2 + 2\theta_3) + 2l_0 l_3 m_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ + 2l_0 l_2 (m_2 + m_3) \cos(\theta_2) + l_2 l_3 m_3 \cos(\theta_3) + l_2 l_3 m_3 \cos(2\theta_2 + \theta_3) \\ + l_0^2 (m_1 + m_2 + m_3) + \frac{l_2^2 (m_2 + m_3)}{2} + \frac{l_3^2 m_3}{2}$$

$$V_1 = \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3) - 2l_0 l_3 m_3 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3) - 2l_0 l_2 m_3 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(\theta_2) \\ - l_2 l_3 m_3 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(\theta_3) - 2l_0 l_2 m_3 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(\theta_2) \\ + \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(2\theta_2 + \theta_3) \\ - l_2 l_3 m_3 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(2\theta_2 + \theta_3) - 2l_2 l_3 m_3 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(2\theta_2 + \theta_3) \\ - l^2 m_2 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(2\theta_2) - l_3^2 m_3 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(2\theta_2 + 2\theta_3) \\ - l_3^2 m_3 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(2\theta_2 + 2\theta_3) \dot{\theta}_1$$

$$V_2 = l_0 l_2 (m_2 + m_3) \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 - l_2 l_3 m_3 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 \\ + l_2 l_3 m_3 \dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2 + \theta_3) + \frac{l_2^2 (m_2 + m_3)}{2} \dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2) \\ + \frac{l_3^2 m_3}{2} \dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_3) + l_0 l_3 m_3 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ - 2l_2 l_3 m_3 \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_3 \sin \theta_3$$

$$V_3 = l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_3 + 2l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_3 + l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2 + \theta_3) + l_3 \dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_3) \\ + \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 + \theta_3)$$

Kết quả tính toán momen:

$$\tau_3 =$$

$$\frac{l_3 m_3}{2} \{ [(2l_3 + 2l_2 \cos \theta_3) \ddot{\theta}_2 + 2l_3 \ddot{\theta}_3] + [l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_3 + 2l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_3 \\ + l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2 + \theta_3) + l_3 \dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_3) + \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 + \theta_3)] \\ + 2g \cos(\theta_2 + \theta_3) \}$$

$$\tau_2 =$$

$$\begin{aligned}
& [(2l_2l_3m_3\cos\theta_3 + l_2^2m_2 + l_2^2m_3 + l_3^2m_3)\ddot{\theta}_2 + (l_2l_3m_3\cos\theta_3 + l_3^2m_3)\ddot{\theta}_3] \\
& + \left[l_0l_2(m_2 + m_3)\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2 - l_2l_3m_3\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3 \right. \\
& + l_2l_3m_3\dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2 + \theta_3) + \frac{l_2^2(m_2 + m_3)}{2}\dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2) \\
& + \frac{l_3^2m_3}{2}\dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_3) + l_0l_3m_3\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\
& \left. - 2l_2l_3m_3\dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_3 \sin\theta_3 \right] + [gl_3m_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + gl_2(m_2 \\
& + m_3)\cos\theta_2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_1 = & \left(\frac{l_2^2(m_2 + m_3)}{2} \cos(2\theta_2) + \frac{l_3^2m_3}{2} \cos(2\theta_2 + 2\theta_3) + 2l_0l_3m_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + 2l_0l_2(m_2 \right. \\
& + m_3) \cos(\theta_2) + l_2l_3m_3 \cos(\theta_3) + l_2l_3m_3 \cos(2\theta_2 + \theta_3) \\
& + l_0^2(m_1 + m_2 + m_3) + \frac{l_2^2(m_2 + m_3)}{2} + \frac{l_3^2m_3}{2} \left. \right) \cdot \ddot{\theta}_1 \\
& + [\dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3) - 2l_0l_3m_3\dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3) \\
& - 2l_0l_2m_3\dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(\theta_2) - l_2l_3m_3\dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(\theta_3) - 2l_0l_2m_3\dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(\theta_2) \\
& + \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(2\theta_2 + \theta_3) \\
& - l_2l_3m_3\dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(2\theta_2 + \theta_3) - 2l_2l_3m_3\dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(2\theta_2 + \theta_3) \\
& - l^2m_2\dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(2\theta_2) - l_3^2m_3\dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(2\theta_2 + 2\theta_3) \\
& - l_3^2m_3\dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(2\theta_2 + 2\theta_3)\dot{\theta}_1]
\end{aligned}$$

2.2.2. Phương pháp Lagrange:

a) Công thức Lagrange:

Hàm Lagrange:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = k(\theta, \dot{\theta}) - u(\theta)$$

Trong đó k là động năng của robot, u là thế năng của robot
 Với

$$\begin{cases} k_i = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^T v_{C_i} + \frac{1}{2} {}^i \omega_{C_i}^T {}^i I_i {}^i \omega_i \\ u_i = -m_i {}^0 g^T {}^0 P_{C_i} \end{cases}$$

$$\text{Do } {}^i I_i = 0 \quad \forall i \Rightarrow k_i = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^T v_{C_i}$$

Từ đó ta tính được torque của từng khâu như sau:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Theta} = \tau$$

Trong đó:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}, \Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}, \ddot{\Theta} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix},$$

b) Thực hiện tính cho robot:

Động năng các khâu:

$$K_1 = \frac{m_1}{2} l_0^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$K_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{\theta}_1^2 (l_0^2 + l_2^2 \cos^2(\theta_2) + 2l_0 l_2 \cos(\theta_2)) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2)$$

$$\begin{aligned} K_3 = \frac{m_3}{4} & (\dot{\theta}_1^2 (2l_0^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_2^2 \cos(2\theta_2) \\ & + l_3^2 \cos(2\theta_2 + 2\theta_3) + 2l_2 l_3 \cos(2\theta_2 + 2\theta_3) + 4l_0 l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ & + 4l_0 l_2 \cos(\theta_2) + 2l_2 l_3 \cos(\theta_3)) + \dot{\theta}_2^2 (2l_2^2 + 2l_3^2 + 4l_2 l_3 \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_3)) \\ & + \dot{\theta}_3^2 (2l_3^2) + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 (4l_3^2 + 4l_2 l_3 \cos(\theta_3))) \end{aligned}$$

Thế năng các khâu:

$$u_1 = g l_1 m_1$$

$$u_2 = g m_2 (l_1 + l_2 \sin(\theta_2))$$

$$u_3 = g m_3 (l_1 + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + l_2 \sin(\theta_2))$$

Từ động năng và thế năng tính được ở trên, ta tính được hàm Lagrange

$$\begin{aligned}
L &= K_1 + K_2 + K_3 - (u_1 + u_2 + u_3) \\
&= \left[\frac{l_0^2(m_1 + m_2 + m_3)}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2(m_2 + m_3)}{4} \dot{\theta}_1^2 + \frac{l_3^2 m_3}{4} \dot{\theta}_1^2 + \frac{l_2^2 m_3}{2} \dot{\theta}_2^2 \right. \\
&\quad + \frac{l_3^2 m_3}{2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{l_3^2 m_3}{2} \dot{\theta}_3^2 - gl_1 m_1 - gl_3 m_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + l_3^2 m_3 \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_3 \\
&\quad - gl_2 m_2 \sin(\theta_2) + \left(\frac{l_2^2(m_2 + m_3)}{4} \dot{\theta}_1^2 \cos(2\theta_2) \right. \\
&\quad + \frac{l_3^2 m_3 \dot{\theta}_1^2}{4} \cos(2\theta_2 + 2\theta_3) + l_0 l_3 m_3 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2 + \theta_3) \\
&\quad + l_0 l_2(m_2 + m_3) \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) + \frac{l_2 l_3 m_3}{2} \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_3) \\
&\quad + l_2 l_3 m_3 \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_3) + \frac{l_2 l_3 m_3 \dot{\theta}_1^2}{2} \cos(2\theta_2 + \theta_3) \\
&\quad \left. \left. + l_2 l_3 m_3 \dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3) \right) \right]
\end{aligned}$$

Các torque tương ứng:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} \\
&= \left(\frac{l_2^2(m_2 + m_3)}{2} \cos(2\theta_2) + \frac{l_3^2 m_3}{2} \cos(2\theta_2 + 2\theta_3) + 2l_0 l_3 m_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \right. \\
&\quad + 2l_0 l_2(m_2 + m_3) \cos(\theta_2) + l_2 l_3 m_3 \cos(\theta_3) + l_2 l_3 m_3 \cos(2\theta_2 + \theta_3) \\
&\quad \left. + l_0^2(m_1 + m_2 + m_3) + \frac{l_2^2(m_2 + m_3)}{2} + \frac{l_3^2 m_3}{2} \right) \ddot{\theta}_1 \\
&\quad + \left[\dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3) - 2l_0 l_3 m_3 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(\theta_2 + \theta_3) \right. \\
&\quad - 2l_0 l_2 m_3 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(\theta_2) - l_2 l_3 m_3 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(\theta_3) \\
&\quad - 2l_0 l_2 m_3 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(\theta_2) + \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(2\theta_2 + \theta_3) \\
&\quad - l_2 l_3 m_3 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(2\theta_2 + \theta_3) - 2l_2 l_3 m_3 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(2\theta_2 + \theta_3) \\
&\quad - l^2 m_2 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(2\theta_2) - l_3^2 m_3 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin(2\theta_2 + 2\theta_3) \\
&\quad \left. - l_3^2 m_3 \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \sin(2\theta_2 + 2\theta_3) \dot{\theta}_1 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} \\
&= [(2l_2l_3m_3\cos\theta_3 + l_2^2m_2 + l_2^2m_3 + l_3^2m_3)\ddot{\theta}_2 \\
&\quad + (l_2l_3m_3\cos\theta_3 + l_3^2m_3)\ddot{\theta}_3] \\
&\quad + \left[l_0l_2(m_2 + m_3)\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2 - l_2l_3m_3\dot{\theta}_3^2 \sin\theta_3 \right. \\
&\quad + l_2l_3m_3\dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2 + \theta_3) + \frac{l_2^2(m_2 + m_3)}{2}\dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2) \\
&\quad + \frac{l_3^2m_3}{2}\dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_3) + l_0l_3m_3\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\
&\quad \left. - 2l_2l_3m_3\dot{\theta}_2 \cdot \dot{\theta}_3 \sin\theta_3 \right] + [gl_3m_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + gl_2(m_2 \\
&\quad + m_3)\cos\theta_2]
\end{aligned}$$

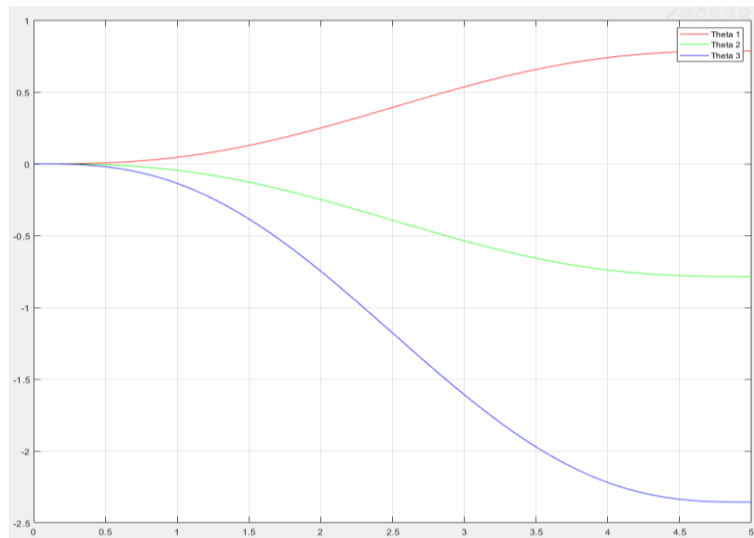
$$\begin{aligned}
\tau_3 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_3} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_3} \\
&= \frac{l_3m_3}{2} \{ [(2l_3 + 2l_2\cos\theta_3)\ddot{\theta}_2 + 2l_3\ddot{\theta}_3] + [l_2\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_3 + 2l_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_3 \\
&\quad + l_2\dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2 + \theta_3) + l_3\dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2 + 2\theta_3) + \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 + \theta_3)] \\
&\quad + 2g \cos(\theta_2 + \theta_3) \}
\end{aligned}$$

Nhận xét: Từ 2 phương pháp tính Newton-Euler và Lagrange ta thu được các phương trình chuyển động τ_1, τ_2, τ_3 là giống nhau. Vậy có thể kết luận được các kết quả tính là đúng.

2.3. Mô phỏng

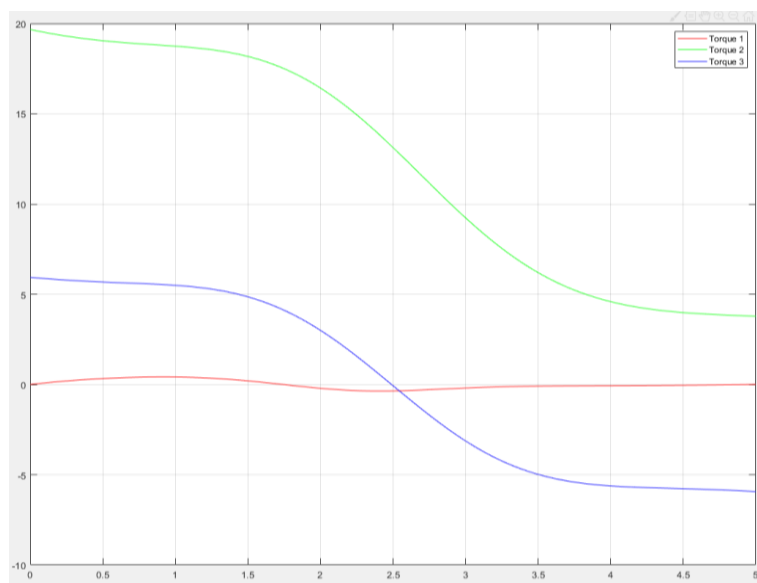
2.3.1. Kiểm tra công thức tính Torque:

Kiểm tra theo lý thuyết và mô hình trên simulink có khớp không, ta tiến hành cho 3 góc θ_1 thay đổi từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$, θ_2 thay đổi từ 0 đến $-\frac{\pi}{4}$, θ_3 thay đổi từ 0 đến $-\frac{3\pi}{4}$



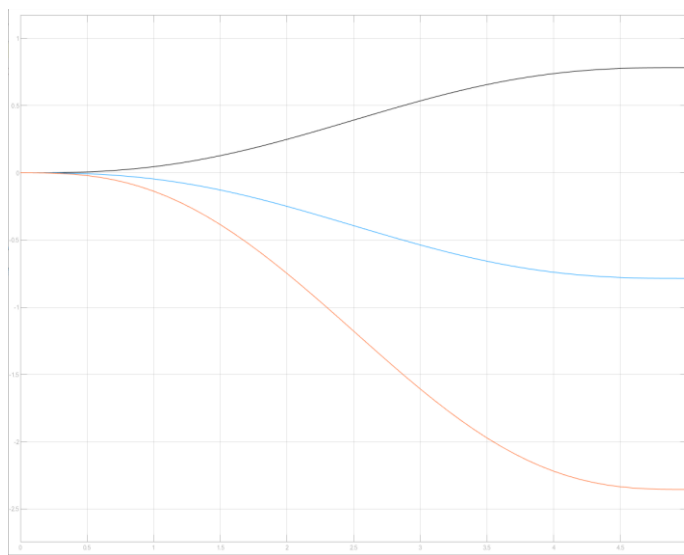
Hình 2.3: Sự thay đổi của 3 góc θ_1 , θ_2 , θ_3

Sau đó ta tính được 3 torque tương ứng với 3 khớp như sau:



Hình 2.4: Sự thay đổi của 3 torque τ_1 , τ_2 , τ_3

Ta cấp 3 torque tương ứng cho 3 khớp mô hình simulink thu được kết quả sau:

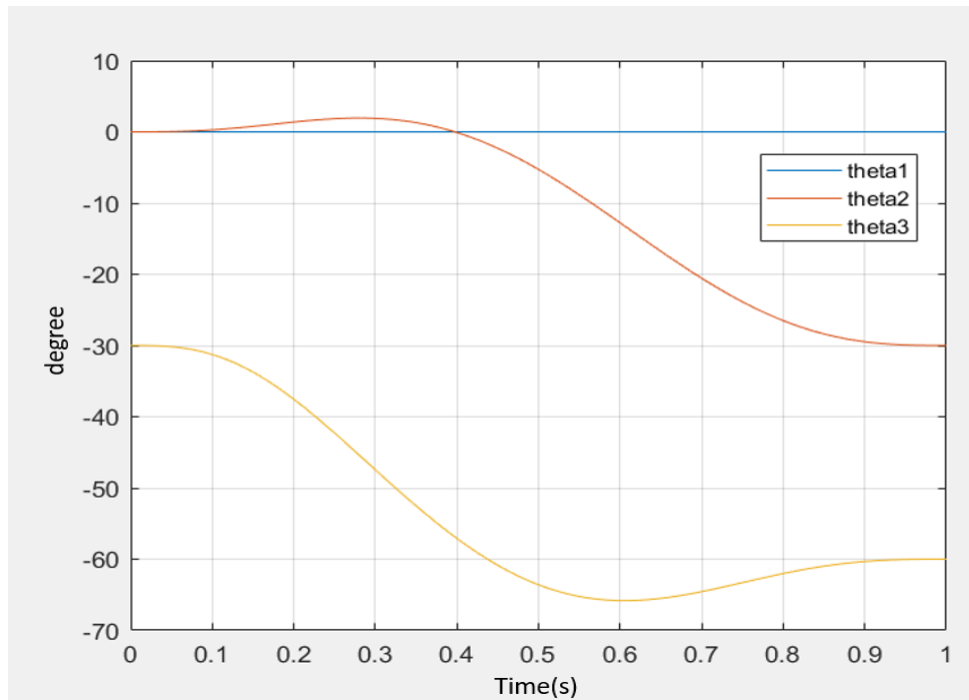


Hình 2.5: Sự thay đổi của 3 góc θ_1 , θ_2 , θ_3 bên Simulink

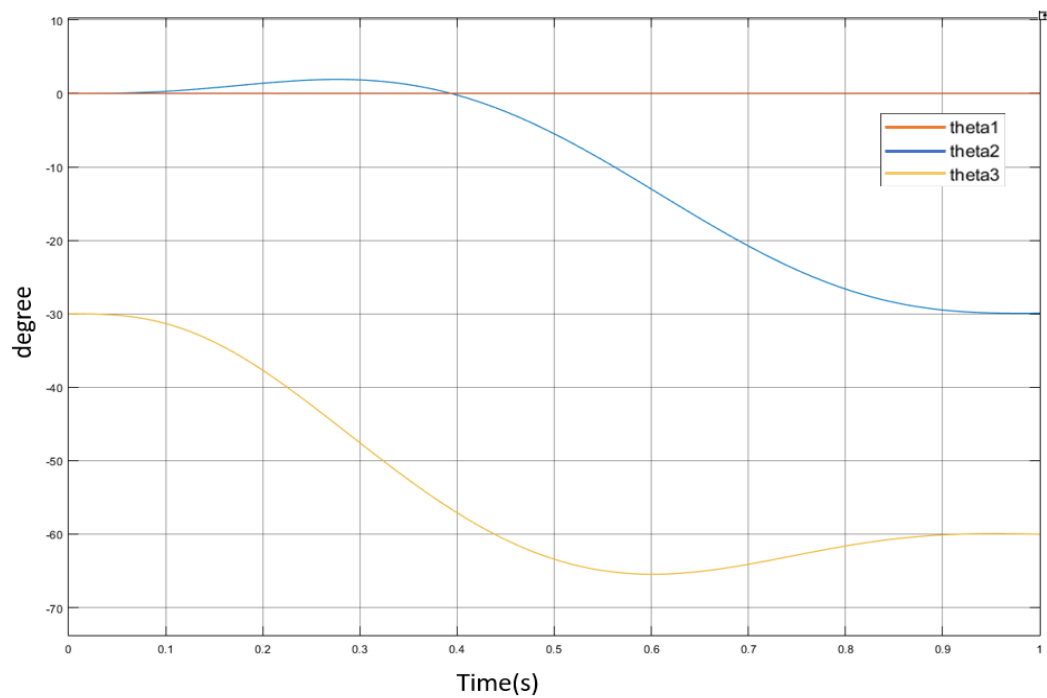
Nhận xét: Kết quả tính toán theo lý thuyết trùng hợp

2.3.2. Hoạch định robot vẽ đường thẳng (trong đó $\ddot{\theta}$ được tính theo công thức xấp xỉ đạo hàm):

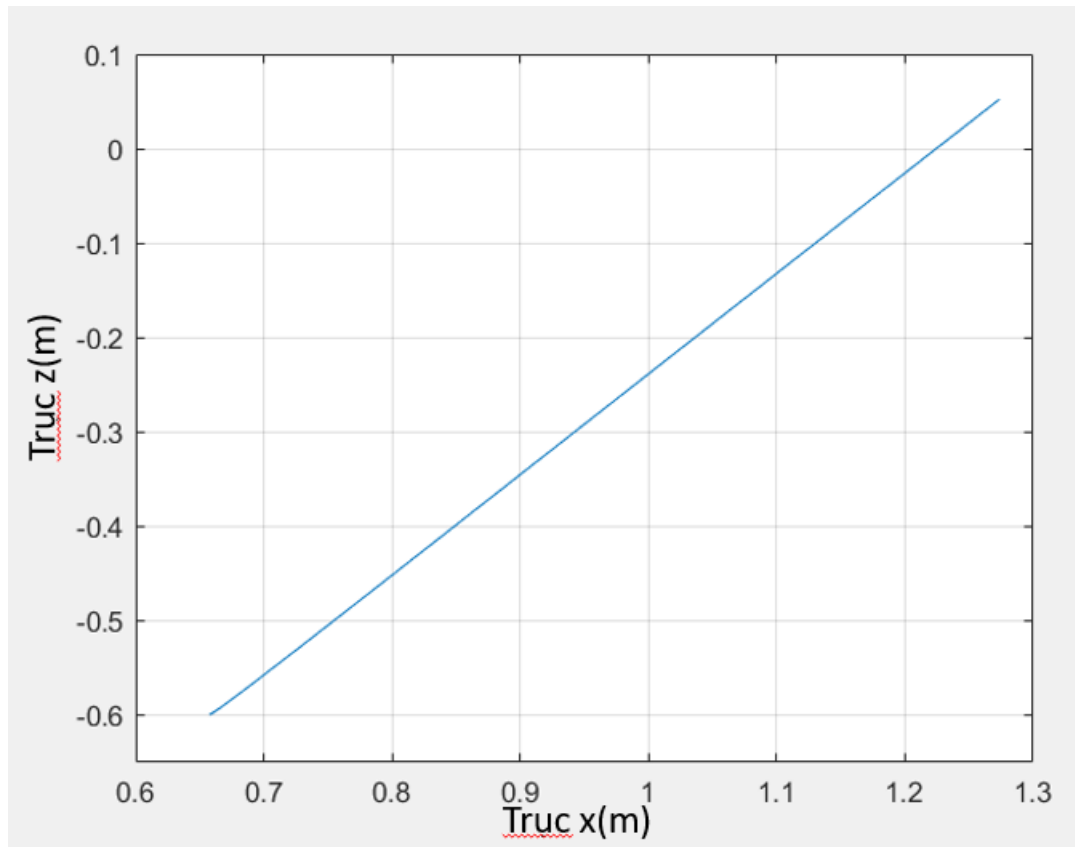
Từ công thức bậc 5 ta hoạch định đường thẳng AB có tọa độ (x,y,z) điểm đầu A là (1273,94 0 52,5) và điểm cuối B là (656,21 0 -600) là ta tính các góc θ_1 , θ_2 , θ_3 tương ứng như sau: $\theta_1=0$; θ_2 thay đổi từ 0 tới -30° ; θ_3 thay đổi từ -30° tới -60° ;



Hình 2.6: Sự thay đổi của 3 góc θ_1 , θ_2 , θ_3



Hình 2.7: Sự thay đổi của 3 torque θ_1 , θ_2 , θ_3 bên simulink



Hình 2.8: Kết quả hoạch định quỹ đạo đi qua hai điểm trên mặt phẳng xOz

Nhận xét:

- Kết quả hoạch định không giống với hoạch định ban đầu, chỉ đạt được thẳng trên một đoạn nhỏ do nhóm sử dụng công thức θ và $\ddot{\theta}$ xấp xỉ

3. MÔ PHỎNG ĐIỀU KHIỂN MATLAB

3.1. Lý thuyết điều khiển hệ phi tuyến MIMO

3.1.1. Lý thuyết điều khiển hệ phi tuyến MIMO:

Công thức tổng quát cho hệ MIMO: $\tau = M(\theta) \ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\theta, \dot{\theta})$

- Phần mô hình: $\tau = \alpha \tau' + \beta$

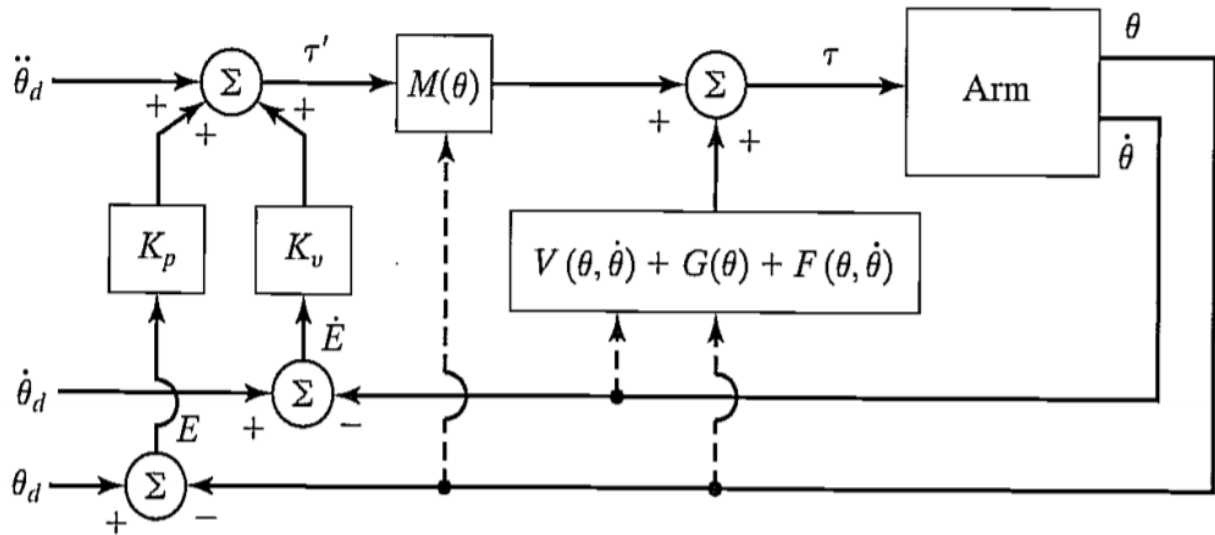
Với $\alpha = M(\theta)$ và $\beta = V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + F(\theta, \dot{\theta})$

- Phần servo: $\tau' = \ddot{\theta}_d + K_v \dot{E} + K_p E$

Với $E = \theta_d - \theta$, ta suy ra luật điều khiển như sau:

$$\ddot{E} + K_v \dot{E} + K_p E = 0$$

3.1.2. Sơ đồ khối điều khiển hệ thống:



Hình 1.1 Sơ đồ điều khiển hệ thống

3.2. Mô phỏng điều khiển

3.2.1. Mô phỏng điều khiển từ điểm tới điểm:

- Điểm bắt đầu A(1273.94, 0, 52.5) ứng với các góc khớp lần lượt là $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$, $\theta_3 = -30^\circ$.
- Điểm kết thúc là B(478.66, 478.66, -600) ứng với các góc khớp lần lượt là $\theta_1 = 45^\circ$, $\theta_2 = -30^\circ$, $\theta_3 = -60^\circ$.

Nhận xét:

- Mô phỏng từ điểm A tới điểm B với vận tốc góc tính theo công thức xấp xỉ đạo hàm cho kết quả quỹ đạo trong không gian di chuyển là một đường cong.

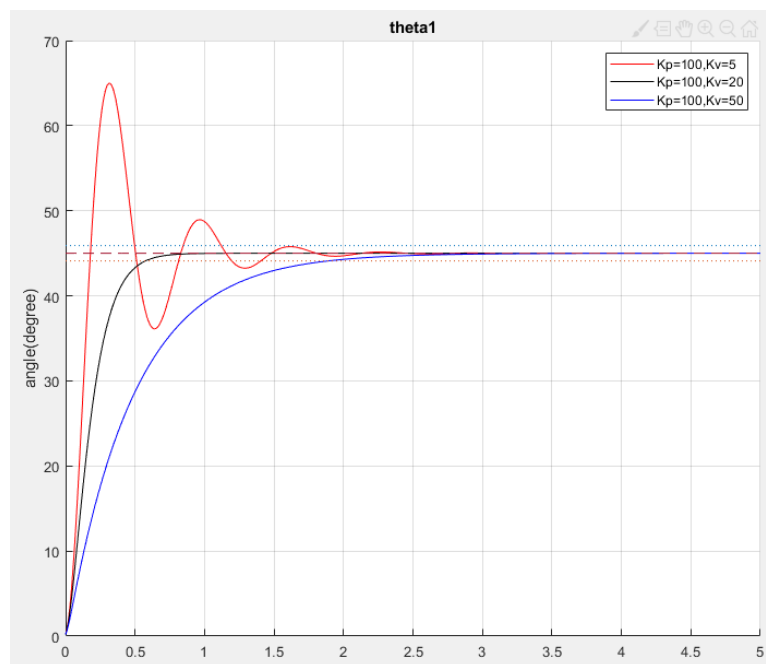
Lựa chọn thông số:

Chọn $K_p = [100 \ 100 \ 100]$, $K_v = [5 \ 5 \ 5]$ ($\Delta < 0$)

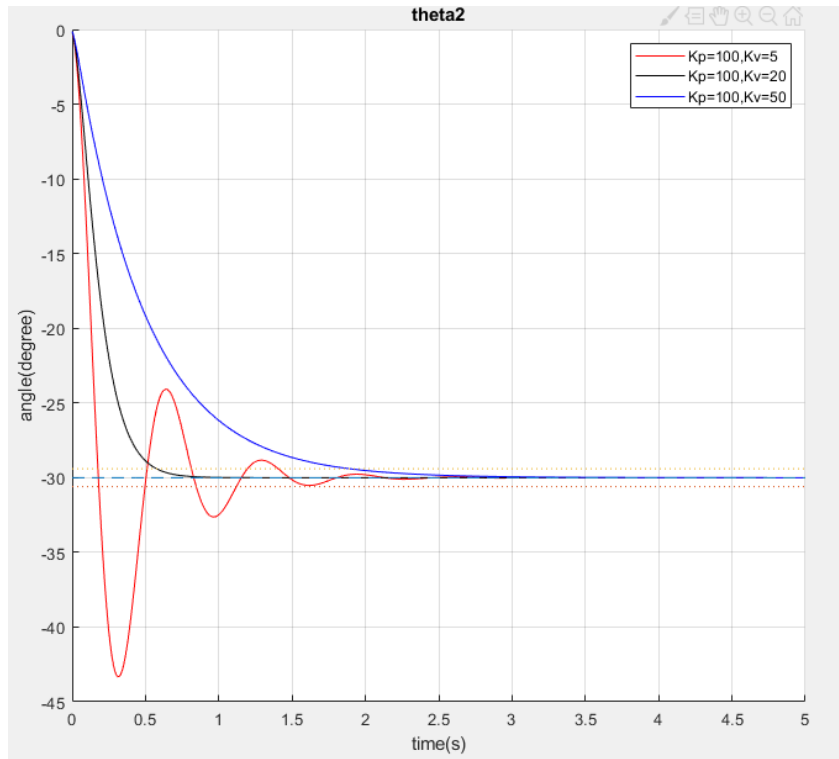
Chọn $K_p = [100 \ 100 \ 100]$, $K_v = [20 \ 20 \ 20]$ ($\Delta = 0$)

Chọn $K_p = [100 \ 100 \ 100]$, $K_v = [50 \ 50 \ 50]$ ($\Delta > 0$)

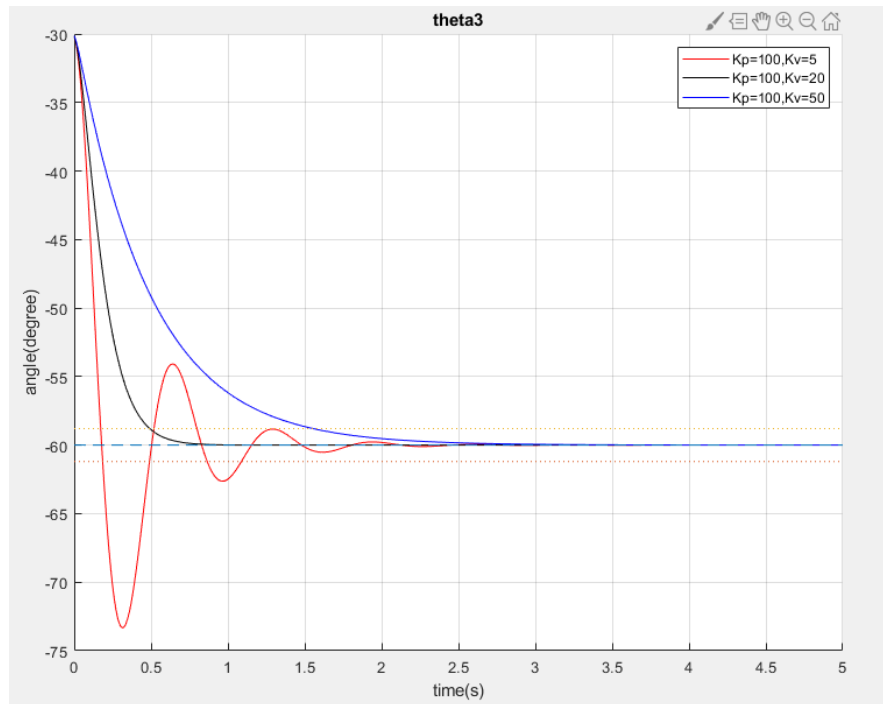
Thay các trường hợp K_p , K_v như trên vào hệ thống, ta thu được kết quả đáp ứng góc ở các khớp như sau:



Hình 3.1: Đáp ứng của θ_1

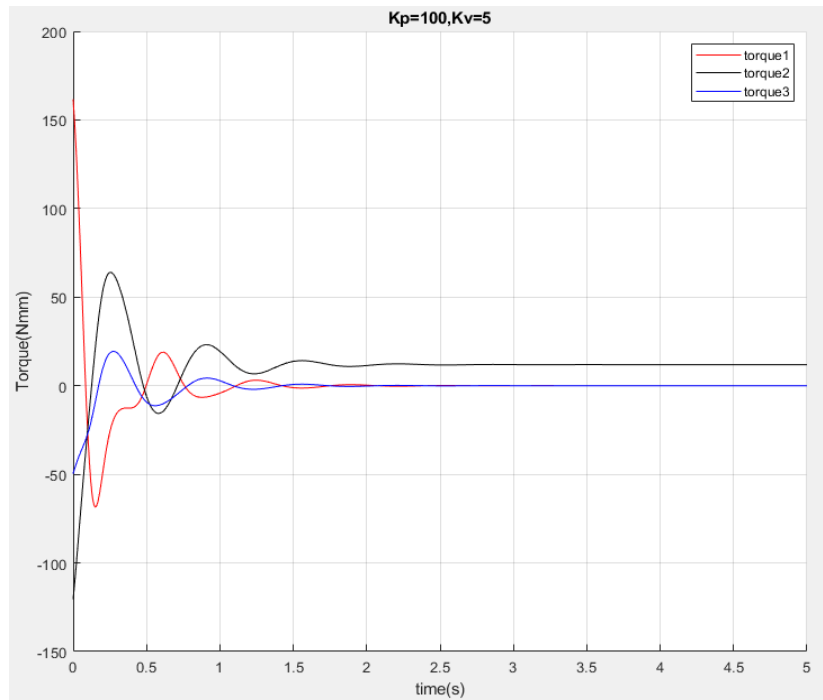


Hình 3.2: Đáp ứng của θ_2

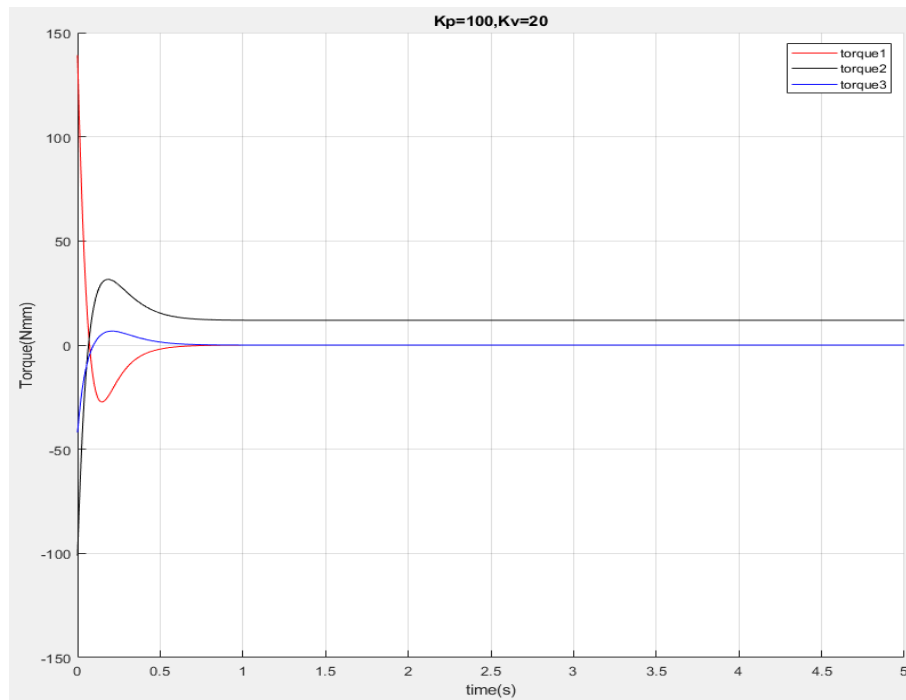


Hình 3.3: Đáp ứng của θ_3

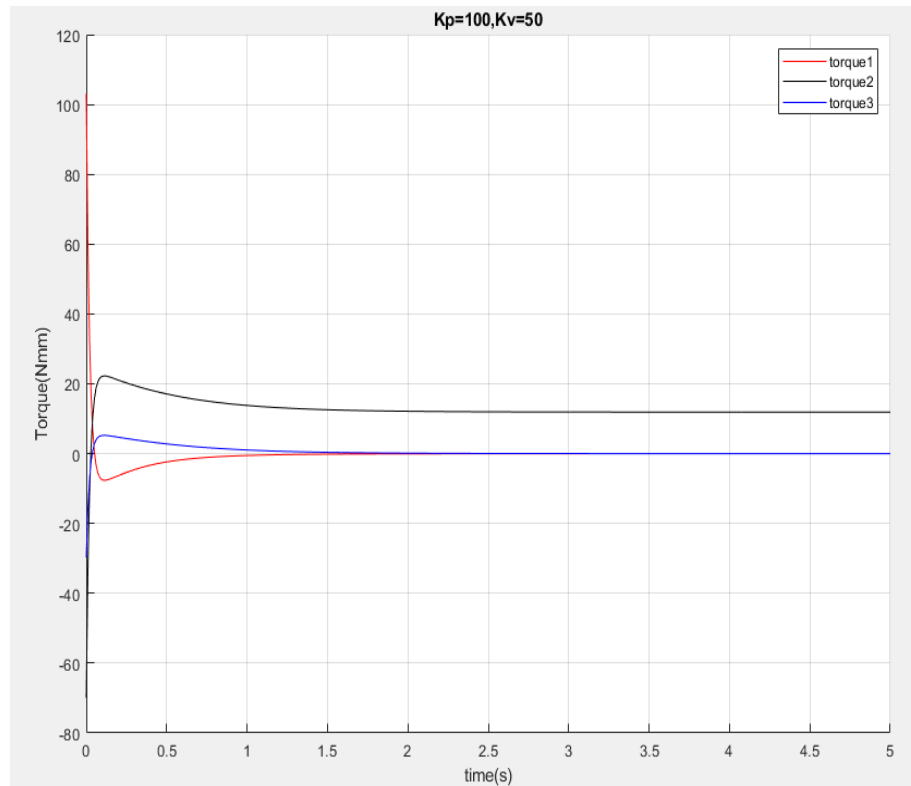
Torque các khớp với trường hợp $K_p = [100 \ 100 \ 100]$, $K_v = [5 \ 5 \ 5]$ ($\Delta < 0$):



Hình 3.4: Đáp ứng của momen các khớp với $K_p = [100 \ 100 \ 100]$, $K_v = [5 \ 5 \ 5]$ ($\Delta < 0$)



Hình 3.5: Đáp ứng của momen các khớp với
 $K_p = [100 \ 100 \ 100]$, $K_v = [20 \ 20 \ 20]$ ($\Delta = 0$)



Hình 3.6: Đáp ứng của momen các khớp với
 $K_p = [100 \ 100 \ 100], K_v = [50 \ 50 \ 50] (\Delta > 0)$

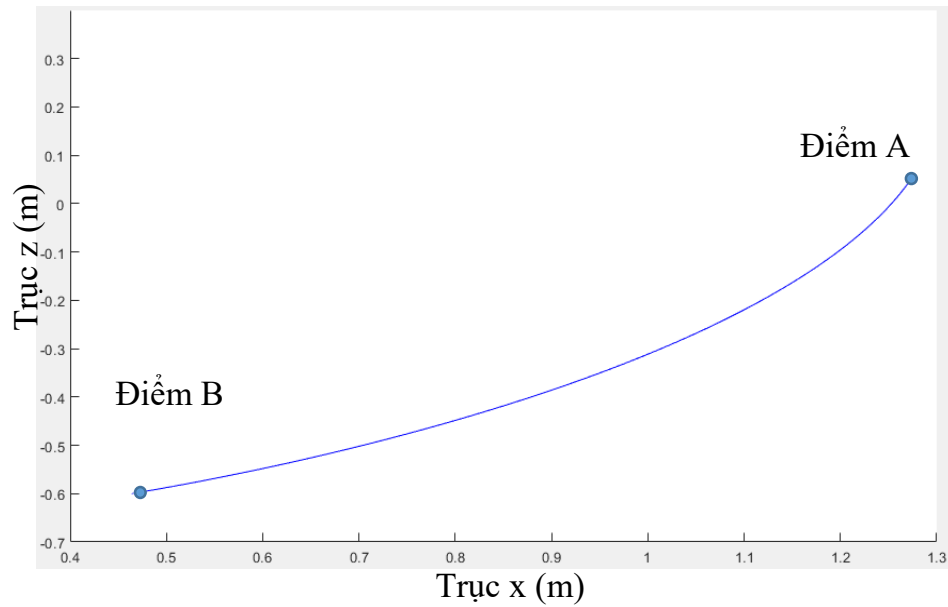
Nhận xét

- Kết quả bộ thông số $K_p = [100 \ 100 \ 100], K_v = [20 \ 20 \ 20]$ cho kết quả tốt nhất.
- Bộ thông số này cho kết quả thời gian đáp ứng nhanh và không dao động so với 2 bộ số còn lại.

Ta thu được các kết quả quỹ đạo điểm trên mặt phẳng xOz và xOy của 2 bộ số $K_p = [100 \ 100 \ 100], K_v = [20 \ 20 \ 20] (\Delta = 0)$ và $K_p = [100 \ 100 \ 100], K_v = [5 \ 5 \ 5] (\Delta < 0)$, như sau:

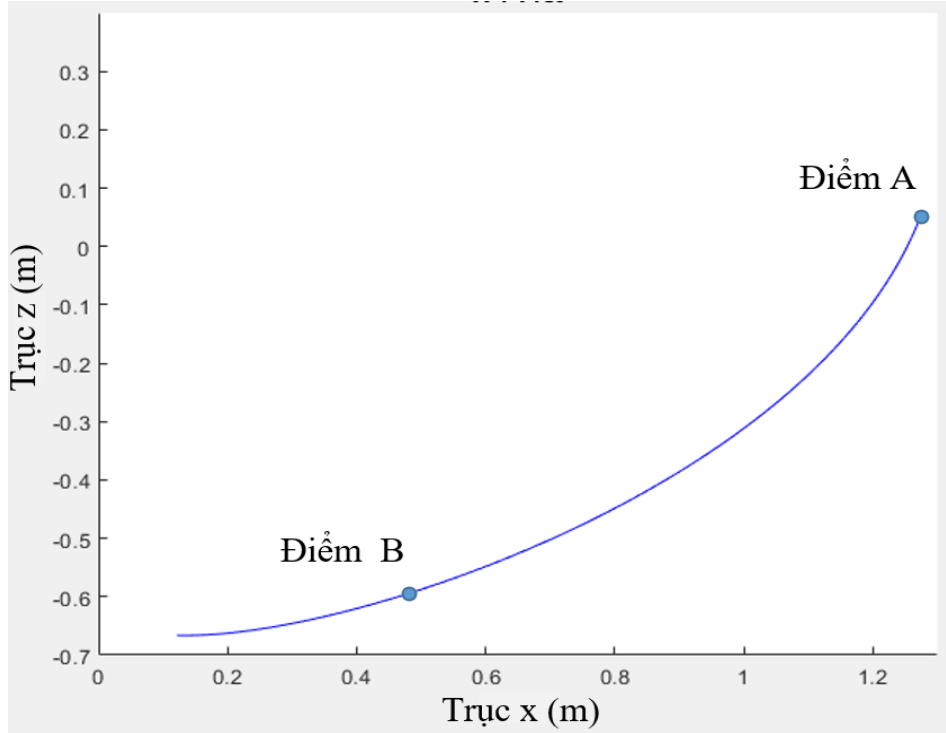
- Quỹ đạo trên mặt phẳng xOz.

+ Với $K_p = [100 \ 100 \ 100], K_v = [20 \ 20 \ 20] (\Delta = 0)$



Hình 3.7: Quỹ đạo đầu công tác trên mặt phẳng xOz với $K_p = 100, K_v = 5$

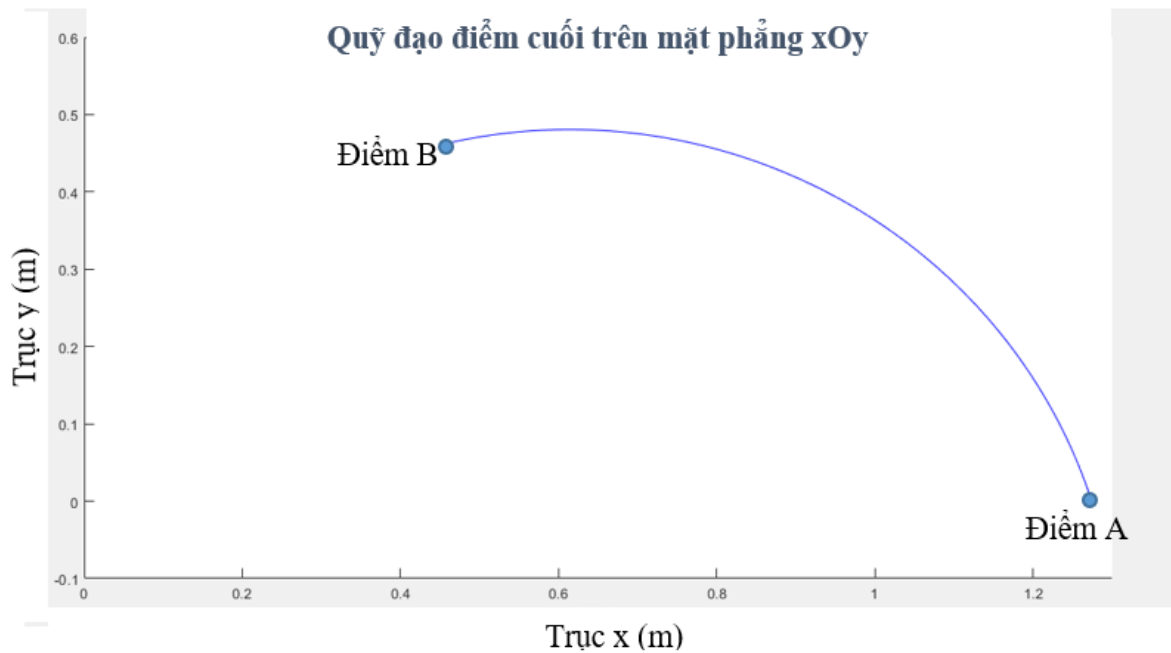
+ Với $K_p = [100 \ 100 \ 100], K_v = [5 \ 5 \ 5] (\Delta < 0)$



Hình 3.8: Quỹ đạo điểm cuối trên mặt phẳng xOz với $K_p = 100, K_v = 5$

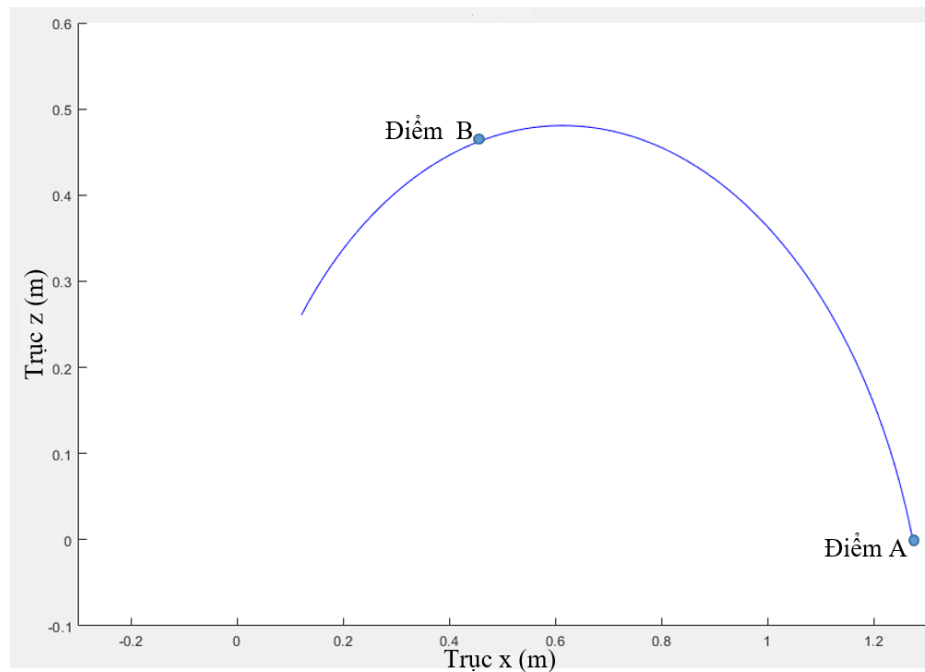
- Quỹ đạo trên mặt phẳng xOy.

+ Với $K_p = [100 \ 100 \ 100]$, $K_v = [20 \ 20 \ 20]$ ($\Delta = 0$)



Hình 3.9: Quỹ đạo điểm cuối trên mặt phẳng xOy với $K_p = 100$, $K_v = 20$

+ Với $K_p = [100 \ 100 \ 100]$, $K_v = [5 \ 5 \ 5]$ ($\Delta < 0$)

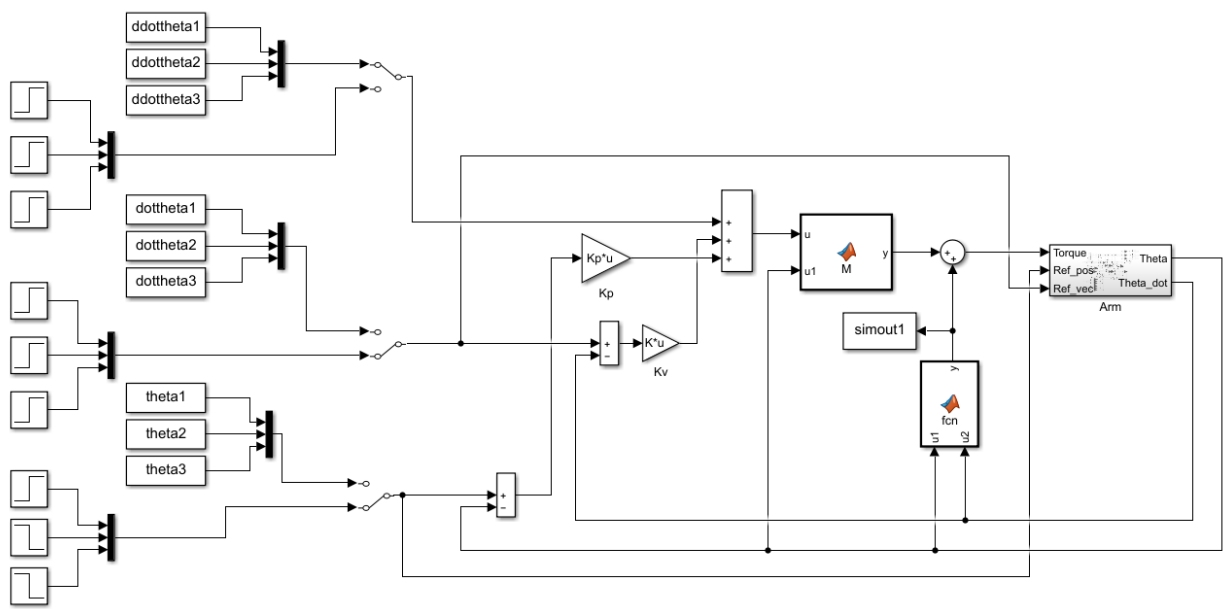


Hình 3.10: Quỹ đạo điểm cuối trên mặt phẳng xOy với $K_p = 100$, $K_v = 5$

3.2.2. Mô phỏng điều khiển từ hoạch điểm theo đường thẳng:

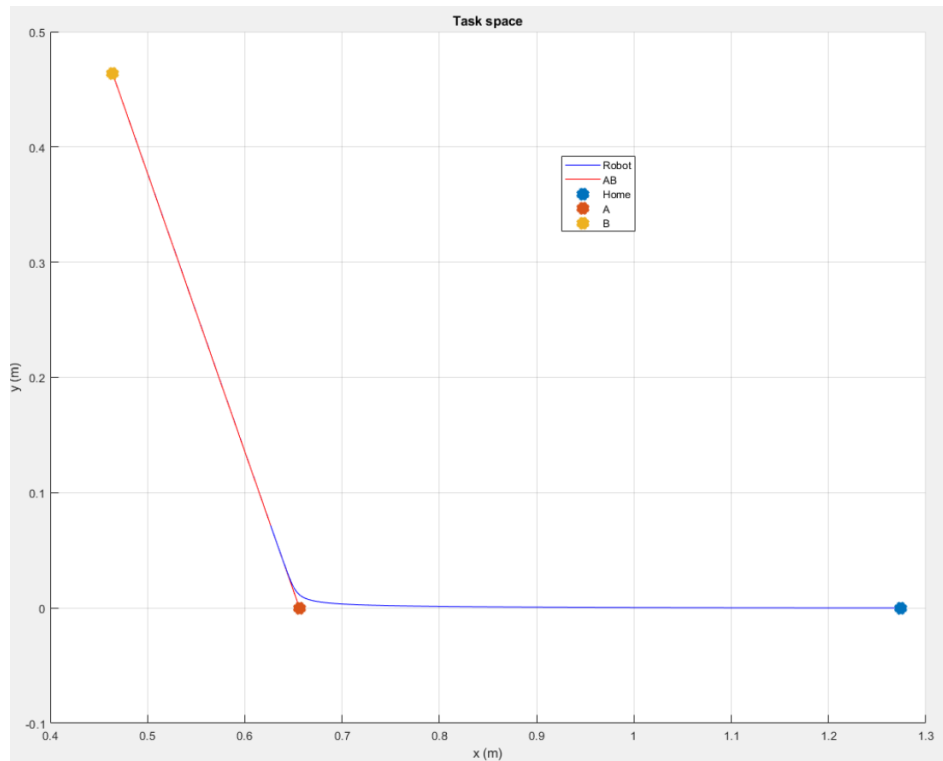
- Ta chọn bộ thông số $K_p = [100 \ 100 \ 100]$, $K_v = [20 \ 20 \ 20]$. Thời gian mô phỏng đi từ A đến B là 5s với quỹ đạo là đường thẳng.
- Điểm Home H(1273.95, 0, 52.5) ứng với các góc khớp lần lượt là $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = -30^\circ$.
- Điểm bắt đầu A(651.21, 0, -600) ứng với các góc khớp lần lượt là $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = -30^\circ$, $\theta_3 = -60^\circ$.
- Điểm kết thúc B(464.01, 464.01, -600) ứng với các góc khớp lần lượt là $\theta_1 = 45^\circ$, $\theta_2 = -30^\circ$, $\theta_3 = -60^\circ$.

Sơ đồ khối trên Simulink

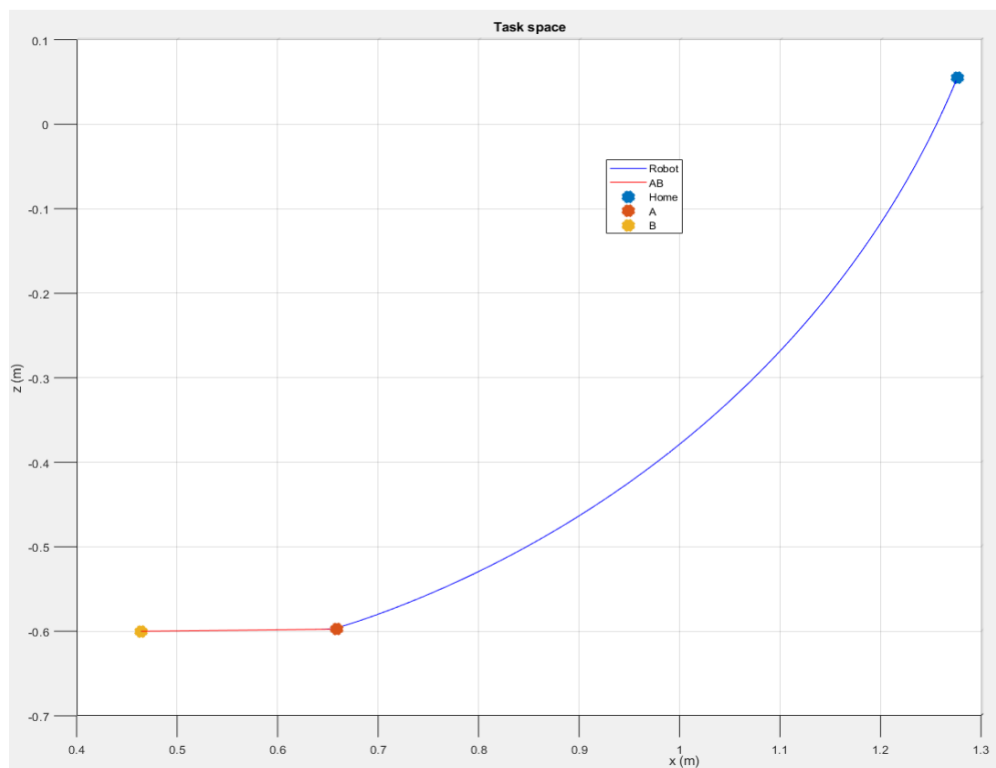


Hình 3.11: Sơ đồ khối Simulink

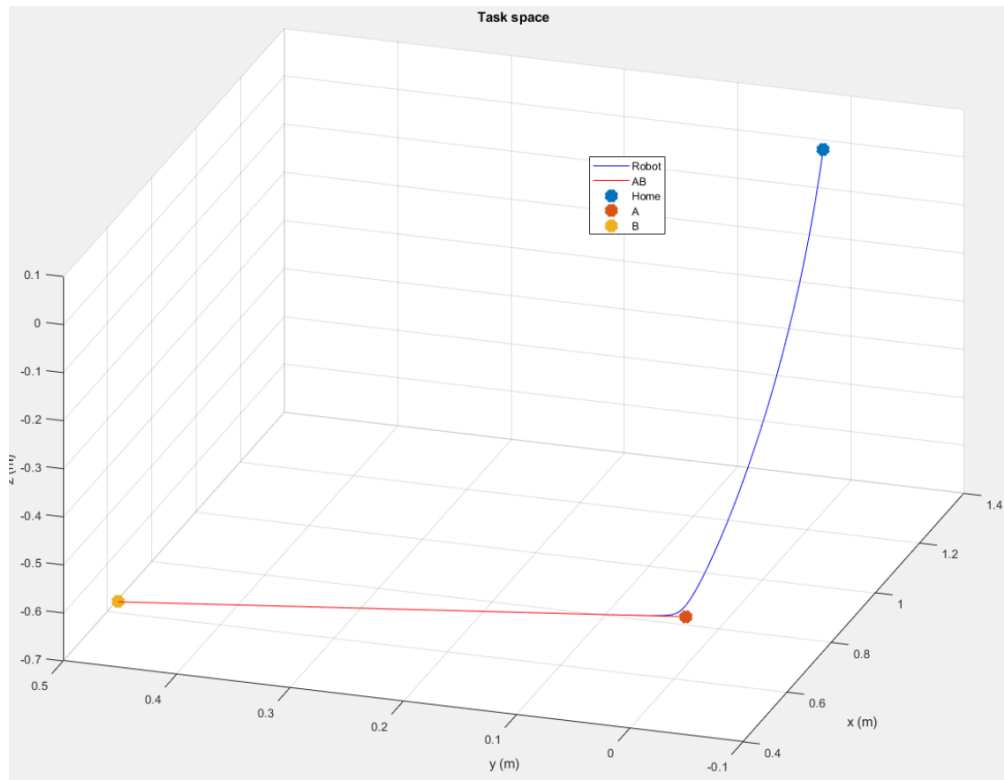
Chạy mô phỏng simulink cho trường hợp thông số và các điểm đã chọn, thu được quỹ đạo công tác:



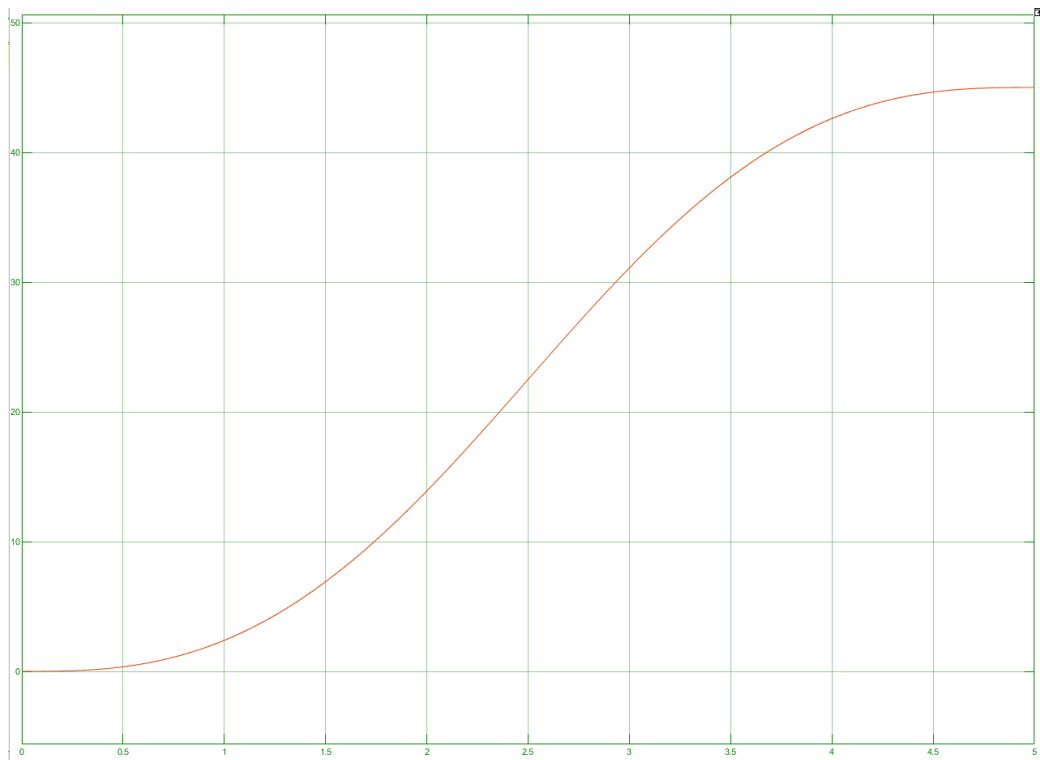
Hình 3.12: Quỹ đạo điểm công tác cuối trên mặt phẳng xOy



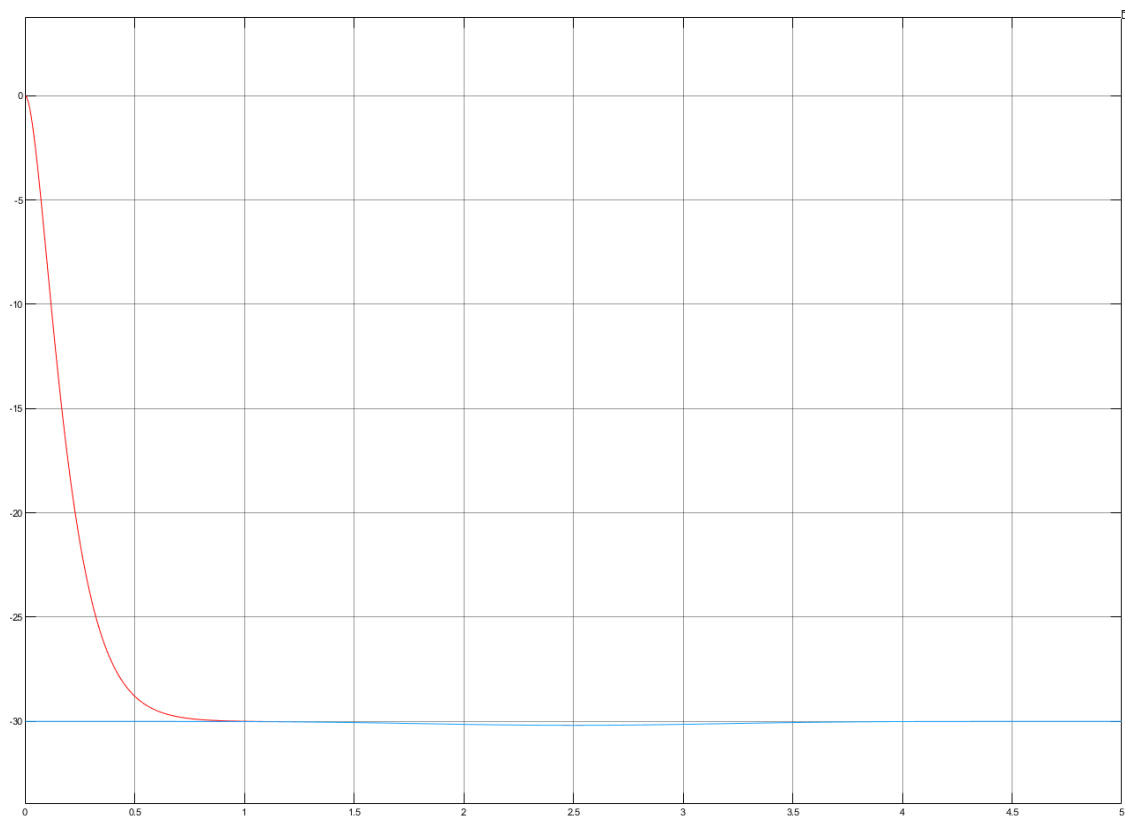
Hình 3.13: Quỹ đạo điểm công tác cuối trên mặt phẳng xOz



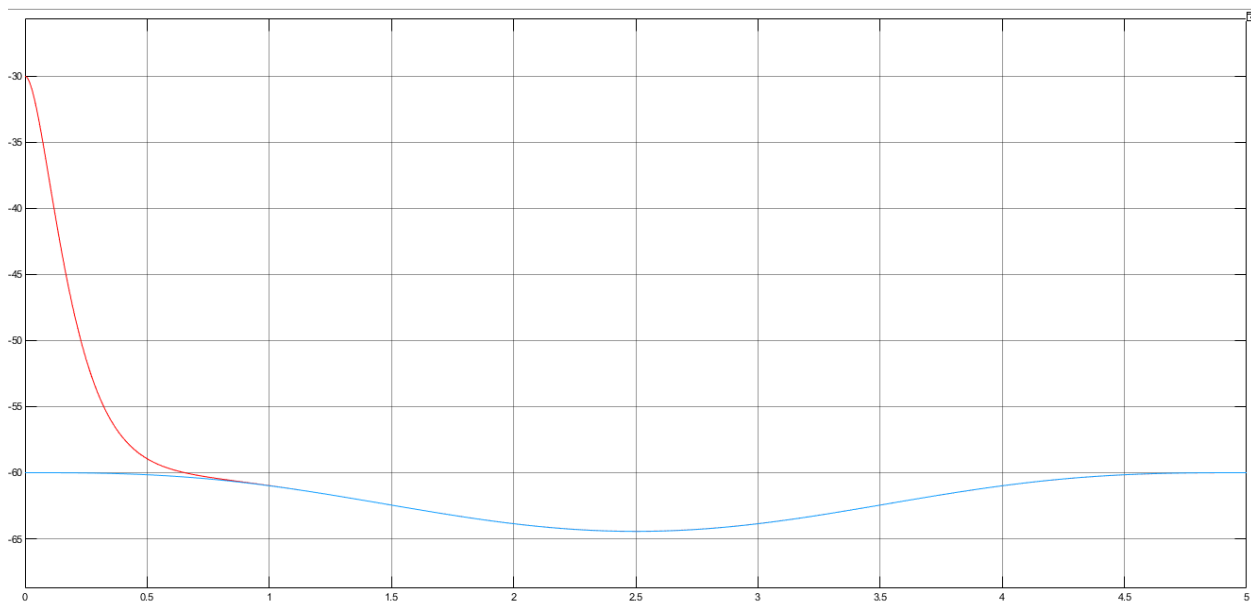
Hình 3.14: Quỹ đạo điểm công tác cuối góc nhìn 3D



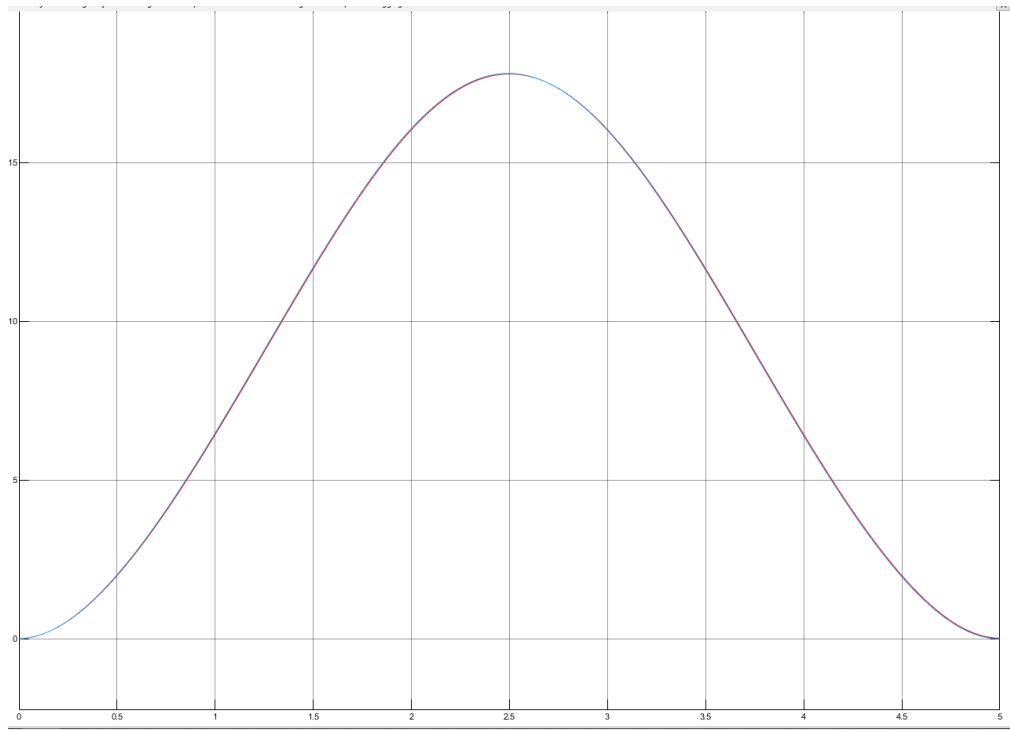
Hình 3.15: Kết quả giữa θ_1 mong muốn và thực tế



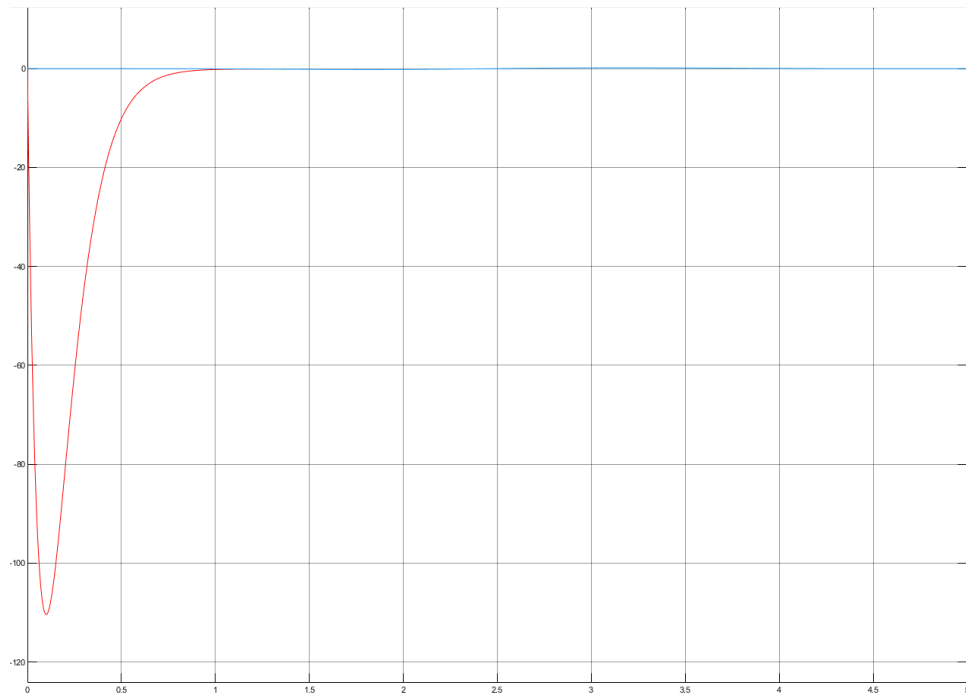
Hình 3.16: Kết quả giữa θ_2 mong muốn và thực tế



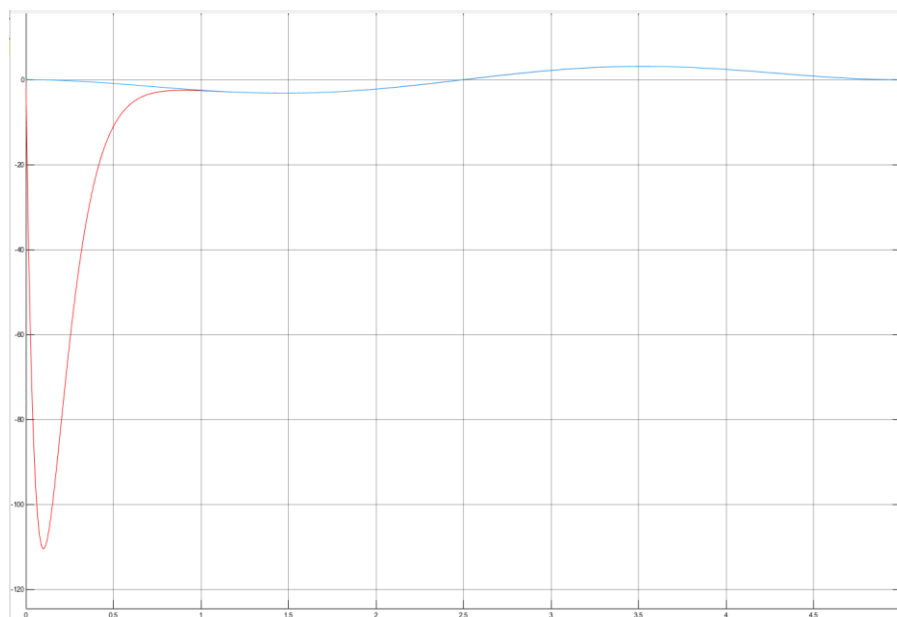
Hình 3.17: Kết quả giữa θ_3 mong muốn và thực tế



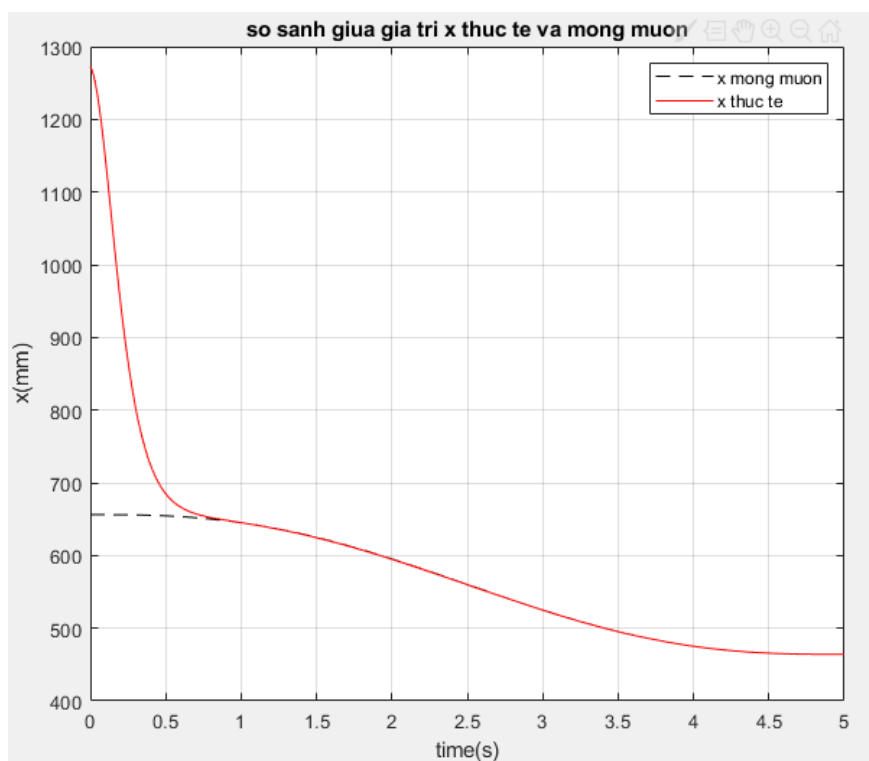
Hình 3.18: Kết quả giữa θ_1 mong muốn và thực tế



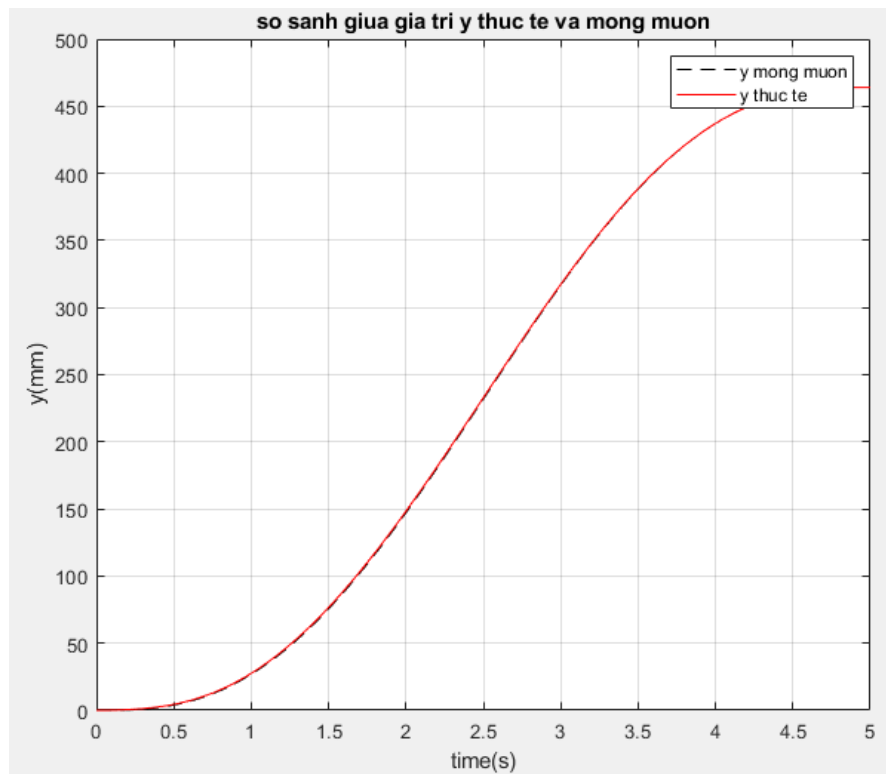
Hình 3.19: Kết quả giữa θ_2 mong muốn và thực tế



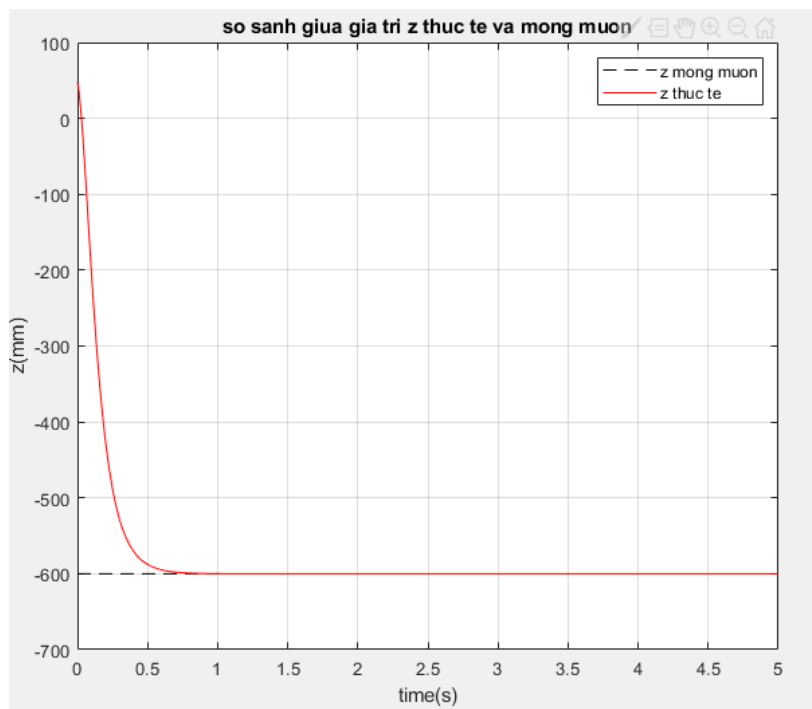
Hình 3.20: Kết quả giữa θ_3 mong muốn và thực tế



Hình 3.21: So sánh giữa giá trị x thực tế và mong muốn



Hình 3.22: So sánh giữa giá trị y thực tế và mong muốn



Hình 3.23: So sánh giữa giá trị z thực tế và mong muốn

Nhận xét

- Điểm H (điểm Home) bám vào quỹ đạo từ điểm A đến điểm B với tốc độ nhanh
- Các đáp ứng của góc các khớp ổn định không dao động và không vọt lố
- Các kết quả về vận tốc góc của khớp 2 và khớp 3 có độ vọt lố cao