ĐẠI SỐ CƠ BẢN
(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)
Bài 16. Vectơ riêng - Giá trị riêng của ma trận và của phép biến đổi tuyến tính - Chéo hóa

PGS TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 28 tháng 2 năm 2006

1 Vectơ riêng - Giá trị riêng của ma trận

1.1 Các khái niệm cơ bản

Cho A là ma trận vuông cấp n, $(A \in M_n(\mathbb{R}))$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Khi đó

- Đa thức bậc n của biến λ:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda_1 + a_0$$

  gọi là *đa thức đặc trưng của ma trận A*.

- Các nghiệm thực của đa thức đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ gọi là *giá trị riêng của ma trận A*.

- Nếu λ_0 là một giá trị riêng của A thì $\det(A - \lambda_0 I) = 0$. Do đó hệ phương trình thuần nhất:

$$(A - \lambda_0 I)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

có vô số nghiệm. Không gian nghiệm của hệ (1) gọi là không gian con riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ_0. Các vectơ khác không là nghiệm của hệ (1) gọi là các vectơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ_0. Các vectơ tạo thành một cơ sở của không gian riêng (tức là các vectơ tạo thành hệ nghiệm cơ bản của hệ (1)) gọi là các vectơ riêng độc lập tuyến tính ứng với giá trị riêng λ_0.

1.2 Ví dụ

Tìm đa thức đặc trưng, vectơ riêng, giá trị riêng của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Giải

- Ta có $P_A\lambda = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$

  Vậy đa thức đặc trưng của ma trận A là $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$

- $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2(2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ (kép) , $\lambda = 2$.

  Vậy ma trận A có 2 giá trị riêng là $\lambda = -1$, $\lambda = 2$.

- Để tìm vectơ riêng của A, ta xét hai trường hợp:

  - Ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$.

    Để tìm vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$, ta giải hệ:

    $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

    Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số x_2, x_3. Nghiệm tổng quát của hệ là: $x_1 = -a-b$, $x_2 = a$, $x_3 = b$. Do đó, không gian con riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$ là $V_{-1} = \{(-a-b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

    Các vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$ là tất cả các vectơ có dạng: $(-a-b, a, b)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ (vì vectơ riêng phải khác không).

    Ta có $\dim V_{-1} = 2$ và A có 2 vectơ riêng độc lập tuyến tính ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$ là $\alpha_1 = (-1, 1, 0)$, $\alpha_2 = (-1, 0, 1)$.

  - Ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$.

    Để tìm vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$, ta giải hệ:

    $$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

    $$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc tham số x_3. Nghiệm tổng quát của hệ là: $x_1 = a$, $x_2 = a$, $x_3 = a$. Do đó, không gian con riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$ là $V_2 = \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Các vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$ là tất cả các vectơ có dạng: (a, a, a) với $a \neq 0$.

Ta có $\dim V_2 = 1$ và A có 1 vectơ riêng độc lập tuyến tính ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$ là $\alpha_3 = (1, 1, 1)$.

Chú ý rằng, nếu xét cả hai trường hợp, A có tất cả 3 vectơ riêng độc lập tuyến tính là α_1, α_2, α_3.

2 Chéo hóa ma trận

2.1 Ma trận đồng dạng

- Cho A, B là các ma trận vuông cấp n. Ta nói A đồng dạng với B, ký hiệu $A \sim B$, nếu tồn tại ma trận T vuông cấp n, không suy biến sao cho $B = T^{-1}AT$. Bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra rằng quan hệ đồng dạng là một quan hệ tương đương.

- Quan hệ đồng dạng bảo toàn khá nhiều các tính chất của ma trận, chẳng hạn nếu $A \sim B$ thì $\det A = \det B$, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$, $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$, giá trị riêng của A và B là như nhau...

2.2 Chéo hóa ma trận

- **Định nghĩa.** Cho A là ma trận vuông cấp n.

  Ta nói ma trận A chéo hóa được nếu A đồng dạng với một ma trận chéo. Như vậy ma trận A chéo hóa được nếu tồn tại ma trận T vuông cấp n không suy biến sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận chéo.

  Chéo hóa ma trận A tức là tìm ma trận T vuông cấp n không suy biến sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận chéo.

- **Ý nghĩa của việc chéo hóa ma trận**

  Nếu ma trận A chéo hóa được thì việc nghiên cứu các tính chất (bảo toàn qua quan hệ đồng dạng) của ma trận A dẫn đến việc nghiên cứu các tính chất đó trên một ma trận chéo và như vậy vấn đề sẽ trở nên đơn giản hơn nhiều.

  Muốn biết ma trận A có chéo hóa được hay không, ta có định lý sau:

- **Định lý** *(Điều kiện cần và đủ để một ma trận vuông chéo hóa được)*

  Ma trận A vuông cấp n chéo hóa được khi và chỉ khi A có đủ n vectơ riêng độc lập tuyến tính, khi và chỉ khi $\sum_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i} = n$, trong đó $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ là tất cả các giá trị riêng của A.

2.3 Cách chéo hóa một ma trận

Cho A là ma trận vuông cấp n. Để chéo hóa ma trận A, ta làm như sau:

Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng độc lập tuyến tính của A. Khi đó xảy ra một trong hai khả năng sau:

1. Nếu tổng số vectơ riêng độc lập tuyến tính của A bé hơn n (tức là $\sum_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i} < n$, trong đó V_{λ_i} là không gian con riêng ứng với giá trị riêng λ_i) thì kết luận ma trận A không chéo hóa được, tức là không tồn tại ma trận T để $T^{-1}AT$ là ma trận chéo.

2. Nếu tổng số vectơ riêng độc lập tuyến tính của A bằng n (tức là $\sum_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i} = n$ thì ma trận A chéo hóa được. Khi đó ma trận T cần tìm là ma trận mà các cột của nó chính là các vectơ riêng độc lập tuyến tính của A viết theo cột, và khi đó

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

là ma trận chéo, trong đó λ_i chính là giá trị riêng của A ứng với vectơ riêng là vectơ cột thứ i của ma trận T.

2.4 Ví dụ

Chéo hóa ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Giải

Trước hết tìm vectơ riêng, giá trị riêng của A.

Theo ví dụ b), mục 1, ma trận A có hai giá trị riêng là $\lambda = -1$, $\lambda = 2$ và A có ba vectơ riêng độc lập tuyến tính là $\alpha_1 = (-1, 1, 0)$, $\lambda = (-1, 0, 1)$ ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$ và $\alpha_3 = (1, 1, 1)$ ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$.

Do đó, ta kết luận:

- Ma trận A chéo hóa được.

- Ma trận cần tìm là:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

và

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3 Vectơ riêng, giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính

3.1 Các khái niệm cơ bản

Cho V là không gian vectơ và $f : V \to V$ là phép biến đổi tuyến tính.

Nếu U là không gian vectơ con bất biến của V sao cho $f(U) \subset U$ thì U gọi là không gian con bất biến của V.

Giả sử U là không gian con bất biến 1 chiều và α là một vectơ khác không, thuộc U (do đó α là cơ sở của U), khi đó vì $f(U) \subset U$ nên $f(\alpha) \in U$ và $f(\alpha) = \lambda\alpha$. Từ đó ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa. Cho V là không gian vectơ, $f : V \to V$ là phép biến đổi tuyến tính của V. Nếu ta có $f(\alpha) = \lambda\alpha$ trong đó $\alpha \in V$ là vectơ khác không và $\lambda \in \mathbb{R}$ thì α gọi là vectơ riêng của f ứng với giá trị riêng λ.

3.2 Cách tìm giá trị riêng, vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính

Các giá trị riêng, vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính có sự tương ứng chặt chẽ với các giá trị riêng, vectơ riêng của ma trận của nó. Ta sẽ thấy rõ điều đó qua phần trình bày dưới đây.

Cho V là không gian vectơ n-chiều ($\dim V = n$) và cho $f : V \to V$ là phép biến đổi tuyến tính. Giả sử $(U) : u_1, \ldots, u_n$ là cơ sở của V và $A = A_{f/(U)}$ là ma trận của f trong cơ sở (U). Ta có biểu thức tọa độ của f như sau (xem bài 15):

$$[f(\alpha)]/_{(U)} = A.[\alpha]/_{(U)} \qquad (*)$$

Nếu α là vectơ riêng của f ứng với giá trị riêng λ_0 thì $f(\alpha) = \lambda_0 f$. Thay vào vào $(*)$ ta có:

$$\lambda_0.[\alpha]/_{(U)} = A.[\alpha]/_{(U)}$$

hay

$$[A - \lambda_0 I][\alpha]/_{(U)} = 0 \qquad (**)$$

Vì vectơ α khác không nên hệ phương trình $(**)$ có nghiệm khác không $\Leftrightarrow \det[A - \lambda_0 I] = 0$ $\Leftrightarrow \lambda_0$ là giá trị riêng của A.

Như vậy, λ_0 *là giá trị riêng của* $f \Leftrightarrow \lambda_0$ *là giá trị riêng của ma trận* $A = A_{f/(U)}$ *và* $\alpha \in V$ *là vectơ riêng của* f *ứng với giá trị riêng* $\lambda_0 \Leftrightarrow [\alpha]/_{(U)}$ *là vectơ riêng của* A *ứng với giá trị riêng* λ_0.

Từ đó ta có quy tắc tìm giá trị riêng và vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính $f : V \to V$ như sau:

1. Bước 1. Tìm ma trận của f trong một cơ sở $(U) : u_1, \ldots, u_n$ nào đó của V, nghĩa là tìm $A = A_{f/(U)}$.

2. Bước 2. Tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận A.

3. Bước 3. Kết luận

   - Các giá trị riêng của A cũng chính là giá trị riêng của f.
   - Nếu $(a_1, \ldots, a_n)$ là vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng λ_0 thì $a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$ là vectơ riêng của f ứng với giá trị riêng λ_0.

3.3 Vấn đề tìm cơ sở của V để ma trận của f trong cơ sở là ma trận chéo

Để nghiên cứu một phép biến đổi tuyến tính $f : V \to V$, ta có thể qui về việc nghiên cứu ma trận của f. Từ đó dẫn đến việc cần tìm cơ sở để ma trận của f trong cơ sở đó là ma trận chéo (là ma trận khá đơn giản, dễ nghiên cứu). Sau đây là cách tìm cơ sở như vậy:

Đầu tiên ta tìm các vectơ riêng độc lập tuyến tính của f. Nếu f có ít hơn n vectơ riêng độc lập tuyến tính ($n = \dim V$) thì không có cơ sở nào của f để ma trận của f trong cơ sở đó là ma trận chéo. Nếu f có n vectơ riêng độc lập tuyến tính là $(\alpha) : \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ thì n vectơ riêng độc lập tuyến tính đó làm thành cơ sở (α) của V và ma trận của f trong cơ sở (α) đó là ma trận chéo. Cụ thể:

$$A_{f/_{(U)}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

trong đó λ_i là giá trị riêng ứng với vectơ riêng α_i (các λ_i có thể bằng nhau).

3.4 Ví dụ

Trong $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở:

$$u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (1, 1, 0), \quad u_3 = (1, 0, 0)$$

và cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(u_1) = (4, 3, 2)$$
$$f(u_2) = (4, 3, 1)$$
$$f(u_3) = (1, 0, 0)$$

Tìm cơ sở để ma trận f trong cơ sở đó là ma trận chéo.

Giải

Đầu tiên ta tìm vectơ riêng, giá trị riêng của f. Để tìm vectơ riêng, giá trị riêng của f, ta tìm ma trận của f trong một cơ sở nào đó của $\mathbb{R}^3$. Trong bài toán cụ thể này, tìm ma trận của f trong cơ sở $(U) : u_1, u_2, u_3$ là dễ nhất. Vậy:

1. Bước 1. Tìm ma trận của f trong cơ sở (U)

   Ta phải giải 3 hệ phương trình sau:

   - Hệ 1
     $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$
     $a_1 = 2,$
     $a_2 = 3 - a_1 = 1,$
     $a_3 = 4 - a_1 - a_2 = 1$

- Hệ 2

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

  $b_1 = 1,$

  $b_2 = 3 - b_1 = 2,$

  $b_3 = 4 - b_1 - b_2 = 1$

- Hệ 3

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  $c_1 = 0,$

  $c_2 = -c_1 = 0,$

  $c_3 = 1 - c_1 - c_2 = 1$

Vậy $A_{f/(U)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Bước 2. Tìm giá trị riêng, vectơ riêng của A và của f

$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$P_A(\lambda) = (1-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, \lambda = 3$

Vậy A có hai giá trị riêng là $\lambda = 1$, $\lambda = 3$.

Suy ra f *có hai giá trị riêng là* $\lambda = 1$, $\lambda = 3$.

- Các vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$ là nghiệm của hệ

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số x_2, x_3.

  Nghiệm tổng quát của hệ là: $x_1 = -a$, $x_2 = a$, $x_3 = b$.

  Vectơ riêng của A, ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$, là $(-a, a, b)$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

  Trong trường hợp này, A có hai vectơ riêng độc lập tuyến tính là $\alpha_1 = (-1, 1, 0)$ và $\alpha_2 = (0, 0, 1)$.

  Do đó, *ứng với giá trị riêng* $\lambda = 1$, *vectơ riêng của* f *là các vectơ có dạng*

  $$-au_1 + au_2 + bu_3 = (b, 0, -a)$$

  với $a^2 + b^2 \neq 0$.

  Trong trường hợp này, f *có hai vectơ riêng độc lập tuyến tính là:*

  $\beta_1 = -u_1 + u_2 + 0u_3 = (0, 0, -1)$

  $\beta_2 = 0u_1 + 0u_2 + u_3 = (1, 0, 0)$

- Các vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$ là nghiệm của hệ
  $\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
  Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số x_2.
  Ta có: $x_2 = a$, $x_3 = 0$, $x_1 = a$
  Nghiệm tổng quát của hệ là: $x_1 = a$, $x_2 = a$, $x_3 = 0$.
  Vectơ riêng của A, ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$, là $(a, a, 0)$, $a \neq 0$.
  Trong trường hợp này, A có một vectơ riêng độc lập tuyến tính là $\alpha_3 = (1, 1, 0)$.
  Do đó, *ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$, vectơ riêng của f là các vectơ có dạng*

  $$au_1 + au_2 + 0u_3 = (2a, 2a, a), \quad a \neq 0$$

  Trong trường hợp này, f có một vectơ riêng độc lập tuyến tính là:
  $\beta_3 = 1u_1 + 1u_2 + 0u_3 = (2, 2, 1)$

3. Bước 3. Kết luận

   f có ba vectơ riêng độc lập tuyến tính là các vectơ β_1, β_2 (ứng với $\lambda = 1$) và β_3 (ứng với $\lambda = 3$). Do đó, β_1, β_2, β_3 làm thành cơ sở của $\mathbb{R}^3$ mà ma trận của f trong cơ sở β_1, β_2, β_3 là ma trận chéo. Cụ thể:

   $$A_{f/_{(\beta)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Bài tập

1. (a) Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính $\Leftrightarrow$ tồn tại các số $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ để $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$.

   (b) Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính $\Leftrightarrow$ tồn tại các số $a_{ij} \in \mathbb{R}$ để $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)$.

2. Tìm công thức của ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (tìm $f(x_1, x_2, x_3)$) biết:

   (a) $f(1,1,2) = (1,0,0)$
   $f(2,1,1) = (0,1,1)$
   $f(2,2,3) = (0,-1,0)$

   (b) $f(1,2,3) = (-1,0,1)$
   $f(-1,1,1) = (0,1,0)$
   $f(1,3,4) = (1,0,2)$

3. Trong $\mathbb{R}^3$ cho 2 cơ sở

   $u_1 = (1,0,0), \quad u_2 = (0,1,1), \quad u_3 = (1,0,1) \quad (U)$

   $v_1 = (1,-1,0), \quad v_2 = (0,1,-1), \quad v_3 = (1,0,1) \quad (V)$

   và cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(u_i) = v_i$, $i = 1,2,3$.

   (a) Tìm công thức của f.

   (b) Tìm các ma trận sau: $A_{f/_{(U)}}$, $A_{f/_{(U),(V)}}$, $A_{f/_{(V)}}$, $A_{f/_{(V),(U)}}$, $A_{f/(\varepsilon^3)}$

4. Cho ánh xạ tuyến tính $\Theta : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, $p(x) \mapsto p'(x)$.

   Tìm ma trận của Θ trong cơ sở:

   (a) $1, x, x^2, \dots, x^n$

   (b) $1, (x-a), \dfrac{(x-a)^2}{2!}, \dots, \dfrac{(x-a)^n}{n!}$

5. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_4, 2x_2 + x_3 + x_4)$$

   Tìm cơ sở, số chiều của $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$.

6. Tìm vectơ riêng, giá trị riêng chéo hóa các ma trận sau:

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

7. Trong $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở:

$$u_1 = (1,1,1), \quad u_2 = (-1,2,1), \quad u_3 = (1,3,2)$$

và cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$f(u_1) = (0,5,3)$

$f(u_2) = (2,4,3)$

$f(u_3) = (0,3,2)$

Tìm một cơ sở để ma trận f trong cơ sở đó là ma trận chéo.

8. Cho phép biến đổi tuyến tính $\varphi : V \to V$ thỏa $\varphi^2 = \varphi$. Chứng minh:

$\operatorname{Im}\varphi + \operatorname{Ker}\varphi = V$

$\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$

9. Cho $f : V \to V$ là phép biến đổi tuyến tính, L là không gian vectơ con của V. Chứng minh:

(a) $\dim L - \dim \operatorname{Ker} f \leq \dim f(L) \leq \dim L$

(b) $\dim L \leq \dim f^{-1}(L) \leq \dim L + \dim \operatorname{Ker} f$

10. Cho $\varphi : V \to W$, $\psi : W \to U$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh:

(a) $\operatorname{rank}(\psi\varphi) \leq \min\{\operatorname{rank}\psi, \operatorname{rank}\varphi\}$

(b) $\operatorname{rank}(\psi\varphi) = \operatorname{rank}\varphi - \dim(\operatorname{Ker}\psi \cap \operatorname{Im}\varphi)$

(c) $\operatorname{rank}(\psi\varphi) \geq \operatorname{rank}\varphi + \operatorname{rank}\psi - \dim W$