BÀI TẬP MÔN HỌC TÍNH TOÁN ĐỒ HỌA MÁY TÍNH:

1.1. Cho hai điểm *A(xa, ya), B(xb, yb)*. Tìm phương trình của đường thẳng đi qua 2 điểm AB. Tự chọn các tọa độ cụ thể.

A(0, 4) ; B(5, 7)

$\overrightarrow{AB} = (5 - 0, 7 - 4) = (5, 3)$

Phương trình đường thẳng đi qua A(0, 4) nhận vector chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (5, 3)$:

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = 3t + 4 \end{cases} \iff y = \frac{3}{5}x + 4$$

1.2. Cho ba điểm *A(xa, ya), B(xb, yb), C(xc, yc)*. Tự chọn các giá trị và tìm phương trình đường tròn đi qua 3 điểm này.

A(0, 0); B(1, 1); C(1, 2)

Gọi (C): $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ là phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A, B , C.

Vì (C) đi qua 3 điểm A, B, C nên ta có:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = R^2 \\ (1-a)^2 + (1-b)^2 = R^2 \\ (1-a)^2 + (2-b)^2 = R^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + b^2 - R^2 = 0 \\ -2a - 2b + a^2 + b^2 - R^2 = 2 \\ -2a - 4b + a^2 + b^2 - R^2 = 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} R = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ b = -1.5 \\ a = 0.5 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A, B , C là

(C): $(x - 0.5)^2 + (y + 1.5)^2 = 2.5$

1.3. Cho tam giác ABC với *A(xa, ya), B(xb, yb), C(xc, yc)*. Tự chọn các giá trị và xác định tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp, giao điểm 3 đường cao, giao điểm 3 đường trung tuyến, giao điểm 3 đường phân giác.

Gọi I(a; b) là tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Khi đó IA = IB = IC.

Với ba điểm A(1; 2), B(3; 4) và C(2; –1) ta có:

+) $\overrightarrow{IA} = (1 - a; 2 - b)$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{IA}| = \sqrt{(1-a)^2 + (2-b)^2}$$

+) $\overrightarrow{IB} = (3 - a; 4 - b)$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{IB}| = \sqrt{(3-a)^2 + (4-b)^2}$$

+) $\overrightarrow{IC} = (2 - a; -1 - b)$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{IC}| = \sqrt{(2-a)^2 + (-1-b)^2}$$

Do đó IA = IB = IC

$\Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = IC^2$

$\Leftrightarrow (1 - a)^2 + (2 - b)^2 = (3 - a)^2 + (4 - b)^2 = (2 - a)^2 + (-1 - b)^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2 + (2-b)^2 = (3-a)^2 + (4-b)^2 \\ (1-a)^2 + (2-b)^2 = (2-a)^2 + (-1-b)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2a + a^2 + 4 - 4b + b^2 = 9 - 6a + a^2 + 16 - 8b + b^2 \\ 1 - 2a + a^2 + 4 - 4b + b^2 = 4 - 4a + a^2 + 1 + 2b + b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 4b = 20 \\ 2a - 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ a - 3b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{15}{4} \\ b = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{15}{4}; \dfrac{5}{4}\right)$$

*** Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.**

Gọi $H(x_0; y_0)$ là tọa độ trực tâm của tam giác ABC.

Vì H là trực tâm của tam giác ABC => Ta có $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$ (với M là trung điểm của BC).

Với A(1; 2), B(3; 4), C(2; –1) và I(3.75, 1.25) ta có:

• Trung điểm M của BC có tọa độ là:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{3+2}{2} = \dfrac{5}{2} \\ y_M = \dfrac{4+(-1)}{2} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

• $\overrightarrow{IM} = \left(\dfrac{5}{2} - \dfrac{15}{4}; \dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{4}\right) = \left(\dfrac{-5}{4}; \dfrac{1}{4}\right)$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{IM} = \left(\frac{-5}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

• $\overrightarrow{AH} = (x_0 - 1; y_0 - 2)$

Ta có:

$$\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = \dfrac{-5}{2} \\ y_0 - 2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{-3}{2} \\ y_0 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{-3}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

***Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC**

$$\overrightarrow{HI} = 3\overrightarrow{GI} \Leftrightarrow (5.25, -1.25) = 3(3.75-a,\ 1.25-b) \Leftrightarrow a = 2,\ b = \frac{5}{3}$$

***Tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .**

$$\begin{cases} x_I = \frac{BC.x_A + CA.x_B + AB.x_C}{BC + CA + AB} \\ y_I = \frac{BC.y_A + CA.y_B + AB.y_C}{BC + AC + BC} \end{cases} =$$

⇔ $x_I = 1.83$, $y_I = 1.81$

***Giao điểm 3 đường phân giác E của tam giác ABC**

Gọi AE là tia phân giác góc A.

E(x, y) ∈ BC

Đường thẳng BC : y = 5x – 11

$\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{AB}{AB+A^C}$ ⇔ $\frac{(x-3, y-4)}{(-1,-5)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}+2\sqrt{2}} = -4 + 2\sqrt{5}$ ⇔ $x = -1 + 2\sqrt{5}$, $y = 2\sqrt{5}$

1.4. Cho hai đường thẳng AB, CD cắt nhau, có *A(xa, ya), B(xb, yb), C(xc, yc), D(xd, yd)*. Xác định giao điểm nếu có của hai đường thẳng này.

1.4 Cho hai đường thẳng AB, CD cắt nhau, có *A(xa, ya), B(xb, yb), C(xc, yc), D(xd, yd)*. Xác định giao điểm nếu có của hai đường thẳng này.

A(0, 4) ; B(5, 7); C(0,5), D(11,6)

$\overrightarrow{AB} = (5 - 0, 7 - 4) = (5, 3)$

Phương trình đường thẳng đi qua A(0, 4) nhận vector chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (5, 3)$:

$\begin{cases} x = 5t \\ y = 3t + 4 \end{cases}$ <=> $y = \frac{3}{5}x + 4$

$\overrightarrow{CD} = (11 - 0, 6 - 5) = (11, 1)$

Phương trình đường thẳng qua C(0, 5) nhận vector chỉ phương $\overrightarrow{CD} = (11,1)$:

$\begin{cases} x = 11t \\ y = t + 5 \end{cases}$ ⇔ $y = \frac{1}{11}x + 5$

- ⇨ Giao điểm của hai đường thẳng này là giao điểm của hai đường thẳng trên:

  Ta có: $\frac{3}{5}x + 4 = \frac{1}{11}x + 5$ => $x = \frac{55}{28}$ => thay vào ta được $y = \frac{145}{28}$

- ⇨ Giao điểm cần tìm có tọa độ $(\frac{55}{28}, \frac{145}{28})$

1.5. Cho đường tròn tâm O(xc, yc), bán kính R và điểm P(x, y) ngoài đường tròn. Xác định khoảng cách ngắn nhất giữa P và đường tròn.

Giả sử O(3,4), P(10,12), bán kính R=2 => Vector u (7,8) => Vector pháp tuyến (-8,7)

phương trình đường thẳng d1: -8(x-3)+7(y-4)=0 => -8x + 7y -4 = 0

y=(4+8x)/7

phương trình đường tròn d2 : $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$

phương trình giao điểm của d1 và d2 :

$(x-3)^2 + ((4+8x)/7)^2 = 4$ => giải phương trình ta được:

+x1 = 4.317 = > y1 = 5.505

+x2 = 1.683 = > y2 = 2.495

ta được d1 cắt d2 tại 2 điểm A(4.317;5.505) và B(1.683;2.495)

tính khoảng cách điểm P đến A và P đến B độ dài nào ngắn hơn thì chọn điểm đó => PA = 8.63, PB =12.63 => lấy điểm PA

1.6. Cho đường thẳng AB có *A(xa, ya, za), B(xb, yb, zb)*. Tìm khoảng cách từ điểm *$P(x_p, y_p, z_p)$* đến đoạn thẳng AB.

Cho A(1,1,0)

Cho B(-1,2,3)

P(1,5,4)

Ta có: AB=(-2,1,3)

Đường thẳng đi qua A và B nên vecto chỉ phương của đường thẳng là u:

u=Vecto AB = (-2,1,3)

Vậy phương trình tham số của đường thẳng là:

x=1-2t

y=1+t

z=3t

Giả sử H là hình chiếu của M lên đường thẳng Δ . Ta có: $H(1-2t;1+t;3t)$.

Suy ra: $\overrightarrow{MH}=(-2t;-4+t;-4+3t)$.

Ta lại có: $\vec{u}=(-2;1;3)$ là 1 véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ .

Vì MH và Δ vuông góc với nhau nên

$\overrightarrow{MH}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow -2(-2t)+(-4+t)+3(-4+3t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{8}{7}$.

Vậy $H\left(-\frac{9}{7};\frac{15}{7};\frac{24}{7}\right)$.

Do đó: $MH=\sqrt{\left(-\frac{9}{7}-1\right)^2+\left(\frac{15}{7}-5\right)^2+\left(\frac{24}{7}-4\right)^2}=\frac{4\sqrt{42}}{7}$.

1.7. Tìm phương trình của mặt phẳng chứa 3 điểm *A(xa, ya, za), B(xb, yb, zb), C(xc, yc, za)*.

Cho tọa độ 3 điểm như sau: A(-1; 2; 1), B(3; 1; 4), C(4; 1; 5)
Giả sử phương trình mặt phẳng (ABC) là: ax + by + cz + d = 0
Thay tọa độ các điểm A, B, C vào ta được hệ:

- a + 2b + c + d = 0
3a + b + 4c + d = 0
4a + b + 5c + d = 0

Chọn a = 1, bấm máy tính giải hệ trên ta được b = 1; c = -1; d = 0.
Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là: x + y - z = 0

1.8. Tìm khoảng cách của điểm P(x_p, y_p, z_p) đến mặt phẳng chứa 3 điểm *A(xa, ya, za), B(xb, yb, zb), C(xc, yc, zc)*.

Cho 3 điểm A(0,1,0), B(1,1,1), C(3,1,2), P (0,0,0)
Bước 1: tìm mặt phẳng chứa 3 điểm A, B, C

Ta có: AB(1,0,1), AC(3,0,2), tích có hướng (AB, AC)=(0,1,0)

Gọi n là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) ta có:

(1) n vuông góc AB
(2) n vuông góc AC

Từ (1) và (2) nên n cùng phương với tích có hướng (AB,AC) = (0,1,0)
Chọn n=(0,1,0) ta đương phương trình mặt phẳng (ABC):

0.(x-0)+1.(y-1)+0.(z-1)=0
hay mặt phẳng y=1

Khoảng cách từ mặt phẳng (ABC) đến điểm P là:

1.9. Cho vector *v (x, y, z)*. Viết công thức chuẩn hóa vector *v* và code để có chiều dài bằng một (= 1) (Tự chọn giá trị).

Công thức: v_normalized = v / ||v||

Code python:

- V_normalized = v / ||v||
- Code
  - Import numpy as np
  - V = np.array([1,2,3])\
  - Length_V = np.linalg.norm(V)
  - V_normalized = V / length_V
  - Print(np.linatg.norm(v_normalized))

1.10. Cho ba điểm *A, B, C* không thẳng hàng trong không gian: *A(xa, ya, za), B(xb, yb, zb), C(xc, yc, zc)*. Hãy viết công thức và tính vector pháp tuyến của mặt phẳng đi qua ba điểm trên.

Cho 3 điểm A(0,1,0), B(1,1,1), C(3,1,2)

Vector AB(1,0,1) và AC(3,0,2) , ta có tích có hướng của hai vector AB và AC là vector pháp tuyến của mặt phẳng ABC.

=> [AB,AC]=n = (0,1,0)

Vector pháp tuyến của mặt phẳng ABC là n=(0,1,0)

Ta có phương trình mặt phẳng là : y-1=0