

**ĐÁP ÁN ĐỀ THI GIỮA KỲ**

Môn: Phương pháp Toán

Khóa: \_\_\_\_\_

Ngày Thi: \_\_\_\_\_

**Bài 1.** Tổng cộng 3 điểm, mỗi câu 1 điểm.

Tập  $\mathbb{D}[\sqrt{7}] = \{x + y\sqrt{7} / x, y \in \mathbb{Z}; x^2 - 7y^2 = 1\}$  với phép nhân.

**1) Chứng minh phép nhân là phép toán hai ngôi trên  $\mathbb{D}[\sqrt{7}]$ .**

Nhờ tính chất  $x^2 - 7y^2 = 1$  và  $a^2 - 7b^2 = 1$  ta có thể chứng minh rằng

$$(x + y\sqrt{7})(a + b\sqrt{7}) = D + E\sqrt{7} \text{ với } D, E \text{ thỏa điều kiện } D^2 - 7E^2 = 1.$$

**2) Phép cộng có là phép toán hai ngôi trên  $\mathbb{D}[\sqrt{7}]$  hay không?**

Dễ tìm phản ví dụ, rất nhiều.

**3) Cấu trúc  $(\mathbb{D}[\sqrt{7}], \cdot)$  có tạo thành nhóm giao hoán hay không?**

Dễ thấy cấu trúc này là nhóm nhân giao hoán, chỉ cần để ý là  $A = x + y\sqrt{7}$  với  $x^2 - 7y^2 = 1$  thì phần tử đảo là  $A^{-1} = x - y\sqrt{7}$  vì các điều kiện sau thỏa mãn:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1 \text{ và } x^2 - 7(-y)^2 = 1.$$

**Bài 2.** Tổng cộng 7 điểm, chia thích hợp 1 + 1 + 1 + 2 + 2.

Tập hợp  $\mathbb{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{Z}_n; (ac, n) = 1 \right\}$  với phép nhân ma trận và  $n \geq 2$ .

**1) Tập hợp này có bao nhiêu phần tử?**

Để ý là điều kiện  $(ac, n) = 1$  đưa đến  $a, c \in U(\mathbb{Z}_n)$ . Từ đó suy ra số tổ hợp (cũng là số phần tử của tập  $\mathbb{M}$ ) là  $|\mathbb{Z}_n| \cdot |U(\mathbb{Z}_n)| \cdot |U(\mathbb{Z}_n)| = n \cdot [\varphi(n)]^2$ .

**2) Phép toán nhân ma trận có là phép toán hai ngôi trên  $\mathbb{M}$  hay không?**

$$\text{Để ý là } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay + bz \\ 0 & cz \end{pmatrix},$$

Từ điều kiện  $(ac, n) = 1$  và  $(xz, n) = 1$  đưa đến  $a, c, x, z \in U(\mathbb{Z}_n)$ . Do đó  $ax, cz \in U(\mathbb{Z}_n)$

và ta suy ra  $\begin{pmatrix} ax & ay + bz \\ 0 & cz \end{pmatrix} \in \mathbb{M}$ , nên phép nhân ma trận và phép toán hai ngôi trên tập  $\mathbb{M}$ .

**3) Phép toán nhân ma trận có giao hoán hay không?**

Không giao hoán, dễ tìm phản ví dụ,

**4) Tập  $M$  có thể tạo thành cấu trúc gì đối với phép nhân ma trận?**

Cấu trúc nhóm. Sinh viên cần làm chi tiết.

**5) Dựa trên  $U(\mathbb{M})$  và thuật toán đã luyện tập, không quan trọng kết quả.**