# Baitaptoanroiracchuongii

Toán rời rạc (Trường Đại học Cần Thơ)

| STT: 60 Nhóm 05 | Mã SV: | Họ và tên: | Ngày: |
|---|---|---|---|
| Stt 60 | S2300004 | Trần Thị Bảo Trân | 04/02/2024 |

**Câu 1:**

a) P ^ ( p => q ) ^ (s ˅ r ) ^ ( r => q) = s

1 p
2 p => 4
3 s ˅ r
4 r => q
5 q (1 & 2)
6 r (4 & 5)
7 s ( 3 & 6)

b) ( p ^ q ) ^ ( p => ( r ^ q )) ^ ( r => ( s ˅t )) ^ s = t ?
1 p ^ q
2 p => ( r ^ q )
3 r => ( s ˅ t )
4 s`
5 p r r
6 r ^ q k đ z & 5
7 s ˅t rút gọn 6 + kp3
8 t tđlt 4&7

c) ( p => ( 4 => r ) ) ^ ( p˅s ) ^ ( t => 4 ) ^ s` => r` => t`
1 p => ( q => r )
2 p ˅ q
3 t => q
4 s`
5 p TBLT 2 & 4
6 q => r ( kđ 5 & 1 )
7 t => r + đlcđ 6 & 3
8 r` => t` phản đảo

d) ( ( p` v q ) => r ) ^ ( r => ( s v t ) ) ^ ( s` ^ u` ) ^ ( u` => t ) => p
1 ( p`v q ) => r
2 r => ( s v t)
3 s`^ u`
4 u`=> t`

**Câu 2 :**

a/ những con kanguroo sống ở Australia là loài thú có túi. Do đó, kanguroo là loài thú có túi.:

Đây là lập luận dựa trên suy luận rút gọn.

b/ Hoặc hôm nay trời nóng trên 100 độ hoặc là sự ô nhiễm la nguy hại. Hôm nay nhiệt độ ngoài trời thấp hơn 100 độ. Do đó, ô nhiễm là nguy hại.

Đây là lập luận dựa trên suy luận tam đoạn luận tuyển

c/ Steve sẽ làm việc ở một công ty tin học vào mùa hè này. Do đó, mùa hè này anh ta sẽ làm việc ở một công ty tin học hoặc là một kẻ lang thang ngoài bể bơi.

Đây là lập luận dựa trên suy luận cộng

d/ Nếu tôi làm bài tập này cả đêm thì tôi có thể trả lời được tất cả các bài tập. Nếu tôi trả lời tất cả bài tập thì tôi sẽ hiểu được tài liệu này. Do đó, nếu tôi làm bài tập này cả đêm thì tôi sẽ hiểu được tài liệu này.

Đây là lập luận dựa trên suy luận tam đoạn luận giả định.

**Câu 4 :**

p: "bình phương một số chẵn là một số chẵn"

a/ Chứng minh trực tiếp: ta giả sử n là một số chẳn bất kì, nên n = 2k ( k $\in$Z).

$\Rightarrow n^2 = 2k \times 2k = 4k^2 = 2(2k^2)$ chia hết cho 2.

Do đó $n^2$ là một số chẵn.(đpcm)

b/ Chứng minh gián tiếp: giả sử n là số lẻ nên n=2k +1 (k$\in$Z) .

$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k +1 = 2(2k^2 + 2k) +1$ không chia hết cho 2 nên $n^2$ lúc này cũng không chia hết cho 2.

Do đó $n^2$ là số lẻ. từ đó suy ra bình phương 1 số chẳn là số chẳn.(đpcm)

c/ Chứng minh phản chứng: giả sử bình phương một số chẳn là một số lẻ là đúng.

Ta có: n là số chẳn và $n^2 = 2k + 1 \Leftrightarrow n^2 - 1 \Leftrightarrow (n-1)\times(n+1)=2k$.

(n-1).(n+1)=2k thì n-1 và n+1 là số chẳn $\Rightarrow$n là số lẻ. Điều này mâu thuẫn với giả thiết n là số chẳn.

Sở dĩ có mâu thuẫn này là do ta đã giả sử bình phương số chẵn là 1 số lẻ. Vậy bình phương một số chẳn là một số chẳn.(đpcm)

**Câu 5:**

Từ định nghĩa ta có 2 số hữu tỷ là

$x=\frac{a}{b}, y=\frac{c}{d} \left( a, b, c, d \text{ đều là số nguyên}; b, d \neq 0 \right)$

$\rightarrow \text{tích của 2 số hữu tỷ là } x \times y = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \left( b, d \neq 0 \right)$

$\rightarrow \frac{a \times c}{b \times d} \text{ là một số hữu tỉ vì } a, b, c, d \text{ đều là số nguyên và } b, d \text{ khác } 0.$

$\Longrightarrow \text{tích của hai số hữu tỉ là một số hữu tỉ}.$

**Câu 6**:
Gọi P “n không chia hết cho 5”
Q “n chia 5 dư 4 hoặc 1”
P=P1 ∨ P2 ∨ P3 ∨ P4
Trong đó: P1= “n mod 5 =1”
P2= “n mod 5 =2”
P3= “n mod 5 =3”
P4= “n mod 5 =4”
Giả sử P1 là đúng:
Ta có, n mod 5 = 1
Đặt n=5k+1 (k là số nguyên)
=> n2=(5k+1)2=25k2+10k+1=5(5k2+2k)+1 không chia chẵn cho 5
Giả sử P2 là đúng:
Ta có, n mod 5 = 2
Đặt n=5k+2 (k là số nguyên)
=> n2=(5k+2)2=25k2+20k+4=5(5k2+4k)+4 không chia chẵn cho 5
Giả sử P3 là đúng:
Ta có, n mod 5 = 3
Đặt n=5k+3 (k là số nguyên)
=> n2=(5k+3)2=25k2+30k+9=5(5k2+2k+1)+4 không chia chẵn cho 5
Giả sử P4 là đúng:
Ta có, n mod 5 = 4
Đặt n=5k+4 (k là số nguyên)
=>n2=(5k+4)2=25k2+40k+16=5(5k2+8k+3)+1 không chia chẵn cho 5
Vậy 1 số không chia hết cho 5 thì bình phương của nó khi chia 5 sẽ dư 1 hoặc 4.
**Câu 7**

Chứng minh tương đương:

CMR: n là số nguyên dương khi đó n là số lẻ nếu và chỉ nếu 5n+ 6 là số lẻ.

Gọi $P_1$ : “n là số lẻ” ($n \in Z^+$)

Gọi $P_2$ : “ 5n+6 là số lẻ” ($n \in Z^+$)

TH1: $P_1 \rightarrow P_2$ : “Nếu n là số lẻ thì 5n+6 là số lẻ”

Ta có n > 0 và n = 2k +1 ($k \in N^*$)

$\Rightarrow$5n+6= 5(2k+1) +6= 10k + 5 +6= 10k +11= 2(5k+5) +1 là 1 số lẻ.

TH2: $P_2 \rightarrow P_1$ : “Nếu 5n+6 là số lẻ thì n là số lẻ”.

Ta có: 5n+6 = 2k+1 $\Rightarrow$5n= 2k + 1 -6= 2k -5= 2(k- 2) -1 là 1 số lẻ do đó n là 1 số lẻ.

Vậy n là số nguyên dương khi đó n là số lẻ nếu 5n+6 là số lẻ (đpcm)

**Câu 8:**

có 2 giả thiết:

- Môn logic là khó hoặc có nhiều sinh viên không thích môn logic. : ($p \vee \neg q$)

- Nếu môn toán là dễ thì logic là không khó.: $(r \to \neg p)$

Ta cho: P= "Môn logic là khó" ; ¬P="môn logic là không khó"

¬Q= "Nhiều sinh viên không thích môn logic"

R= "Môn toán là dễ"

a/ môn toán là không dễ nếu nhiều sinh viên thích môn logic: $[(r \to \neg p) \wedge (p \vee \neg q)] \to q \to \neg r$

1. $r \to \neg p$
2. $\underline{p \vee \neg q}$

$\therefore q \to \neg r$

3. $\neg p \to \neg q$ (luật về phép kéo theo 2)
4. $r \to \neg q$ (tam đoạn luận giả định 1 và 3)
5. $q \to \neg r$ (phản đảo 4)

VT = VP vậy kết luận trên là có cơ sở

b/không có nhiều sinh viên thích môn logic nếu môn toán là không dễ:

$[(r \to \neg p) \wedge (p \vee \neg q)] \to \neg r \to \neg q$

1. $r \to \neg p$
2. $\underline{p \vee \neg q}$

$\therefore \neg r \to \neg q$

3. $\neg r \vee \neg p$ (luật về phép kéo theo 1)
4. $\neg r \vee \neg q$ ( phân giải 2 và 3)
5. $r \to \neg q$ (luật về phép kéo theo 4)

VT ≠ VP vậy kết luận trên không có cơ sở

c/ môn toán là dễ hoặc môn logic là khó : $[(r \to \neg p) \wedge (p \vee \neg q)] \to r \vee p$

1. $r \to \neg p$
2. $\underline{p \vee \neg q}$

$\therefore r \vee p$

3. $r \to \neg p$ (rút gọn 1 và 2)
4. $\neg r \vee \neg p$ ( luật về phép kéo theo 3)

VT ≠ VP vậy kết luận trên không có cơ sở

d/ môn logic là không khó hoặc toán là không dễ: $[(r \to \neg p) \wedge (p \vee \neg q)] \to \neg p \vee \neg r$

1. $r \to \neg p$
2. $\underline{p \vee \neg q}$

$\therefore \neg p \vee \neg r$

3. $r \to \neg p$ (rút gọn 1 và 2)
4. $\neg r \vee \neg p$ (luật về phép kéo theo 3)

   VT = VP vậy kết luận trên là có cơ sở

e/ nếu không có nhiều sinh viên thích môn logic khi đó hoặc là môn toán không dễ hoặc là logic không khó: $[(r \to \neg p) \wedge (p \vee \neg q)] \to \neg q \to (\neg r \vee \neg p)$

1. $r \to \neg p$
2. $\underline{p \vee \neg q}$

$\therefore \neg q \to (\neg r \vee \neg p)$

3. $\neg r \vee \neg p$ (luật về phép kéo theo 1)
4. $\neg r \vee \neg q$ (phân giải 2 và 3)
5. $(\neg r \vee \neg p) \vee \neg q$ (cộng 4)
6. $q \to (\neg r \vee \neg p)$ (luật về phép kéo theo 5)

VT ≠ VP vậy kết luận trên không có cơ sở

**Câu 9:**

Để chứng minh rằng có ít nhất một học sinh tham gia đồng thời cả ba nhóm, ta sử dụng Định lý giao của tập hợp.

Gọi:

- A là tập hợp các học sinh tham gia nhóm Toán,
- B là tập hợp các học sinh tham gia nhóm Văn,
- C là tập hợp các học sinh tham gia nhóm Anh văn.

Ta có:

- $|A| = 17\, học\, sinh$
- $|B| = 13\, học\, sinh$
- $|C| = 11\, học\, sinh$
- $|A \cap B \cap C| = 0\, vì\, có\, 10\, bạn\, không\, tham\, gia\, vào\, nhóm\, nào$

$$\textit{Theo định lý giao của tập hợp ta có:}$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cup B \cup C|$$

$$¿\, 17 + 13 + 11 - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + 0\, Vì\, |A \cup B \cup C| \leq 30\, (\textit{tổng số học sinh trong một lớp})$$

$$\Longrightarrow 41 - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \leq 30 \Longrightarrow -(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) \leq -11$$

$$\Longrightarrow |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| \geq 11$$

$\Longrightarrow \textit{vì cả } 3\, |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|\, \textit{đều không âm. Do đó ít nhất một trong } 3 \textit{ giá trị này hơn } 1.$

Như vậy, ít nhất có một học sinh tham gia đồng thời cả ba nhóm.

**Câu 10**

Chứng minh phản chứng:

Trước hết ta đánh số lần lượt từ 0-9 lên đường tròn theo thứ tự tăng dần $a_1, a_2, \ldots, a_9$ và chứng minh rằng trong dãy đã xếp luôn tìm được 3 điểm liên tiếp có tổng lớn hơn 13.

Giả sử điều ta chứng minh là không xảy ra, nghĩa là:

$0 \leq a_0 + a_1 + a_2 \leq 3$

$3 < a_1 + a_2 + a_3 \leq 6$

$6 < a_2 + a_3 + a_4 \leq 9$

$9 < a_3 + a_4 + a_5 \leq 12$

$12 < a_4 + a_5 + a_6 \leq 15$

$15 < a_5 + a_6 + a_7 \leq 18$

$18 < a_6 + a_7 + a_8 \leq 21$

Từ giả thiết $a_5 + a_6 + a_7$ có giá trị lớn hơn 15 và bé hơn hoặc bằng 18 điều này trái với giả thiết là không có 3 điểm liên tiếp mà tổng của chúng lớn hơn 13.

Vậy, luôn tồn tại 3 điểm liên tiếp sao cho tổng của chúng lớn hơn 13.

**Câu 11:**

a) Gọi P(k) là mệnh đề $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Ta có P(k) đúng vì $1^2 = \frac{1.2.3}{6} = 1$

Giả sử P(k) đúng, tức là $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ (1)

Cần chứng minh P(k+1) đúng nghĩa là: $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{2k^3+9K^2+16k+6}{6}$

=>Cộng 2 vế của (1) cho $(2k+1)^2$:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 + (2k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (2k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(2k+1)^2}{6} = \frac{2k^3+3k^2+k+6k^2+12k+6}{6}$$

$$= \frac{2k^3+9K^2+16k+6}{6}$$

Vậy $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ P(k+1) đúng

Vậy $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ là biểu thức đúng

b)Gọi P(k) là mệnh đề $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Ta có P(k) đúng vì $1.2.3 = \frac{1.2.3.4}{4} = 6$

Giả sử P(k) đúng, tức là $\sum_{i=1}^{k} i(i+1)(i+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$ (1)

Cần chứng minh P(k+1) đúng nghĩa là:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1)(i+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}=\frac{k^4+6K^3+11k^2+6k+4k^3+24k^2+44k+24}{4}$$

$$=\frac{k^4+10k^3+35k^2+50k+24}{4}$$

=>Cộng 2 vế của (1) cho $(k+1)(k+2)(k+3)$:

$$\sum_{i=1}^{k} i(i+1)(i+2)+\text{¿}(k+1)(k+2)(k+3)\text{¿}=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+\frac{4(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

$$=\frac{k^4+6K^3+11k^2+6k+4k^3+24k^2+44k+24}{4}$$

$$=\frac{k^4+10k^3+35k^2+50k+24}{4}$$

Vậy $\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1)(i+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$ P(k+1) đúng

Vậy $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ là biểu thức đúng

c) Gọi P(k) là mệnh đề $\sum_{i=1}^{n} i(i)!$=(n+1)!-1

Ta có P(k) đúng vì $1.1!=2!-1=1$

Giả sử P(k) đúng, tức là $\sum_{i=1}^{k} i(i)!$=(k+1)!-1 (1)

Cần chứng minh P(k+1) đúng nghĩa là: $\sum_{i=1}^{k+1} i(i)!$=(k+2)!-1

=>Cộng 2 vế của (1) cho $(k+1)(k+1)!$:

$\sum_{i=1}^{k} i(i)!+\text{¿}(k+1)(k+1)!\text{¿}$= (k+1)!-1 + $(k+1)(k+1)!$= (k+1)!.(1+k+1)-1=(k+2)!-1

Vậy $\sum_{i=1}^{k+1} i(i)!$=(k+2)!-1 => P(k+1) đúng

Vậy $\sum_{i=1}^{n} i(i)!$=(n+1)!-1 là biểu thức đúng

d)

Gọi P(k) là mệnh đề $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!}$=1-$\frac{1}{(n+1)!}$

Ta có P(k) đúng vì $\frac{1}{2!}=1-\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$

Giả sử P(k) đúng, tức là $\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{(i+1)!}$=1-$\frac{1}{(k+1)!}$ (1)

Cần chứng minh P(k+1) đúng nghĩa là: $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{i}{(i+1)!}$=1-$\frac{1}{(k+2)!}$

=>Cộng 2 vế của (1) cho $\frac{k+1}{(k+2)!}$:

$\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{(i+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} =$ 1-$\frac{1}{(k+1)!}$+ $\frac{k+1}{(k+2)!} = 1 + \frac{-k-2}{(k+2)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(k+2)!}$

Vậy $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{i}{(i+1)!}$=1-$\frac{1}{(k+2)!}$ => P(k+1) đúng

Vậy $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!}$=1- $\frac{1}{(n+1)!}$ là biểu thức đúng

e) Gọi P(k) là mệnh đề $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Ta có P(1) đúng vì $\frac{1}{1.2.3} = \frac{1.4}{4..2.3} = \frac{1}{6}$

Giả sử P(k) đúng, tức là $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$ (1)

Cần chứng minh P(k+1) đúng nghĩa là: $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)} =$
$\frac{(k+1)^2(k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$

¿ $\frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$

=>Cộng 2 vế của (1) cho $\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$:

$\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{(i+1)!} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} +$
$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k(k+3)^2+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$

Vậy $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$ => P(k+1) đúng

Vậy $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ là biểu thức đúng

f) Gọi P(k) là mệnh đề $\sum_{i=1}^{n} i2^i = 2 + (n-1).2^{n+1}$

Ta có P(1) đúng vì $1.2^1 = 2 + (1-1).2^{1+1} = 0$

Giả sử P(k) đúng, tức là $\sum_{i=1}^{k} i2^i = 2 + (k-1).2^{k+1}$ (1)

Cần chứng minh P(k+1) đúng nghĩa là: $\sum_{i=1}^{k+1} i2^i = 2 + k.2^{k+2}$

=>Cộng 2 vế của (1) cho $(k+1).2^{k+1}$:

$\sum_{i=1}^{k} i2^i + (k+1).2^{k+1} = 2 + (k-1).2^{k+1} + (k+1).2^{k+1} = 2 + (k-1+k+1).2^{k+1}$

¿ $2 + 2k.2^{k+1} = 2 + k.2^{k+2}$

Vậy $\sum_{i=1}^{k+1} i2^i = 2 + k.2^{k+2}$ => P(k+1) đúng

Vậy $\sum_{i=1}^{n} i\,2^{i}=2+(n-1).2^{n+1}$ là biểu thức đúng

g)

Gọi P(k) là mệnh đề $\sum_{i=1}^{n} 2.3^{i-1}=3^{n}-1$

Ta có P(1) đúng vì $2.3^{0}=3^{1}-1=2$

Giả sử P(k) đúng, tức là $\sum_{i=1}^{k} 2.3^{i-1}=3^{k}-1$ (1)

Cần chứng minh P(k+1) đúng nghĩa là: $\sum_{i=1}^{k+1} 2.3^{i-1}=3^{k+1}-1$

=>Cộng 2 vế của (1) cho $2.3^{k}$:

$\sum_{i=1}^{k} 2.3^{i-1}+2.3^{k}=3^{k}-1+2.3^{k}=3.3^{k}-1=3^{k+1}-1$

Vậy $\sum_{i=1}^{k+1} 2.3^{i-1}=3^{k+1}-1$ => P(k+1) đúng

Vậy $\sum_{i=1}^{n} 2.3^{i-1}=3^{n}-1$ là biểu thức đúng

h)

Gọi P(k) là mệnh đề $\sum_{i=1}^{n} i(i+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

Ta có P(1) đúng vì $1.3=\frac{1.2.9}{6}=3$

Giả sử P(k) đúng, tức là $\sum_{i=1}^{k} i.(i+2)=\frac{k(k+1)(2k+7)}{6}$ (1)

Cần chứng minh P(k+1) đúng nghĩa là: $\sum_{i=1}^{k+1} i(i+2)=\frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$

$=\frac{(k^2+3k+2)(2k+9)}{6}=\frac{2k^3+15k^2+31k+18}{6}$

=>Cộng 2 vế của (1) cho $(k+1)(k+3)$

$\sum_{i=1}^{k} i(i+2)+(k+1)(k+3)=\frac{k(k+1)(2k+7)}{6}+\frac{(k+1)(k+3).6}{6}=\frac{k(k+1)(2k+7)+(6k+6)(k+3)}{6}$

$=\frac{(k^2+k)(2k+7)+6k^2+24k+18}{6}$

¿ $\frac{2k^3+9k^2+7k+6k^2+24k+18}{6}=\frac{2k^3+15k^2+31k+18}{6}$

Vậy $\sum_{i=1}^{k+1} i(i+2)=\frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$ => P(k+1) đúng

Vậy $\sum_{i=1}^{n} i(i+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ là biểu thức đúng.

**Câu 12:**

$a¿\sum_{¿i=n}^{n}(2i+1)=n^2$

b) $\sum_{i=1}^{n}2^{i-1}=2^n-1$

c) $\sum_{i=1}^{n}i(3i-1)=n^2(n+1)$

d) $\sum_{i}^{n}❑=1=\frac{1}{i(i+1)}=\frac{n^2}{n(n+1)}$

e) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2$ = $\frac{n(4n^2-1)}{3}$

f) $\sum_{i=1}^{n}i(i+1)=n(n+1)(n+2)$

3

g) $\sum_{i=1}^{n}❑x^i$ = $\frac{x^{n-1}-1}{x-1}$

**Câu 13:**

a) Gọi P(k) là mệnh đề $2^n<n!$

Ta có P(4) đúng vì $2^4<¿4!$ ⇔16<24

Giả sử P(k) đúng $\forall n>3$, tức là $2^k<k!$ (1)

Cần chứng minh P(k+1) đúng nghĩa là: $2^{k+1}<(k+1)!=(k+1).k!$

=>Nhân 2 vế của (1) cho 2 :

$$2^k.2<2!.2<(k+1).k!(vì\, k>3\, nên\, k+1>2)$$

Vậy $2^{k+1}<(k+1)!$ => P(k+1) đúng

Từ P(k) đúng => P(k+1) đúng

Vậy $2^n<n!$ Đúng $\forall n>3$

b) Gọi P(k) là mệnh đề $n^2<2^n$

Ta có P(5) đúng vì $5^2<2^5$ ⇔25<32

Giả sử P(k) đúng $\forall n>4$, tức là $k^2<2^k$ (1)

Cần chứng minh P(k+1) đúng nghĩa là: $(k+1)^2<2^{k+1}$⇔ $k^2+2k+1<2.2^k$

=>Cộng 2 vế của (1) cho 2k+1 :

$$k^2+2k+1<2^k+2k+1<2^k+2^k(vì\, k>4\, nên\, 2^k>2k+1)$$

Vậy $(k+1)^2<2^{k+1}$ => P(k+1) đúng

Từ P(k) đúng => P(k+1) đúng

Vậy $n^2<2^n$ Đúng $\forall n>4$

c) Gọi P(k) là mệnh đề $4n<n^2-7$

Ta có P(6) đúng vì $24<6^2$ -7⇔24<29

Giả sử P(k) đúng $\forall n\geq6$, tức là $4k<k^2-7$ (1)

Cần chứng minh P(k+1) đúng nghĩa là: $4(k+1)<(k+1)^2 \Leftrightarrow 4k+4<k^2+2k-6$
=>Cộng 2 vế của (1) cho 4 :

$$4k+4<k^2-3<k^2+2k-6 (vì\, k\ge 6\, nên\, 2k-6>-3)$$

Vậy $4(k+1)<(k+1)^2$ đúng
Từ P(k) đúng => P(k+1) đúng
Vậy $4n<n^2-7$ Đúng $\forall n\ge 6$

d) Gọi P(k) là mệnh đề $n-2<(n¿¿2-n)/12¿$
Ta có P(11) đúng vì $9<110/12$
Giả sử P(k) đúng $\forall n>10$, tức là $k-2<(k¿¿2-k)/12¿$ (1)
Cần chứng minh P(k+1) đúng nghĩa là:$k-1<((k+1)¿¿2-k-1)/12¿ \Leftrightarrow k^2$
=>công 2 vế của (1) cho 1 :

$$k-1<\frac{k^2-k+12}{12}<\frac{k^2+k}{12}(vì\, k>10\, nên\, k>12-k)$$

Vậy $k-1<((k+1)¿¿2-k-1)/12¿$ => P(k+1) đúng
Từ P(k) đúng => P(k+1) đúng
Vậy $n-2<(n¿¿2-n)/12¿$ Đúng $\forall n>10$

**Câu 14**

1. Kiểm chứng với n = 1, x = 2
X+$\frac{1}{x}$=2+$\frac{1}{2}$=$\frac{5}{2}$ $x^n+\frac{1}{x^n}=2+\frac{1}{2^1}=\frac{5}{2}$ Vậy P(n) đúng với n = 1
2. Giả sử P(n) đúng ta được $x^k+\frac{1}{x^k}$
Ta cần chứng minh P(k+1) đúng
Hay: $x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$ = x*$x^k+\frac{1}{x^k}*\frac{1}{x}$
x * $x^k$ ($làs.nguyên$)
‹ $\frac{1}{x}*\frac{1}{x^k}$ ($làs.nguyên$)
=>$x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$ = x*$x^k+\frac{1}{x^k}*\frac{1}{x}$ đúng
Hay P(k+1) đúng
3. Kết luận nếu X+$\frac{1}{x}$ là 1 số nguyên thì $x^n+\frac{1}{x^n}$ cũng là 1 số nguyên với mọi số nguyên dương n.

**Câu 15**

$A=2^{2n}-1=(2^n)^2-1=(2^n-1)(2^n+1)$

- Gỉa sử Pn là mệnh đề ‘Mọi số nguyên n>1. Tìm chữ số tận cùng của $A=2^{2n}-1$’
- Nếu n=2, $A=2^4-1=15, chữ số tận cùng là 5.$
- Xét $(2^n+1)$
  - Nếu n là số chẵn thì n=2n,
    P(n)= $2^{2n}+1=4.2^n+1.$

- ⇨ Số tận cùng là số lẻ
- o Nếu n là số lẻ thì n=2n+1,
  P(n)= $2^{2^{n+1}}+1=2^{2n+1}+1$
  - ⇨ Số tận cùng là số lẻ.
- Xét $(2^n-1)$
  - o Nếu n là số chẵn thì n=2n
    P(n)= $2^{2^n}-1=4.2^n-1.$
    - ⇨ Số tận cùng là số lẻ
  - o Nếu n là số lẻ thì n=2n+1,
    P(n)= $2^{2^{n+1}}-1=2^{2^{n+1}}-1$
    - ⇨ Số tận cùng là số lẻ

Ta thấy $(2^n+1)$ *và* $(2^n-1)$ *đều luôn là số lẻ. Do đó,* $A=(2^n-1)(2^n+1)$ *sẽ chia hết cho* 2 *và tận cùng là* 0.

Chứng minh:

Dãy số $2^{2^n}$ có chu kỳ chữ số tận cùng là 00 do $2^2$ có chu kì chữ số tận cùng 00.

Do đó $2^{2^n}-1$ *sẽ có chu kỳ chữ số tận cùng là* 99.

Vậy nên chữ số tận cùng của A là 9.

**Câu 16:**

Gọi 3 số tự nhiên liên tiếp là n, n+1, n+2

Tích 3 số tự nhiên liên tiếp là: n(n+1)(n+2)

Với n=2k=> 2k(2k+1)(2k+2) chia hết cho 2

Với n=2k+1=> (2k+1)(2k+2)(2k+3)= (2k+1)*2(k+1)*(2k+3) chia hết cho 3

=>n(n+1)(n+2) chia hết cho 2 (1)

Với n=3k=> 3k(3k+1)(3k+2) chia hết cho 3

Với n=3k+1=> (3k+1)(3k+2)(3k+3)= (3k+1)*3(k+1)*(3k+2) chia hết cho 3

=>n(n+1)(n+2) chia hết cho 3 (2)

Từ (1) và (2)=>n(n+1)(n+2) chia hết cho 6 (đpcm)

**Câu 17**

- Giả sử Pn là mệnh đề ‘ Mọi số nguyên n>1 có thể viết dưới dạng tích của các nguyên tố’.
- Nếu n=2, thì n chính là số nguyên tố và không cần phải viết dưới dạng tích nguyên tố.
- Gỉa sử $P(k)$ *với* $k>1$ *đều được viết dưới dạng tích của các số nguyên tố*
  Thì ta có thể viết k theo thừa số nguyên tố
  $k=p_1+p_2+p_3+\ldots+p_m$ $($*trong đó* $p_1,p_2,p_3,p_m$ *là các số nguyên tố*$)$
- Chứng minh P(k+1) có 2 trường hợp
  - o Nếu $k+1$ là số nguyên tố thì không cần chứng minh nữa vì $k+1$chính là tích của một số nguyên tố. (1)
  - o Nếu $k+1$ không phải là số nguyên tố:
    $k+1=a\times b\ (a,b>1)\Longrightarrow 1<a,b<k+1$
  - ⇨ Theo giả định thì $k+1$có thể viết dưới dạng tích của các nguyên tố. (2)
  - ⇨ Từ (1) và (2) ➔ Mọi số nguyên $n>1$ đều có thể viết dưới dạng tích của các nguyên tố.

**Câu 18:**

Ta đi chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp

Dễ thấy 13=4+4+5; 14=4+5+5 => các bưu phí 13 xu và 14 xu được trả bằng cách dán các con tem 4 xu và 5 xu.
Giả sử bưu phí với giá k xu được trả bằng cách dán các con tem 4 xu và 5 xu.
- Nếu trong cách trả tiền cho k xu, có ít nhất 1 con tem 5 xu, khi đó ta thay 5 xu bởi 2 con tem 4 xu, ta sẽ nhận được cách trả tiền cho k+3 xu thỏa mãn đề bài.
- Nếu trong cách trả tiền cho k xu, có ít nhất 2 con tem 4 xu, khi đó ta thay 2 con tem 4 xu bởi 1 con tem 5 xu, ta sẽ nhận được cách trả tiền cho k+3 xu thỏa mãn đề bài.
Vậy trong mọi trường hợp, ta đều có cách trả tiền cho k+3 xu.
Theo nguyên lý quy nạp, bài toán được chứng minh.

**Câu 19**

Ta có 5 số nguyên tùy ý
Một số chia hết cho 3 có thể dư:0;1;2=> 3 số dư
Theo định lí Dirichle, trong 5 số tự nhiên bất kì khi chia hết cho 3, tồn tại ít nhất 2 số có cùng số dư
TH: Trong 5 số có từ 3 số trở lên có cùng số dư
Gọi 3 số trong các số đó là x,y,z khi chia hết cho 3 thì:x+y+z chia hết cho 3
TH: Trong 5 số đó chỉ có 2 số có cùng số dư
{0;0;1;1;2}, {0;1;1;2;2}, {0;0;1;2;2}
Luôn tồn tại 3 số tự nhiên x,y,z khi chia cho 3 có các số dư lần lượt là 0;1;2 nên x,y,z chia hết cho 3
Vậy trong 5 số tự nhiên bất kì bao giờ cũng tồn tại 3 số có tổng chia hết cho 3

**Câu 20 :**

Ta có 11 số nguyên tùy ý
Một số khi chia cho 20 có thể dư :0,1,…,19 => 20 số dư
Nhưng khi bình phương 1 số rồi chia cho 20 có thể dư:0;1;4;5;9;16;19 =>có 7 số dư
Do đó theo nguyên lý Dirichlet, luôn tồn tại ít nhất 2 số khi bình phương có cùng số dư
=> hiệu bình phương của 2 số này chia hết cho 20 (đpcm)

**Câu 21:**

Giả sử không có 2 người nào có số người quen, trong nhóm bằng nhau .
CM:

-Số người quen mà mỗi người có là 0 -> ( n –1 ).
-Ta có n người và n – 1 số nguyên từ 0 ->( n –1) . Để đại diện cho số người quen của mỗi người.
- Nguyên lý của Pigeo nhole , chia n số nguyên này vào n – 1 khoảng , ít nhất một khoảng phải chứa ít nhất 2 số nguyên.
-Điều này đồng nghĩa với việc có ít nhất 2 người trong nhóm có cùng số người quen , p/c và giả định ban đầu -> Giả định ban đầu sai , trong 1 nhóm có n người tùy ý , luôn tồn tại ít nhất hai người có người quen trong nhóm bằng nhau.