

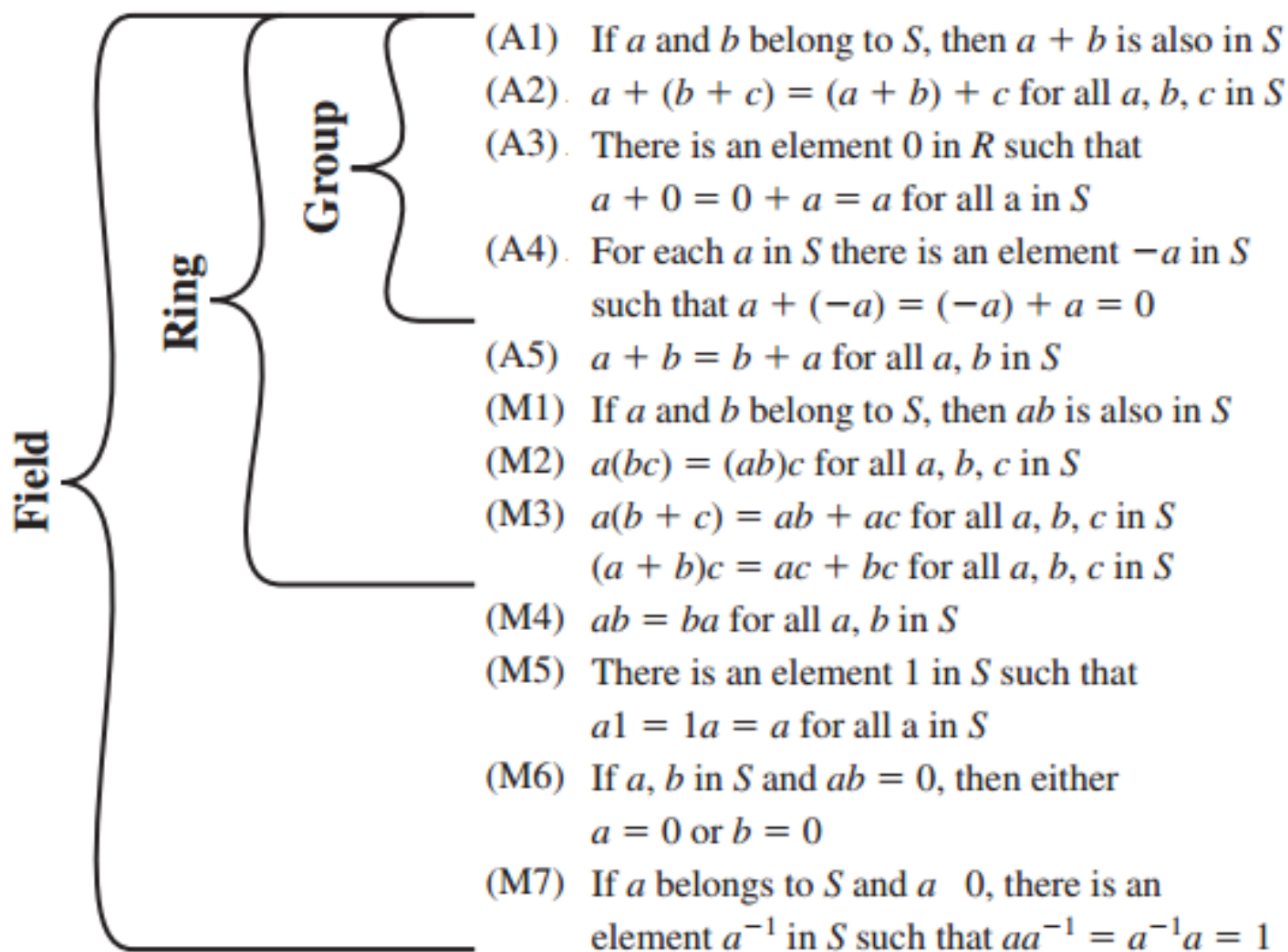
Bài 3.

Trường hữu hạn & Số học modulo

Thời lượng 8 tiết
Lương Thái Lê

Tình huống dẫn nhập

- Cần xây dựng một “tập hữu hạn các số” và các phép toán trên tập đó sao cho đảm bảo tính đóng
 - Khi đó có thể kiểm soát được các kết quả do chúng không trở nên quá lớn và có định dạng có thể khai báo trước được
- => Ứng dụng cấu trúc toán học đó trên máy tính và đem lại hiệu quả lớn



Nội dung

1. Quan hệ đồng dư
2. Số học Modulo
3. Phép toán nghịch đảo và Trường hữu hạn
4. Hàm Euler
5. Một số định lý số học cơ bản
6. Thuật toán bình phương, nhân liên tiếp và phép toán lũy thừa

1.1 Phép toán modulo

- Giả sử n là số nguyên dương, a là số nguyên, nếu:

$$a = q.n + r$$

trong đó r là phần dư dương $0 \leq r < n$ và q là thương nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng a/n

- Khi đó ký hiệu phần dư dương $r = a \bmod n$ và $q = \lfloor a/n \rfloor$, vậy

$$a = \lfloor a/n \rfloor . n + a \bmod n \quad (*)$$

Ví dụ: $11 \bmod 7 = 4$, vì $11 = 1.7 + 4$

$(-11) \bmod 7 = 3$, vì $-11 = -2.7 + 3$

$100 \bmod 13 = 9$, vì $100 = 7.13 + 9$

$(-100) \bmod 13 = 4$, vì $-100 = -8.13 + 4$

Câu hỏi: Biểu diễn () có duy nhất không?*

Trả lời: Duy nhất, do số hạng thứ 2 qui ước là số nguyên dương giữa 0 và $n-1$

1.2. Quan hệ đồng dư

- Nếu: $a \bmod n = b \bmod n$, thì ta viết $a \equiv b \bmod n$
gọi là a và b có quan hệ đồng dư theo n
ví dụ: $100 \equiv 34 \bmod 11$ vì $100 \bmod 11 = 1 = 34 \bmod 11$
 $22 \equiv (-8) \bmod 10$ vì $22 \bmod 10 = 2 = -8 \bmod 10$
- **Định nghĩa**: Số b được gọi là đại diện của a theo mod n , nếu
 $a \equiv b \bmod n$ và $0 \leq b \leq n - 1$.
(Hay nếu $b = a \bmod n$, thì b là đại diện của a theo mod n)
ví dụ:
10 là đại diện của 100 theo mod 15, vì $100 \bmod 15 = 10$
5 là đại diện của -10 theo mod 15, vì $(-10) \bmod 15 = 5$

1.3. Quan hệ đồng dư theo 7 (Module 7)

- Các phần tử cùng cột có quan hệ đồng dư với nhau
 $-12 \bmod 7 \equiv -5 \bmod 7 \equiv 2 \bmod 7 \equiv 9 \bmod 7$
- Tập các đại diện theo modulo 7 là **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6**
Ký hiệu [2] = { ..., -12, -5, 2, 9, ... }
vì $-12 \bmod 7 = -5 \bmod 7 = 2 \bmod 7 = 9 \bmod 7 = 2$

...

-21	-20	-19	-18	-17	-16	-15
-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8
-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34

- Tập các đại diện của các số nguyên theo modulo n gồm n phần tử ký hiệu như sau

$$\mathbb{Z}_n = \{ \mathbf{0, 1, 2, 3, ..., n-1} \}$$

Nội dung

1. Quan hệ đồng dư
2. Số học Modulo
3. Phép toán nghịch đảo và Trường hữu hạn
4. Hàm Euler
5. Một số định lý số học cơ bản
6. Thuật toán bình phương, nhân liên tiếp và phép toán lũy thừa

2.1. Các phép toán số học modulo

- Cho trước một số nguyên dương n
- Thực hiện phép toán số học trên modulo:

$$(a \pm b) \bmod n = [a \bmod n \pm b \bmod n] \bmod n \quad (*)$$

$$(a.b) \bmod n = [a \bmod n . b \bmod n] \bmod n \quad (**)$$

- Cách 1: Thực hiện các phép toán trên các số nguyên như các phép cộng, nhân các số nguyên thông thường sau đó rút gọn lại bằng phép lấy modulo
- Cách 2: Vừa tính toán vừa kết hợp với rút gọn theo modulo tại bất cứ thời điểm nào

Định lý: Cho m, n là hai số nguyên dương, khi đó

$$(-m) \bmod n = n - (m \bmod n)$$

Ví dụ: $-153 \bmod 15 = 15 - 153 \bmod 15 = 15 - 3 = 12$

Câu hỏi: Bạn áp dụng công thức trên như thế nào?

Trả lời: thay các số bằng các đại diện của chúng hoặc các số đồng dư của chúng

2.2. Số học đồng dư

=> Có thể thực hiện các phép toán chỉ trên các đại diện theo modulo n:

$$\mathbb{Z}_n = \{ 0, 1, 2, 3, \dots, n-1 \}$$

- Ví dụ 1:

- $(144 + 215) \bmod 7 = (144 \bmod 7 + 215 \bmod 7) \bmod 7 = (4 + 5) \bmod 7 = 2$

- Ví dụ 2:

- $(144 * 315) \bmod 150 =$
 $(144 \bmod 150 * 315 \bmod 150) \bmod 150 =$
 $((-6) \bmod 150 * 15 \bmod 150) \bmod 150 =$
 $(-90) \bmod 150 = 60 \bmod 150 = 60$

2.3. modulo 8 với phép cộng

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

2.4. modulo 8 với phép nhân

X	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

Nội dung

1. Quan hệ đồng dư
2. Số học Modulo
3. Phép toán nghịch đảo và Trường hữu hạn $GF(p)$
4. Hàm Euler
5. Một số định lý số học cơ bản
6. Thuật toán bình phương, nhân liên tiếp và phép toán lũy thừa

3.1. Ước số của số tự nhiên

- Số b không âm được gọi là ước số của a , nếu có số m sao cho

$$a = m.b \quad \text{với } a, b, m \text{ đều nguyên.}$$

- Tức là a chia hết cho b , ký hiệu

$$b|a \quad \text{hay} \quad a:b$$

- Ước số chung lớn nhất (great common divisor) của a và b
- $\text{GCD}(a,b)$ là ước số chung dương lớn nhất của a và b .
 - Ví dụ: $\text{GCD}(60,24) = 12$
- Nếu hai số a, b nguyên tố cùng nhau thì $\text{GCD}(a, b) = 1$,
 - Ví dụ $\text{GCD}(8,15) = 1$,

3.2. Thuật toán Euclid tìm ước chung lớn nhất

- Tính chất $\text{GCD}(a, b) = \text{GCD}(b, a \bmod b)$

với a, b là hai số tự nhiên và $b \leq a$

- Thuật toán Euclid tìm $\text{GCD}(a, b)$:

`EUCLID(a, b)`

1. `A = a; B = b`

2. `if B = 0 return A = gcd(a, b)`

3. `R = A mod B`

4. `A = B`

5. `B = R`

6. `goto 2`

3.3. Ví dụ: $\text{GCD}(1970, 1066) = \text{GCD}(2, 0) = 2$

$$1970 = 1 \times 1066 + 904 \quad \text{gcd}(1066, 904)$$

$$1066 = 1 \times 904 + 162 \quad \text{gcd}(904, 162)$$

$$904 = 5 \times 162 + 94 \quad \text{gcd}(162, 94)$$

$$162 = 1 \times 94 + 68 \quad \text{gcd}(94, 68)$$

$$94 = 1 \times 68 + 26 \quad \text{gcd}(68, 26)$$

$$68 = 2 \times 26 + 16 \quad \text{gcd}(26, 16)$$

$$26 = 1 \times 16 + 10 \quad \text{gcd}(16, 10)$$

$$16 = 1 \times 10 + 6 \quad \text{gcd}(10, 6)$$

$$10 = 1 \times 6 + 4 \quad \text{gcd}(6, 4)$$

$$6 = 1 \times 4 + 2 \quad \text{gcd}(4, 2)$$

$$4 = 2 \times 2 + 0 \quad \text{gcd}(2, 0)$$

3.4. Thuật toán Euclide mở rộng và phép toán nghịch đảo

- Định nghĩa: **Số $a < m$ được gọi là nghịch đảo của b theo mod m , ký hiệu $a = b^{-1} \bmod m$, nếu**

$$(a.b) \bmod m = 1$$

Ví dụ: $7 = 8^{-1} \bmod 11$, vì $(7.8) \bmod 11 = 1$

- **Xét tập $Z_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$, với p là số nguyên tố**
 - Với các phép toán cộng và nhân module
 - Trên Z_p mọi phần tử a khác 0 đều có phần tử nghịch đảo a^{-1} :
 $a \cdot a^{-1} = 1$
- Như vậy trên Z_p ta có thể thực hiện các phép toán cộng, trừ, nhân, chia (chia cho phần tử khác 0).
- Ví dụ phép chia:
 $2/8(\bmod 11) = 2 \cdot 8^{-1} (\bmod 11) = 2 \cdot 7 (\bmod 11) = 3$

3.5. Ví dụ phép nhân theo modulo 7

\times	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Tìm các cặp số là nghịch đảo của nhau theo modulo 7?
(1,1), (2,4), (4,2), (3,5), (5,3), (6,6)

3.6 Trường hữu hạn GF(p)

Property	Expression
Commutative Laws	$(w + x) \bmod n = (x + w) \bmod n$ $(w \times x) \bmod n = (x \times w) \bmod n$
Associative Laws	$[(w + x) + y] \bmod n = [w + (x + y)] \bmod n$ $[(w \times x) \times y] \bmod n = [w \times (x \times y)] \bmod n$
Distributive Law	$[w \times (x + y)] \bmod n = [(w \times x) + (w \times y)] \bmod n$
Identities	$(0 + w) \bmod n = w \bmod n$ $(1 \times w) \bmod n = w \bmod n$
Additive Inverse ($-w$)	For each $w \in Z_n$, there exists a z such that $w + z \equiv 0 \bmod n$

Nếu n là số nguyên tố thì:

$$\forall w \in Z_n, w \neq 0 \Rightarrow \exists w^{-1} \in Z_n : w \times w^{-1} \equiv 1 \bmod n$$

\Rightarrow Vậy Z_n là một trường hữu hạn nếu n là số nguyên tố

\Rightarrow **Ký hiệu GF(p) là trường hữu hạn theo modulo p**

3.7. Thuật toán Euclid mở rộng tìm số nghịch đảo (gốc)

. Tìm số nghịch đảo của b theo modul m

EXTENDED EUCLID(m, b)

1. $(A1, A2, A3) = (1, 0, m);$
 $(B1, B2, B3) = (0, 1, b)$
2. **if** $B3 = 0$
 return $A3 = \text{gcd}(m, b);$ no inverse
3. **if** $B3 = 1$
 return $B3 = \text{gcd}(m, b); B2 = b^{-1} \bmod m$
4. $Q = A3 \text{ div } B3$
5. $(T1, T2, T3) = (A1 - Q B1, A2 - Q B2, A3 - Q B3)$
6. $(A1, A2, A3) = (B1, B2, B3)$
7. $(B1, B2, B3) = (T1, T2, T3)$
8. **goto** 2

3.8. Giải thích thuật toán

- Các quan hệ sau là bất biến:

$$mT_1 + bT_2 = T_3; mA_1 + bA_2 = A_3; mB_1 + bB_2 = B_3$$

- Vì ban đầu: $m.1 + b.0 = m$; $m.0 + b.1 = b$ và

$$(T_1, T_2, T_3) = (A_1 - Q.B_1, A_2 - Q.B_2, A_3 - Q.B_3)$$

Do đó:

$$\begin{aligned} mT_1 + bT_2 &= m(A_1 - Q.B_1) + b(A_2 - Q.B_2) \\ &= (mA_1 + bA_2) - Q(mB_1 + bB_2) \\ &= A_3 - Q.B_3 = T_3 \end{aligned}$$

- Khi $B_3 = 1$:

$$mB_1 + bB_2 = 1 \text{ suy ra } bB_2 = 1 - mB_1 \text{ hay}$$

$$bB_2 = 1 \pmod{m}, \text{ Do đó: } B_2 = b^{-1} \pmod{m}$$

3.9. Ví dụ: Tìm nghịch đảo của 550 theo modulo 1759.

Thuật toán dừng khi $B_3 = 1$ và $550^{-1} \bmod 1759 = 355$

Q	A1	A2	A3	B1	B2	B3
—	1	0	1759	0	1	550
3	0	1	550	1	−3	109
5	1	−3	109	−5	16	5
21	−5	16	5	106	−339	4
1	106	−339	4	−111	355	1

3.10. Thuật toán Euclid mở rộng tìm số nghịch đảo (cải tiến)

. Tìm số nghịch đảo của b theo modul m

EXTENDED EUCLID (m, b)

1. $(A1, A2) = (0, m);$
 $(B1, B2) = (1, b)$
2. if $B2 = 0$
 return $A2 = \gcd(m, b);$ no inverse
3. if $B2 = 1$
 return $B2 = \gcd(m, b); B1 = b^{-1} \bmod m$
4. $Q = A2 \text{ div } B2$
5. $(T1, T2) = (A1 - Q B1, A2 - Q B2)$
6. $(A1, A2) = (B1, B2)$
7. $(B1, B2) = (T1, T2)$
8. goto 2

3.11. Ví dụ: Tìm nghịch đảo của 550 theo modulo 1759.

Thuật toán dừng khi $B_2 = 1$ và
 $550^{-1} \bmod 1759 = 355$

Q	A1	A2	B1	B2
—	0	1759	1	550
3	1	550	−3	109
5	−3	109	16	5
21	16	5	−339	4
1	−339	4	355	1

Nội dung

1. Quan hệ đồng dư
2. Số học Modulo
3. Phép toán nghịch đảo và Trường hữu hạn $GF(p)$
4. Hàm Euler
5. Một số định lý số học cơ bản
6. Thuật toán bình phương, nhân liên tiếp và phép toán lũy thừa

4.1. Các số nguyên tố

- Là các số nguyên dương chỉ có ước số là 1 và chính nó.
- Chúng không thể được viết dưới dạng tích của các số khác
- 1 là số nguyên tố, nhưng không quan tâm đến nó
- Danh sách các số nguyên tố nhỏ hơn 200

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103			
107	109	113	127	131	137	139	149	151	157					
163	167	173	179	181	191	193	197	199						

4.2. Các số nguyên tố cùng nhau

- Hai số a và b không có ước chung nào ngoài 1, được gọi là nguyên tố cùng nhau
 - Ví dụ: 8 và 15 là nguyên tố cùng nhau, vì ước của 8 là 1, 2, 4, 8, còn ước của 15 là 1, 3, 5, 15. Chỉ có 1 là ước chung
- Có thể xác định ước chung lớn nhất bằng cách trong các phân tích ra thừa số của chúng, tìm các thừa số nguyên tố chung và lấy bậc lũy thừa nhỏ nhất.
 - Mọi số tự nhiên bất kỳ đều có phân tích duy nhất ra lũy thừa các thừa số nguyên tố:
Ví dụ $91 = 7 \times 13$; $3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$
 - Vì $300 = 2^2 \times 3^1 \times 5^2$; $18 = 2^1 \times 3^2$ nên
 $\text{GCD}(18, 300) = 2^1 \times 3^1 \times 5^0 = 6$

4.3. Hàm Euler $\phi(n)$

- Khi thực hiện phép tính đồng dư $n \Rightarrow$ Tập đầy đủ các phần dư: $0, 1, 2, \dots, n-1$
- Xét tập rút gọn của tập phần dư trên bao gồm các số nguyên tố cùng nhau với n
- Ví dụ với $n = 10$
 - Tập đầy đủ các phần dư là $Z_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 - Tập rút gọn các phần dư nguyên tố với 10 là $\{1, 3, 7, 9\}$: có 4 phần tử
- **Định nghĩa**: Số các phần tử của tập rút gọn gồm các số nguyên tố cùng nhau với n trên tập Z_n là giá trị của hàm Euler của n , ký hiệu là $\phi(n)$.

$$\Rightarrow \phi(10) = 4$$

Câu hỏi: $\phi(20) = ?$

Trả lời: $\phi(20) = 8$: tập các số nguyên tố cùng nhau với 20: $\{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

4.5. Tính giá trị hàm Euler $\phi(n)$ (tiếp)

n	$\phi(n)$	Điều kiện
p	p-1	p là nguyên tố
p^t	$p^t - p^{t-1}$	p là số nguyên tố
s.t	$\phi(s) \cdot \phi(t)$	$\gcd(s,t) = 1$
p.q	$(p-1) \cdot (q-1)$	p,q là số nguyên tố

$$\phi(37) = 36$$

$$\phi(21) = \phi(3 \cdot 7) = (3-1) \times (7-1) = 2 \times 6 = 12$$

$$\begin{aligned}\phi(72) &= \phi(8 \cdot 9) = \phi(8) \cdot \phi(9) = \phi(2^3) \cdot \phi(3^2) = \\ &= (2^3 - 2^2)(3^2 - 3^1) = 4 \cdot 6 = 24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(300) &= \phi(2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2) = \phi(2^2) \cdot \phi(3) \cdot \phi(5^2) = \\ &= (2^2 - 2) \cdot 2 \cdot (5^2 - 5^1) = 2 \cdot 2 \cdot 20 = 80\end{aligned}$$

Câu hỏi: $\phi(108) = ?$

$$\begin{aligned}\text{Trả lời: } \phi(108) &= \phi(4 \cdot 27) = \phi(2^2 \cdot 3^3) = \\ &= (2^2 - 2)(3^3 - 3^2) = 2 \cdot 18 = 36\end{aligned}$$

Nội dung

1. Quan hệ đồng dư
2. Số học Modulo
3. Phép toán nghịch đảo và Trường hữu hạn $GF(p)$
4. Hàm Euler
5. Một số định lý số học cơ bản
6. Thuật toán bình phương, nhân liên tiếp và phép toán lũy thừa

5.1. Định lý Fermat

- ***Cho p là số nguyên tố, khi đó:***

- ***Nếu a là số nguyên dương và $\text{GCD}(a, p) = 1$, thì:***

$$a^{p-1} \pmod{p} = 1$$

- ***Nếu a là số nguyên dương bất kỳ thì:***

$$a^p \pmod{p} = a \pmod{p}$$

- Được dùng trong khoá công khai và kiểm tra tính nguyên tố của một số

- Ví dụ:

$$2^{7-1} \pmod{7} = 1 \quad (2^6 \pmod{7} = 64 \pmod{7} = 1)$$

$$3^{5-1} \pmod{5} = 1 \quad (3^4 \pmod{5} = 81 \pmod{5} = 1)$$

$$2^{11-1} \pmod{11} = 1 \quad (2^{10} \pmod{11} = 1024 \pmod{11} = 1)$$

Câu hỏi: $4^{13} \pmod{13} = ?$

Trả lời: $4^{13} \pmod{13} = 4 \pmod{13} = 4$

5.2. Định lý Euler

- Định lý Euler (Tổng quát hoá của Định lý Ferma):
 - *Cho a, n là hai số nguyên tố cùng nhau, tức là $\gcd(a, n) = 1$. Khi đó*

$$a^{\varphi(n)} \pmod{n} = 1$$

- *Nếu a và n là hai số nguyên bất kỳ (không cần nguyên tố cùng nhau), khi đó:*

$$a^{\varphi(n)+1} \equiv a \pmod{n}$$

- Ví dụ:

$$a=3; n=10; \varphi(10) = \varphi(2) \cdot \varphi(5) = 4;$$

$$\text{Do đó } 3^4 \bmod 10 = 81 \bmod 10 = 1$$

$$a=2; n=11; \varphi(11)=10;$$

$$\text{Do đó } 2^{10} \bmod 11 = 1$$

$$a=4; n=15; \varphi(15)=8;$$

$$\text{Do đó } 4^8 \bmod 15 = (4^2)^4 \bmod 15 = 1$$

$$\text{câu hỏi: } 9^8 \bmod 20 = ? ; 3^9 \bmod 20 = ? ; 12^{402} \bmod 25 = ?$$

Định lý phần dư Trung Hoa

- Sử dụng để tăng tốc độ tính toán modulo
 - Tính toán trên modulo của M với $M = m_1 m_2 \dots m_k$ (các cặp m_i nguyên tố cùng nhau từng đôi một)
 - Định lý phần dư Trung Hoa cho phép làm việc trên từng modulo m_i riêng biệt. Sau đó sẽ kết hợp lại để tính theo mod M
- => Đưa việc tính toán theo modul số lớn về tính toán theo modul số nhỏ
- Vì thời gian tính toán tỷ lệ với kích thước nên điều đó sẽ nhanh hơn tính toán trên toàn bộ M

Định lý phần dư Trung Hoa - tiếp

- Cho $M = m_1 m_2 \dots m_k$, trong đó các cặp m_i nguyên tố với nhau từng đôi một.
- Để tính $A \bmod M$
 - Trước hết ta cần tính tất cả $a_i = A \bmod m_i$
 - Tính c_i theo công thức sau, với $M_i = M/m_i$
 - Cuối cùng sử dụng công thức

$$A \equiv \left(\sum_{i=1}^k a_i c_i \right) (\bmod M)$$

$$c_i = M_i \times (M_i^{-1} \bmod m_i) \quad \text{for } 1 \leq i \leq k$$

Ứng dụng của định lý phần dư trung hoa – Tính toán trên Modulo lớn

- **Ví dụ.** Tính $17^8 \bmod 77$. Áp dụng định lý phần dư Trung hoa, ta coi $A = 17^8$, $m_1 = 7$, $m_2 = 11$.

Khi đó, $M_1 = 11$, $M_2 = 7$ và

$$11^{-1} \bmod 7 = 4^{-1} \bmod 7 = 2, \text{ suy ra } c_1 = 11 \cdot 2 = 22$$

$$7^{-1} \bmod 11 = 8, \text{ suy ra } c_2 = 7 \cdot 8 = 56$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 17^8 \bmod 7 = (17 \bmod 7)^8 \bmod 7 = 3^8 \bmod 7 \\ &= (3^2)^4 \bmod 7 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= 17^8 \bmod 11 = (17 \bmod 11)^8 \bmod 11 = 6^8 \bmod 11 = \\ &= (6^2)^4 \bmod 11 = 3^4 \bmod 11 = 4 \end{aligned}$$

- Vậy $A \bmod 77 = 17^8 \bmod 77 = (2 \cdot 22 + 4 \cdot 56) \bmod 77 = 268 \bmod 77 = 37$

Ví dụ tiếp về tính toán trên Modulo lớn

- Giả sử ta phải tính: $A = 17^{130} \bmod 35$

Ta thấy $35 = 5.7$

- Ta tính $17^{130} \bmod 5$ và $17^{130} \bmod 7$

$$17^{130} \bmod 5 = 2^{130} \bmod 5 = 2^{128} 2^2 \bmod 5 = (2^4)^{32} 2^2 \bmod 5 = 2^2 \bmod 5 = 4 \quad (\text{Ferma: } 2^4 \bmod 5 = 1)$$

$$17^{130} \bmod 7 = 3^{130} \bmod 7 = (3^6)^{21} \cdot 3^4 \bmod 7 = (\text{Ferma})$$

$$1. 3^4 \bmod 7 = 81 \bmod 7 = 4$$

- $7^{-1} \bmod 5 = 3$; $5^{-1} \bmod 7 = 3$

- $A = (4 \cdot 7 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 3) \bmod 35 = (84 + 60) \bmod 35 = (14 + 25) \bmod 35 = 4$

Ứng dụng định lý phần dư trung hoa - Giải hệ phương trình modulo

- **Ví dụ.** Cho $x \equiv 5 \pmod{7}$ và $x \equiv 6 \pmod{11}$. Tìm x .
- Ta có $x \pmod{7} = 5$ và $x \pmod{11} = 6$
- Áp dụng định lý phần dư Trung hoa với $m_1=7$, $m_2=11$, $a_1 = 5$, $a_2=6$ ta tính:
 $7^{-1} \pmod{11} = 8$ và $11^{-1} \pmod{7} = 2$.

Như vậy

$$x = A = (a_1 * c_1 + a_2 * c_2) \pmod{7 * 11} = (5 * 2 * 11 + 6 * 8 * 7) \pmod{77} = 446 \pmod{77} = 61$$

Nội dung

1. Quan hệ đồng dư
2. Số học Modulo
3. Phép toán nghịch đảo và Trường hữu hạn $GF(p)$
4. Hàm Euler
5. Một số định lý số học cơ bản
6. Thuật toán bình phương, nhân liên tiếp và phép toán lũy thừa

Thuật toán bình phương và nhân liên tiếp - Tính lũy thừa

- Thuật toán nhanh, hiệu quả cho phép tính lũy thừa nói chung và theo modulo nói riêng.
- Tính toán được dựa trên phép lặp trên cơ sở bình phương và nhân để nhận được kết quả

- **Ví dụ 1:**

$$7^5 \bmod 11 = 7^4 \bmod 11 \cdot 7^1 \bmod 11 = \\ 3 \cdot 7 \bmod 11 = 10 \bmod 11$$

vì $7^2 \bmod 11 = 49 \bmod 11 = 5 \bmod 11$

$$7^4 \bmod 11 = 7^2 \cdot 7^2 \bmod 11 = 5 \cdot 5 \bmod 11 = 3 \bmod 11$$

- **Ví dụ 2:**

$$3^{129} \bmod 11 = 3^{128} \cdot 3 \bmod 11 = 5 \cdot 3 \bmod 11 = 4,$$

Vì $3^2 \bmod 11 = (-2) \bmod 11, 3^4 \bmod 11 = (-2)^2 \bmod 11 = 4$

$$3^8 \bmod 11 = 4^2 \bmod 11 = 5, 3^{16} \bmod 11 = 5^2 \bmod 11 = 3$$

$$3^{32} \bmod 11 = 3^2 \bmod 11 = -2, 3^{64} \bmod 11 = (-2)^2 \bmod 11 = 4$$

$$3^{128} \bmod 11 = 4^2 \bmod 11 = 5$$

Ví dụ về phân tích lũy thừa theo cơ số 2

First write $(11)_{10} = (1011)_2$. Then calculate

$$\begin{aligned} M^{11} &= M^{1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0} \\ &= (M^{1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0})^2 M \\ &= ((M^{1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0})^2 M)^2 M \\ &= ((M^2)^2 M)^2 M \end{aligned}$$

2.5. Ví dụ các phép toán trên modulo

Áp dụng các tính chất của modulo:

- $(11 \cdot 19 + 10^{17}) \bmod 7 =$
- $((11 \cdot 19) \bmod 7 + 10^{17} \bmod 7) \bmod 7 =$
- $((11 \bmod 7 \cdot 19 \bmod 7) \bmod 7$
- $+ (10 \bmod 7)^{17} \bmod 7) \bmod 7 =$
- $((4 \cdot (-2)) \bmod 7 + (((3^2)^2)^2)^2 \cdot 3 \bmod 7) \bmod 7 =$
- $((-1) \bmod 7 + ((2^2)^2)^2 \cdot 3 \bmod 7) \bmod 7 =$
- $(-1 + 5) \bmod 7 = 4$
- *Câu hỏi: Tại sao có thể thay $((3^2)^2)^2 \bmod 7$ bằng $((2^2)^2)^2 \bmod 7$*
- *Trả lời: Vì $3^2 \bmod 7 = 2$*

Căn nguyên thủy (căn nguyên tố)

- **Định Nghĩa:** Xét m để $a^m \bmod n = 1$. Nếu giá trị $m = \Phi(n)$ là số dương nhỏ nhất thoả mãn công thức trên thì a được gọi là căn nguyên thủy của n .
- Từ Định lý Euler: $a^{\phi(n)} \bmod n = 1$, với $\text{GCD}(a, n) = 1$
- **Định lý:** a là căn nguyên thủy của n , nếu a nguyên tố cùng nhau với n và $a^m \bmod n \neq 1$, nếu $0 < m < \phi(n)$
- Ví dụ một số cặp (n, a)
(3, 2); (5, 2); (7, 3), (11, 2); (13, 2); (13, 6); (17, 10)
 $2^{\phi(3)} \bmod 3 = 1$
 $3^{\phi(7)} \bmod 7 = 1$

Ví dụ căn nguyên thủy

- Xét số $n = 5$ và xét xem $a = 2$ có phải là căn nguyên thủy của 5 không?

$$2 \bmod 5 = 2; 2^2 \bmod 5 = 4; 2^3 \bmod 5 = 3; 2^4 \bmod 5 = 1$$

Rõ ràng $m = 4 = \phi(5)$ là số mũ nhỏ nhất có tính chất $2^m \bmod 5 = 1$, nên **2 là căn nguyên thủy của 5.**

- Xét số $n = 8$ và xét xem $a = 3$ có phải là căn nguyên thủy của 8 không?

$$3 \bmod 8 = 3; 3^2 \bmod 8 = 1; 3^3 \bmod 8 = 3; 3^4 \bmod 8 = 1$$

Rõ ràng $m = 2 < 4 = \phi(8)$ là số mũ nhỏ nhất có tính chất $3^m \bmod 8 = 1$, nên 3 không là căn nguyên thủy của 8.

Một số nhận xét về Căn nguyên thủy

a	a ²	a ³	a ⁴	a ⁵	a ⁶
1	1	1	1	1	1
2	4	1	2	4	1
3	2	6	4	5	1
4	2	1	4	2	1
5	4	6	2	3	1
6	1	6	1	6	1
b = a ^m mod 7					

- Xét biểu thức $b = a^m \bmod n$
- **Nếu n là số nguyên tố, ví dụ n = 7, ta có:**
 1. dãy số kết quả kết thúc bằng 1
 2. Chu kỳ của một dãy số là ước của $\phi(n)$
- Giá trị m lớn nhất để $a^m \bmod n = 1$ là $\phi(n)$.
- Nếu n là số nguyên tố và nếu a là căn nguyên thủy của n thì a, a^2, \dots, a^{n-1} là khác nhau theo (mod n)
vd: 3 và 5 là các căn nguyên thủy của 7
- Không phải tất cả các số nguyên đều có căn nguyên thủy

Lập bảng tìm căn nguyên thủy của 8, $\phi(8) = 4$

a	$a^2 \bmod 8$	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	0	0	0	0	0	0
3	1	3	1	3	1	3	1
4	0	0	0	0	0	0	0
5	1	5	1	5	1	5	1
6	4	0	0	0	0	0	0
7	1	7	1	7	1	7	1
8	0	0	0	0	0	0	0
9	1	1	1	1	1	1	1
10	4	0	0	0	0	0	0
11	1	3	1	3	1	3	1
12	0	0	0	0	0	0	0
13	1	5	1	5	1	5	1
...

Các căn nguyên thủy (CNT) của 19

a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^{12}	a^{13}	a^{14}	a^{15}	a^{16}	a^{17}	a^{18}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	13	7	14	9	18	17	15	11	3	6	12	5	10	1
3	9	8	5	15	7	2	6	18	16	10	11	14	4	12	17	13	1
4	16	7	9	17	11	6	5	1	4	16	7	9	17	11	6	5	1
5	6	11	17	9	7	16	4	1	5	6	11	17	9	7	16	4	1
6	17	7	4	5	11	9	16	1	6	17	7	4	5	11	9	16	1
7	11	1	7	11	1	7	11	1	7	11	1	7	11	1	7	11	1

- Căn nguyên thủy của 19 là :2,3,10,13,14...
- Các số nguyên có căn nguyên thủy có dạng: 2 , 4 , p^k , và $2p^k$, với p là số nguyên tố lẻ và k là số nguyên dương.
- Không phải tất cả các số nguyên đều có CNT

Ví dụ căn nguyên thủy của 3^2 và logarit rời rạc tương ứng

Nhắc lại: $a^x = y \Rightarrow x = \log_a y$

Here is an example using a nonprime modulus, $n = 9$. Here $\phi(n) = 6$ and $a = 2$ is a primitive root. We compute the various powers of a and find

$$2^0 = 1 \quad 2^4 \equiv 7 \pmod{9}$$

$$2^1 = 2 \quad 2^5 \equiv 5 \pmod{9}$$

$$2^2 = 4 \quad 2^6 \equiv 1 \pmod{9}$$

$$2^3 = 8$$

This gives us the following table of the numbers with given discrete logarithms (mod 9) for the root $a = 2$:

Logarithm	0	1	2	3	4	5
Number	1	2	4	8	7	5

Logarit rời rạc

- Dễ thấy, với số nguyên b bất kỳ, nếu a là căn nguyên thủy của số nguyên tố n , thì luôn tồn tại duy nhất 1 số m ($0 \leq m \leq n-1$) sao cho $b \equiv a^m \pmod{n}$
- **ĐN:** Với số nguyên b bất kỳ, Số m thỏa mãn $b \equiv a^m \pmod{n}$ với $0 \leq m \leq (n - 1)$ được gọi là logarit rời rạc của b với cơ số a theo modulo n
- Kí hiệu $\mathbf{m} = d\log_{a,n}(b) = d\log_a b \pmod{n}$

Ví dụ về Logarit rời rạc

- Khi a là căn nguyên thủy của số nguyên tố n
 \Rightarrow luôn tồn tại $\text{dlog}_a b \pmod{n}$, với b là số nguyên dương bất kỳ thuộc \mathbb{Z}_n .
- $x = \text{dlog}_2 8 \pmod{19} = 3$ bằng cách thử lần lượt (hoặc tra bảng)
- $x = \text{dlog}_3 6 \pmod{19} = 8$
- Khi a là căn nguyên thủy của n bất kỳ:
- Tìm $x = \text{dlog}_2 7 \pmod{9}$; Tìm $x = \text{dlog}_2 6 \pmod{9}$
- Khi a không là căn nguyên thủy của n :
- $x = \text{dlog}_3 4 \pmod{13}$ (tìm x : $3^x = 4 \pmod{13}$) không có lời giải, vì
 $3^0 \pmod{13} = 1$; $3^1 \pmod{13} = 3$; $3^2 \pmod{13} = 9$;
 $3^3 \pmod{13} = 1 = 3^0 \pmod{13}$
- Tìm $x = \text{dlog}_7 12 \pmod{19} = ?$
- Tìm $x = \text{dlog}_7 11 \pmod{19} = ?$

Các số nguyên tố < 2000

[illegible]

Tóm tắt

- Chúng ta đã xét đến:
 - Các phép toán modulo với các số nguyên
 - Các số nguyên tố
 - Thuật toán Euclid và Euclid mở rộng
 - Trường hữu hạn chuẩn $GF(p)$
 - Hàm Euler
 - Định lý Fermat nhỏ và Euler
 - Thuật toán bình phương và nhân liên tiếp
 - Căn nguyên tố và logarit rời rạc

Câu hỏi trắc nghiệm 1

- Câu 1: Tập các số nguyên không đóng với phép toán nào (một tập X được gọi là đóng đối với một phép toán, nếu việc thực hiện phép toán trên X cũng cho kết quả là phần tử thuộc X)
 - A. phép cộng
 - B. phép trừ
 - C. phép nhân
 - D. phép chia
- Câu 2: Tập các số hữu tỷ không đóng với phép toán nào
 - A. phép cộng, trừ
 - B. phép nhân
 - C. phép chia
 - D. phép khi căn bậc hai

Câu hỏi trắc nghiệm 2

- Câu 3: Hỏi có bao nhiêu phần dư dương khác nhau khi chia các số nguyên cho một số 11?
 - A. 12 và đó là tập $\{0, 1, 2, \dots, 10, 11\}$
 - B. 10 và đó là tập $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$
 - C. 11 và đó là tập $\{1, 2, \dots, 10, 11\}$
 - D. 11 và đó là tập $\{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$
- Câu 4: Khẳng định nào sau đây không đúng:
 - A. $38 \bmod 17 = 4$
 - B. $-7 \bmod 25 = 18 \quad (= 25 - 7 \bmod 25)$
 - C. $-37 \bmod 25 = 25 - 37 \bmod 25 = 25 - 12 = 13$
 - D. $-57 \bmod 25 = -7$

Câu hỏi trắc nghiệm 3

- Câu 5: Khẳng định nào sau đây không đúng:
 - A. $21 \equiv 36 \pmod{15}$
 - B. $12 \equiv -3 \pmod{15}$
 - C. $-7 \equiv 23 \pmod{15}$
 - D. $39 \equiv 25 \pmod{15}$
- Câu 6: Khẳng định nào sau đây không đúng:
 - A. $(411.800) \pmod{39} = (411 \pmod{39} . 800 \pmod{39}) \pmod{39} = (21 . 20) \pmod{39} = 420 \pmod{39} = 30$
 - B. $49^{-1} \pmod{39} = 10^{-1} \pmod{39} = 4$
 - C. $13^{33} \pmod{8} = (13 \pmod{8})^{33} \pmod{8} = 5^{33} \pmod{8} = (5^2 \pmod{8})^{16} . 5 \pmod{8} = 5 \pmod{8} = 5$
 - D. $(3/7) \pmod{17} = 3.7^{-1} \pmod{17} = (3.(7^{-1} \pmod{17})) \pmod{17} = 3.4 \pmod{17} = 12$

Câu hỏi trắc nghiệm 4

- Câu 7: Trong quá trình tính toán theo modulo ta không thể sử dụng tính chất nào?
 - A. Thay các số bằng các đại diện của nó
 - B. Thay các số bằng các số tương đương đồng dư với nó
 - C. Có thể lấy modulo bất cứ lúc nào khi cộng và nhân
 - D. Có thể lấy modulo số mũ khi lũy thừa
- Câu 8: Nếu p là số nguyên tố, thì khẳng định nào sau đây không đúng: số a bất kỳ trong $\{1, 2, \dots, p-1\}$
 - A. nguyên tố cùng nhau với p
 - B. có số nghịch đảo
 - C. có thể không có số nghịch đảo
 - D. Có số nghịch đảo là $a^{p-2} \bmod p$

Câu hỏi trắc nghiệm 5

- Câu 9: Khi tìm nghịch đảo của một số theo modulo, ta sử dụng
 - A. Thuật toán Euclid
 - B. Thuật toán Euclid mở rộng
 - C. Thuật toán bình phương và nhân liên tiếp
 - D. Thuật toán kiểm tra số nguyên tố
- Câu 10: Số b nào có nghịch đảo theo modulo m :
 - A. m là số nguyên tố
 - B. b và m là hai số nguyên tố khác nhau
 - C. b và m nguyên tố cùng nhau
 - D. b không phải là ước số của m

Câu hỏi trắc nghiệm 6

- Câu 11: Giá trị hàm Euler của một số tự nhiên n là
 - A. Số các số nguyên tố nhỏ hơn n
 - B. Số các ước số của n
 - C. Số các số nguyên tố cùng nhau với n
 - D. Tập các số nguyên tố cùng nhau với n
- Câu 12: Cặp nào không phải 2 bài toán ngược nhau, bài toán xuôi dễ - bài toán ngược khó
 - A. Nhân 2 số và phân tích 1 số ra tích lũy thừa các thừa số nguyên tố
 - B. Tính giá trị hàm Euler của 1 số khi biết và khi không biết phân tích của nó ra lũy thừa thừa số nguyên tố
 - C. Lũy thừa và logarit rời rạc
 - D. Cộng 2 số và trừ 2 số

Câu hỏi trắc nghiệm 7

- Câu 13: a là căn nguyên tố của một số n , điều khẳng định gì sau đây là không đúng
 - A. Có $\phi(n)-1$ giá trị khác nhau của lũy thừa của a theo mod n
 - B. $\phi(n)$ là số mũ dương nhỏ nhất để a mũ đó lên bằng 1
 - C. $\{a^0 \bmod n, a^1 \bmod n, \dots, a^{\phi(n)-1} \bmod n\}$ là tập các số nguyên tố cùng nhau với n .
 - D. $\phi(n)$ là số mũ dương lớn nhất để a mũ đó lên bằng 1
- Câu 14: Một số b có logarit cơ số a theo mod n (a, b nguyên dương nhỏ hơn n), nếu
 - A. a là căn nguyên tố của n
 - B. b nguyên tố cùng nhau với n
 - C. a là căn nguyên tố của n và b nguyên tố cùng nhau với n
 - D. a, b, n nguyên tố cùng nhau từng đôi một

Đáp án câu hỏi trắc nghiệm

- Câu 1
 - D, thương của hai số nguyên 3, 5 không là số nguyên
- Câu 2
 - D, căn bậc 2 của 2 không là số hữu tỉ
- Câu 3
 - D, chỉ có 11 số dư và nhỏ hơn 12
- Câu 4
 - D, $-57 \bmod 25 = 25 - 57 \bmod 25 = 18$
- Câu 5
 - D, $39 \equiv 9 \bmod 15$, $25 \equiv 10 \bmod 15$
- Câu 6
 - D, $7^{-1} \bmod 17 = 5$ chứ không phải 4
- Câu 7
 - D, không thể lấy modulo cho số mũ

Đáp án câu hỏi trắc nghiệm 2

- Câu 8
 - C, mọi số đều có nghịch đảo
- Câu 9
 - B, thuật toán Euclid mở rộng để tìm nghịch đảo
- Câu 10
 - C, chỉ cần 2 số nguyên tố cùng nhau
- Câu 11
 - C, Giá trị hàm Euler là số các số nguyên tố cùng nhau với số đó
- Câu 12
 - D, Cộng và trừ đều là hai bài toán dễ
- Câu 13
 - D, $\phi(n)$ là số mũ dương nhỏ nhất để a mũ đó lên bằng 1
- Câu 14
 - C, nếu a là căn nguyên tố thì lũy thừa của a sẽ tạo nên tập các số nguyên tố với n

Glossary - Từ điển thuật ngữ

- Quan hệ đồng dư theo modulo n : là quan hệ giữa hai số nguyên có cùng phần dư dương khi chia cho n .
- Số học đồng dư theo modulo n là việc thực hiện các phép toán số học theo modulo n .
- Số nguyên tố là số chỉ có ước là 1 và chính nó
- Hai số được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu chúng chỉ có ước số chung là 1.
- Giá trị hàm Euler của 1 số nguyên dương là số các số nguyên dương nhỏ hơn số đó và nguyên tố cùng nhau với nó.
- Căn nguyên tố của một số n là một số nguyên tố cùng nhau với n và lũy thừa của nó theo modulo n có giá trị là các số nguyên tố cùng nhau với n
- Bài toán logarit rời rạc theo modulo là bài toán ngược của bài toán lũy thừa theo modulo, nhưng khó hơn bài toán thuận rất nhiều.

FAQ – Câu hỏi thường gặp

1. Hai số như thế nào được gọi là có quan hệ đồng dư theo modulo n
2. Thế nào là đại diện của một số theo modulo n
3. Quan hệ đồng dư có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu không? (có là quan hệ tương đương?)
4. Khi thực hiện các phép toán theo modulo ta có thể áp dụng các tính chất gì để tính toán nhanh?
5. Muốn thực hiện được phép chia theo modulo n , thì n cần có tính chất gì? Lợi ích sử dụng số học modulo
6. Nêu định nghĩa ước số chung, nguyên tố cùng nhau của 2 số nguyên dương?
7. Nêu định nghĩa số nguyên tố và nêu thuật toán kiểm tra số nguyên tố.

FAQ – Câu hỏi thường gặp (tiếp)

8. Nêu định nghĩa hàm Euler của 1 số tự nhiên và nêu cách tính
9. Thuật toán Euclid dùng để làm gì? Mô tả các bước thực hiện nó?
10. Thuật toán Euclid mở rộng dùng để làm gì? Mô tả các bước thực hiện nó?
11. Thuật toán Bình phương và nhân liên tiếp dùng để làm gì? Mô tả các bước thực hiện nó?
12. Phát biểu và cho ví dụ minh họa Định lý Ferma nhỏ?
13. Phát biểu và cho ví dụ minh họa Định lý Euler? Tại sao nó là mở rộng của Định lý Ferma
14. Định lý phần dư Trung hoa dùng để làm gì?
15. Nêu định nghĩa căn nguyên tố của 1 số, cho ví dụ
16. Nêu định nghĩa Logarit rời rạc của số b theo cơ sở a và modulo n

Trả lời câu hỏi:

1. Hai số có quan hệ đồng dư theo mod n , nếu chúng có cùng phần dư dương khi chia cho n .
2. Đại diện của 1 số theo mod n là số có quan hệ đồng dư với số đã cho theo mod n và có giá trị nằm giữa 0 và $n-1$.
3. Có, vì có thể nói hai số có quan hệ đồng dư khi hiệu của nó chia hết n , nên
 - mọi số đồng dư với chính nó
 - số a đồng dư với b , thì b cũng đồng dư với a
 - số a đồng dư với b và b đồng dư với c , thì a đồng dư với c
4. Khi thực hiện các phép toán theo modulo ta có thể áp dụng các tính chất sau để tính toán nhanh:
 - Thay mỗi số bằng đại diện của nó
 - Thay mỗi số bằng số có quan hệ đồng dư với nó
 - Luôn lấy modulo cho mỗi kết quả trung gian nhận được
 - Có thể áp dụng Định lý phần dư Trung hoa để tính trên modulo số nhỏ

Trả lời câu hỏi – (tiếp 2)

5. Số đó phải có nghịch đảo theo modulo n , chia là nhân với số nghịch đảo. Sử dụng số học modulo, ta sẽ đảm bảo các kết quả trong quá trình tính toán không vượt quá giới hạn cho trước
6. Xem bài giảng
7. Muốn kiểm tra 1 số có phải là số nguyên tố hay không, ta kiểm tra nó có chia hết cho mọi số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng căn bậc hai của nó hay không? Tuy nhiên nếu số đó lớn thì việc kiểm tra trên lâu, nên có thuật toán Milner Rabin kiểm tra số đó có tính chất như trong Định lý Fermat với số a tùy ý không, thỏa với càng nhiều số a , xác suất là nguyên tố càng lớn.
8. Giá trị hàm Euler của 1 số là số các số nguyên tố cùng nhau với số đó mà nhỏ hơn nó. Tính giá trị hàm Euler tương đương với việc tìm phân tích của số đó ra thừa số là lũy thừa của các số nguyên tố.
9. Thuật toán Euclid để tính ước chung lớn nhất của 2 số. Nó lặp việc thay số bằng cặp số nhỏ và phần dư của số lớn theo số nhỏ, cho đến khi 1 số bằng 0, thì số kia là Ước chung lớn nhất.
10. Thuật toán Euclid mở rộng tính ước chung lớn nhất và tính nghịch đảo trong trường hợp 2 số nguyên tố cùng nhau. Nó giống như tiến hành đồng thời nhiều thuật toán Euclid cùng một lúc.

Trả lời câu hỏi – (tiếp)

11. Thuật toán bình phương và nhân liên tiếp dùng để tính nhanh lũy thừa của 1 số. Ở một bước nó luôn bình phương kết quả trước, có nhân với cơ số hay không tùy thuộc số mũ cho trước. Xem bài giảng
12. Xem bài giảng.
13. Định lý Euler là mở rộng của Ferma, vì nếu một số p là nguyên tố, thì nó sẽ nguyên tố cùng nhau với mọi số nhỏ hơn nó và giá trị hàm Euler của p bằng $p-1$.
14. Định lý phần dư Trung hoa dùng để đưa việc tính toán số học Modulo theo số lớn về việc tính toán số học modulo theo số nhỏ, nếu có thể phân tích số lớn thành tích các số nhỏ nguyên tố cùng nhau. Định lý này cũng giúp giải hệ phương trình modulo.
15. Xem bài giảng: căn nguyên tố là số nguyên tố cùng nhau với số đã cho mà lũy thừa của nó tạo nên tập các số nguyên tố cùng nhau với số đó.
16. Xem bài giảng: Logarit rời rạc theo modulo n là bài toán ngược của bài toán lũy thừa, nhưng khó hơn nhiều, thường đòi hỏi cơ số là căn nguyên tố của n và số lấy logarit cũng là nguyên tố cùng nhau với n