

SVD et Conditionnement

Minh-Phuong Tran - 51091600 - Novembre 2018

1 Introduction $A = U\Sigma V^T, Ax = b \implies x = U^T \Sigma^{-1} Vb$

La décomposition en valeurs singulières d'une matrice permet entre autres de diminuer les erreurs numériques (dûes à l'instabilité du problème par exemple) et est donc un outil pratique pour la manipulation de matrices. C'est pourquoi, il est intéressant d'analyser certaines propriétés de cette décomposition notamment en observant l'effet de différents paramètres sur l'ensemble des valeurs singulières, l'énergie contenue dans certaines valeurs singulières ainsi que l'erreur entre une solution exacte et son approximation par une somme d'énergies.

2 Effet des paramètres sur le conditionnement et le spectre de A

Tout d'abord, le conditionnement d'une matrice peut être exprimée comme : $\kappa = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$

Nous avons fait varier ces différents paramètres du fichier ccore.py :

La **taille de l'entrefer** (Figure 1). Nous observons que plus l'entrefer est petit, plus le système est mal conditionné. La courbe se rapproche de $y = \frac{1}{x}$. Nous observons également que les spectres sont de plus en plus compactes ce qui confirme bien le conditionnement décroissant en fonction de la taille de l'entrefer.

La **perméabilité relative** (Figure 2). Le conditionnement de A est linéairement dépendant de cette perméabilité à partir d'une certaine perméabilité. En effet, lorsque nous nous rapprochons de zéro, nous trouvons une asymptote.

Le **courant** (Figure 3). Ce paramètre n'a pas d'effet sur le conditionnement du problème et les spectres sont toujours les mêmes.

Le **raffinement du maillage** (Figure 3). La fonction est en général décroissante, on observe néanmoins un pic qui pourrait s'expliquer par la mauvaise qualité des éléments qui pourraient être plats.

La commande **lc3=E/2.*R**. Le conditionnement diminue suite à l'ajout de cette commande puisqu'il passe de 102744 à 39436.

3 Energie et erreur

L'énergie d'une matrice peut s'exprimer comme : $\sum \sigma_i^2$ Nous pouvons alors obtenir l'énergie de A par sa décomposition SVD et le pourcentage d'énergie contenu dans sa première valeur singulière : 58,42532989396675 %.

Ce qui nous intéresse néanmoins c'est l'énergie de x. Or nous savons que $x = U^T \Sigma^{-1} Vb$. Son énergie peut alors être exprimée par : $\sum \frac{1}{\sigma_i^2}$. Si nous prenons l'énergie de la première valeur singulière, nous obtenons cette fois : 5.682356761847437e-8 % d'énergie contenue. En effet, vu que la première valeur singulière de A est sa plus grande, en prenant l'inverse, elle devient la plus petite (cfr. Figure 4). Si nous voulons prendre l'élément avec la plus grande énergie nous devons plutôt regarder la dernière valeur singulière qui nous donne comme pourcentage d'énergie relative à x : 88,37275519951185 %. Il est à noter que ces calculs d'énergie sont réalisés sur le problème avec les paramètres de base qui est un problème dont le conditionnement est fort élevé. Si nous jouons sur les paramètres de sorte à obtenir un problème mieux conditionné, le spectre des valeurs propres serait moins étendu et l'énergie totale serait mieux répartie. (Cfr Figure 4)

En ce qui concerne le nombre de termes requis pour une solution avec une erreur de 10% ou 1% par rapport à la solution exacte, nous avons tout d'abord utilisé : $A_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} u_j \sigma_j v_j^T$ avec $\nu < \text{rang de A}$ Nous avons obtenu comme termes requis pour ces 2 pourcentages d'erreur : 84 termes lorsque Σ contenait 88 termes. Le graphe (Figure 4) montre les pourcentages d'erreur lorsque l'on prend les n plus grands termes de Σ .

4 Conclusion

Pour qu'un problème soit mieux conditionné, la dimension de l'entrefer ne doit pas être trop petite, la perméabilité relative doit quand à elle être faible, quand au maillage, il est difficile de lui imposer une contrainte. Pour l'énergie d'une matrice, elle est en grande concentration dans sa valeur propre la plus grande. Enfin, pour que l'erreur entre la solution exacte et son approximation par la somme soit inférieure à 1 ou 10 % il faut quand même la plupart des termes.



Figure 1: Conditionnement et Spectre de A en fonction de la taille de l'entrefer

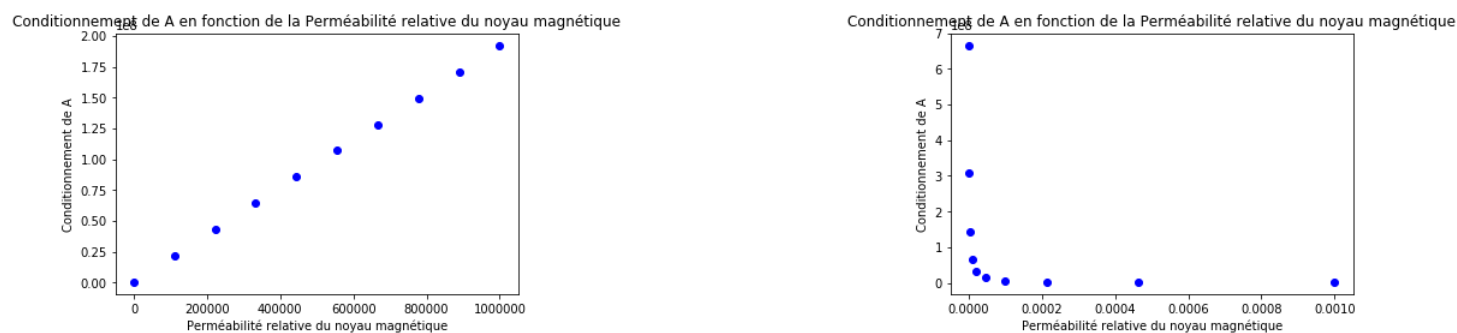


Figure 2: Conditionnement de A en fonction de la perméabilité relative du noyau loin et proche de 0

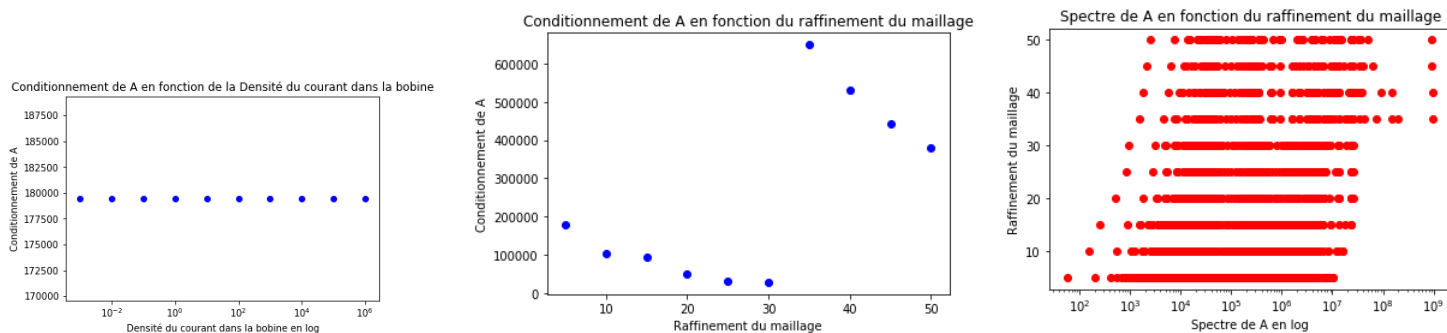


Figure 3: Conditionnement et Spectre de A en fonction du raffinement du maillage et du courant

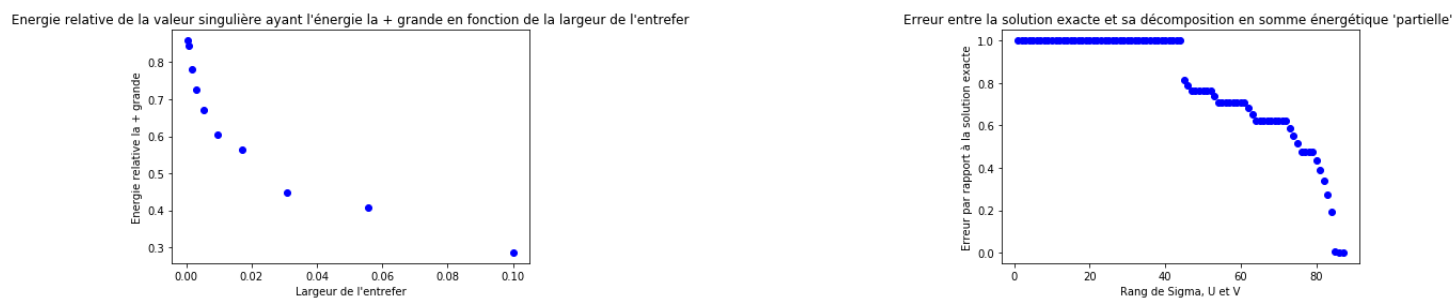


Figure 4: Energie relative de x contenue dans la n -ième valeur singulière en fonction de la largeur de l'entrefer et erreur de x_ν par rapport à x