$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_N\mathbf{x}_N \\
\mathcal{T}(\mathbf{x}) &= \mathcal{T}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_N\mathbf{x}_N) \\
\mathbf{y} &= \alpha_1\mathcal{T}(\mathbf{x}_1) + \alpha_2\mathcal{T}(\mathbf{x}_2) + \cdots + \alpha_N\mathcal{T}(\mathbf{x}_N) \\
\mathbf{y} &= \alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \cdots + \alpha_N\mathbf{y}_N
\end{aligned}$$

Este último resultado nos permite asegurar que dada una transformación lineal $\mathcal{T} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ existe una sola matriz $\mathbf{A}$ de $M \times N$ tal que:

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v},$$

En la sección anterior, estudiamos los cambios de bases. Nótese ahora, que los cambios de base son un tipo especial de transformaciones lineales con características muy interesantes para el procesamiento de señales: son uno a uno, son invertibles y el espacio vectorial $\mathcal{X}$ es igual al espacio vectorial $\mathcal{Y}$. Además, al trabajar con señales discretas, encontramos que las transformaciones siempre tendrán una representación matricial y la matriz de transformación o de cambio de base será cuadrada ($N \times N$ para un espacio $\mathbb{R}^N$). La transformación inversa se obtendrá simplemente a partir de la inversa de dicha matriz.

2.5. Preguntas

1. ¿Cómo se puede interpretar que las señales digitales de N muestras son puntos en un espacio $\mathbb{R}^N$?

2. ¿Por qué decimos que las señales continuas son puntos en el espacio $\mathbb{R}^\infty$?

3. ¿Cúales son las ventajas de poder ver a las señales como puntos en un espacio $\mathbb{R}^N$?

4. ¿Para qué sirven las normas? ¿Por qué hay distintas normas?

5. ¿Cómo se puede definir una norma-p para $P = 0$? ¿Qué utilidad tendría una norma como ésta?

6. ¿Cómo puede interpretarse gráficamente la norma $p = \infty$?

7. ¿Cuál es la relación que existe entre las normas p y las medidas físicas de acción, energía, potencia, raíz del valor cuadrático medio y amplitud?

8. ¿Cómo se relacionan las definiciones de normas y producto interno en el caso de las señales discretas y las continuas? ¿Cuál es el equivalente discreto del dt que aparece en el caso de señales continuas?

9. ¿En qué casos es necesario utilizar el conjugado en la definición del producto interno?

10. ¿Por qué decimos que el producto interno mide el parecido entre dos señales? Analícelo primero para señales en $\mathbb{R}^2$ y luego extienda el análisis a señales continuas.

11. ¿Cual es la relación entre producto interno y proyección?

12. ¿Qué diferencia hay entre conjunto y espacio de señales?

13. Un mismo conjunto de señales con dos métricas diferentes ¿conforma dos espacios de señales diferentes?

14. ¿Qué utilidad tiene definir un espacio vectorial en el análisis de señales?

15. ¿Cómo se verifican las propiedades de cerradura en un espacio vectorial?

16. ¿Qué ventajas tiene el hecho de que una base sea ortonormal?

17. ¿Puede una base estar formada por señales linealmente dependientes? ¿y por señales no ortogonales?

18. Demostrar que las proyecciones ortogonales minimizan el criterio del error cuadrático en la aproximación de señales.

19. ¿Por que decimos que un cambio de base es un caso particular de transformación lineal?

20. ¿Bajo qée condiciones se puede asegurar que un cambio de base es simplemente una rotación de las señales de la base canónica?

21. ¿Cómo se puede interpretar geométricamente el teorema Parseval a partir de considerar a una transformación con base ortonormal como un simple cambio de base? ¿Qué sucede si la base es simplemente ortogonal?

22. Exprese la transformación lineal de una señal discreta y su correspondiente transformación inversa mediante productos matriciales.

23. Indique cómo se aplica en esta transformación la idea de parecido entre señales y su medida a través del producto interno.

24. Escriba las ecuaciones y dé ejemplos de una base para transformaciones lineales en las que:

    a) La señal en el domino original y la señal transformada son discretas.

    b) La señal en el domino original es continua y la señal transformada discreta.

    c) La señal en el domino original es discreta y la señal transformada continua.

    d) La señal en el domino original y la señal transformada son continuas.

25. En cada uno de los casos anteriores indique en qué espacio ($\mathbb{R}^?$) están las señales de la base y en qué espacio ($\mathbb{R}^{?\times?}$) está la matriz de la transformación.

26. Muestre con un ejemplo sencillo que para las transformaciones lineales en las que los vectores de la base son ortonormales, la matriz de inversión es la transpuesta de la matriz de transformación.

2.6. Trabajos prácticos

Ejercicio 1: Obtener los siguientes valores de una señal senoidal, una rampa, una onda cuadrada y una señal aleatoria:

1. valor medio,
2. máximo,
3. mínimo,
4. amplitud,
5. energía,
6. acción,
7. potencia media y

8. raíz del valor cuadrático medio.

Ejercicio 2: Defina matemáticamente el espacio de las señales senoidales y compruebe numéricamente si se trata de un espacio vectorial.

Ejercicio 3: Compruebe en el espacio del ejercicio anterior que el producto interno mide el grado de parecido entre dos señales (genere senoidales de distinta frecuencia y realice el producto interno entre ellas).

Ejercicio 4: Defina un espacio vectorial de señales complejas (formado por señales no necesariamente periódicas) y verifique que se trata de un espacio vectorial. Utilice el producto interno para medir el grado de parecido en este espacio.

Ejercicio 5: $^{(*)}$ Calcule el error cuadrático total de aproximación en el ejemplo con funciones de Legendre (página 61) bajo las siguientes condiciones:

1. con los coeficientes calculados en el ejemplo,
2. con pequeñas variaciones en torno a estos coeficentes α, construyendo una gráfica en 3D con la variación en los coeficientes en x, y y el error cuadrático total en z,
3. con más coeficientes α, para comprobar cómo se reduce el error cuadrático total al aumentar los coeficientes.

Ejercicio 6: $^{(*)}$ Genere una señal como combinación lineal del conjunto de señales senoidales con frecuencias de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 Hz y luego:

1. mida el grado de parecido con dichas senoidales representando el resultado en un gráfico de barras,
2. vuelva a medir el grado de parecido pero con una combinación lineal en la que se varía la fase de las senoidales y
3. realice el gráfico de barras para el caso de una señal cuadrada de 5,5 Hz.

Ejercicio 7: (**) En el archivo `te.txt` se encuentra la señal registrada al discar un número telefónico en una línea ruidosa y se requiere determinar el número que se ha discado. La señal se digitalizó con una frecuencia de muestreo de 11025 Hz y se sabe que cada número del teléfono está codificado mediante la suma de dos señales senoidales cuya frecuencia indica la posición en el teclado. De arriba hacia abajo las frecuencias son 697, 770, 852 y 941 Hz; de izquierda a derecha son 1209, 1336 y 1477 Hz. Por ejemplo: el número 2 se codifica con la suma de dos senos con frecuencias 697 y 1336 Hz; el número 7 se codifica con 852 y 1209 Hz. Se necesita determinar el número que se ha discado. (Sugerencia: utilice el producto interno).