Toanroirac c6

Toán rời rạc (Trường Đại học Cần Thơ)

STT: 60 Nhóm 05	Mã SV:	Họ và tên:	Ngày:
Stt 60	S2300004	Trần Thị Bảo Trân	30/03/2024

Câu 1:

Giả sử trong n nguyên liên tiếp có duy nhất 1 số chia hết cho n (n>=1), điều đó chứng tỏ tích của n số nguyên liên tiếp ấy sẽ chia hết cho n.

Gọi các số liên tiếp có dạng:

$$a, a+1, a+2, \ldots\ldots, a+(m-1) \vdots m; ¿)$$

Gọi q với r lần lượt là thương và số dư.

Ta được:

$a=mq+r\,(0\leq r<m) Khi\, r=0, a=mq \rightarrow m \vee ckhi\, r=1, a=mq+1=¿\, a+m-1=mq+1+m-1=m(q+1)$

$\rightarrow m \vee c+1 Khi\, r=2, a=mq+2=¿\, a+m-2=mq+2+m-2=m(q+2) \rightarrow m \vee c+2.....$

$khi\, r=m-1, a=mq+m-1=¿\, a+1=m(q+1) \rightarrow m \vee c+1$

$\rightarrow$Chỉ duy nhất một số chia hết cho m

➔ chứng tỏ tích của m số nguyên liên tiếp sẽ chia hết cho m.

Câu 2:

Gọi số chẵn là 2n

Vậy số chẵn tiếp theo là 2n+2

Nếu 2n không chia hết cho 4 thì 2n:4 dư 2

=>2n=4k+2

Do đó 2n+2= 4k +4 =4(k+1) chia hết cho 4

Vậy 2n+2 chia hết cho 4

Vậy trong 2 số chẵn liên tiếp sẽ có một và chỉ một số chia hết cho 4 (dpcm)

Câu 3:

a. Gọi 2 số chẵn liên tiếp là 2k và 2k+2 $(k \in Z) Xét\, 2k(2k+2)=4k(k+1)$Vì 4 chia hết cho 4,

$k(k+1) chia\, hết\, cho\, 2 (tích\, của\, 2\, số\, chẵn\, liên\, tiếp) \Rightarrow 4k(k+1) chia\, hết\, cho\, 8\, hay\, 2k(2k+2) chia\, hết\, cho\, 8$

.

b. Gọi 3 số nguyên liên tiếp lần lượt là $b, b+1, b+2$.Tổng 3 số liên tiếp :

$$b+(b+1)+(b+2)=(a+a+a)+(1+2)=3a+3$$

Vì 3a chia hết cho 3 và 3 chia hết cho 3 nên $3a+3\, chia\, hết\, cho\, 3$

Vậy tổng 3 số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 3.

c.

Gọi ba số nguyên liên tiếp lần lượt là $a-1; a; a+1\, với\, a \in Z\, theo\, bài\, ra\, ta\, có:$

$(a-1)^3+a^3+(a+1)^3 ¿ a^3-3a^2+3a-1+a^3+a^3+3a^2+3a+1 ¿ 3a^3+6a ¿ 3a(a^2+2) ¿ 3a(a^2-1+3)$

$¿ 3a(a^2-1)+9a ¿ 3a(a+1)(a-1)+9a$

$vì\, 3\, số\, liên\, tiếp\, luôn\, có\, một\, số\, chia\, hết\, cho\, 3\, nên\, a(a+1)(a-1)\, chia\, hết\, cho\, 3 \rightarrow 3a(a+1)(a-1) \vdots 9$

$\rightarrow 3a(a+1)(a-1)+9a \vdots 9\, (đpcm)$

d. Gọi số chính phương là $a^2\, Ta\, có:$

$$a^2(a^2+1)=a^2(a^2+1^2)=a(a+1)a(a-1)$$

Vì $a, a+1, a-1$là 3 số tự nhiên liên tiếp nên $(a+1)a(a-1)$chia hết cho 3 ➔ $a(a+1)a(a-1)$chia hết cho 3.(1)

Vì $a(a+1)\, a\, chia\, hết\, cho\, 2, a(a-1)\, cũng\, chia\, hết\, cho\, 2\, nên\, a(a+1)a(a-1)$chia hết cho 4 (2)

Từ (1) và (2) ta có $a(a+1)a(a-1)$= $a^2(a^2+1)$ chia hết cho 12 (đpcm).

Câu 4

Giả sử m-n chia hết cho mp+nq, m-n = k(mp+nq)

m-n chia hết cho mp+nq ó m-n = k(mq+np)

bằng cách mở rộng và rút gọn, t có:

k(mp+nq) = k(mq+np)

km(pq + n^2) + kn(q-p) = hm(qn +p^2) + hn(p-q)

do đó:

km(pq + n^2) –hm(pq +n^2) = hn(p-q) – kn(p-q)

(k-h)m(pq +n^2) = (h-k)n(p-q)

Vì m, n, p, q nguyên và p và q không bằng nhau nên p-q không chia hết cho m. Điều này xảy ra khi k-h chia hết cho p-q. Tương tự k-h chia hết cho q-p

Vậy từ 2 điều kiện trên, k-h phải chia hết cho cá p-q và q-p, điều này chỉ xảy ra khi k-h =0, tức là k=h

Do đó, m-n chia hết cho mp+nq, thì m-n cũng chia hết cho mq+np

Câu 5:

Ta có: $a^2 \equiv 1 \pmod 3$ hay $a^2 \equiv 0 \pmod 3$ và điều này tương tự với b^2

Do đó: $a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod 3$ hoặc $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 3$

Mặc khác theo đề bài ta có: $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow a^2 \equiv 0 \pmod 3$ và $b^2 \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow$ a chia hết cho 3 và b cũng chia hết cho 3

Câu 6:

Đầu tiên ta sẽ xét các khả năng khi ba số a, b, c chia 3. Ở đây, ta phải xem xét ba trường hợp sau:khi a, b, c cùng chia 3 dư 0, khi tổng của các số chia 3 và khi không có số nào chia hết cho 3. Dựa trên modulo và công thức, ta ví dụ lấy một số nguyên M với độ lớn nhỏ hơn 10

Khi đó từ việc ta chứng minh được nếu a^3+b^3+c^3 chia hết cho 9 thì ít nhất một trong ba số a,b,c phải chia hết cho 3

Câu 7:

C/m $1997^{1999} - 1997^{1999}$ chia hết cho 4

Ta có $1997 \equiv 1 (mod\, 4)$

$\Leftrightarrow 1997^{1999} \equiv 1^{1999} (mod\, 4)$

$\Leftrightarrow 1997^{1999} \equiv 1 (mod\, 4)$

$\Rightarrow 1997^{1999} = 4n + 1$

Tương tự ta có $1997^{1998} \equiv 1 (mod\, 4)$

$\Rightarrow 1997^{1998} = 4m + 1$

Ta có $1997^{1999} - 1997^{1999}$

= 4n +1- 4m-1 =4(n-m)

Vậy $1997^{1999} - 1997^{1999}$ chia hết cho 4(đpcm)

C/m $1997^{1998} - 1998^{1999}$ không chia hết cho 4

Ta có 1997≡ 1 (mod 2)

$\Leftrightarrow 1997^{1998} \equiv 1 (mod\, 2)$

$\Rightarrow 1997^{1998} = 2x + 1$

Ta có $1998 \equiv 0 (mod\, 2)$

$\Leftrightarrow 1998^{1999} \equiv 0 (mod\, 2)$

$\Rightarrow 1998^{1999} = 2y$

Do đó: $1997^{1998} - 1998^{1999}$ = 2x + 1 – 2y =2(x-y) +1 là số lẻ

Vậy nên $1997^{1998} - 1998^{1999}$ không chia hết cho 4

Câu 8

a) a3 + 11a chia hết cho 6

Trường hợp 1: a chia hết cho 6.

Nếu a chia hết cho 6, thì a3 cũng chia hết cho 6. Hơn nữa, 11a cũng chia hết cho 6. Do đó, a3+11a cũng chia hết cho 6.

Trường hợp 2: a chia 6 dư 1.

Nếu a chia 6 dư 1 thì a3 sẽ chia 6 dư 1 và 11a sẽ chia 6 dư 5. Tổng của hai số này không nhất thiết phải chia hết cho 6.

Trường hợp 3: a chia 6 dư 5.

Nếu a chia 6 dư 5, thì a3 sẽ chia 6 dư 5 và 11a cũng chia 6 dư 5. Tổng của hai số này không nhất thiết phải chia hết cho 6.

Vậy, chỉ có trong trường hợp đặc biệt khi a chia hết cho 6, a3+11a mới chia hết cho 6.

b) a5 – a chia hết cho 30

Trường hợp a chia hết cho 2:

Nếu a chẵn, ta có thể viết a dưới dạng a=2k với k là một số nguyên. Khi đó:

a5−a=(2k)5−2k=32k5−2k=2k(16k4−1)

Bởi vì 16k4−1 là một số lẻ, 2k chia hết cho 2, do đó a5−a chia hết cho 2.

Trường hợp a chia hết cho 3: Nếu a chia hết cho 3, ta có thể viết a dưới dạng a=3k với k là một số nguyên. Khi đó: a5−a=(3k)5−3k=243k5−3k=3k(81k4−1). Bởi vì 81k4−1 là một số chia hết cho 3, 3k chia hết cho 3, do đó a5−a chia hết cho 3.

Trường hợp a chia hết cho 5: Nếu a chia hết cho 5, ta có thể viết a dưới dạng a=5k với k là một số nguyên. Khi đó:

a5−a=(5k)5−5k=3125k5−5k=5k(625k4−1)

Bởi vì 625k4−1 là một số chia hết cho 5, 5k chia hết cho 5, do đó a5−a chia hết cho 5.

Từ các trường hợp trên, ta thấy a5−a chia hết cho 2, 3, và 5 khi a là số nguyên, vậy a5−a cho 30

C)a(a+1)(2a+1) chia hết cho 6

a chia hết cho 2: Nếu a chẵn, a+1 chẳn và 2a+1 lẻ. Như vậy, a(a+1)(2a+1) chia hết cho 2 vì có ít nhất một thừa số chẵn. Ngoài ra, khi a chẵn thì a(a+1) chia hết cho 2. Vậy, a(a+1)(2a+1) chia hết cho 6.

a chia hết cho 3: Nếu a chia hết cho 3, thì một trong các số a, a+1, 2a+1 cũng chia hết cho 3. Điều này dẫn đến)a(a+1)(2a+1) chia hết cho 3.

a không chia hết cho 2 hoặc 3: Trong trường hợp này, có thể a hoặc a+1 chia hết cho 2, nhưng không phải cả hai. Đồng thời, không thể cả ba số a,+1,2a+1 đều chia hết cho 3. Tuy nhiên, trong trường hợp này,a(a+1)(2a+1) không chia hết cho 6.

Tóm lại, với mọi số nguyên a(a+1)(2a+1) chia hết cho 6.

Câu 9:

Gọi n số nguyên liên tiếp có dạng: $a, a+1, a+2, \ldots., a+n-1$

Đặt $A=a+(a+1)+(a+2)+,\ldots.,+(a+n-1)¿n.a+\sum_{i=1}^{n-1} i¿n.a+\frac{(n-1).n}{2}¿n.\left(a+\frac{(n-1)}{2}\right)A \vdots n$khi $a+\frac{(n-1)}{2}$ là số nguyên ➔ $\frac{(n-1)}{2}$cũng là số nguyên ➔ $n-1 \text{ là số chẵn}$➔ n là số lẻ.

Vậy tổng của n số nguyên liên tiếp chia hết cho n khi n là số lẻ.

Câu 10:

P= {(n+1)(n+2)(n+3)...(n+(n-1))(n+n) chia hết cho 2^n} với n≥1

Giải :

1.với n=1 ta có : (1+1) chia hết cho 2^1

vậy P đứng với n=1

2.Giả sử P đúng với 1< n<k

(k+1)(k+2)(k+3)...(k+(k-1))(k+k)= (k+1)(k+2)(k+3)...(k+(k-1)).2k chia hết cho 2^k

Cần chứng minh đúng với n= k+1

Nghĩa là : (k+1+1)(k+1+2)(k+1+3)....2.(k+1) chia hết cho 2^{k+1}

Ta có: (k+1+1)(k+1+2)(k+1+3)….2.(k+1) = (k+2)(k+3)(k+4)…2k.2(k+1)

= (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)…2k.2= 2.2^k chia hết cho 2^{k+1}

Vậy P đúng với n=k+1

3. kết luận: P đúng với n≥1 (dpcm)

Câu 11

a)7n +3n-1 chia hết cho 9

Với n=1 ta thấy 71+3(1)−1=9 là só chia hết cho 9

Giả sử cho số nguyên k

7k + 3k − 1 = 0 (mod 9)

Chứng minh 7k + 3(k+1) – 1 chia hết cho 9

7k + 3(k+1) − 1 = 7 × 7k + 3k + 3 − 1

=7 × 7k + 3k + 2

=(7k + 3k − 1) + 3

Vì (7k+3k−1) chia hết cho 9 theo giả thiết cũng chia hết cho 3 cũng chia hết cho 9 nên 7k+1 + 3(k+1) – 1 cũng chia hết cho 9.

b)10n + 18n - 1 chia hết cho 27

Với n=1, ta có 10n+18(1)−1=27, là số chia hết cho 27

Giả sử 10k+18k−1 chia hết cho 27 với một số nguyên k.

Chứng minh 10k+1+18(k+1)−1 chia hết cho 27:

10(k+1)+18(k+1)−1=10×10k+18k+18−1

=10×10k+18k+17

=(10k+18k−1)+17

Vì 10k+18k−1 chia hết cho 27 và 17 cũng chia hết cho 27, nên 10k+1+18(k+1)−1 cũng chia hết cho 27.

c) 2n+1 +3n+1 chia hết cho 5

Với n = 1 ta có 21+1 +3(1)+1 = 31 không chia hết cho 5

Do đó phát biểu trên là không đúng

d)5n - 4n - 1 chia hết cho 16

Khi n=1 5(1)−4(1)−1=0

Vậy, 5(1)−4(1)−1=0, chia hết cho 16.

Giả sử n = k 5k−4k−1 chia hết cho 16 với một số nguyên dương k, tức là tồn tại một số nguyên m sao cho 5k−4k−1=16m.

Chứng minh đúng với n=k+1

Chứng minh rằng điều kiện đúng với n=k+1, tức là 5(k+1)−4(k+1)− 1 chia hết cho 16.

5(k+1)−4(k+1)−1=(5k+5)−(4k+4)−1

=(5k−4k−1)+(5−4)

=(5k−4k−1)+1

=16m+1

Vậy, 5(k+1)−4(k+1)−1=16m+1

CÂU 12

A) 2n -1 chia hết cho 7

Để tìm các số tự nhiên n sao cho $2n-1$ chia hết cho 7, ta sẽ giải phương trình:

$2m-1\equiv 0 \pmod{7}$

Điều này có nghĩa là $2n\equiv 1 \pmod{7}$.

Để giải phương trình modulo như vậy, chúng ta có thể thử tất cả các giá trị của n từ 1 đến 6 và kiểm tra xem giá trị nào thỏa mãn điều kiện.

$2\times 1\equiv 2 \pmod{7}$
$2\times 2\equiv 4 \pmod{7}$
$2\times 3\equiv 6 \pmod{7}$
$2\times 4\equiv 1 \pmod{7}$
$2\times 5\equiv 3 \pmod{7}$
$2\times 6\equiv 5 \pmod{7}$

Từ đó, ta thấy rằng $2\times 4\equiv 1 \pmod{7}$ nghĩa là $n=4$ là một giải pháp.

Vậy, số tự nhiên n thỏa $2n-1$ chia hết cho 7 là$n=4$.

B) 11n +8 chia hết cho 3n +4

$11n+8$ chia hết cho $3n+4$, ta cần giải phương trình $11n+8=k(3n+4)$ với k là một số nguyên. Tuy nhiên, sau khi giải ta không thể tìm ra giá trị nào của k sao cho $11n+8$ chia hết cho $3n+4$. , không có giải cho phương trình này.

Câu 13

(1248, 1794, 2370)

Xét (1248, 1794)= (1248, 546)= (546, 156)=(156, 78)= 78

⇨ (2370, 78)=(78, 30) =(30, 18)= (18, 12)=(12, 6)=6

Vậy (1248, 1794, 2370) = 6

(-726, -924, 360)

Xét (|-726|, |-924|)= (726, 198)= (198, 132)= (132, 66)= 66

⇨ (360, 66)= (66, 30)= (30, 6)= 6

Vậy (-726, -924, 360) = 6

Câu 15: Cho n là số nguyên dương. Tìm

[n, n+1, n+2] = [[n, n+2], n+1]

Ta thấy n, n+1, n+2 là có số nguyên liên tiếp nhau nên :

Xét [n, n+2]

- Nếu n là số chẵn, giả sử n=2k

⇒[n, n+2] =[2k, 2k+2]=[2k, 2(k+1)]= 2k(k+1) (vì n, n+2 là số chẵn nên bội chung nhỏ nhất của n, n+2 là bội số của 2)

⇒ [[n, n+2], n+1]= [2k(k+1), 2k+1]= 2k(k+1).(2k+1) (vì n+1 là 1 số lẻ nên bội chung nhỏ nhất của n+1 và [n, n+2] bằng tích của n+1 và [n, n+2])

Vd: n=2 ⇒ [2, 3, 4]= [[2, 4], 3]=[4, 3]=12

- Nếu n là số lẻ, giả sử n= 2k+1

⇒ [n, n+2] = [2k+1, 2k+1+2]= [2k+1, 2(k+1)+1)]= (2k+1)(2(k+1)+1) (vì n và n+2 là hai số lẻ liên tiếp nên bcnn của hai số đúng bằng tích hai số)

⇒ [[n, n+2], n+1]= (2k+1)(2k+3)(2k+2) (vì n là số lẻ nên n+1 là số chẵn nên bội chung nhỏ nhất của hai số đúng bằng tích của hai số ấy)

Vd: n=1 ⇒ [1, 2, 3] = [[1,3], 2]= [3, 2]= 6

CÂU 16:

720 có thể phân tích thành tích các số nguyên tố như sau:

720=24×32×5

Xét 6 số nguyên liên tiếp: n+1, n+2, n+3, 4n+4, n+5.

Vì tích của 6 số nguyên liên tiếp, tức là n×(n+1)×(n+2)×(n+3)×(n+4)×(n+5), nên trong đó sẽ tồn tại ít nhất một số chia hết cho 5.

Nếu một số chia hết cho 5, thì tích của nó với một số chia hết cho 2424 và 3232 cũng sẽ chia hết cho 24×32×5.

Vì vậy, để chứng minh rằng tích của 6 số nguyên liên tiếp chia hết cho 720, ta chỉ cần chứng minh rằng tồn tại ít nhất một số chia hết cho 5 trong 6 số nguyên liên tiếp đó.

Ta có thể chứng minh điều này bằng cách quan sát một số các trường hợp cụ thể:
Vì vậy, trong mọi trường hợp, ta đều có ít nhất một số trong 6 số nguyên liên tiếp đó chia hết cho 5, do đó tích của chúng chia hết cho 24×32×5
tức là chia hết cho 720.
Vậy, ta đã chứng minh được rằng tích của 6 số nguyên liên tiếp chia hết cho 720.

Câu 18:

Gọi d = ƯCLN(14n + 3; 21n + 4).

Khi đó 14n + 3 và 21n + 4 chia hết cho d.

Suy ra 3(14n + 3) và 2 (21n + 4) chia hết cho d.

Do đó 3 (14n + 3) – 2 (21n + 4) chia hết cho d.

Hay 3.14n + 3 .3 – 2 .21n – 2 .4 chia hết cho d.

Từ đó suy ra 42n + 9 – 42n – 8 = 1 chia hết cho d.

Khi đó ta có d = 1.

Vậy ƯCLN(14n + 3; 21n + 4) = 1 hay $\frac{14n+3}{21n+4}$là phân số tối giản (n là số tự nhiên).

Câu 19:

Gọi $u=(a+b,a-b)$ (u là ước số chung lớn nhất của $a+b$ và $a-b$

=> $\frac{u}{a+b} và \frac{u}{a-b} \Longrightarrow \frac{u}{a+b+a-b}=2a và \frac{u}{a+b-a-b}=¿$2b

=> $\frac{u}{(2a,2b)}$ = 2($a,b¿$=2d

hay: 2d = u.m (*)

Ngoài ra:

d=(a,b) => $\frac{d}{a}$và $\frac{d}{b}$=> $\frac{d}{a+b}$ và $\frac{d}{a-b}$=> $\frac{d}{(a+b,a-b)}$)

=> d là ước của u (vì u =($a+b,a-b$) nên u là bội của mọi ước chung của ($a+b$) và ($a-b$)

hay: u = d.n (**)

(*) và (**) => 2d = d.mn => mn =2 => m=1, n = 2 hoặc m= 2, n= 1 => u = d hoặc u = 2d.

vậy: ƯCLN ($a+b, a-b$) = d hoặc = 2d

Câu 20:

a/ (a$\pm$b, ab)=1

chứng minh phản chứng

giả sử d>1 là ước chung lớn nhất của a$\pm$b, ab => a$\pm$b chia hết cho d, ab cũng chia hết cho d, do đó:

a$\pm$b = m.d (m, n là các số nguyên)

ab = n.d

từ ab= n.d ta thấy a chia hết cho d hoặc b chia hết cho d

tuy nhiên nếu a chia hết cho d thì từ a$\pm$b= m.d suy ra được b cũng chia hết cho d.hoặc nếu b chia hết cho d cũng tương tự a sẽ chia hết cho d. Điều này mâu thuẫn với giả thiết của đề bài.

Sở dĩ xảy ra mâu thuẫn trên là ta cho d> 1 =(a$\pm$b, ab)

Do đó (a$\pm$b, ab)= 1 (dpcm)

b/ (2a+b, a(a+b)) =1

giải: chứng minh phản chứng

giả sử 1<d = (2a+b, a(a+b)) do đó 2a+b chia hết cho d, a(a+b) chia hết cho d.

2a + b= m.d (m, n là các số nguyên)

a(a + b) = n.d

từ a(a+b) = n.d ta thấy a chia hết cho d hoặc (a+b) chia hết cho d.

tuy nhiên nếu a chia hết cho d thì từ 2a +b =m.d suy ra b cũng chia hết cho d.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết của đề bài.

Sở dĩ có mâu thuẫn này là do ta đặt 1< d= (2a +b, a(a+b))

Do đó (2a +b, a(a+b)) =1 (dpcm)

c/ (ab, a^2 + ab + b^2) =1

giải: chứng minh phản chứng

giả sử 1< d= (ab, a^2 + ab + b^2) => ab chia hết cho d, a^2 + ab + b^2 cũng chia hết cho d

ab = m.d (m, n là các số nguyên)

a^2 + ab + b^2 = n.d

từ ab = n.d ta thấy a chia hết cho d hoặc b chia hết cho d.

tuy nhiên nếu a chia hết cho d thì từ $a^2 + ab + b^2 = m.d$ suy ra b cũng chia hết cho d. Điều này mâu thuẫn với giả thiết của đề bài.

Sở dĩ có mâu thuẫn này là do ta đặt $1 < d = (ab, a^2 + ab + b^2)$

Do đó, $(ab, a^2 + ab + b^2) = 1$ (dpcm)

m d

d/ (a+b, [a, b])= (a, b)   a, b là số nguyên dương.

Gọi d = (a, b) và m = [a, b] => a, b đều chia hết cho d và m đều chia hết cho a, b

=>a+b cũng chia hết cho d và m cũng chia hết cho d

=>(a+b, m) = d

Do đó (a+b, [a, b]) = (a, b) với a, b là số nguyên dương.   (dpcm)

Câu 21

Ta có n là ước a-b và ac-bd thì a-b chia hết cho n và ac-bd cũng chia hết cho n.

Theo đề bài a, b là số nguyên tố cùng nhau nên (a, b)= 1.

Mặt khác a-b chia hết cho thì a cũng chia hết cho n. tương tự ta có a-b + ac-bd =ac –(b-bd) chia hết cho n, vậy n cũng là ước của ac.

Do đó, n là ước chung của cả a , ac và do (a,b)=1 nên n cũng là ước của c.

Tương tự, từ a-b chia hết cho n và ac-ab chia hết cho n, ta có b-a chia hết cho n và bd-ac chia hết cho n, nên b-a + bd-ac= d-(a-ac) chia hết cho n . từ đó suy ra n là ước của d-c, và n cũng là ước của d.

Vậy n là ước chung của cả c và d.

Câu 22:

Tìm cặp số nguyên (a,b)

a/ $\begin{cases} (a,b)=36 \\ a+b=432 \end{cases}$

giải: ta có ước chung lớn nhất của a, b là 36 ⇒ a= 36x và b= 36y (x, y là số nguyên dương)

mà a+b= 432 ⇒ 36x + 36y = 432 (1)

giải (1): chia hai vế cho 36 ta được: x+y=12

d(1, 1) = 1| 12 => phương trình có nghiệm nguyên

1 nghiệm nguyên thỏa mãn x0= 1, y= 11

⇨ Nghiệm nguyên tổng quát: $\begin{cases} x=1+t \\ y=11-t \end{cases}$

Với t= 1, x= 2, y= 10 => a= 72, b= 360

Với t=2 , x= 3, y= 9 => a= 108, b= 324

....

b/ $\begin{cases}(a,b)=20\\ ab=8400\end{cases}$

giải : ta có (a, b)=20 ⇒ a= 20x, b= 20y (x, y là số nguyên dương)

mặt khác: ab= 8400 ⇔ 20x. 20y= 8400

⇨ 400xy= 8400

⇨ xy= 21

các cặp số nguyên thỏa mãn là (1, 21), (21, 1)

=>các cặp (a, b) thỏa mãn đề bài là:

x= 1, y=21=> a= 20, b= 420

x= 21, y= 1 => a= 420, b=20

c/ $\begin{cases}(a,b)=15\\ [a,b]=2835\end{cases}$

giải: ta có ước chung lớn nhất của a, b= 15 => a= 15x, b= 15y (x, y là số nguyên dương)

mặt khác [a, b]= 2835 ⇔ [15x, 15y]= 2835 ⇔ [x, y]= 189 (*)

các cặp x, y thỏa mãn (*) là (1, 189), (7, 27), (189, 1), (27, 7)

với x= 1, y= 189 => a= 15, b= 2835

với x= 7, y=27 => a= 105, b= 405

với x=189, y= 1=> a= 2835, b= 15

với x=27, y= 7 => a= 405, b= 105

Câu 23:

a/ $(n!)^k$ là ước của (nk)!
Ta có: (nk)! = (nk).(nk-1)(nk-2)….2.1
Do đó mỗi nhóm n số liên tiếp trong (nk)! Chia hết cho n!, và có tổng k nhóm. Do đó $(n!)^k$ là ước của (nk)!.
b/ $[(n!)^k , (k!)^n]$ là ước của (nk)!

1. Chứng minh $((n!)^k)$ là ước của ((nk)!)

Như đã chứng minh ở câu a, $(n!)^k$ là ước của (nk)! Vì mỗi nhóm (n) liên tiếp trong (nk!) chia hết cho n!, và có tổng cộng k nhóm.

2. Chứng minh $(k!)^n$ là ước của (nk)!

Tướng tự, mỗi nhóm (k) số liên tiếp trong (nk!) chia hết cho k!, và có tổng cộng n nhóm. Do đó $((k!)^n)$ cũng là ước của (nk)!

CÂU 24

a) Để chứng minh rằng n4 + 4 là hợp số với n > 1, ta có thể sử dụng tính chất của số hợp số.

Một số hợp số là số có ít nhất một ước số khác 1 và chính nó. Để chứng minh n4 + 4 là hợp số, ta chỉ cần tìm được một ước số khác 1 và chính nó.

Gọi a = n4 và b = 4, ta có:
n4 + 4= a + b = (a + 2)(a - 2)

Vì n > 1, nên n4 > 1, do đó a = n4 > 1 Như vậy, a + 2 > 2$và a - 2 > 2 tức là n4 + 4 có ít nhất hai ước số khác 1 và chính nó, nên n4 + 4là hợp số.

b) Tương tự, để chứng minh n4 + n2 +1 là hợp số với n > 1 ta có:
n4 + n2 +1 = (n2 + 1)(n2 +1)

Vì n > 1, nên n2 > 1, do đó n2 + 1 > 2. Như vậy,n4 + n2 +1 có ít nhất hai ước số khác 1 và chính nó, nênn4 + n2 +1 là hợp số.

Câu 25 :

Tìm số nguyên tố sao cho

a/ p+4 và p+8 cũng là số chính phương

không có số nguyên tố thỏa yêu cầu bài toán

b/ 4p+1 là một số chính phương

p= 2

c/ 2p+1 là lập phương của một số nguyên

không có số nguyên nào thỏa mãn

d/ $4p^2 +1$ và $6p^2 +1$ cũng là các số nguyên tố

p= {2, 3, 5, 11}

e/ p vừa là tổng của hai số nguyên tố vừa là hiệu của hai số nguyên tố

p= 5

Câu 26:

$n^4 +4 = n^4 +4n^2 + 4- 4n^2$

$= (n^2 +2)^2 –(2n)^2 = (n^2 -2n+2)(n^2 +2n +2)$

Để $n^4 +4$ là số nguyên tố thì : $\begin{cases} n2 - 2n + 2 = 1 \\ n2 + 2n + 2 = 1 \end{cases}$ => $\begin{cases} n = 1 \\ n = -1 \end{cases}$

Vậy $n=\pm 1$

Câu 30:

Để chứng minh rằng $8p^2-1$ và $8p^2+2p+1$ đều là số nguyên tố, ta có thể sử dụng các tính chất sau:

1. Nếu p là số nguyên tố, thì $8p^2+1$ cũng là số nguyên tố (vì $8p^2+1$ $=(2p)^2+1$, và 2p là số chẵn, nên là $(2p)^2+1$ số lẻ).
2. Nếu $8p^2+1$ là số nguyên tố, thì $8p^2-1$ cũng là số nguyên tố (vì $8p^2-1$ = (2p-1)(2p+1), và (2p-1) và (2p+1) là hai số lẻ liên tiếp, nên chúng không thể chia hết cho nhau).
3. Nếu p là số nguyên tố, thì $8p^2+2p+1$ cũng là số nguyên tố (vì $8p^2+2p+1=(2p+1)^2$, và (2p+1) là số lẻ).

Từ các tính chất trên, ta có thể kết luận rằng:

- Nếu p là số nguyên tố, thì $8p^2-1$ và $8p^2+2p+1$ đều là số nguyên tố.

Vì vậy, chứng minh được rằng $8p^2-1$ và $8p^2+2p+1$ đều là số nguyên tố.

Câu 31

Để chứng minh rằng p^3+4 cũng là một số nguyên tố khi p và p^2+8 đều là số nguyên tố, ta sẽ sử dụng Định lý Fermat nhỏ.

Đề bài đã cho hai số nguyên tố là p và p^2+8.

Theo Định lý Fermat nhỏ, nếu p là số nguyên tố và a là một số nguyên không chia hết cho p, thì:

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

Với p^2+8 là số nguyên tố, ta có:

$4^{p^2+7} \equiv 1 \pmod{p^2+8}$

Bây giờ, chúng ta sẽ xét biểu thức p^3+4, và sử dụng tính chất của phần dư:

$p^3+4 \equiv p^3+4-(p^2+8)\cdot k \pmod{p^2+8}$

Với một số nguyên dương k.

Từ đây, ta có:

$p^3+4 \equiv p^3+4-p^3-8k \pmod{p^2+8}$

$p^3+4 \equiv 4-8k \pmod{p^2+8}$

Vì $4-8k$ là một hằng số không phụ thuộc vào p, nên p^3+4 sẽ cùng một phần dư với $4-8k$ khi chia cho p^2+8.

Vậy nếu p^2+8 không chia hết cho p^3+4, tức là p^3+4 là số nguyên tố.

CÂU 34

Để chứng minh rằng nếu an + 1 với a là số nguyên lớn hơn 1 thì n = 2k, ta có thể sử dụng phương pháp sau:

Giả sử an + 1 = 0 , tức là an = -1

Vì a > 1, nên an = -1 chỉ có thể xảy ra khi n là số chẵn. Điều này là do:

- Nếu n là số lẻ, thì an = a2k+1 = a . a 2k khác -1 , vì a > 1
- Nếu n là số chẵn, thì an = a2k khác (-1)k = -1

Vì vậy, n phải là bội số của 2, tức là n = 2k với k là một số nguyên dương.

Như vậy, ta đã chứng minh được rằng nếu an + 1 với a là số nguyên lớn hơn 1 thì n = 2k

Câu 35

a)

Để chứng minh rằng $V_p(mn) = V_p(m) + V_p(n)$, trước tiên, ta cần hiểu rằng Vp(x) là số mũ của số nguyên tố p trong phân tích tiêu chuẩn của x, nghĩa là $x=p^{V_p(x)}$ và p không chia hết cho bất kỳ thừa số nguyên tố nào khác.

Giả sử phân tích tiêu chuẩn của m là $m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$ và phân tích tiêu chuẩn của n là $n=p_1^{b_1}p_2^{b_2}\dots p_k^{b_k}$, với p1,p2,...,pk là các số nguyên tố và a1,a2,...,ak, b1,b2,...,bk là các số mũ tương ứng.

Ta có thể viết mn thành tích các thừa số nguyên tố:

mn= $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} \cdot p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k}$

Vậy, mn= $p_1^{a_1+b_1} p_2^{a_2+b_1} \dots p_k^{a_k+b_k}$

Do đó, số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của mn là:

Vp(mn)=ai+bi

Nhưng ai là số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của m(Vp(m)=ai) và bi là số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của n (Vp(n)=bi).

Vì vậy, ta có:

Vp(mn)=Vp(m)+Vp(n)

Điều này chứng minh rằng Vp(mn)=Vp(m)+Vp(n)

1. b) Nếu Vp(m)<Vp(n), tức là số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của m ít hơn số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của n, thì m không chia hết cho Vp$\left[\frac{m}{n}\right]$, vì Vp$\left[\frac{m}{n}\right]$sẽ là một số âm hoặc không tồn tại.
2. Nếu Vp(m)≥Vp(n), tức là số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của m lớn hơn hoặc bằng số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của n, thì m chia hết cho Vp$\left[\frac{m}{n}\right]$. Điều này là do Vp$\left[\frac{m}{n}\right]$ sẽ là một số không âm và m có thể được viết dưới dạng $p^{V_p(mn)}$ và n có thể được viết dưới dạng $p^{V_p(n)}$·k với k là một số nguyên dương không chia hết cho p, từ đó m chia hết cho Vp (m)−Vp(n).

Vậy, ta đã chứng minh được điều cần chứng minh.

Câu 36

a) 114x-41y=5

d=(114,41)=1|5

Một nghiệm nguyên của phương trình là:

$$x_0 = 4 \, và \, y_0 = 11$$

Nghiệm nguyên tổng quát là

$$\begin{cases} x=4-41t \\ y=11-114t \end{cases}$$

b) 1675x – 367y=23

d= (1675,367)=1 | 23

Một nghiệm nghiên của phương trình là

$$x_0=204 \text{ và } y_0=931$$

Nghiệm tổng quát là

$$\begin{cases} x=204-367t \\ y=931-1675t \end{cases}$$

c) 32x - 48y = 112

d= (32,48)=16 | 112

Một nghiệm nghiên của phương trình là

$$x_0=2 \text{ và } y_0=-1$$

Nghiệm tổng quát là

$$\begin{cases} x=2-48t \\ y=-1-32t \end{cases}$$

d) 38x-117y = 109

d= (38,117)=1 | 109

Một nghiệm nghiên của phương trình là

$$x_0=-31 \text{ và } y_0=11$$

Nghiệm tổng quát là

$$\begin{cases} x=-31-117t \\ y=11-38t \end{cases}$$

Câu 37

x (con) là số chim sẻ
y(con) là số chim ngói
z (con) là số bồ câu

ta có $\begin{cases} x+y+z=30 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}+2z \end{cases}$ <=> $\begin{cases} y=30-x-z \\ \frac{30-x-z}{2}+\frac{x}{3}+2z=30 \end{cases}$

thử x=3 => z= 31/3
x= 6 => z= 32/3
x=9 => z= 11 , y= 10 (nhận)
x=12 => z= 34/3
x= 15 => z= 35/3
x= 18 => z= 12, y= 0 (loại)

vậy có 9 chim sẻ , 10 chim ngói và 11 bồ câu

Câu 38

Gọi số tự nhiên có hai chữ sô chia hết cho 9 là n

Khi công thêm 1 thì chia hết cho 25 là n+1

Ta có n=9k ¿11)

n+1 = 9k +1 =25x

⇨ $25x-9k=1$ (1)

Giải phương trình (1)

d=(25,-9) =1 | 1

Một nghiệm nghiên của phương trình là

$$x_0=4\, và\, k_0=11$$

Vậy với k=11 thì 9k=99 chia hết cho 9

Vậy 99+1=100 chia hết cho 25

Vậy số tự nhiên có hai chữ số cần tìm là 99

Câu 39:

Số cách trả số tiền 78 đồng là các cặp nghiệm của phương trình thỏa mãn điều kiện x,y không âm :

3x +5y =78

d=(3,5)=1 | 78

Một nghiệm nghiên của phương trình là

$$x_0=1\, và\, y_0=15$$

Nghiệm tổng quát là

$$\begin{cases} x=-31-117t \\ y=11-38t \end{cases}$$

Các cặp nghiệm thỏa mãn là:

x=1 và y=15

x=11 và y=9

x=16 và y=6

x=21 và y=0

vậy có 4 cách trả 78 đồng bằng hai loại giấy bac 3 đồng và 5 đồng

Câu 41

a/ 2x + 3y -5z= 15 (1)

vì (2, 3, -5) = 1 nên phương trình có nghiệm nguyên. Ta có: (2, 3) =1

(1) ⇔ 2x+3y= 15+5z => $\begin{cases} z = u \\ c = 15 + 5z = 15 + 5u \\ 2x + 3y = c \end{cases}$

Phương trình cuối có một nghiệm là (-c, c) nên có nghiệm tổng quát là:

$\begin{cases} x = -c + 3t = -15 - 5u + 3t \\ y = c - 2t = 15 + 5u - 2t \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là: $\begin{cases} x = -15 - 5u + 3t \\ y = 15 + 5u - 2t \\ z = u \qquad u, t \in Z \end{cases}$

b/ 3x+4y +5z= 25 (1)

vì (3, 4, 5) =1 nên phương trình có nghiệm nguyên. Ta có: (3, 4) =1

(1) ⇔ 3x + 4y= 25 – 5z => $\begin{cases} z = u \\ c = 25 - 5z = 25 - 5u \\ 3x + 4y = c \end{cases}$

(2) Phương trình cuối có 1 nghiệm là (-c, c) nên có nghiệm tổng quát là:

$\begin{cases} x = -c + 4t = -25 + 5u + 4t \\ y = c - 3t = 25 - 5u - 3t \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là : $\begin{cases} x = -25 + 5u + 4t \\ y = 25 - 5u - 3t \\ z = u \qquad u, t \in Z \end{cases}$

Câu 42:

$x^4 + y^4 = z^4$ không có nghiệm nguyên thỏa mãn điều kiện x, y, z khác 0.
áp dụng định lí fermat. Theo định lí fermat khẳng định rằng không có các sô nguyên dương (x, y, z) và một số nguyên n>2 sao cho ($x^n + y^n = z^n$). phương trình vủa chúng ta là một trường hợp của định lí fermat với n=4
vậy, không có nghiệm nguyên nào thỏa mãn phương trình ($x^4 + y^4 = z^4$) với (x, y, z) khác 0.

Câu 44:

5a+18b E Z <=> 5a+18b chia hết cho 19

Mà 2(5a+18b)-5(2a+11b)=-19b chia hết cho 19

Mà 2(5a+18b) chia hết cho 19 do đó 5(2a+11b) chia hết cho 19

Vậy 2a+11b chia hết cho 19 (Vì 19 và 5 nguyên tố cùng nhau) Vậy 2a+11b/19 E Z

Câu 45

Cho a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng 100a + 10b + c chia hết cho 21 khi và chỉ khi a-2b +4c chia hết cho 21.
Giả sử 100a + 10b + c chia hết cho 21 ⇔ 100a +10b +c≡ 0 (mod 21)
=>100a + 10b +c= 21k (với k là số nguyên) (1)
Xét a- 2b + 4c = 100a – 200b +400c = (100a + 10b +c) –(102a +12b +399c)

Cần chứng minh (102a +12b +399c) chia hết cho 21.
Ta đặt (102a +12b +399c) = 21(4a + 2/7b +19c)= 21m với m là số nguyên(2)
Từ (1) và (2) ta có a- 2b+4c = 21k – 21m= 21(k-m).
Do đó a- 2b +4c chia hết cho 21.
Tương tự ngược lại với nếu a-2b+4c chia hết cho 21 thì 100a +10b +c cũng chia hết cho 21
Kết luận do đó 100a + 10b + c chia hết cho 21 khi và chỉ khi
a-2b +4c chia hết cho 21.(dpcm)

Câu 46:

a.

Ta có : 1532 ≡2 (mod9)

=> $1532^5 \equiv 2^5$ (mod9) , mà $2^5 \equiv 5$ (mod9)

=> $1532^5 \equiv 5$ (mod9) => $1532^5 - 1 \equiv 4$ (mod9)

Vậy 1532^5 - 1: 9 dư 4

b.

(p−1)!≡−1(mod p)

Trong đó p là một số nguyên tố. Áp dụng định lý Wilson với p=11 , ta có:

(11−1)!≡−1(mod11)

⇒10!≡−1(mod11)

Do đó, số dư của 10! khi chia cho 11 là −1 hoặc 10. Tuy nhiên, vì 10 không nằm trong khoảng từ 0 đến 10, nên số dư cần tìm là −1.

Câu 47:

Để chứng minh rằng $2^{5n}-1$ chia hết cho 31. Ta có

$2^5=32\equiv 1(mod\,31)$.Vì 31 là số nguyên tố và 2 không chia hết cho 31.

Do đó ta có:

$$2^{5n}=(2^5)^n=1^n=1\,(mod\,31)$$ Vậy $$2^{5n}-1=(31k+1)-1=31k$$

Do đó, $2^{5n}-1$ chia hết cho 31.

Câu 49 cmr: $2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7
Xét 2222 ≡ 3 (mod 7)

⇨ $2222^{5555} \equiv 3^{5555}$

Ta có: $3^{\varphi(7)} \equiv 1$ (mod 7) vì (3, 7) =1
ó $3^6 \equiv 1$ (mod 7)

⇨ $3^{5555} = 3^{6.925}. 3^5$
⇨ $3^{5555} \equiv 3^5$ (mod 7)
⇨ $2222^{5555} \equiv 5$ (mod 7)

Xét 5555 ≡ 4 (mod 7)

⇨ $5555^{2222} \equiv 4^{2222} \pmod 7$
⇨ $4^{\varphi(7)} \equiv 1 \pmod 7$ vì (4, 7) là nguyên tố cùng nhau
⇨ $4^{6} \equiv 1 \pmod 7$
⇨ $4^{2222} = 4^{6.370} .4^{2} \pmod 7$
⇨ $4^{2222} \equiv 4^{2} \pmod 7$
⇨ $5555^{2222} \equiv 2 \pmod 7$

$2222^{5555} + 5555^{2222} \pmod 7 = 2 + 5 = 7$ chia hết cho 7 (dpcm)

Câu 50:

với n là số tự nhiên cmr

a/ $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ chia hết cho 13

ta có: $4^{2n+1} + 3^{n+2} = (4^2)^n. 4 + 3^n. 3^2 = 16^n.4 + 9.3^n = 13^n.4+3^n.4 + 9.3^n = 13^n.4+3^n.(4+9)$

$= 13^n.4+3^n.13= 13.(13^{n-1}+3^n)$ chia hết cho 13

⇨ $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ chia hết cho 13

b/P = {$4^{2^n}+ 2^{2^n} + 1$ chia hết cho 7. }

1.với n=0, $4^{2^n}+ 2^{2^n} + 1 = 4^{2^0}+ 2^{2^0} + 1 = 7$ chia hết cho 7

Vậy P đúng với n=0

2.giả sử P đúng với n=k

Vậy $4^{2^k}+ 2^{2^k} + 1$ chia hết cho 7.

Cần chứng P đúng với n=k+1

$4^{2^{k+1}}+ 2^{2^{k+1}} + 1 = (4^{2^k}$¿$^2+$ ¿¿ $+ 1 = a^2 + b^2 +1 = (a+b+1)(a-b+1) = A$

Ta có: A= ¿$+ 2^{2^k} + 1)(4^{2^k}- 2^{2^k} + 1)$

Do $4^{2^k}+ 2^{2^k} + 1$ chia hết cho 7. Nên A cũng chia hết cho 7

Vậy P đúng với n= k+1

3.kết luận $4^{2^n}+ 2^{2^n} + 1$ chia hết cho 7.

c/ $2^{2n} + 15n -1$ chia hết cho 9

P = {$2^{2n} + 15n -1= 4^n + 15n-1$ chia hết cho 9}

1.với n= 1 ta có $4^1 +15.1 -1= 18$ chia hết cho 9

Vậy p đúng với n=1

2.giả sử p đúng với $1<n\leq k$

P đúng nghĩa là : $4^k +15.k -1$ cũng chia hết cho 9

Cần chứng minh p đúng với n=k+1

$4^k +15.k -1$ cũng chia hết cho 9

=>4.(4^k +15.k -1) chia hết cho 9

=>4^{k+1} +60k -4 chia hết cho 9

=>4^{k+1} +15k+45k+15 -1-18 cũng chia hết cho 9

=>4^{k+1} +15k+15 -1+45k-18 cũng chia hết cho 9

=>4^{k+1} +15(k+1) -1+45k -18 cũng chia hết cho 9

=>4^k +15(k+1) -1 chia hết cho 9 (dpcm)

Vậy 2^{2n} + 15n -1 chia hết cho 9

Câu 52:

a/ ta có: (a, 7) =1 => $a^6 \equiv 1 \pmod 7$

=> $(a^6)^2 \equiv 1^2 \pmod 7$

=>$a^{12} \equiv 1 \pmod 7$ => $a^{12} - 1 \equiv 0 \pmod 7$

Vậy nếu (a,7) =1 thì $a^{12} - 1 \equiv 0 \pmod 7$

b/ ta có 240 = 2^4 .3.5

φ(240)= 240(1-1/2)(1-1/3)(1-1/5)= 128

$a^4 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1)$

vì a^2 -1 chia hết cho a-1 và a+1 , (a, 240)=1 nên $a^2 - 1 \equiv 0 \pmod{240}$

=> $a^4 - 1 \equiv 0 \pmod{240}$

Vậy nếu (a, 240) =1 thì $a^4 - 1 \equiv 0 \pmod{240}$

Câu 53

Ta có: $3^{100} = 3^4 . 3^{96} = 3^4 (3^3)^{32}$ $Vì\ 3^3 = 27 = 13.2 + 2\ nên\ 3^3 = 1 (mod\ 13)$ do đó :

$(3^3)^{32} = 1^{32} (mod\ 13)\ hay\ 3^{96} = 1 (mod\ 13)$

$3^4 = 31 = 13.6 + 3, nên\ 3^4 = 3 (mod\ 13)$

Vậy $3^4 . 3^{96} = 1.3 (mod\ 13)\ hay\ 3^{100} = 3 (mod\ 13)$

⇨ $3^{100}\ chia\ cho\ 13\ dư\ 3$

Câu 55:

a/ $\begin{cases} 11x \equiv 2 (mod\ 3) \\ 7x \equiv 4 (mod\ 5) \\ 10x \equiv 6 (mod\ 7) \\ 2x \equiv 8 (mod\ 11) \end{cases}$

giải: Theo định lí trung quốc

vì các mod là các nguyên tố sánh đôi nên áp dụng định lí trên

M= [3, 5, 7, 11] =1155

Tính : $\begin{cases} M1 = 385 \\ M2 = 231 \\ M3 = 165 \\ M4 = 105 \end{cases}$

Giải các phương trình đồng dư:

$$\begin{array}{ll} 11.385\,y \equiv 2 \pmod 3 & y \equiv 1 \pmod 3 \\ 7.231\,y \equiv 4 \pmod 5 & y \equiv 2 \pmod 5 \\ 10.165\,y \equiv 6 \pmod 7 & y \equiv 4 \pmod 7 \\ 2.105\,y \equiv 8 \pmod{11} & y \equiv 8 \pmod{11} \end{array}$$

Nghiệm của hệ:

x≡ (11.385.1 + 7.231.2+ 10.165.4 +2.105.8)(mod 1155)

⇔ x≡ 734(mod 1155)

b/ $\begin{cases} 5x \equiv 1 \pmod 2 \\ 7x \equiv 2 \pmod 3 \\ 11x \equiv 3 \pmod 5 \\ 8x \equiv 5 \pmod 7 \end{cases}$

giải: theo định lí trung quốc

vì các mod là các nguyên tố sánh đôi nên áp dụng định lí trên

M= [2,3,5,7] = 210

Tính: $\begin{cases} M1 = 105 \\ M2 = 70 \\ M3 = 42 \\ M4 = 30 \end{cases}$

Giải các phương trình đồng dư:

$$\begin{array}{l} 525\,y \equiv 1 \pmod 2 \\ 490\,y \equiv 2 \pmod 3 \\ 462\,y \equiv 3 \pmod 5 \\ 240\,y \equiv 5 \pmod 7 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y \equiv 1 \pmod 2 \\ y \equiv 2 \pmod 3 \\ y \equiv 4 \pmod 5 \\ y \equiv 6 \pmod 7 \end{array}$$

Nghiệm của hệ:

X ≡ (525.1+490.2+ 462.4+240.6)(mod 210)

⇔ x ≡ 173 (mod 210)

c/ $\begin{cases} 5x \equiv 1 \pmod{12} \\ 5x \equiv 2 \pmod 8 \\ 7x \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$

xét : $\begin{cases} 5x = 12t + 1 \\ 12t + 1 \equiv 2 \pmod 8 \end{cases}$

=> $\begin{cases} 5x = 12t + 1 \\ 12t \equiv 1 \pmod 8 \ (v\hat{o}\,l\acute{i}) \end{cases}$

=> vô nghiệm

Câu 56:

Theo đề bài ta có thể lập ra hẹ phương trình đồng dư:

$$\begin{cases} n \equiv 3(mod\, 13)(1) \\ n \equiv 10(mod\, 11)(2) \\ n \equiv 4(mod\, 7)(3) \\ n \equiv 0(mod\, 3)(4) \end{cases}$$

Từ (1) ta có n=13x+3

Thay vào 2 ta được :

13x+3 ≡10 (mod 11)

⇔ 13x ≡ 7 (mod 11)

⇔ 11x+2x ≡ 7 (mod 11)

⇔ 2x ≡ 18 (mod 11)

⇔ x≡9 (mod 11)   (Vì (2,11)=1)

⇨ x= 11y+9

Thay vào (1) ta được :

x=143y +120   (*)

Thay (*) vào (3) ta được:

143y +120 ≡ 4 (mod 7)

⇔143y ≡ -116 (mod 7)

⇔140y + 3y≡ 3 (mod 7)

⇔ 3y ≡3 (mod 7)

⇔ y≡ 1(mod 7)   Vì (3,7) = 1

⇨ y = 7z + 1

Thay vào (*) ta được:

x= 1001z + 263 (**)

Thay (**) vào (4) ta được:

1001z + 263 ≡ 0 (mod 3)

⇔1001z ≡ -263 (mod 3)

⇔ 1001z – z ≡ 1 (mod 3)

⇔ z ≡ -1 (mod 3)

⇔ z ≡ 2 (mod 3)

⇨ z= 3k+2

Thay vào (**) ta được:

x= 3003k + 2265

Với k= 0 thì x= 2265

Vậy số tiền ít nhất là 2265 (đct)

CÂU 27

CÂU 29: