13 $R(x) = \{x > 0\}$

a)

① $P(3) \vee [Q(3) \vee \bar{R}(3)]$.

Ta có $P(3) = \{3 \leq 3\} = T$.

Vậy $P(3) \vee [Q(3) \vee \bar{R}(3)] = T$.

② $\overline{P(3)} \wedge [Q(3) \vee [Q(3) \vee R(3)]]$

Ta có $P(3) = T \Leftrightarrow \overline{P(3)} = F$.

Vậy $\overline{P(3)} \wedge [Q(3) \vee [Q(3) \vee R(3)]] = F$.

③ $P(2) \to [Q(2) \to R(2)]$

Ta có $R(2) = \{2 > 0\} = T$.

Vậy $P(2) \to [Q(2) \to R(2)] = T$.

④ $[P(2) \leftrightarrow Q(2)] \to R(2)$

Ta có $R(2) = T$.

Vậy $[P(2) \leftrightarrow Q(2)] \to R(2) = T$

⑤ $P(0) \to [\bar{Q}(1) \leftrightarrow R(1)]$

Ta có $\begin{cases} \bar{Q}(1) = !\{1 + 1 \text{ là số lẻ}\} = T \\ R(1) = T \end{cases}$

Vậy $\overline{Q}(1) \Leftrightarrow R(1) = T$

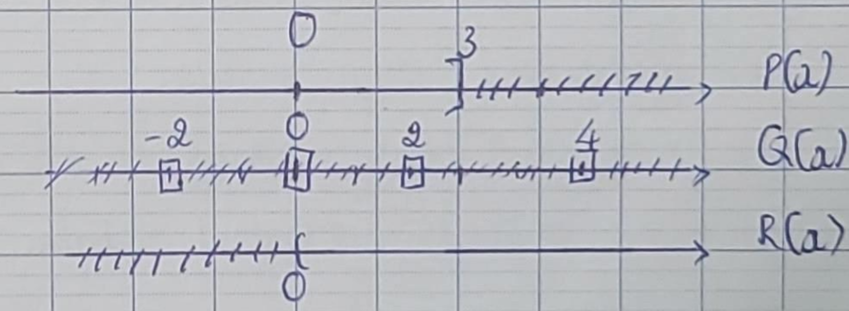
$\Rightarrow P(0) \to [\overline{Q}(1) \Leftrightarrow R(1)] = T$.

⑤ $[P(-1) \Leftrightarrow Q(-2)] \Leftrightarrow R(-3)$

Ta có: $\begin{cases} R(-3) = \{-3 > 0\} = F. \\ \begin{cases} P(-1) = \{-1 \le 3\} = T. \\ Q(-2) = \{-2+1 \text{ là số lẻ}\} = T. \end{cases} \end{cases}$

Vậy $[P(-1) \Leftrightarrow Q(-2)] \Leftrightarrow R(-3) = F$.

b) Để $[P(a) \wedge Q(a)] \wedge R(a)$ là mệnh đề đúng thì cả 3 $P(a)$, $Q(a)$ và $R(a)$ đều bằng 1.



Dựa vào sơ đồ chỉ có $a = 2$ thì:

$P(2) \wedge (Q(2) \wedge R(2) = T$.

c) Để $P(a) \to [\bar{Q}(a) \wedge R(a)]$ là mệnh đề đúng

thì $\left[\begin{array}{l} P(x) = 0 \\ \begin{cases} P(a) = 1 \\ \bar{Q}(a) \wedge R(a) = 1 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \leq 3 \\ \begin{cases} a > 3 \\ \begin{cases} a > 0 \\ x = 2k+1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases} \end{array}\right.$

Ta có thể lấy được 5 giá trị thoả mãn là

$1; 2; 3; 5; 7.$

14 $\quad P(a) = \{a^2 = 2a\}$

a) $P(0) = \{0^2 = 2 0\}$ = True

b) $P(1) = \{1^2 = 2.1\}$ = False

c) $P(2) = \{2^2 = 2 2\}$ = True

d) $P(-2) = \{(-2)^2 = 2.(-2)\}$ = False

e) $\exists a.\ P(a) = T$

f) $\forall a\ P(a) = F$.

15

a) $P(2,4) = \{2^2 \geq 4\}$ = True

b) $Q(1,\pi) = \{1 + 2 < \pi\}$ = True

c) $P(-3,8) \wedge Q(1;3)$

Ta có $Q(1;3) = \{1+2<3\}$ = False

nên $P(-3;8) \wedge Q(1;3)$ = False

d) $P(\frac{1}{2},\frac{1}{3}) \vee \bar{Q}(-2;-3)$

Ta có $\bar{Q}(-2;-3) = !\{-2+2<-3\}$ = True

nên $P(\frac{1}{2};\frac{1}{3}) \vee \bar{Q}(-2;-3)$ = True

e) $P(2;2) \to Q(1;1)$

Ta có $\begin{cases} P(2;2) = \{2^2 \geq 2\} = T \\ Q(1;1) = \{1+2<1\} = F \end{cases}$

Vậy $P(2;2) \to Q(1,1) = F$.

f) $P(1;2) \leftrightarrow \bar{Q}(1,2)$

Ta có $\begin{cases} P(1,2) = \{1^2 \geq 2\} = F. \\ \bar{Q}(1,2) = !\{1+2<2\} = T. \end{cases}$

Vậy $P(1,2) \leftrightarrow \bar{Q}(1,2) = F$.

16

a) ① $\exists x\ Q(x)$

② $\exists x\ (Q(x) \wedge P(x))$

a)

③ $\forall a\,(Q(a) \to \overline{P}(a))$

④. $\forall a\,(Q(a) \wedge P(a))$.

⑤. $\exists a\,(Q(a) \wedge S(a))$.

⑥. $\forall a\,[(Q(a) \wedge R(a)) \to S(a)]$.

b) ① T

② T

③ F (vì 10 ⋮ 5).

④ F (vì 10 là số chẵn và 10 ⋮ 5).

⑤. T

⑥ T.

c)

①. Nếu a là số chính phương thì a là số nguyên dương

② Nếu a chia hết cho 4 thì a là số chẵn.

③ Nếu a chia hết cho 4 thì a không chia hết cho 5.

④ Tồn tại một số sao cho số đó chia hết cho 4 và không phải là số chính phương

⑤ Không tồn tại số nào vừa là số chính phương, vừa là số chẵn, vừa không chia hết cho 4.

17

a) $\exists a\ [P(a) \wedge R(a)] = T$

Vì $\begin{cases} P(4) = \{4 \geq 0\} = T \\ R(4) = \{4^2 - 3.4 - 4 = 0\} = T \end{cases}$

b) $\forall a\ [P(a) \rightarrow Q(a)]$

Vì $Q(a)$ luôn bằng 1 với $\forall a \in \mathbb{R}$

nên $\forall a\ [P(a) \rightarrow Q(a)] = T$

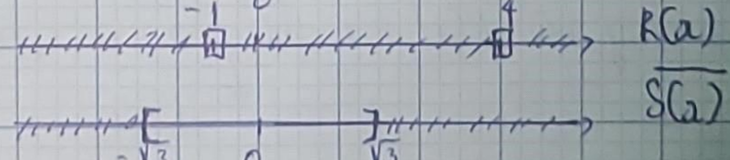
c) $\forall a\ [Q(a) \rightarrow S(a)]$.

Vì khi xét tại $a = 0$.

$\begin{cases} Q(0) = \{0^2 \geq 0\} = T \\ S(0) = \{0^2 - 3 > 0\} = F \end{cases}$

nên $\forall a\ [Q(a) \rightarrow S(a)] = F$

d) $\forall a\ [R(a) \vee S(a)] = F$



Xét tại vị trí $a = 0$

$\begin{cases} R(0) = \{0^2 - 3.0 - 4 = 0\} = \text{False} \\ S(0) = \{0^2 - 3 > 0\} = \text{False} \end{cases}$

e) $\forall a\,[R(a) \to P(a)]$

Xét giá trị $a = -1$

$$\begin{cases} R(-1) = \{(-1)^2 - 3(-1) - 4 = 0\} = \text{True} \\ P(-1) = \{-1 \geq 0\} = \text{False} \end{cases}$$

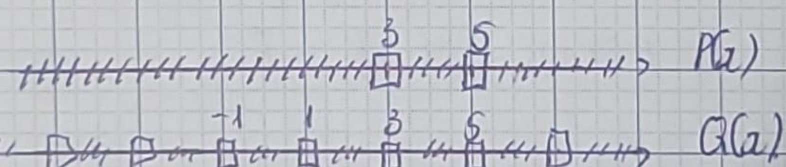
Vậy $\forall a\,[R(a) \to P(a)] = \text{False}$

18. $P(a) = \{a^2 - 8a + 15 = 0\}$ $\quad a = 5 \,//\, a = 3$

$Q(a) = \{a \text{ là số lẻ}\}$ $\quad a = 2k+1,\ k \in Z$

$R(a) = \{a > 0\}$ $\quad a > 0.$

a) $\forall a\,[P(a) \to Q(a)]$



Ta thấy nếu $P(a) = T$ thì $\left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = 5 \end{array}\right.$, khi đó cả $Q(3)$ và $Q(5)$ đều là T.

Vậy $\forall a\,[P(a) \to Q(a)] = T.$

b) $\forall a\,[Q(a) \to P(a)]$.

Ta xét khi $a = 1$ thì $Q(1) = T$ và $P(1) = F$

Vậy $\forall x\, [Q(x) \to P(x)] = F$.

c) $\exists x\, [P(x) \to Q(x)]$

Như câu a, ta xét sau $x = 3$ thì $P(3) = Q(3) = T$.

Vậy $\exists x\, [P(x) \to Q(x)] = T$.

d) $\exists x\, [Q(x) \to P(x)]$.

Xét sau $x = 0$ thì $\begin{cases} Q(0) = 0 \\ P(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(0) \to Q(0) = 1$

Vậy $\exists x\, [Q(x) \to P(x)] = T$.

e) $\exists x\, [R(x) \land P(x)]$

Ta xét $x = 5$. $\begin{cases} R(5) = T \\ P(5) = T \end{cases} \Rightarrow R(5) \land P(5) = T$.

Vậy $\exists x\, [R(x) \land P(x)] = T$.

f) $\forall x\, [P(x) \to R(x)]$.

Ta thấy rằng nếu $P(x) = 1$ thì $R(x)$ cũng $= 1$ (sau $x = 3$ // $x = 5$)

Vậy $\forall x\, [P(x) \to R(x)] = T$

g) $\exists a\,[R(a) \to P(a)]$.

Xét tại $a = 0$.

Ta có $R(0) = \{0 > 0\} = F \Rightarrow R(0) \to P(0) = T$

Vậy $\exists a\,[R(a) \to P(a)] = T$.

h) $\forall a\,[\overline{Q}(a) \to \overline{P}(a)]$

~~Xét tại a = 3~~

~~Ta có Q(3) = {3 là số lẻ} = T ⇒ $\overline{Q(3)}$ = F.~~

~~P(3) = {3^2 − 8.3 + 15 = 0} ⇒ T~~

Xét trường hợp $\overline{Q(a)} = 1$ thì a là số chẵn.

$\Rightarrow \overline{P(a)} = 1$.

Vậy $\forall a\,[\overline{Q(a)} \to \overline{P(a)}] = 1$

i) $\exists a\,[P(a) \to (Q(a) \wedge R(a))]$.

Xét tại $a = 0$

Ta có $P(0) = \{0^2 - 8.0 + 15 = 0\} = F$.

Vậy $[P(0) \to (Q(0) \wedge R(0))] = T$.

nên $\exists a.\,[P(a) \to (Q(a) \wedge R(a))] = T$.

j) $\forall a\,[(P(a) \vee Q(a)) \to R(a)]$.

Xét tại $a = -3$

Ta có $Q(-3) = \{-3 \text{ là số lẻ}\} = T$.

$\Rightarrow P(-3) \vee Q(-3) = T$.

$R(-3) = \{-3 > 0\} = F$ $\Big\}$ $(P(-3) \vee (Q(-3)) \to R(-3) = F$.

Vậy $\forall a [(P(a) \vee Q(a)) \to R(a)] = F$.

19 $P(a)$ $a = 5 \,//\, a = 2$ $Q(a)$ $a = 3 \,//\, a = -1$ $R(a)$ $a < 0$.

a) ① $\forall a [P(a) \to \bar{R}(a)]$

Xét tại $a = 5$ và $a = 2$

Thì $P(5) = P(2) = 1$.

$\overline{R(5)} = \overline{R(2)} = 1$. $\Big\}$ $P(a) \to \bar{R}(a) = 1$ $(\forall a \in \{2; 5\}$

Xét tại $\forall a \in \mathbb{Z} / \{2; 5\}$

Thì $P(a) = 0$ $\forall a \in \mathbb{Z} / \{2; 5\}$

nên $P(a) \to \overline{R(a)} = 1$ $\forall a \in \mathbb{Z} \setminus \{2; 5\}$

Vậy $\forall a [P(a) \to \bar{R}(a)] = 1$.

② $\forall a [Q(a) \to R(a)]$.

Xét tại $a = 3$

$Q(3) = \{3^2 - 2.3 - 3 = 0\} = T$

$R(3) = \{3 < 0\} = F$.

Vậy $Q(3) \to R(3) = F$.

Vậy $\forall a [Q(a) \to R(a)] = F$.

③ $\exists a\,[Q(a) \to R(a)]$

Xét tại $a = 0$

$Q(0) = \{0^2 - 2\cdot 0 - 3 = 0\} = F$

Thấy $Q(0) \to R(0) = T$.

Vậy $\exists a\,[Q(a) \to R(a)] = T$.

④ $\exists a\,[P(a) \to R(a)]$.

Xét tại $a = 0$.

$P(0) = F. \Rightarrow P(0) \to R(0) = T$

Vậy $\exists a\,[P(a) \to R(0)] = T$

b) ①. Không thay đổi kết quả.

② Chứng minh và kết quả không đổi

③. Chứng minh tương tự, thay đổi xét tại $a = 2$

④. Chứng minh tương tự, xét tại $a = 3$

c) ① T

② Ta thấy $Q(5) = Q(2) = 0$

$\Rightarrow Q(a) \to R(a) = 1\ \forall a$

Vậy $\forall a\,[Q(a) \to R(a)] = 1$

③ T

④ F vì. $P(2) = 1$ mà $R(2) = 0$

$P(5) = 1$ $R(5) = 0$

20 $P(x) = \{x$ học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần$\}$

a) Có một số người mà họ học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần

b) Tất cả mọi người đều học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần

c) Có một số người không học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần

d) Tất cả mọi người đều học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần

21 $P(x, y) = \{x$ đã học môn $y\}$

a) Có một sinh viên đã học xong 1 môn.

b) Có ít nhất một sinh viên trong lớp đã học tất cả các môn tin học

c) Tất cả sinh viên trong lớp đã học ít nhất một môn tin học

d) Có ít nhất một môn tin học mà tất cả sinh viên trong lớp đều đã học

e) Mỗi môn tin học đều đã được ít nhất một sinh viên trong lớp học

f) Mỗi sinh viên trong lớp đều đã học tất cả các môn tin học

22

a) $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$

b) $\exists x\ (P(x) \wedge \overline{Q(x)})$

c) $\forall x\ (P(x) \vee Q(x))$

d) $\overline{\exists x}\ (P(x) \vee Q(x))$ hoặc $\forall x\ (\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)})$

23 a) $\overline{\exists x}\ (P(x) \wedge Q(x))$

b) $\forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x))$

c) $\overline{\exists x}\ (P(x) \wedge R(x))$