

Synchronisation des oscillateurs biologiques couplés par pulsations

LINMA2720 - Modélisation mathématique de
systèmes physiques

Antoine Tuerlinckx 65951500
antoine.tuerlinckx@student.uclouvain.be
Tran Minh-Phuong 51091600
minh-phuong.tran@student.uclouvain.be

Table des matières

1	Introduction	2
2	Modèle mathématique d'oscillateurs couplés par pulsations	3
3	Deux oscillateurs	5
3.1	Application de retour et de tir	5
3.2	Dynamiques du couple d'oscillateurs	7
3.3	Exemple	8
3.3.1	Temps de synchronisation	9
3.3.2	Point fixe	11
3.3.3	Stabilité du point fixe	11
4	Population d'oscillateurs	12
4.1	Espace d'état	12
4.2	Application de tir	13
4.3	Absorptions	14
4.4	Résultats numériques	14
4.5	Théorème principal	15
4.5.1	Théorème 4.1	16
4.5.2	Théorème 4.2	19
4.6	Exemple	22
5	Discussion	23
5.1	Dans d'autres directions	23
5.1.1	Synchronisation	24
5.1.2	Modèles intègre-et-tire	24
5.1.3	Couplage par pulsations	24
5.1.4	Scintillement des lucioles	25
5.1.5	Structure spatiale et interactions entre oscillateurs	25
5.1.6	Différentes dynamiques pour chaque oscillateur	26
6	Conclusion	26

1 Introduction

Cela fait bien longtemps que l'Homme essaye de comprendre la nature qui l'entoure. Et bien qu'il ait réussi à décrire certaines des lois qui la gouvernent, il lui reste encore beaucoup à découvrir et à apprendre. En effet, que ce soit des phénomènes spectaculaires ou de simples événements que nous rencontrons tous les jours, il peut être fascinant de voir que par les mathématiques, il nous est possible de décrire leur fonctionnement.

Dans ce travail, nous nous intéressons aux systèmes biologiques tels que les cellules du coeur, le scintillement des colonies de lucioles ou encore des applaudissements d'un public en fin de concert. En effet, bien que forts différents, ces groupes de systèmes ont la particularité d'être couplés par pulsations, ce qui leur permet, dans certains cas, de se synchroniser. C'est ainsi que les différentes cellules du coeur arrivent à se mettre en rythme pour nos battements de coeur, que nous pouvons observer dans certaines régions du monde des milliers de lucioles scintillant à la même fréquence, ou lorsque le public demande un "encore", il arrive à se mettre d'accord sur une fréquence d'applaudissement.

Pour comprendre comment et sous quelles conditions ces oscillateurs couplés par pulsations se synchronisent, nous étudierons principalement l'article [1] en suivant la démarche des auteurs Mirollo et Strogatz.

Dans un premier temps, nous énoncerons les hypothèses considérées afin de choisir le modèle mathématique décrivant ces oscillateurs. Ensuite, nous étudierons le comportement d'un groupe de 2 oscillateurs avant de nous intéresser au cas plus général avec N oscillateurs. Nous discuterons alors des résultats obtenus par les auteurs et des liens avec d'autres recherches auparavant. Et enfin, nous présenterons les pistes de modifications à faire sur le modèle mathématique afin de pouvoir décrire une classe plus grande de systèmes biologiques.

2 Modèle mathématique d'oscillateurs couplés par pulsations

Avant de présenter la forme mathématique du modèle d'oscillateur, analysons les caractéristiques des systèmes biologiques qui nous intéressent.

Tout d'abord, considérons l'exemple des lucioles. Nous observons que chaque luciole clignote à un certain rythme et tout comme Winfree [2], nous supposons que ces oscillateurs sont fortement attirés par leurs cycles limites. C'est-à-dire que nous considérons qu'ils sont périodiques et qu'au lieu d'être caractérisés par des variations d'amplitudes et de phases, nous ne considérerons que leurs phases.

Ensuite, lors d'une seule période, la luciole a sa lumière éteinte pendant un certain temps, que nous appellerons "temps d'attente", avant que celle-ci ne s'allume. Et c'est lorsqu'elle s'allume que d'autres lucioles seront influencées pour modifier leur rythme de clignotement, par exemple, en raccourcissant leur temps d'attente. Après s'être illuminée, la luciole retourne à son état d'attente en se rééteignant.

Afin de trouver un modèle qui décrit au mieux ces comportements, il peut être pertinent de nous intéresser à ce qui a été proposé antérieurement. En effet, plusieurs recherches concernant la synchronisation mutuelle ont été effectuées dans le passé. Et bien que la plupart s'intéressent aux interactions continues entre oscillateurs, d'autres travaux sur les interactions par pulsations discontinues ont existé. C'est le cas de Peskin qui a proposé un modèle pour l'auto-synchronisation des cellules cardiaques pacemaker [3]. Son modèle est composé d'un réseau de N oscillateurs "intègre-et-tire" caractérisés par des variables d'état x_i telles que :

$$\frac{dx_i}{dt} = S_0 - \gamma x_i, \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.1)$$

avec $\gamma > 0$.

Lorsque $x_i = 1$, le i^e oscillateur "tire" et retourne à $x_i = 0$. Dans ce cas, soit il provoque d'autres tirs d'oscillateurs, soit il entraîne tous les autres oscillateurs d'un certain montant $\epsilon > 0$:

$$x_i(t) = 1 \Rightarrow x_j(t^+) = \min(1, x_j(t) + \epsilon) \quad \forall j \neq i \quad (2.2)$$

Avec son modèle, Peskin a démontré que, pour des conditions initiales arbitraires, à 2 oscillateurs avec un petit couplage $\epsilon > 0$ (appelé également force de pulsation) et une petite dissipation $\gamma > 0$, le système approche un état où tous les oscillateurs tirent simultanément. Et cela reste vrai même lorsque les oscillateurs ne sont pas tout à fait identiques.

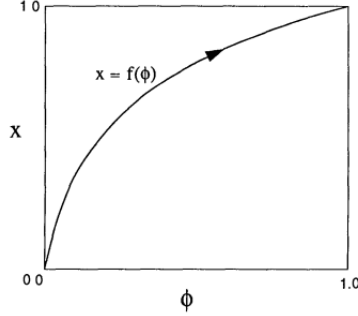


FIGURE 1 – Exemple de fonction $x = f(\phi)$ [1]

Sur base de ces premiers résultats, Strogatz et Mirollo trouvent des conclusions similaires sur un modèle plus général, que nous allons considérer pour la suite, où chaque oscillateur est décrit par une variable d'état $x_i = f(\phi_i)$. Celle-ci évolue jusqu'à atteindre le seuil $x_i = 1$ où l'oscillateur tire et l'état revient ensuite à $x_i = 0$.

Les seules restrictions sur $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sont :

- (i) sa régularité
- (ii) sa monotonie croissante (i.e. $f' > 0$)
- (iii) sa concavité vers le bas (i.e. $f'' < 0$).

Nous avons également que les $\phi_i(t) \in [0, 1]$ sont des variables de phase (qui décrivent à quel moment du cycle se trouvent les variables d'état x_i correspondant) telles que pour chaque i :

- (i) $\frac{d\phi_i(t)}{dt} = \frac{1}{T}$ avec T , la période du cycle
- (ii) $\phi_i = 0$ lorsque $x_i = 0$
- (iii) $\phi_i = 1$ lorsque $x_i = 1$

Par construction, nous avons $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. L'allure typique d'une fonction respectant ces conditions est donnée par la Figure 1.

Ensuite, deux suppositions de Peskin que Strogatz et Mirollo retiennent sont :

- (i) Tous les oscillateurs ont des dynamiques identiques
- (ii) Chaque oscillateur est couplé à tous les autres oscillateurs (par l'équation (2.2)).

Notons qu'ils considèrent que les oscillateurs ne peuvent pas avoir de "réactions en chaîne". Par exemple, dans le cas avec 2 oscillateurs A et B, lorsque A tire au temps t et influence B au temps t^+ , B aura un état $x_B = \min(1, f(1 - \phi) + \epsilon)$. Si $x_B = 1$, cela veut dire qu'au temps t^+ , il retourne de suite à l'état $x_B = 0$ sans influencer A en retour. Ce qui implique qu'un système dont les états sont $(x_A, x_B) = (0, 1)$ est considéré comme étant parfaitement synchronisé.

Enfin, définissons la fonction $g(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ comme étant la réciproque f^{-1} . La fonction g existe bel et bien comme nous savons que $f(\phi)$ est monotone sur son domaine et qu'elle atteint toutes les valeurs dans $[0, 1]$, ce qui signifie qu'elle est une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$. Ensuite, considérant nos conditions sur la fonction f , nous savons que :

(i) $g(0) = 0$

(ii) $g(1) = 1$

(iii) g est monotone croissante (i.e. $g' > 0$)

(iv) g est concave vers le haut (convexe)(i.e. $g'' > 0$).

Notons que par le théorème d'inversion locale, g est dérivable et par le théorème de dérivation des fonctions composées nous avons :

$$f(g(y)) = y \quad (2.3)$$

$$f'(g(y))g'(y) = y' \quad (2.4)$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \quad \text{ou} \quad f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} \quad (2.5)$$

3 Deux oscillateurs

Considérons à présent 2 oscillateurs A et B couplés entre eux et dont la dynamique est telle que décrite précédemment. (x_A, x_B) et (ϕ_A, ϕ_B) sont les variables d'état et de phases décrivant les oscillateurs A et B.

Nous présenterons dans cette section la démonstration, apportée par Mirolo et Strogatz, que les 2 oscillateurs arriveront toujours à se synchroniser.

3.1 Application de retour et de tir

Avant de commencer, nous avons besoin de définir les notions d'application de retour et d'application de tir.

Considérons l'état du système décrit par la Figure 2(a). L'oscillateur A vient de tirer et retourne à la phase $\phi_A(0^+) = 0$ avec un état $x_A(\phi_A(0^+)) = 0$ tandis que l'oscillateur B est à la phase $\phi_B(0^+) = \phi$ ce qui correspond à un état $x_B(\phi_B(0^+)) = f(\phi)$.

Nous savons alors qu'après un temps $\tau := (1 - \phi)$, l'oscillateur B tire avec une phase et un état $\phi_B(\tau) = 1$ et $x_B(\phi_B(\tau)) = 1$. Pendant ce temps l'oscillateur A aura atteint la phase de valeur $\phi_A(\tau) = 1 - \phi$ correspondant à l'état $x_A(\phi_A(\tau)) = f(1 - \phi)$ (Figure 2(b))

Directement après, l'oscillateur B retourne à $\phi_B(\tau^+) = 0$ et $x_B(\phi_B(\tau^+)) = 0$. L'oscillateur A quand à lui, subit une influence due au tir de B et $x_A(\phi_A(\tau^+)) = \min(1, f(1 - \phi) + \epsilon)$. Notons que si le minimum entre les 2 valeurs est 1, alors notre système s'est déjà synchronisé et notre travail s'arrête là. C'est pourquoi, nous étudierons plutôt le cas où $x_A(\phi_A(\tau^+)) = f(1 - \phi) + \epsilon$ ce qui correspond à la phase $\phi_A(\tau^+) = g(f(1 - \phi) + \epsilon)$ (Figure 2(c)) avec $g = f^{-1}$ comme mentionné précédemment.

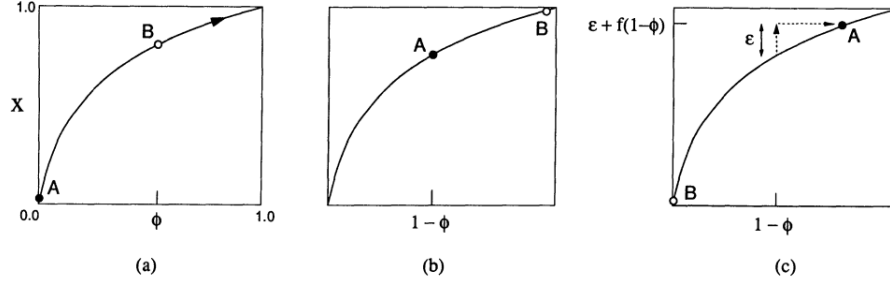


FIGURE 2 – Système de 2 oscillateurs tels de décrits précédemment. (a) État du système juste après que A ait tiré au temps 0^+ . (b) État du système juste avant que B ne tire, au temps $\tau := (1 - \phi)$. (c) État du système juste après que B ait tiré, au temps τ^+ . L'oscillateur A a subi une influence due au tir.[1]

L'application de tir est alors définie comme étant :

$$h(\phi) = g(\epsilon + f(1 - \phi)) \quad (3.1)$$

Partant des phases initiales $(\phi_A, \phi_B) = (0, \phi)$, après un tir (de l'oscillateur B), nous arrivons donc aux phases $(\phi_A, \phi_B) = (h(\phi), 0)$.

Sur base de cette première notion, si un tir de plus a lieu, nous trouvons l'application de retour :

$$R(\phi) = h(h(\phi)) \quad (3.2)$$

Enfin, il est également important de définir les domaines de h et R . En effet, nous avons supposé que $f(1 - \phi) + \epsilon < 1$ afin d'éviter le cas où la synchronisation a lieu dès le premier tir. Pour que cette condition soit satisfaite il nous faut :

$$\begin{cases} \epsilon \in [0, 1) \\ \phi \in (\delta, 1); \end{cases} \quad \delta = 1 - g(1 - \epsilon) \quad (3.3)$$

La première condition se porte sur le couplage entre les oscillateurs. Il est clair que si $\epsilon = 1$, nous avons une synchronisation dès le premier tir.

Pour la deuxième condition, il est évident que si $\phi = 1$, nous commençons déjà avec une synchronisation. Pour le cas où $\phi = \delta$, c'est-à-dire que les phases initiales du système sont $(0, 1 - g(1 - \epsilon))$, après le premier tir, nous aurons les phases :

$$(h(1 - g(1 - \epsilon)), 0) = (g(\epsilon + f(1 - 1 + g(1 - \epsilon))), 0) = (g(\epsilon + 1 - \epsilon), 0) = (1, 0)$$

Ce qui correspond également à une synchronisation.

Avec ceci, nous avons donc que le domaine de $h(\phi)$ est le sous-intervalle $(\delta, 1)$. Le domaine de $R(\phi)$ est alors $(\delta, h^{-1}(\delta))$. En effet,

$$h^{-1}(\phi) = 1 - g(f(\phi) - \epsilon) \quad (3.4)$$

Et comme $f(\delta) < 1$, il est clair que :

$$h^{-1}(1) = \delta = 1 - g(1 - \epsilon) < 1 - g(f(\delta) - \epsilon) = h^{-1}(\delta)$$

Avec ces outils, nous verrons que les oscillateurs se "rapprochent" à chaque itération de l'application de retour. Notons que la synchronisation parfaite a lieu lorsque les oscillateurs sont tellement proches que le tir de l'un amène l'autre au seuil maximal également. Ils resteront synchronisés à partir de ce moment comme nous avons présumé que leurs dynamiques sont identiques.

3.2 Dynamiques du couple d'oscillateurs

Nous pouvons à présent comprendre la démarche de Mirolo et Strogatz pour démontrer que l'application $R(\phi)$ a un point fixe unique et qu'il est répulsif.

Lemma 3.1. $h'(\phi) < -1$ et $R'(\phi) > 1$

Démonstration. Comme $R'(\phi) = h'(h(\phi))h'(\phi)$, il suffit de montrer que $h'(\phi) < -1 \quad \forall \phi$. Nous avons alors :

$$h'(\phi) = -g'(\epsilon + f(1 - \phi))f'(1 - \phi) \quad (3.5)$$

$$= -\frac{g'(\epsilon + f(1 - \phi))}{g'(f(1 - \phi))} \quad (3.6)$$

Grâce à l'équation (3.1), nous avons la première égalité. Quand à la deuxième, nous utilisons la dérivée d'une réciproque obtenue à l'équation (2.5).

En posant $u = f(1 - \phi)$, nous simplifions l'expression de la dérivée de h :

$$h' = -\frac{g'(\epsilon + u)}{g'(u)} \quad (3.7)$$

Et comme $g' > 0$, $g'' > 0$ et $\epsilon > 0$, $g'(\epsilon + u) > g'(u) > 0$. Nous obtenons donc bien $h' < -1$. \square

Proposition 3.2. *L'application $R(\phi)$ a un point fixe unique et répulsif sur $(\delta, h^{-1}(\delta))$.*

Démonstration. Tout d'abord, nous voulons prouver l'existence du point fixe. Pour cela, il est suffisant de prouver son existence pour l'application $h(\phi)$ comme il est clair que tout point fixe de $h(\phi)$ est aussi un point fixe de $R(\phi)$. Le point fixe de $h(\phi)$ est tel que :

$$F(\phi) \equiv \phi - h(\phi) = 0 \quad (3.8)$$

Nous avons que :

$$F(\delta) = \delta - g(\epsilon + f(1 - \delta)) \quad (3.9)$$

$$= \delta - 1 \quad (3.10)$$

$$< 0 \quad (3.11)$$

Ainsi que :

$$F(h^{-1}(\delta)) = 1 - g(f(\delta) - \epsilon) - g(\epsilon + f(1 - 1 + g(f(\delta) - \epsilon))) \quad (3.12)$$

$$= 1 - g(f(\delta) - \epsilon) - \delta \quad (3.13)$$

$$= -g(f(\delta) - \epsilon) + g(1 - \epsilon) \quad (3.14)$$

$$> 0 \quad (3.15)$$

Avec le Lemme 3.1, nous pouvons calculer

$$F'(\phi) = 1 - h'(\phi) > 2 > 0 \quad (3.16)$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, comme $F(\phi)$ est monotone croissante, $F(\delta) < 0$ et $F(h^{-1}(\delta)) > 0$, il existe un point fixe unique ϕ^* pour l'application $h(\phi)$.

Ensuite, considérons $R(\phi)$, nous avons que $R(\phi^*) = \phi^*$ et $R'(\phi) > 1$ par le Lemme 3.1. Cela signifie que

$$R(\phi) > \phi \quad \text{if } \phi > \phi^* \quad (3.17)$$

$$R(\phi) < \phi \quad \text{if } \phi < \phi^* \quad (3.18)$$

Nous obtenons donc bien un point fixe unique et répulsif pour $R(\phi)$. \square

Ce résultat signifie qu'à partir de n'importe quelle phase initiale ϕ autre que le point fixe, nous arriverons toujours de manière monotone à $\phi = 0$ ou $\phi = 1$, ce qui veut dire que les 2 oscillateurs arriveront toujours à se synchroniser.

3.3 Exemple

Après avoir démontré qu'une synchronisation aura toujours lieu pour presque toutes les conditions initiales avec une fonction $f(\phi)$ assez générale, il peut être intéressant d'analyser les comportements du système en choisissant une fonction $f(\phi)$ en particulier. Pour cela, Mirollo et Strogatz souhaitent rendre les applications $h(\phi)$ et $R(\phi)$ les plus simples possible. Ils choisissent alors

$$h'(\phi) = -\lambda \quad (3.19)$$

Avec $\lambda > 1$ d'après le Lemme 3.1 en imposant que λ soit indépendant de ϕ . Nous avons ainsi

$$h(\phi) = -\lambda(\phi - \phi^*) + \phi^* \quad (3.20)$$

$$R(\phi) = \lambda^2(\phi - \phi^*) + \phi^* \quad (3.21)$$

Pour trouver $f(\phi)$, la relation donnée par l'équation (3.7) est utilisée. En effet,

$$\frac{g'(\epsilon + u)}{g'(u)} = \lambda \quad \forall u \quad (3.22)$$

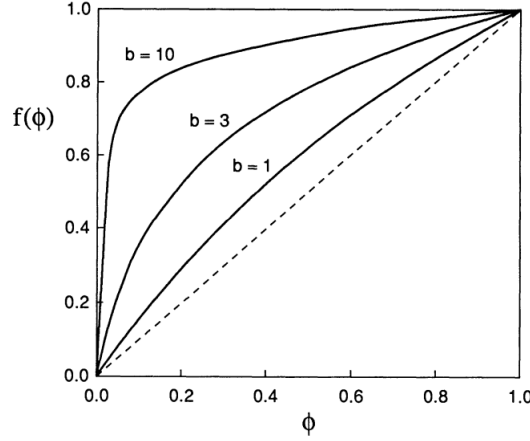


FIGURE 3 – Graphes de la fonction $f(\phi)$ selon l'équation (3.25) pour différentes valeurs de b . [1]

Cette équation fonctionnelle a des solutions de la forme

$$g'(u) = P(u)e^{bu} \quad (3.23)$$

Avec b , un paramètre tel que $\lambda = e^{b\epsilon}$ et $P(u)$ une fonction périodique de période ϵ . Pour faciliter la suite, $P(u) = a$, une constante, sera considéré.

En résolvant l'équation différentielle (3.23), avec les conditions $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$, nous obtenons

$$g(u) = \frac{e^{bu} - 1}{e^b - 1} \quad (3.24)$$

$$f(\phi) = g^{-1}(\phi) = \frac{1}{b} \ln(1 + (e^b - 1)\phi) \quad (3.25)$$

Afin de respecter les conditions de monotonie croissante et de concavité vers le bas de $f(\phi)$, nous devons avoir $f'(\phi) > 0$ et $f''(\phi) < 0$. Ce qui implique $b > 0$ (puisque la fonction $\ln(x)$ est monotone croissante et concave vers le bas).

Sur la Figure 3, le graphe de $f(\phi)$ montre que pour un b plus élevé, $f(\phi)$ croît rapidement pour se stabiliser. Pour un $b = 0$, $f(\phi)$ devient une droite.

Nous pouvons alors en déduire que le paramètre b mesure la concavité de f . Physiquement parlant, il peut être interprété comme étant la mesure de la dissipation dans les dynamiques du système.

Intéressons-nous aux différentes caractéristiques de ce système en particulier.

3.3.1 Temps de synchronisation

Par intuition, nous savons que plus ϵ est grand, plus la synchronisation se fait rapidement puisqu'il représente le couplage des oscillateurs. Il en va de même

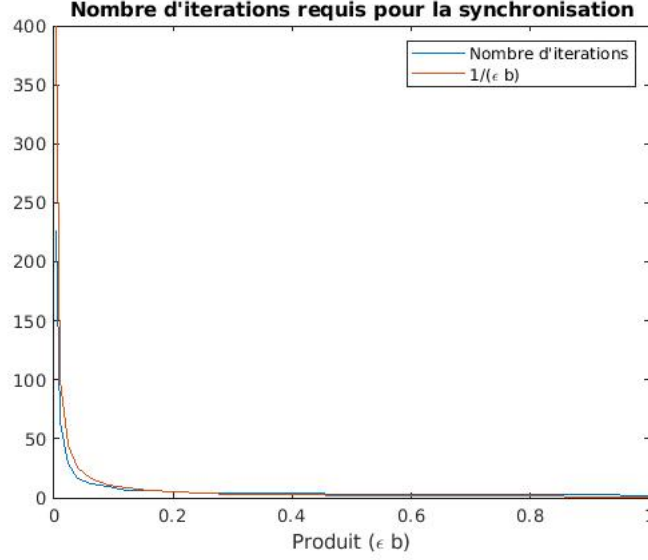


FIGURE 4 – Comparaison entre le nombre d'itérations en moyenne requis pour la synchronisation en fonction du produit (ϵb) et la fonction $\frac{1}{\epsilon b}$.

pour la dissipation b . En effet par la Figure 3, nous pouvons voir que pour un même ϵ lors du tir d'un oscillateur, l'autre oscillateur sera déplacé d'une plus grande phase si b est grand.

Estimons à présent le temps que le système met pour se synchroniser. En considérant la phase initiale ϕ_0 , ϕ_k est la k -ième itération $R^k(\phi_0)$ et $\Delta_k = |\phi_k - \phi^*|$, la distance entre ϕ_k et le point fixe ϕ^* . En utilisant l'expression de $f(\phi)$ par l'équation (3.25), nous avons

$$\Delta_k = \Delta_0 \lambda^{2k} = \Delta_0 e^{2\epsilon b k} \quad (3.26)$$

Sachant qu'il y a synchronisation lorsque $\phi_k = 0$ ou 1 , et que $\Delta_k \approx O(1)$, le nombre d'itérations requis est borné (à un facteur près) par

$$k \approx O\left(\frac{1}{\epsilon b} \ln\left(\frac{1}{\Delta_0}\right)\right) \quad (3.27)$$

Cela confirme donc notre intuition : le temps de synchronisation est inversement proportionnel au produit ϵb .

Afin d'observer cette relation, pour chaque produit ϵb , nous avons calculé la moyenne des temps de synchronisation de 100 simulations numériques avec 2 oscillateurs suivant les dynamiques décrites par les équations (3.25) et (3.24) avec ϕ tiré d'une distribution uniforme $(\mathcal{U}(\delta, 1))$. La Figure 4 montre bien que la moyenne des nombres d'itérations requis pour atteindre la synchronisation est bornée à un facteur près par la fonction $\frac{1}{\epsilon b}$.

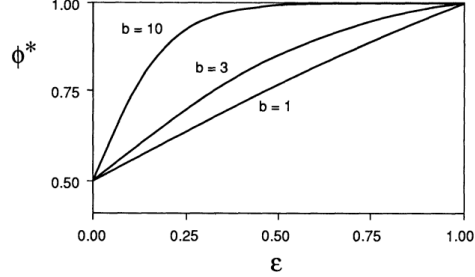


FIGURE 5 – Valeurs du point fixe pour différentes valeurs de b en fonction d' ϵ . [1]

Notons que Peskin a trouvé des résultats similaires mais pour de petites valeurs de couplage et de dissipation. Ici, les résultats obtenus sont bien valables même lorsque ϵ et b sont grands.

3.3.2 Point fixe

Il peut être également intéressant d'étudier comment dépend le point fixe des paramètres b et ϵ . Pour cela, nous utilisons l'équation (3.8).

$$\phi^* - h(\phi^*) = 0 \quad (3.28)$$

$$g(f(\phi^*)) - g(\epsilon + f(1 - \phi^*)) = 0 \quad (3.29)$$

$$f(\phi^*) - f(1 - \phi^*) = \epsilon \quad (3.30)$$

En y injectant l'équation (3.25), le point fixe de $f(\phi)$ a l'expression suivante :

$$\phi^* = \frac{e^{b(1+\epsilon)} - 1}{(e^b - 1)(e^{b\epsilon} + 1)} \quad (3.31)$$

Les valeurs de ϕ^* en fonction des paramètres b et ϵ sont montrées à la Figure 5. Nous observons que lorsque le couplage $\epsilon = 0$, le point fixe se trouve à $\phi^* = \frac{1}{2}$. Ce résultat peut être obtenu analytiquement et pour toute fonction générale $f(\phi)$ pas seulement pour ce cas particulier. En effet, il suffit pour cela de résoudre l'équation (3.30) avec un $\epsilon = 0$. Notons que $\phi^* = \frac{1}{2}$ correspond au cas où les oscillateurs sont en opposition de phases.

3.3.3 Stabilité du point fixe

Malgré que la fonction $f(\phi)$ soit continue, le système que nous observons est discret. En effet, les fonctions $h(\phi)$ et $R(\phi)$ ne calculent les phases des oscillateurs que lorsque l'un d'eux tire et non en continu. Cela est important pour notre analyse de la stabilité du point fixe. En effet, nous savons que, pour un système en temps discret, lorsque la valeur absolue de la dérivée au point fixe de la fonction d'intérêt est supérieure à 1, le point fixe est instable. Et si à l'inverse,

la valeur absolue de la dérivée en ce point est inférieure à 1, le point fixe est stable.

Dans notre cas, nous avons $|h'(\phi^*)| = |-\lambda| = e^{\epsilon b}$.

Or, nous avons imposé jusqu'à maintenant que $b > 0$ et $\epsilon > 0$, ce qui fait que $|h'(\phi^*)| > 1$. Notre point fixe est donc instable, comme nous l'avait prédit la Proposition 3.2.

Pour avoir un point fixe stable il aurait fallu :

- soit que $b > 0$ (qui, contrairement à un système avec une fuite et donc un ralentissement, correspondrait à un système avec une accélération jusqu'à un seuil)
- soit que $\epsilon > 0$ (qui correspondrait à un couplage inhibiteur, e.g. l'influence d'un oscillateur fait ralentir l'autre)

mais pas les deux en même temps. La synchronisation repose donc sur le couplage et la dissipation du système.

4 Population d'oscillateurs

Nous pouvons à présent étudier une population constituée de N oscillateurs. Avant de commencer l'analyse du système, intéressons-nous à la synchronisation du système de manière plus intuitive. En effet, nous pouvons imaginer que les oscillateurs commencent tout d'abord à former de petits groupes d'oscillateurs qui tirent ensemble. Et au fur et à mesure, ces groupes grossissent en "absorbant" d'autres oscillateurs, augmentant par la même occasion leur force de pulsation. Effectivement, précédemment, nous avons considéré cette force de couplage ϵ comme étant la même pour chaque oscillateurs. Mais afin de rendre notre problème plus général, nous considérerons à partir de maintenant que chaque oscillateur peut avoir une force de pulsation différente. De plus, lorsque plusieurs oscillateurs tirent en même temps et donc forment un groupe, leur influence est plus grande que s'il n'y avait qu'un seul oscillateur tirant tout seul. C'est ainsi que plus il y a d'oscillateurs dans un même groupe, plus la force de couplage de ce groupe entier sera grande. Ces groupes continuent, ensuite, d'absorber d'autres groupes jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un. A ce moment-là, la population se sera synchronisée.

4.1 Espace d'état

Commençons par définir l'espace d'état du système. Pour le reste du rapport, nous commencerons toujours à étudier le système lorsqu'un des oscillateurs vient de tirer et qu'il est revenu à zéro. Par convention, le premier oscillateur a donc une phase $\phi_0 = 0$ ¹. L'état du système est caractérisé par les phases ϕ_1, \dots, ϕ_n des $n = N - 1$ oscillateurs restants. L'ensemble des états possible du système est défini par l'ensemble

$$S = \{(\phi_1, \dots, \phi_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_n < 1\} \quad (4.1)$$

1. Pour le reste du rapport, la phase ϕ_0 du premier oscillateur sera souvent omise car elle est toujours la même par cette convention : $\phi_0 = 0$

où les oscillateurs ont été numérotés de 0 à n dans l'ordre croissant.

Par hypothèse, nous avons que tous les oscillateurs ont des dynamiques identiques et qu'ils sont tous couplés les uns aux autres. Nous pouvons alors garantir que l'ordre cyclique des oscillateurs est préservé. En effet, la fréquence de tir est la même pour tous les oscillateurs et la monotonie de la fonction f conserve leur ordre. Autrement dit, aucun oscillateur ne peut dépasser un autre oscillateur (dans le pire des cas, des oscillateurs peuvent se regrouper, mais jamais se dépasser). L'oscillateur d'indice n est le prochain oscillateur à tirer. Après avoir tiré, sa phase, son état et son indice retombent à zéro. Tous les autres oscillateurs sont également renumérotés et passent de l'indice j à l'indice $j + 1$, pour tout $j < n$. Grâce à cette renumérotation, la phase des oscillateurs est toujours croissante et nous avons

$$0 = \phi_0 < \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_n < 1$$

lorsqu'un oscillateur vient de tirer.

4.2 Application de tir

Tout comme pour le cas avec 2 oscillateurs, nous devons définir l'application de tir pour une population de N oscillateurs.

Considérons $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$, le vecteur des phases des oscillateurs directement après un tir. Entre ce temps initial et le moment du prochain tir, tous les oscillateurs se déplacent d'une phase égale à $1 - \phi_n$ étant donné que la vitesse de phase est identique pour tous les oscillateurs. Nous définissons alors la fonction affine $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme étant la fonction donnant les phases des oscillateurs juste avant un tir :

$$\sigma(\phi_1, \dots, \phi_n) = (1 - \phi_n, \phi_1 + 1 - \phi_n, \dots, \phi_{n-1} + 1 - \phi_n) \quad (4.2)$$

$$= (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (4.3)$$

Les nouvelles phases juste après le tir d'un oscillateur, en fonction de leurs phases juste avant le tir, sont données par la fonction $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\tau(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = (g(f(\sigma_1) + \epsilon), \dots, g(f(\sigma_n) + \epsilon)) \quad (4.4)$$

L'application de tir h est alors définie comme suit :

$$h(\phi) = \tau(\sigma(\phi)) \quad (4.5)$$

L'application de tir permet donc d'obtenir les phases des oscillateurs après le prochain tir. Notons que les indices des oscillateurs ont été renumérotés implicitement par l'application de tir. Ainsi l'oscillateur 0 est devenu le 1, l'oscillateur 1 est devenu le 2, ect, puisque l'oscillateur n est devenu l'oscillateur 0 en tirant.

4.3 Absorptions

Précédemment, par intuition, nous avons imaginé le cas où plusieurs oscillateurs tireraient simultanément. Ces petits groupes d'oscillateurs sont le produit du phénomène d'absorption. En effet, une absorption se produit lorsque le tir d'un oscillateur provoque d'autres tirs d'oscillateurs, par exemple quand l'oscillateur n tire et qu'il provoque le tir de l'oscillateur $n - 1$, autrement dit, $f(\phi_{n-1} + 1 - \phi_n) + \epsilon \geq 1$. Dès lors, ces deux oscillateurs sont parfaitement synchronisés et forment un groupe que nous considérerons comme étant une seule entité, un seul oscillateur. Il est important de préciser qu'il est possible d'absorber plusieurs oscillateurs en même temps. Ainsi, lorsque j oscillateurs se font absorber par l'oscillateur n , lors de son tir, (formant donc un groupe constitué de $j + 1$ oscillateurs), la population compte au total $N - j$ oscillateurs.

Une autre intuition que nous avons énoncée est que l'influence d'un groupe de plusieurs oscillateurs est plus grande que celle d'un oscillateur tout seul. Il est alors naturel de considérer que la force de pulsation du groupe est proportionnelle au nombre d'oscillateurs dans le groupe. En général, cette force de pulsation du groupe est choisie comme étant égale à la somme des forces de pulsation de chaque oscillateur du groupe.

Rappelons que nous utilisons la convention suivante : lorsqu'une absorption se produit, les oscillateurs qui ont été absorbés ne peuvent pas tirer (et donc ne peuvent pas influencer les autres oscillateurs de suite) avant qu'ils n'atteignent à nouveau la valeur seuil de 1. Cette convention permet ainsi d'éviter les réactions en chaîne.

A cause du phénomène d'absorption, le domaine de l'application de tir h n'est pas l'ensemble S tout entier. Son domaine est défini par l'ensemble :

$$S_\epsilon = \{(\phi_1, \dots, \phi_n) \in S \mid f(\phi_{n-1} + 1 - \phi_n) + \epsilon < 1\} \quad (4.6)$$

$$= \{(\phi_1, \dots, \phi_n) \in S \mid \phi_n - \phi_{n-1} > 1 - g(1 - \epsilon)\} \quad (4.7)$$

Une absorption aura donc lieu après un tir avec une force de pulsation ϵ si $\phi \in S \setminus S_\epsilon$.

4.4 Résultats numériques

Nous étudions maintenant le comportement d'une population en observant comment se produit la synchronisation des oscillateurs à l'aide d'une simulation numérique. Pour cela, nous avons nous-même simulé une population de $N = 100$ oscillateurs en utilisant les équations (3.24) et (3.25) pour les fonctions g et f avec comme paramètres $b = 2$. La force de pulsation ϵ_i est différente pour chaque oscillateur et a été attribuée aléatoirement grâce à une distribution uniforme comprise entre 0 et $1/150$. Les phases initiales ont également été distribuées aléatoirement avec une distribution uniforme entre 0 et 1.

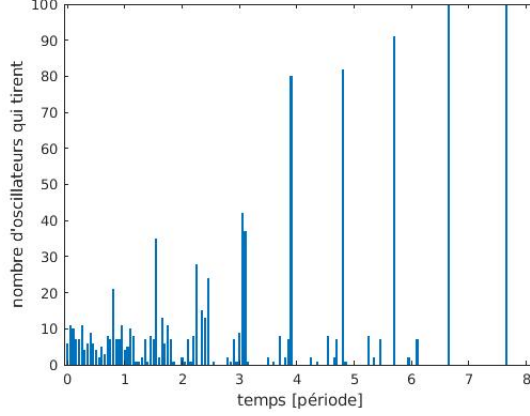


FIGURE 6 – Nombre d’oscillateurs qui tirent en fonction du temps, pour le système modélisé par les équations (3.24) et (3.25), avec $N = 100$, $b = 2$ et $\epsilon_i \sim \mathcal{U}(0, \frac{1}{150})$. Le temps est divisé en multiple de période T des oscillateurs.

La figure 6 montre le nombre d’oscillateurs qui tirent en fonction du temps. Nous pouvons remarquer au début de la simulation que de petits groupes d’oscillateurs se forment lentement jusqu’à l’apparition d’un groupe dominant (vers $t = 1,5T$ avec T , la période). A partir de ce moment-là, le groupe dominant va absorber rapidement les autres groupes et accroître son influence sur les autres oscillateurs (étant donné que nous avons considéré que la force de pulsation d’un groupe est égale à la somme des forces de pulsation de chaque oscillateur du groupe). La population finit ensuite par se synchroniser complètement vers $t = 6,67T$.

La figure 7, quant à elle, représente le nombre d’oscillateurs qui tirent en fonction du temps pour la simulation faite par Mirollo et Strogatz [1]. Ils ont également fait une simulation pour une population de $N = 100$ oscillateurs, mais ont utilisé le modèle de Peskin (équations (2.1) et (2.2)) avec $S_0 = 2$, $\gamma = 1$ et avec une force de pulsation $\epsilon = 0,3$ identique pour tous les oscillateurs. Nous pouvons constater que notre simulation concorde globalement avec la leur.

4.5 Théorème principal

Le principal résultat des recherches de Mirollo et Strogatz dans leur article est un théorème prouvant que pour presque n’importe quelles conditions initiales, une population de N oscillateurs avec des forces de pulsation positives (les forces de pulsation ne doivent pas nécessairement être identiques pour chaque oscillateur) finit par se synchroniser. Nous avons déjà présenté leur démarche pour prouver ce résultat dans le cas avec 2 oscillateurs. Nous allons donc faire de même pour une population de N oscillateurs.

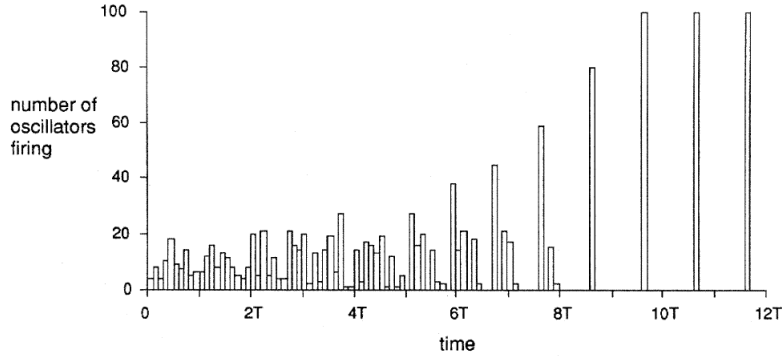


FIGURE 7 – Nombre d’oscillateurs qui tirent en fonction du temps, pour le modèle de Peskin (équations (2.1) et (2.2)), avec $N = 100$, $S_0 = 2$, $\gamma = 1$ et $\epsilon = 0, 3$. Le temps est divisé en multiple de période T des oscillateurs.[1]

Leur démonstration peut être divisée en 2 parties.

La première partie est le théorème 4.1 qui prouve que pour presque n’importe quelles conditions initiales, une absorption se produira en un temps fini. Le système ne peut évoluer indéfiniment sans qu’aucune absorption ne se produise pour presque toutes conditions initiales. L’un des avantages de ce théorème est que ses hypothèses sont assez générales ce qui nous permet de l’utiliser pour une population avec des forces de pulsation pouvant être différentes pour chaque oscillateur (ou groupe d’oscillateurs).

La deuxième partie est le théorème 4.2 qui prouve que l’ensemble des conditions initiales telles qu’après un certain nombre d’absorptions, le système évolue sans jamais se synchroniser, à une mesure de Lebesgue nulle.

4.5.1 Théorème 4.1

Considérons une population de N oscillateurs qui tirent avec des forces de pulsations $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N \geq 0$, $\exists i : \epsilon_i \neq 0$. Soit $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in S$ avec $n = N - 1$, les phases initiales des oscillateurs. Nous considérons dès lors initialement que l’oscillateur n a une force de pulsation ϵ_1 , l’oscillateur $n - 1$ a une force de pulsation ϵ_2, \dots , et l’oscillateur 0 a une force de pulsation ϵ_N . Remarquons que les indices pour les forces de pulsation sont notées inversement par rapport aux indices des phases des oscillateurs et correspondent plutôt à l’ordre de tir des oscillateurs. Autrement dit, le tout premier oscillateur à tirer a une force ϵ_1 , le second ϵ_2 , ect.

Remarque : Il est important de noter que la force de pulsation est toujours

associée à un oscillateur en particulier. Cela veut dire que, contrairement aux indices de phases qui sont renumérotés après chaque tir, les forces de pulsation ne suivent pas la même renumérotation. Pour illustrer cela, prenons par exemple l'oscillateur n associé à la phase ϕ_n qui a initialement une force ϵ_1 et qui est donc le tout premier oscillateur à tirer. Lorsque cet oscillateur tire, sa phase et son indice retombent à zéro, mais il est toujours associé à une force de pulsation ϵ_1 . Donc après le premier tir, l'oscillateur 0 a une force ϵ_1 , l'oscillateur 1 a une force ϵ_N , l'oscillateur 2 a une force ϵ_{N-1} , \dots , l'oscillateur n a une force ϵ_2 . Après le second tir, l'oscillateur 0 a une force ϵ_2 , l'oscillateur 1 a une force ϵ_1 , l'oscillateur 2 a une force ϵ_N , \dots , l'oscillateur n a une force ϵ_3 . Et ainsi de suite ...

Soient τ_1, \dots, τ_N comme définis dans (4.4), respectivement associés à une force de pulsation $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N$. Tous les indices sont réduits modulo N , i.e., $\tau_i = \tau_j$ avec $j = i \bmod N$, $1 \leq j \leq N$. Soit $h_i = \tau_i \circ \sigma$ comme défini dans (4.5). Définissons ensuite l'ensemble A_i comme étant l'ensemble des conditions initiales telles qu'il y a au moins i tirs avant qu'une absorption ne se produise.

$$A_i = \{\phi \in S \mid \phi \in S_{\epsilon_1}, h_1(\phi) \in S_{\epsilon_2}, h_2 \circ h_1(\phi) \in S_{\epsilon_3}, \dots, h_{i-1} \circ h_{i-2} \circ \dots \circ h_1(\phi) \in S_{\epsilon_i}\} \quad (4.8)$$

Soit l'ensemble A défini par

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \quad (4.9)$$

Cet ensemble A représente donc l'ensemble des conditions initiales telles que le système évolue sans qu'il n'y ait jamais d'absorption.

Théorème 4.1. *L'ensemble A a une mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. Nous savons que A est mesurable car il est obtenu par intersections dénombrable d'ensembles ouverts.

Considérons ensuite l'application de retour R donnant les phases des oscillateurs après qu'ils aient tous tiré chacun 1 fois :

$$R(\phi) = h_N \circ h_{N-1} \circ \dots \circ h_1(\phi) \quad (4.10)$$

Nous remarquons facilement que A est un invariant de l'application R , autrement dit que

$$R(A) \subset A \quad (4.11)$$

Etant donné que les fonctions f et g sont injectives, nous pouvons déduire que l'application R est injective sur son domaine A_N . Pour prouver que A a une mesure nulle, il suffit de montrer que

$$|\det J_R| > 1 \quad (4.12)$$

où J_R représente la matrice jacobienne de R .

Remarque : Dans l'article de Mirollo et Strogatz [1], ils n'expliquent pas pourquoi cela prouve que A a une mesure nulle. Nous avons donc tenté de trouver une explication.

Nous savons que si T est une transformation linéaire et que A est un sous-ensemble mesurable de \mathbb{R}^n , alors $T(A)$ est Lebesgue mesurable et a pour mesure

$$\mu(T(A)) = |\det T| \mu(A) \quad (4.13)$$

où μ représente la mesure de Lebesgue. De plus, si $T(A) \subset A$ cela implique que

$$\mu(T(A)) \leq \mu(A) \quad (4.14)$$

$$|\det T| \mu(A) \leq \mu(A) \quad (4.15)$$

Or, si nous prouvons que $|\det T| > 1$, cela implique nécessairement que $\mu(A) = 0$. Néanmoins, R n'est pas une transformation linéaire, nous ne pouvons donc pas utiliser directement la propriété (4.13). Nous imaginons qu'il faudrait alors linéariser R en calculant son jacobien et ensuite appliquer cette propriété. Malheureusement, nous avons pas trouvé de théorème prouvant que la propriété (4.13) est toujours valide lorsqu'on linéarise R .

Prouvons à présent l'inégalité (4.12). En partant de l'équation (4.10) et de la définition de h_i , on a

$$\det(J_R) = \prod_{i=1}^N \det(J_{h_i}) \quad (4.16)$$

$$= \prod_{i=1}^N \det(J_{\tau_i}) \det(J_\sigma) \quad (4.17)$$

Etant donné que σ est une fonction affine et que

$$\sigma^N(\phi) := \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma(\phi)}_{N \text{ fois}} = \phi, \quad \forall \phi \in S \quad (4.18)$$

on en déduit que $\det(J_\sigma) = \pm 1$. Pour se convaincre que $\sigma^N(\phi) = \phi$, il suffit de remarquer que σ^N correspond à l'application de retour dans le cas où $\epsilon_i = 0 \forall i$, c'est-à-dire quand il n'y a pas d'interactions entre les oscillateurs.

En partant de la définition (4.4), nous pouvons déduire facilement que la matrice jacobienne J_{τ_i} est diagonale. Nous avons alors :

$$\det(J_{\tau_i})|_\sigma = \prod_{k=1}^n g'(f(\sigma_k) + \epsilon_i) f'(\sigma_k) \quad (4.19)$$

Comme f et g sont des fonctions réciproques,

$$f'(\sigma_k) = \frac{1}{g'(f(\sigma_k))} \quad (4.20)$$

Nous obtenons alors

$$\det(J_{\tau_i})|_{\sigma} = \prod_{k=1}^n \frac{g'(f(\sigma_k) + \epsilon_i)}{g'(f(\sigma_k))} \quad (4.21)$$

Or, par hypothèses $g'' > 0$ et $g' > 0$, ce qui implique donc que

$$g'(f(\sigma_k) + \epsilon_i) \geq g'(f(\sigma_k)) \iff \det(J_{\tau_i})|_{\sigma} \geq 1 \quad (4.22)$$

et plus précisément, il y a égalité si et seulement si $\epsilon_i = 0 \quad \forall i$. Mais par hypothèses, il existe au moins un i tel que $\epsilon_i \neq 0$. Nous pouvons finalement conclure que

$$|\det J_R| > 1 \quad (4.23)$$

□

4.5.2 Théorème 4.2

Nous devons à présent prouver que l'ensemble des conditions initiales telles que le système, après un certain nombre d'absorptions, évolue sans jamais atteindre la synchronisation, a une mesure de Lebesgue nulle.

Avant de prouver cela, nous devons définir de nouvelles notations associées au processus d'absorption. Pour le moment, nous considérons ϵ fixe et le même pour tout oscillateur afin de faciliter les notations. S_n est défini de manière similaire à l'ensemble S :

$$S_n = \{(\phi_1, \dots, \phi_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_n < 1\} \quad (4.24)$$

L'indice n permet de préciser qu'il reste encore $n + 1$ oscillateurs ou groupe d'oscillateurs dans le système. Comme précédemment, h représente l'application de tir correspondant à une force de pulsation ϵ :

$$h(\phi) = \tau(\sigma(\phi)) \quad (4.25)$$

$$= \tau(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (4.26)$$

$$= (\dots, g(f(\sigma_j) + \epsilon), \dots) \quad (4.27)$$

Le phénomène d'absorption se produit après un tir s'il existe au moins un σ_j tel que

$$f(\sigma_j) + \epsilon \geq 1 \iff \sigma_j \geq g(1 - \epsilon) \quad (4.28)$$

Etant donné que $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n$, il existe un indice k tel que $\sigma_j \geq g(1 - \epsilon)$ si et seulement si $j > k$. Dans le cas où $k = n$, cela signifie qu'il n'y a pas d'absorption et dans le cas où $k = 0$, cela signifie que les oscillateurs se sont tous synchronisés. Lorsque $k < n$, nous dirons que " ϕ s'est fait absorber par h vers S_k ". Il n'y aurait donc plus que $k + 1$ oscillateurs non synchronisés :

$$(g(f(\sigma_1) + \epsilon), \dots, g(f(\sigma_k) + \epsilon)) \in S_k \quad (4.29)$$

Selon cette définition, nous pouvons remarquer que les oscillateurs qui se font absorber ne tirent pas au moment de leur absorption.

Dans le cas où il y a différentes forces de pulsation, l'application de tir h_i de l'oscillateur (ou groupe d'oscillateurs) associé à une force ϵ_i , est défini de manière équivalente que dans (4.27) en remplaçant ϵ par ϵ_i . Supposons à présent qu'un point $\phi \in S_n$ a été absorbé par h_1 vers S_k . Cela signifie que les oscillateurs associés à $\epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_{n-k+1}$ ont été absorbés par l'oscillateur associé à ϵ_1 au moment de son tir. Ils forment donc un groupe d'oscillateurs ayant une force de pulsation $\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{n-k+1}$. Le système est maintenant défini sur l'ensemble S_k , avec une séquence de forces de pulsation

$$\epsilon_{n-k+2}, \dots, \epsilon_{n+1}, \epsilon_1 + \dots + \epsilon_{n-k+1} \quad (4.30)$$

Ici par séquence de forces de pulsation, nous sous-entendons que le prochain oscillateur à tirer est celui associé à ϵ_{n-k+2} , le second oscillateur est celui associé à ϵ_{n-k+3} , ...

Ce système évolue ensuite pour soit atteindre la synchronisation ($k = 0$), soit rester bloqué après un certain nombre d'absorptions sans jamais atteindre la synchronisation complète ($k > 0$).

Définissons maintenant l'ensemble B comme étant l'ensemble des conditions initiales dans S_n telles que lors des itérations des applications de tir h_i avec une séquence de forces de pulsation $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}$, le système ne converge jamais vers la synchronisation des oscillateurs.

Théorème 4.2. *L'ensemble B a une mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. Pour le prouver, nous faisons une preuve par induction sur n .

Cas $n = 1$:

Ce cas correspond à une population de 2 oscillateurs. Or nous avons déjà prouvé dans la section 3 que les deux oscillateurs se synchroniseront avec n'importe quelles conditions initiales (sauf si le système démarre à l'équilibre instable). Nous pouvons donc conclure que

$$\mu(B) = 0 \quad (4.31)$$

où μ représente la mesure de Lebesgue.

Cas n quelconque :

Supposons que le théorème soit vrai pour n'importe quelle séquence $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ sur S_k pour $k < n$ et prouvons le pour n .

Définissons $B_{r,k}$ comme étant l'ensemble des $\phi \in B$ tel que ϕ ne subit aucune absorption après les applications de tir h_1, \dots, h_{r-1} et est ensuite absorbé par

h_r vers S_k . Nous avons donc

$$B = A \cup \left(\bigcup_{\substack{r \geq 1 \\ 1 \leq k \leq n}} B_{r,k} \right) \quad (4.32)$$

Grâce au théorème 4.1, nous savons que $\mu(A) = 0$. Il suffit donc de prouver que $\mu(B_{r,k}) = 0$ pour chaque (r, k) .

Commençons par le cas avec $r = 1$. L'ensemble $B_{1,k}$ représente l'ensemble des points absorbés par h_1 vers S_k . Plus précisément, nous pouvons dire que ces points ont été absorbés dans un ensemble $C \subset S_k$ ayant une mesure nulle. En effet, par hypothèse d'induction, pour n'importe quel problème dans S_k , l'ensemble des points tel qu'ils n'atteignent jamais la synchronisation, a une mesure de Lebesgue nulle.

Soit $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in B_{1,k}$, $\sigma(\phi) = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ et soit C un sous-ensemble de S_k de mesure nulle. Nous pouvons dès lors dire que ϕ est absorbé par h_1 vers

$$(g(f(\sigma_1) + \epsilon_1), \dots, g(f(\sigma_k) + \epsilon_1)) \in C \quad (4.33)$$

Etant donné que f et g sont bijectives et dérivables, τ_1 est un difféomorphisme et par conséquent sa réciproque τ_1^{-1} existe. Nous utilisons ici la notation τ_1 comme étant l'application défini sur S_k et non pas sur S_n . Nous en déduisons de (4.33) que $(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in \tau_1^{-1}(C)$. De plus, étant donné que τ_1 est un difféomorphisme, nous obtenons

$$\mu(\tau_1^{-1}(C)) = 0 \quad (4.34)$$

Autrement dit, la projection de l'ensemble $\sigma(B_{1,k})$ vers S_k a une mesure nulle, c'est-à-dire, $\mu(\sigma(B_{1,k})) = 0$. Mais étant donné que σ est aussi un difféomorphisme (car σ est une fonction affine et dérivable), nous pouvons conclure que

$$\mu(B_{1,k}) = 0 \quad (4.35)$$

Prouvons à présent que $\mu(B_{r,k}) = 0$ dans le cas où $r > 1$. Nous avons que

$$h_{r-1} \circ h_{r-2} \circ \dots \circ h_1(B_{r,k}) \subset B_{1,k} \quad (4.36)$$

Or, chaque h_i est un difféomorphisme sur son domaine (pour les mêmes raisons que pour τ). Nous pouvons donc déduire que

$$\mu(B_{r,k}) = 0, \forall k, r > 1 \quad (4.37)$$

□

4.6 Exemple

Après avoir prouvé la synchronisation pour une population de N oscillateurs avec presque n'importe quelles conditions initiales, nous pouvons analyser le système dans le cas où l'application de retour R est une fonction assez simple de manière similaire à ce qui a été fait dans la section 3.3. Mirollo et Strogatz choisissent donc une fonction affine dont la partie linéaire est un multiple de la fonction identité.

Pour rappel, l'application de retour est donné par

$$R = \tau_N \circ \sigma \circ \tau_{N-1} \circ \sigma \circ \dots \tau_1 \circ \sigma \quad (4.38)$$

où $\tau_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est défini par

$$\tau_i(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = (g(f(\sigma_1) + \epsilon_i), \dots, g(f(\sigma_n) + \epsilon_i)) \quad (4.39)$$

Mirollo et Strogatz choisissent pour f et g , les fonctions qu'ils ont obtenues dans leur exemple avec 2 oscillateurs données par (3.25) et (3.24) :

$$g(u) = \frac{e^{bu} - 1}{e^b - 1} \quad (4.40)$$

$$f(\phi) = \frac{1}{b} \ln(1 + (e^b - 1)\phi) \quad (4.41)$$

Nous avons alors

$$g(f(\sigma_k) + \epsilon_i) = e^{b\epsilon_i} \sigma_k + \text{constante} \quad (4.42)$$

En réinjectant dans (4.39),

$$\tau_i = \lambda_i \text{Id} + \text{constante} \quad (4.43)$$

avec $\lambda_i = e^{b\epsilon_i}$ et où Id représente la fonction identité

$$\text{Id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x \quad (4.44)$$

Etant donné que $\sigma \circ \text{Id} = \text{Id} \circ \sigma = \sigma$ et que $\sigma^N = \text{Id}$ (voir équation (4.18)), nous trouvons finalement que

$$R = (\lambda_1 \dots \lambda_N) \text{Id} + \text{constante} \quad (4.45)$$

Nous pouvons conici que R est une application expansive, c'est à dire que

$$\|R(\phi) - R(\theta)\| = (\lambda_1 \dots \lambda_N) \|\phi - \theta\| \quad (4.46)$$

$$> \|\phi - \theta\| \quad \forall \phi, \theta \in A_N \subset \mathbb{R}^n \quad (4.47)$$

car on considère que $b > 0$, $\epsilon_i \geq 0 \forall i$ et qu'il existe au moins un $\epsilon_i \neq 0$.

Une des questions ouvertes qui se pose encore actuellement est de savoir si R est toujours une application expansive lorsqu'on considère les hypothèses qui ont été faites sur f .

De plus, pour cet exemple-ci, le théorème 4.1 peut être renforcé. Nous pouvons maintenant dire que l'ensemble A contient au plus un seul point fixe répulsif. Ceci est dû au fait que A est un invariant de R et que R est une application expansive.

Si nous nous intéressons à ce point fixe répulsif de plus près, nous remarquons qu'avec des ϵ_i très petits, nous avons des τ_i proches de l'application identité. Dans ce cas, le point fixe de R se rapproche du point fixe de σ , c'est-à-dire

$$\phi^* \approx \frac{1}{N}(1, 2, \dots, N-1) \quad (4.48)$$

Tout comme dans le cas avec 2 oscillateurs, nous observons qu'au point fixe, les oscillateurs sont espacés de manière égale.

5 Discussion

L'analyse de l'article de Mirollo et Strogatz nous a permis d'étudier la synchronisation dans les systèmes d'oscillateurs "intégrer-et-tire" avec un couplage par pulsations. En effet, leurs recherches aboutissent à la conclusion que pour tout nombre d'oscillateurs N et pour presque toutes les conditions initiales, le système arrivera toujours à une synchronisation. Ce résultat est plutôt fort car il est valable pour des fonctions (décrivant l'état des oscillateurs) $f(\phi)$ assez générales. Les démonstrations de ces résultats reposent grandement sur les conditions de concavité de la fonction $f(\phi)$ (qui est étroitement lié à la dissipation du système) ainsi que sur le signe du couplage ϵ .

Malgré le fait que la fonction $f(\phi)$ reste assez générale, n'oublions pas que Mirollo et Strogatz ont toutefois fait de fortes hypothèses tels que la dynamique identique pour tous les oscillateurs et le couplage de tous à tous parmi les oscillateurs. Nous pouvons alors dire qu'en présence de telles suppositions il était évident que la synchronisation apparaisse. Mais il est toujours possible d'imaginer un système restant dans un désordre perpétuel. En effet, lorsque $f(\phi)$ est une droite par exemple, le système n'arrivera jamais à se synchroniser.

5.1 Dans d'autres directions

Dans ce travail, nous nous sommes restreints à un modèle mathématique en particulier et à la question de la synchronisation pour étudier les oscillateurs couplés par pulsations. Toutefois, les comportements de tels systèmes peuvent être étudiés différemment. En effet, nous aurions pu nous poser d'autres questions que celle de la synchronisation, et nous aurions pu imposer d'autres conditions

sur le modèle mathématique. C’est ainsi que d’autres auteurs se sont intéressés à des oscillateurs similaires en considérant différents facteurs biologiques, en étudiant d’autres caractéristiques que la synchronisation ou encore en modélisant différemment la dynamique des oscillateurs. Nous pouvons alors situer les résultats obtenus par Mirollo ainsi que découvrir de nouvelles directions de recherches.

5.1.1 Synchronisation

Tout au long de ce travail, nous nous sommes intéressés à la synchronisation parfaite. Néanmoins, dans la nature, il peut être rare de la trouver telle quelle comme souvent, les dynamiques des oscillateurs ne sont pas identiques, e.g. les fréquences naturelles suivent une certaine distribution aléatoire qui s’exprime aussi à travers les temps de tirs (l’oscillateur le plus rapide tire en premier). Ce qu’il est possible d’observer, par contre, c’est une approximation de cette synchronisation parfaite, dans le sens où les tirs sont rapprochés : les distances entre eux sont petites par rapport à la période d’oscillation. C’est le cas pour les cellules du coeur, les chants des criquets, les scintillements des lucioles ainsi que les cycles de menstruation chez les femmes.

Il existe d’autres formes de synchronisation que nous aurions pu étudier comme le verrouillage de phase par exemple, i.e. la différence de phase entre 2 oscillateurs est constante mais non nulle. Ce phénomène a lieu lorsqu’il y a une distribution aléatoire de fréquences naturelles, dans la réaction chimique de Belousov-Zhabotinsky ainsi que dans les réseaux locomoteurs spinaux.

Une autre forme de synchronisation apparaissant dans la nature est le verrouillage de fréquence. Nous l’observons quand les oscillateurs ont une même fréquence moyenne. Lorsque le couplage est trop faible pour que le système arrive à un verrouillage de phase, un système qui est spatialement étendu peut se diviser en plusieurs plateaux ou groupes d’oscillateurs verrouillés par fréquence.

5.1.2 Modèles intègre-et-tire

Nous avons considéré ici des oscillateurs de type intègre-et-tire ce qui est une hypothèse raisonnable comme la plupart des oscillateurs biologiques qui nous intéressent ont un comportement basé sur une accumulation et une décharge soudaine d’une variable. Pas mal de recherches ont été faites sur les comportements d’un oscillateur intègre-et-tire évoluant seul. Ici, notre intérêt s’est plutôt porté sur les interactions dans une population d’oscillateurs.

5.1.3 Couplage par pulsations

Le couplage par pulsations que nous avons considéré est une forme très simplifiée de ce qui pourrait être observé dans la nature. Dans notre modèle, le couplage permet uniquement d’avancer la phase de certains oscillateurs. D’autres auteurs comme Honerkamp [4], Ikeda, Yoshizawa et Sato [5] ont incorporé plus de détails biologiques dans leur modèle du coeur comme la période réfractaire,

un lapse de temps après une activité où tous les stimuli sont ignorés. Buck et Buck [6] ont également considéré un autre élément rendant leur modèle plus vraisemblable qui est le délai entre le stimuli et la réponse.

Un résultat assez étonnant que Ementrout et Kopell ont obtenu [7] est qu'en présence d'un couplage excessivement fort par pulsations, beaucoup de modèles différents d'oscillateurs neuronales arrivent à un état de "repos" où les oscillateurs ne bougent plus : il n'y a plus d'oscillations. Dans leurs recherches, ils présentent également les stratégies utilisées par les oscillateurs neuronales en réalité pour éviter ce phénomène. Pour le modèle simplifié étudié dans notre travail, cet événement ne peut avoir lieu grâce aux discontinuités (non réalistes) du système.

5.1.4 Scintillement des lucioles

Nous avons évoqué au début de ce travail qu'il est possible d'observer une synchronisation chez les lucioles dans plusieurs endroits dans le monde. Cela est vrai notamment pour l'espèce thaïlandaise *Pteroptyx malaccaae*. Néanmoins, il peut être intéressant de comparer les résultats présentés ici avec ceux de Buck [8] qui a étudié l'espèce américaine de lucioles *Photinus pyralis*. Le modèle proposé par Buck comporte quelques similitudes avec celui que nous avons analysé. En effet, c'est également en recevant une pulsation lumineuse lorsque la luciole est à une phase proche de la fin de son cycle, qu'elle remet à 0 sa phase. Par contre, Buck présuppose que les stimuli perçus par les lucioles lorsque leurs phases sont au début de leur cycle, ont peu ou pas d'effets. Une autre différence est que Buck considère que l'évolution de l'état d'"excitation" de la luciole est linéaire alors qu'ici, $f(\phi)$ est choisi comme étant concave vers le bas. Ainsi, Buck remarque que la synchronisation n'est pas souvent observée chez l'espèce *Photinus pyralis*, ce qui reste en accord avec les résultats de Mirollo et Strogatz.

Ce manque de synchronisation peut être également expliqué par la force de couplage dans cette espèce qui est trop faible pour pouvoir vaincre les variations dans les fréquences de scintillements. En effet, l'espèce américaine est plus irrégulière (pour une variabilité entre cycles égale à l'écart-type sur la période moyenne : le *Photinus pyralis* en est à 1/20) comparée à l'espèce thaïlandaise (qui en est à 1/200 comme variabilité).

Notons que le modèle simplifié que nous avons étudié n'est pas valable pour les espèces de lucioles avec délais de réponses après les stimuli.

5.1.5 Structure spatiale et interactions entre oscillateurs

Les interactions entre oscillateurs considérées ici sont de tous à tous. C'est-à-dire que lorsqu'un oscillateur tire, tous les autres sont influencés de la même manière. Cette hypothèse n'est pas très réaliste. Par exemple, pour un public de concert, lorsque nous applaudissons, nous sommes plus influencés par nos plus proches voisins que par une personne à l'autre bout de la salle. Il en va de même pour les lucioles. C'est pourquoi, il peut être intéressant de considérer que les interactions se font plus localement. Dans ce cas, la disposition spatiale des

oscillateurs pourrait influencer les dynamiques du système entier, par exemple, la disposition des chaises du concert, le fait que les lucioles se déplacent... En revanche, analyser un tel système avec interactions locales sera bien plus complexe. Nous ne pourrions plus utiliser la notion d'absorption qui indique qu'un sous-groupe synchronisé le reste pour toujours. Avec des interactions locales sur les frontières, les sous-groupes déjà synchronisés peuvent "casser", c'est-à-dire qu'ils peuvent ne plus rester en synchronisation.

5.1.6 Différentes dynamiques pour chaque oscillateur

Une autre grande supposition de notre modèle est que tous les oscillateurs sont identiques : tous les oscillateurs ont la même fréquence intrinsèque. Or, dans la nature, ces fréquences sont distribuées aléatoirement. Beaucoup de recherches concernant les oscillateurs couplés de manière continue considèrent ces différences entre oscillateurs. Nous n'avons malheureusement pas considéré cela ici. Mais par intuition, il serait cohérent de dire que le système se calera sur le rythme de l'oscillateur le plus rapide. Néanmoins, cela n'est pas le cas partout. En effet, il faut au moins que la force de couplage soit assez importante pour vaincre la différence de fréquence entre les oscillateurs et ainsi entraîner l'oscillateur le plus lent dans le même rythme.

6 Conclusion

A travers ce travail, nous avons analysé l'article de Mirollo et Strogatz en suivant leur démarche et en essayant de reproduire certaines de leurs simulations numériques. En effet, malgré quelques difficultés concernant le théorème 4.1, nous avons réussi à comprendre leurs démonstrations et leurs résultats. Pour cela, nous avons réalisé nos propres simulations afin de mieux visualiser les colonies de lucioles. Cela nous a également permis de retomber sur des observations numériques similaires à ceux de Mirollo et Strogatz. Nous sommes convaincus que leurs résultats et conclusions peuvent être appliquées à beaucoup de domaines différents comme bon nombres de systèmes ont des dynamiques similaires. Nous pensons également qu'il serait très intéressant de généraliser encore plus le problème ou au contraire, ajouter des hypothèses de travail afin de rendre le système plus vraisemblable aux oscillateurs observés dans la nature afin d'en tirer d'autres caractéristiques de leurs comportements.

Références

- [1] Renato E. Mirollo et STEVEN H. STROGATZ. "Synchronization of biological oscillators". In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 50.6 (1990), p. 1645-1662.
- [2] A. T. WINFREE. "Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators". In : *J. Theoret. Biol.* 16 (1967), p. 15-42.

- [3] C. S. PESKIN. “Mathematical Aspects of Heart Physiology”. In : *Courant Institute of Mathematical Sciences* (1975), p. 268-278.
- [4] J. HONERKAMP. “The heart as a system of coupled nonlinear oscillators”. In : *J. Math. Biol.* 18 (1983), p. 69-88.
- [5] et T. Sato N. IKEDA S. Yoshizawa. “Difference equation model of ventricular parasystole as an interaction between cardiac pacemakers based on the phase response curve”. In : *J. Theoret. Biol.* 103 (1983), p. 439-465.
- [6] J. Buck et E. BUCK. “Synchronous fireflies”. In : *Scientific American* 234 (1976), p. 74-85.
- [7] G. B. Ermentrout et N. KOPELL. “Oscillator death in systems of coupled neural oscillators”. In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 50 (1990), p. 125-146.
- [8] J. BUCK. “Synchronous rhythmic flashing of fireflies. II”. In : *Quart. Rev. Biol.* 63 (1988), p. 265-289.