



## 57055195 Cau Hoi on Tap Toan Roi Rac

Toán rời rạc (Trường Đại học Cần Thơ)



Scan to open on Studocu

## CHƯƠNG 1. MỆNH ĐỀ

### A. LÝ THUYẾT

**Câu 1.** Khái niệm mệnh đề và chân trị của mệnh đề? Cho ví dụ ?

**Câu 2.** Các phép toán trên mệnh đề và bảng chân trị của các phép toán đó ? Cho ví dụ ?

**Câu 3.** Định nghĩa dạng mệnh đề và bảng chân trị của dạng mệnh đề? Cho ví dụ ?

**Câu 4.** Phát biểu các luật logic trên dạng mệnh đề ? Cho ví dụ ?

**Câu 5.** Thế nào là 2 dạng mệnh đề tương đương logic ? Cho ví dụ ?

#### Trả lời :

Hai dạng mệnh đề (biểu thức mệnh đề)  $E, F$  được gọi là tương đương logic nếu chúng nhận giá trị như nhau ứng với từng thể hiện. Khi đó ta viết  $E \Leftrightarrow F$ .

**Câu 5.** Nêu 2 phương pháp để chứng minh dạng mệnh đề là hằng đúng hoặc hằng sai ? Cho ví dụ ?

**Câu 6.** Nêu các quy tắc suy diễn? Cho ví dụ ?

Các quy tắc suy diễn		
Tên gọi	Quy tắc	Hằng đúng cơ sở
Luật cộng	$\frac{p}{\therefore p \vee q}$	$p \rightarrow (p \vee q)$
Luật rút gọn	$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
Phương pháp khẳng định	$\frac{p \rightarrow q}{p} \therefore q$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
Phương pháp phủ định	$\frac{p \rightarrow q}{\neg q} \therefore \neg p$	$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$
Tam đoạn luận giả định	$\frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow r} \therefore p \rightarrow r$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
Tam đoạn luận rời	$\frac{p \vee q}{\neg p} \therefore q$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$

## B. BÀI TẬP

**Bài 1.** Trong các phát biểu sau, cho biết phát biểu nào là mệnh đề. Khi là mệnh đề, cho biết chân trị của nó:

- a) 11 là số nguyên chẵn.
- b) 23 là số nguyên tố.
- c)  $x - 2y = 10$ .
- d)  $\log_2 3 > \log_3 2$ .
- e)  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$  và  $4 > 5$ .
- f) nếu  $2 + 3 = 4$  thì Hồ Chí Minh và Trần Hưng Đạo là một người.

**Bài 2.** Đặt P, Q lần lượt là các mệnh đề:

P := “Minh học chăm”, Q := “Minh có kết quả học tập tốt”

R := “Minh học giỏi môn Toán”.

Hãy viết lại các mệnh đề sau dưới dạng hình thức trong đó có sử dụng các phép nối.

- a) Minh học chăm và có kết quả học tập tốt.
- b) Minh học chăm nhưng không có kết quả học tập tốt.
- c) Minh học chăm hay Minh có kết quả học tập tốt.
- d) Nếu Minh học chăm thì Minh có kết quả học tập tốt.
- e) Minh có kết quả học tập tốt khi và chỉ khi Minh học chăm.

**Bài 3.** Lập bảng chân trị cho các dạng mệnh đề sau và cho biết dạng mệnh đề nào là hằng đúng.

- |  |  |
|--|--|
| a) $p \rightarrow (p \vee q)$            | b) $p \rightarrow (p \wedge q)$                        |
| c) $(p \wedge q) \rightarrow p$          | d) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$               |
| e) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ | f) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ |

**Bài 4.** Mệnh đề nào dưới đây là hằng đúng

a)  $p \Rightarrow (p \vee q)$

b)  $p \Rightarrow (p \wedge q)$

c)  $q \Rightarrow (p \rightarrow q)$

d)  $\neg(p \rightarrow q) \Rightarrow p$

e)  $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

f)  $p \wedge (p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$

**Bài 5.** Trong các biến đổi tương đương dưới đây hãy cho biết đã sử dụng quy luật tương đương logic nào?

Biểu thức

Quy luật logic

a) 
$$\begin{aligned} p \rightarrow (p \vee q) &\Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee q \\ &\Leftrightarrow 1 \vee q \\ &\Leftrightarrow 1 \end{aligned}$$

b) 
$$\begin{aligned} [(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q &\Leftrightarrow [(p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)] \rightarrow q \\ &\Leftrightarrow [0 \vee (q \wedge \neg p)] \rightarrow q \\ &\Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \rightarrow q \\ &\Leftrightarrow \neg(q \wedge \neg p) \vee q \\ &\Leftrightarrow (\neg q \vee \neg \neg p) \vee q \\ &\Leftrightarrow (\neg q \vee p) \vee q \\ &\Leftrightarrow (p \vee \neg q) \vee q \\ &\Leftrightarrow p \vee (\neg q \vee q) \\ &\Leftrightarrow p \vee 1 \\ &\Leftrightarrow 1 \end{aligned}$$

**Bài 6.** Hãy kiểm tra các suy luận sau và cho biết đã sử dụng quy tắc suy diễn nào?

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \quad \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg r \\ \hline \neg q \end{array}}{\therefore \neg(p \vee r)} & \text{b)} \quad \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow \neg q \\ \hline r \end{array}}{\therefore \neg p} & \text{c)} \quad \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ \neg q \rightarrow \neg p \\ \hline p \end{array}}{\therefore r} \\
 \text{d)} \quad \frac{\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \rightarrow (r \wedge q) \\ r \rightarrow (s \vee t) \\ \hline \neg s \end{array}}{\therefore t} & \text{e)} \quad \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ p \vee s \\ t \rightarrow q \\ \hline \neg s \end{array}}{\therefore \neg r \rightarrow \neg t} & \text{f)} \quad \frac{\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \hline \neg r \end{array}}{\therefore q}
 \end{array}$$

**Bài 7.** Sử dụng logic mệnh đề để giải bài toán sau :

Trong một phiên tòa xử án 3 bị can có liên quan đến vấn đề tài chánh, trước tòa cả 3 bị cáo đều tuyên thệ khai đúng sự thật và lời khai như sau :

Anh A: Chị B có tội và anh C vô tội

Chị B : Nếu anh A có tội thì anh C cũng có tội

Anh C: Tôi vô tội nhưng một trong hai người kia là có tội

Hãy xét xem ai là người có tội ?

**Bài 8.** Cho các mệnh đề được phát biểu như sau, hãy tìm số lớn nhất các mệnh đề đồng thời là đúng.

- a/ Quang là người khôn khéo
- b/ Quang không gặp may mắn
- c/ Quang gặp may mắn nhưng không khôn khéo
- d/ Nếu Quang là người khôn khéo thì nó không gặp may mắn
- e/ Quang là người khôn khéo khi và chỉ khi nó gặp may mắn
- f/ Hoặc Quang là người khôn khéo, hoặc nó gặp may mắn nhưng không đồng thời cả hai.

**Bài 9.** Cho  $a$  và  $b$  là hai số nguyên dương. Biết rằng, trong 4 mệnh đề sau đây có 3 mệnh đề đúng và 1 mệnh đề sai. Hãy tìm mọi cặp số  $(a, b)$  có thể có.

1/  $a+1$  chia hết cho  $b$

2/  $a = 2b + 5$

3/  $a+b$  chia hết cho 3

4/  $a+7b$  là số nguyên tố

**Bài 10.** Không lập bảng chân trị, sử dụng các công thức tương đương logic, chứng minh rằng các biểu thức mệnh đề sau là hằng đúng

a/  $(P \wedge Q) \rightarrow P$

b/  $P \rightarrow (\neg P \rightarrow P)$

c/  $P \rightarrow ((Q \rightarrow (P \wedge Q)))$

d/  $\neg (P \vee \neg Q) \rightarrow \neg P$

e/  $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

**Bài 11.** Không lập bảng chân trị, sử dụng các công thức tương đương logic, xét xem biểu thức mệnh đề  $G$  có là hệ quả của  $F$  không ?

a/  $F = P \wedge (Q \vee R) \quad G = (P \wedge Q) \vee R$

b/  $F = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \quad G = P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

c/  $F = P \wedge Q \quad G = (\neg P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \neg Q)$

**Bài 12.** Tương tự bài tập 4 và 5, chứng minh các tương đương logic sau đây:

a/  $(P \vee Q) \wedge \neg (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

b/  $\neg (\neg ((P \vee Q) \wedge R) \vee \neg Q) \Leftrightarrow Q \wedge R$

c/  $((P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)) \vee Q \Leftrightarrow P \vee Q$

d/  $\neg (P \vee Q) \vee ((\neg P \wedge Q) \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg (Q \wedge P)$

e/  $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg Q \wedge (R \vee \neg Q)) \Leftrightarrow \neg (Q \vee P)$

$$f/ \quad P \vee (P \wedge (P \vee Q)) \Leftrightarrow P$$

$$g/ \quad P \vee Q \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$$

$$h/ \quad ((\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R)) \Leftrightarrow P \wedge Q$$

$$i/ \quad P \wedge ((\neg Q \rightarrow (R \wedge R)) \vee \neg (Q \vee (R \wedge S) \vee (R \wedge \neg S))) \Leftrightarrow P$$

$$j/ \quad (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee S \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg S \vee R) \Leftrightarrow P \vee (R \wedge (S \vee \neg Q))$$

**Bài 13.** Sau khi nướng 1 chiếc bánh cho 2 đứa cháu trai và 2 đứa cháu gái đến thăm, Dì Nellie lấy bánh ra khỏi lò nướng và để nguội. Sau đó, cô rời khỏi nhà để đến đóng cửa hàng ở gần đó. Lúc trở về thì có ai đó đã ăn 1/4 chiếc bánh và thậm chí còn đặt lại cái đĩa dơ bên phần bánh còn lại. Vì không còn ai đến nhà Dì ngày hôm đó trừ 4 đứa cháu nên Dì biết ngay là 1 trong 4 đứa đã ăn mà chưa được cho phép. Dì Nellie bèn hỏi 4 đứa thì được các câu trả lời như sau:

- Charles : Kelly đã ăn phần bánh
- Dawn : Con không ăn bánh
- Kelly : Tyler ăn bánh
- Tyler : Con không ăn, Kelly nói chơi khi bảo rằng con ăn bánh.

Nếu chỉ 1 trong 4 câu trả lời trên là đúng và chỉ 1 trong 4 đứa cháu là thủ phạm, hãy tìm ra người mà Dì Nellie phải phạt ?

**Bài 14.** Kiểm tra tính tương đương logic của 2 mệnh đề sau :

$$F = P \rightarrow Q$$

$$G = \neg (P \vee Q)$$

**Trả lời :**

**C1.**

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Vậy  $F \Leftrightarrow G$  hay  $P \rightarrow Q = \neg(P \vee \neg Q)$

**C2.**

p	q	r	$q \wedge r$	F	$p \vee q$	$p \vee r$	G	$F \leftrightarrow G$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F	T
F	F	T	F	F	F	T	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

**Bài 15.** a. Nếu biết mệnh đề  $P \rightarrow Q$  là sai, hãy cho biết chân trị của các mệnh đề sau:

$$P \wedge Q \quad \neg P \vee Q \quad Q \rightarrow P$$

b. Cho các biểu thức mệnh đề sau:

$$((P \wedge Q) \wedge R) \rightarrow (S \vee M)$$

Xác định chân trị của các biến mệnh đề P, Q, R, S, M nếu các biểu thức mệnh đề trên là sai.

**Bài 16.** Nếu Q có chân trị là T, hãy xác định chân trị của các biến mệnh đề P, R, S nếu biểu thức mệnh đề sau cũng là đúng

$$(Q \rightarrow ((\neg P \vee R) \wedge \neg S)) \wedge (\neg S \rightarrow (\neg R \wedge Q))$$



## CHƯƠNG 2. LOGIC VỊ TỪ

### A. LÝ THUYẾT

**Câu 1.** Định nghĩa vị từ ? Cho ví dụ?

**Câu 2.** Các phép toán trên vị từ? Cho ví dụ ?

- Phủ định
- Phép nối liền
- Phép nối rời
- Phép kéo theo
- Phép kéo theo hai chiều

**Câu 3.** Lượng từ là gì? Nêu ý nghĩa của lượng từ (với mọi, tồn tại) ? Cho ví dụ?

**Câu 4.** Nêu chức năng và dạng của phép toán phủ định của mệnh đề lượng từ hoá vị từ cho vị từ một biến và vị từ 2 biến? Cho ví dụ ?

### BÀI TẬP

**Câu 1.** Biểu diễn câu: "Nếu một người nào đó là phụ nữ và đã sinh con, thì người đó sẽ là mẹ của một người nào khác" thành một biểu thức logic

**Câu 2.** Cho 2 vị từ  $P(x)$  xác định như sau:  $P(x) = \{x \leq 3\}$

$Q(x) = \{x + 1 \text{ là số lẻ}\}$

Nếu không gian là tập số nguyên, hãy xác định chân trị của những mệnh đề sau:

- |           |                              |                                   |
|-----------|------------------------------|-----------------------------------|
| a) $P(1)$ | b) $Q(1)$                    | c) $\neg P(3)$                    |
| d) $Q(6)$ | e) $P(7) \wedge Q(7)$        | f) $P(3) \wedge Q(4)$             |
| g) $P(4)$ | h) $\neg (P(-4) \vee Q(-3))$ | i) $\neg P(-4) \wedge \neg Q(-3)$ |

**Câu 3.** Các vị từ  $P(x)$ ,  $Q(x)$  được cho như bài tập 1.  $R(x) = \{x > 0\}$ . Nếu không

gian vẫn là tập số nguyên.

a) Xác định chân trị của những mệnh đề sau:

- |  |  |
|--|--|
| 1. $P(3) \vee [Q(3) \vee \neg R(3)]$                   | 2. $\neg P(3) \wedge [Q(3) \vee [Q(3) \vee R(3)]]$       |
| 3. $P(2) \rightarrow [Q(2) \rightarrow R(2)]$          | 4. $[P(2) \Leftrightarrow Q(2)] \rightarrow R(2)$        |
| 5. $P(0) \rightarrow [\neg Q(1) \Leftrightarrow R(1)]$ | 5. $[P(-1) \Leftrightarrow Q(-2) \Leftrightarrow R(-3)]$ |

b) Xác định tất cả các giá trị  $x$  sao cho  $[P(x) \wedge Q(x)] \wedge R(x)$  là một mệnh đề đúng.

c) Tìm 5 giá trị nguyên dương nhỏ nhất của  $x$  sao cho vị từ.

$$P(x) \rightarrow [\neg Q(x) \wedge R(x)] \text{ là mệnh đề đúng.}$$

**Câu 4.** Cho vị từ  $P(x)$  được xác định như sau:  $P(x) = \{x^2 = 2x\}$  trên không gian là tập hợp số nguyên. Xác định giá trị đúng, sai của những mệnh đề:

- |            |                     |                     |
|------------|---------------------|---------------------|
| a) $P(0)$  | b) $P(1)$           | c) $P(2)$           |
| d) $P(-2)$ | e) $\exists x P(x)$ | f) $\forall x P(x)$ |

**Câu 5.** Cho 2 vị từ 2 biến  $P(x,y)$  và  $Q(x,y)$  được xác định như sau:

$$P(x,y) = \{x^2 \geq y\} \quad Q(x,y) = \{x+2 < y\}$$

Nếu không gian là tập số thực, xác định chân trị của các mệnh đề

- |                                |   |
|--------------------------------|---|
| a) $P(2,4)$                    | b) $Q(1,\pi)$                                       |
| c) $P(-3,8) \wedge Q(1,3)$     | d) $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \vee \neg Q(-2,-3)$ |
| e) $P(2,2) \rightarrow Q(1,1)$ | f) $P(1,2) \Leftrightarrow \neg Q(1,2)$             |

**Câu 6.** Trong một chương trình Pascal,  $n$  là một biến nguyên và  $A$  là mảng chứa 20 giá trị nguyên  $A[1], A[2], \dots, A[20]$  được khai báo như sau:

for  $n:=1$  to 20 do

$A[n] := n * n - n;$

Hãy viết dạng kí hiệu của những mệnh đề sau: nếu xem  $A[n]$  như vị từ một biến  $n$  trên không gian các số nguyên từ 1 đến 20:

a) Mọi phần tử của mảng đều không âm.



c)  $\forall x [Q(x) \rightarrow S(x)]$

d)  $\forall x [R(x) \vee S(x)]$

e)  $\forall x [R(x) \rightarrow P(x)]$

**Câu 9.** Cho 3 vị từ  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$  được xác định như sau:

$P(x) = \{x^2 - 8x + 15 = 0\}$

$Q(x) = \{x \text{ là số lẻ}\}$   $R(x) = \{x > 0\}$

Trên tập không gian là tất cả các số nguyên, hãy xác định giá trị đúng, sai của những mệnh đề sau. Cho dẫn chứng hoặc giải thích cụ thể:

a)  $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$

b)  $\forall x [Q(x) \rightarrow P(x)]$

c)  $\exists x [P(x) \rightarrow Q(x)]$

d)  $\exists x [Q(x) \rightarrow P(x)]$

e)  $\exists x [R(x) \wedge P(x)]$

f)  $\forall x [P(x) \rightarrow R(x)]$

g)  $\exists x [R(x) \rightarrow P(x)]$

h)  $\forall x [\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)]$

i)  $\exists x [P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))]$

j)  $\forall x [(P(x) \vee Q(x) \rightarrow R(x))]$

**Câu 10.** Cho 3 vị từ  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$  như sau:  $P(x) = \{x^2 - 7x + 10 = 0\}$

$Q(x) = \{x^2 - 2x - 3 = 0\}$

$R(x) = \{x < 0\}$

a) Xác định giá trị đúng, sai của những mệnh đề sau, cho dẫn chứng hoặc giải thích cụ thể, nếu không gian là tập số nguyên.

1.  $\forall x [P(x) \rightarrow \neg R(x)]$

2.  $[Q(x) \rightarrow R(x)]$

3.  $\exists x [Q(x) \rightarrow R(x)]$

3.  $\exists x [P(x) \rightarrow R(x)]$

b) Câu hỏi như phần a) nhưng không gian là tập  $\mathbb{Z}'$

c) Câu hỏi như phần a) nhưng không gian chỉ gồm 2 số nguyên 2, 5.

**Câu 11.** Cho  $P(x) = \{x \text{ học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần}\}$

Không gian là tập hợp các sinh viên. Hãy diễn đạt các lượng từ sau thành câu thông thường.

a)  $\exists x P(x)$

b)  $\forall x P(x)$

c)  $\exists x \neg P(x)$

d)  $\forall x \neg P(x)$

**Câu 12.** Cho vị từ  $P(x,y) = \{x \text{ đã học môn } y\}$  với không gian của  $x$  là tập hợp tất

cả các sinh viên lớp bạn và không gian của  $y$  là tập hợp tất cả các môn tin học của học kỳ mà bạn đang học.

Hãy diễn đạt các lượng từ sau thành các câu thông thường:

- |                                 |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $\exists x \exists y P(x,y)$ | b) $\exists x \forall y P(x,y)$ | c) $\forall x \exists y P(x,y)$ |
| d) $\exists y \forall x P(x,y)$ | e) $\forall y \exists x P(x,y)$ | f) $\forall x \forall y P(x,y)$ |

**Câu 13.** Cho vị từ:

$P(x) = \{x \text{ nói được tiếng anh}\}$

$Q(x) = \{x \text{ biết ngôn ngữ } C^{++}\}$

Cho không gian là tập hợp các sinh viên lớp bạn. Hãy diễn đạt các câu sau bằng cách dùng  $P(x)$ ,  $Q(x)$ , các lượng từ và các phép toán logic.

- Có một sinh viên ở lớp bạn nói được tiếng Anh và biết  $C^{++}$
- Có một sinh viên ở lớp bạn nói được tiếng Anh nhưng không biết  $C^{++}$
- Mọi sinh viên ở lớp bạn đều nói được tiếng Anh hoặc biết  $C^{++}$
- Không có một sinh viên nào ở lớp bạn nói được tiếng Anh hoặc biết  $C^{++}$

**Câu 14.** Cho tân từ:

$P(x) = \{x \text{ là sinh viên}\}$   $Q(x)$

$= \{x \text{ là kẻ ngu dốt}\}$   $R(x) =$

$\{x \text{ là kẻ vô tích sự}\}$

Bằng cách dùng các lượng từ, các phép toán logic và với các vị từ  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$ . Hãy diễn đạt các câu sau với không gian là toàn thể sinh viên:

- Không có sinh viên nào là kẻ ngu dốt
- Mọi kẻ ngu dốt đều là vô tích sự.
- Không có sinh viên nào là vô tích sự.

## CHƯƠNG 3. TẬP HỢP VÀ PHÉP ĐẾM

### A. LÝ THUYẾT

*Câu 1.* Trình bày nguyên tắc cộng ? Cho ví dụ?

*Câu 2.* Trình bày nguyên tắc nhân? Cho ví dụ ?

*Câu 3.* Trình bày nguyên lý bù trừ ? Cho ví dụ?

*Câu 4.* Trình bày nguyên lý Dirichlet tổng quát? Cho ví dụ ?

### BÀI TẬP

**Bài 1.** Trong tổng số 2504 sinh viên của một khoa công nghệ thông tin, có 1876 theo học môn ngôn ngữ lập trình Pascal, 999 học môn ngôn ngữ Fortran và 345 học ngôn ngữ C. Ngoài ra còn biết 876 sinh viên học cả Pascal và Fortran, 232 học cả Fortran và C, 290 học cả Pascal và C. Nếu 189 sinh viên học cả 3 môn Pascal, Fortran và C thì trong trường hợp đó có bao nhiêu sinh viên không học môn nào trong 3 môn ngôn ngữ lập trình kể trên.

**Bài 2.** Một cuộc họp gồm 12 người tham dự để bàn về 3 vấn đề. Có 8 người phát biểu về vấn đề I, 5 người phát biểu về vấn đề II và 7 người phát biểu về vấn đề III. Ngoài ra, có đúng 1 người không phát biểu vấn đề nào. Hỏi nhiều lắm là có bao nhiêu người phát biểu cả 3 vấn đề.

**Bài 3.** Chỉ ra rằng có ít nhất 4 người trong số 25 triệu người có cùng tên họ viết tắt bằng 3 chữ cái sinh cùng ngày trong năm (không nhất thiết trong cùng một năm).

**Bài 4.** Một tay đô vật tham gia thi đấu giành chức vô địch trong 75 giờ. Mỗi giờ anh ta có ít nhất một trận đấu, nhưng toàn bộ anh ta có không quá 125 trận. Chứng tỏ rằng có những giờ liên tiếp anh ta đã đấu đúng 24 trận.

**Bài 5.** Cho  $n$  là số nguyên dương bất kỳ. Chứng minh rằng luôn lấy ra được từ  $n$  số đã cho một số số hạng thích hợp sao cho tổng của chúng chia hết cho  $n$ .

**Bài 6.** Trong một cuộc lấy ý kiến về 7 vấn đề, người được hỏi ghi vào một phiếu trả lời sẵn bằng cách để nguyên hoặc phủ định các câu trả lời tương ứng với 7 vấn đề đã nêu.

Chứng minh rằng với 1153 người được hỏi luôn tìm được 10 người trả lời giống hệt nhau.

**Bài 7.** Có 17 nhà bác học viết thư cho nhau trao đổi 3 vấn đề. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 người cùng trao đổi một vấn đề.

**Bài 8.** Trong kỳ thi kết thúc học phần toán học rời rạc có 10 câu hỏi. Có bao nhiêu cách gán điểm cho các câu hỏi nếu tổng số điểm bằng 100 và mỗi câu ít nhất được 5 điểm.

HAI PHONG UNIVERSITY

## CHƯƠNG 4. ĐỒ THỊ

### A. LÝ THUYẾT

**Câu 1.** Trình bày các phương pháp biểu diễn đồ thị trong máy tính điện tử ? Cho ví dụ ?

**Câu 2.** Định nghĩa đơn đồ thị vô hướng? Tính chất của đơn đồ thị vô hướng? Cho ví dụ ?

**Câu 3.** Định nghĩa đa đồ thị vô hướng? Tính chất của đa đồ thị vô hướng? Cho ví dụ ?

**Câu 4.** Định nghĩa đơn đồ thị có hướng? Tính chất của đơn đồ thị có hướng? Cho ví dụ ?

**Câu 5.** Định nghĩa đa đồ thị có hướng? Tính chất của đa đồ thị có hướng? Cho ví dụ ?

**Câu 6.** Phát biểu định lý bắt tay cho đồ thị có hướng? Cho ví dụ ?

**Câu 7.** Định nghĩa đồ thị con cảm sinh? Cho ví dụ ?

**Câu 8.** Định nghĩa đồ thị con cảm sinh cạnh? Cho ví dụ ?

**Câu 9.** Định nghĩa đồ thị đẳng cấu? Điều kiện cần để 2 đồ thị đẳng cấu? Cho ví dụ ?

**Câu 10.** Trình bày thuật toán kiểm tra tính liên thông của đồ thị? Cho ví dụ ?

**Câu 11.** Định nghĩa đồ thị Euler ? Đồ thị nửa Euler? Dấu hiệu nhận biết đường Euler và chu trình Euler? Cho ví dụ ?

**Câu 12.** Định nghĩa đồ thị Hamilton ? Đồ thị nửa Hamilton ? Dấu hiệu nhận biết đường Hamilton và chu trình Hamilton? Cho ví dụ ?

**Câu 13.** Định nghĩa đồ thị đối ngẫu? Cho ví dụ ?

**Câu 14.** Trình bày thuật toán tham lam trong bài toán tô màu đồ thị? Cho ví dụ ?

**Câu 15.** Định nghĩa đồ thị phẳng? Cho ví dụ ?

### BÀI TẬP

**Bài 1.** Chứng minh mệnh đề sau : Mọi đơn đồ thị  $n$  đỉnh ( $n \geq 2$ ) có tổng bậc của hai đỉnh tùy ý không nhỏ hơn  $n$  đều là đồ thị liên thông.

**Bài 2.** Chứng minh mệnh đề sau : Nếu một đồ thị có đúng hai đỉnh bậc lẻ thì hai đỉnh này phải liên thông, tức là có một đường đi nối chúng.



**Bài 3.** Cho  $G$  là đồ thị có  $v$  đỉnh và  $e$  cạnh, còn  $M, m$  tương ứng là bậc lớn nhất và nhỏ nhất của các đỉnh của  $G$ . Chứng tỏ rằng

$$m \leq \frac{2e}{v} \leq M.$$

**Bài 4.** Chứng minh rằng nếu  $G$  là đơn đồ thị phân đôi có  $v$  đỉnh và  $e$  cạnh, khi đó  $e \leq v^2/4$ .

**Bài 5.** Trong một phương án mạng kiểu lưới kết nối  $n=m^2$  bộ xử lý song song, bộ xử lý  $P(i,j)$  được kết nối với 4 bộ xử lý  $(P(i\pm 1) \bmod m, j)$ ,  $P(i, (j\pm 1) \bmod m)$ , sao cho các kết nối bao xung quanh các cạnh của lưới. Hãy vẽ mạng kiểu lưới có 16 bộ xử lý theo phương án này.

**Bài 6.** Hãy vẽ các đồ thị vô hướng được biểu diễn bởi ma trận liên kề sau:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Bài 7.** Nêu ý nghĩa của tổng các phần tử trên một hàng (t.ư. cột) của một ma trận liên kề đối với một đồ thị vô hướng? Đối với đồ thị có hướng?

**Bài 8.** Tìm ma trận liên kề cho các đồ thị sau:

$$\text{a) } K_n, \quad \text{b) } C_n, \quad \text{c) } W_n, \quad \text{d) } K_{m,n}, \quad \text{e) } Q_n.$$

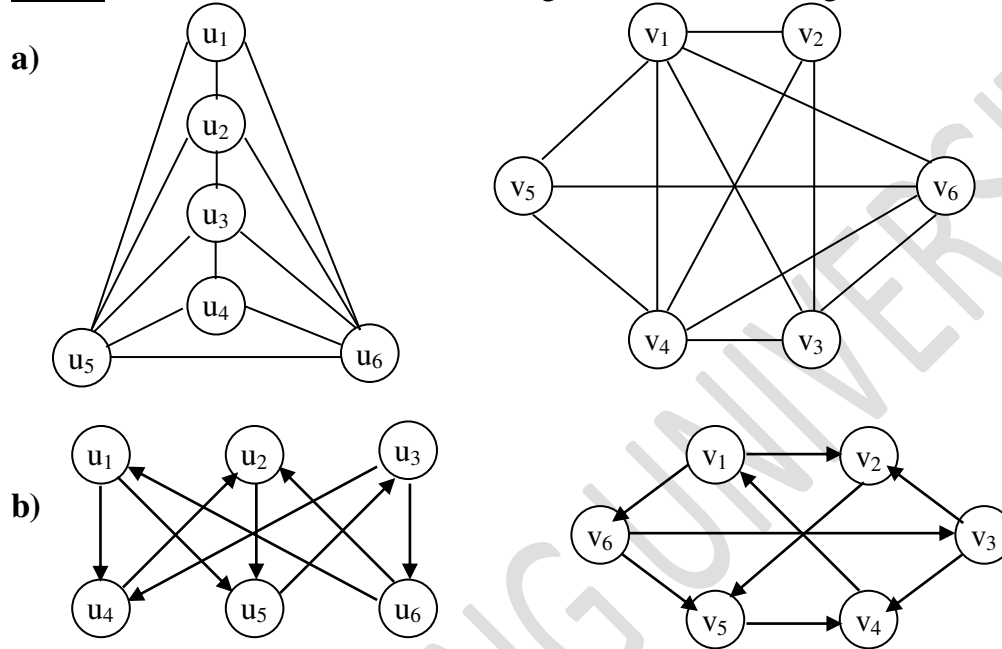
**Bài 9.** Hai đơn đồ thị với ma trận liên kề sau đây có là đẳng cấu không?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Bài 10.** Hai đơn đồ thị với ma trận liên kề sau đây có là đẳng cấu không?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Bài 11.** Các đồ thị  $G$  và  $G'$  sau có đẳng cấu với nhau không?



**Bài 12.** Cho  $V = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  và  $E$  là tập hợp các cặp phần tử  $(u, v)$  của  $V$  sao cho  $u < v$  và  $u, v$  nguyên tố cùng nhau. Hãy vẽ đồ thị có hướng  $G = (V, E)$ . Tìm số các đường đi phân biệt độ dài 3 từ đỉnh 2 tới đỉnh 8.

**Bài 13.** Một cuộc họp có ít nhất ba đại biểu đến dự. Mỗi người quen ít nhất hai đại biểu khác. Chứng minh rằng có thể xếp được một số đại biểu ngồi xung quanh một bàn tròn, để mỗi người ngồi giữa hai người mà đại biểu đó quen.

**Bài 14.** Một lớp học có ít nhất 4 sinh viên. Mỗi sinh viên thân với ít nhất 3 sinh viên khác. Chứng minh rằng có thể xếp một số chẵn sinh viên ngồi quanh một cái bàn tròn để mỗi sinh viên ngồi giữa hai sinh viên mà họ thân.

**Bài 15.** Trong một cuộc họp có đúng hai đại biểu không quen nhau và mỗi đại biểu này có một số lẻ người quen đến dự. Chứng minh rằng luôn luôn có thể xếp một số đại biểu ngồi chen giữa hai đại biểu nói trên, để mỗi người ngồi giữa hai người mà anh ta quen.

**Bài 16.** Một thành phố có  $n$  ( $n \geq 2$ ) nút giao thông và hai nút giao thông bất kỳ đều có số đầu mỗi đường ngầm tới một trong các nút giao thông này đều không nhỏ hơn  $n$ . Chứng

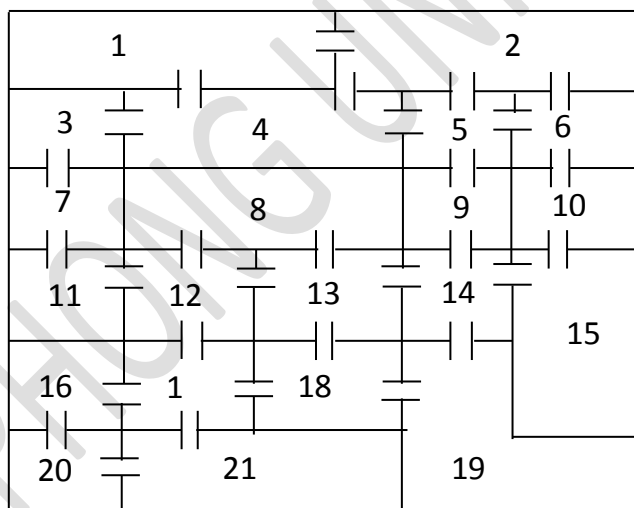
minh rằng từ một nút giao thông tùy ý ta có thể đi đến một nút giao thông bất kỳ khác bằng đường ngầm.

**Bài 17.** Trong một cuộc họp có 15 người mỗi ngày ngồi với nhau quanh một bàn tròn một lần. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho mỗi lần ngồi họp, mỗi người có hai người bên cạnh là bạn mới, và sắp xếp như thế nào ?

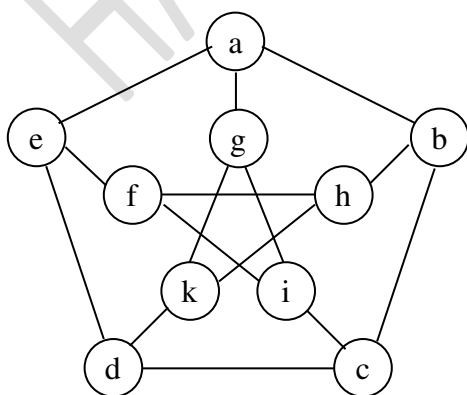
**Bài 18.** Hiệu trưởng mời  $2n$  ( $n \geq 2$ ) sinh viên giỏi đến dự tiệc. Mỗi sinh viên giỏi quen ít nhất  $n$  sinh viên giỏi khác đến dự tiệc. Chứng minh rằng luôn luôn có thể xếp tất cả các sinh viên giỏi ngồi xung quanh một bàn tròn, để mỗi người ngồi giữa hai người mà sinh viên đó quen.

**Bài 19.** Một ông vua đã xây dựng một lâu đài để cất báu vật. Người ta tìm thấy sơ đồ của lâu đài (hình sau) với lời dặn: muốn tìm báu vật, chỉ cần từ một trong các phòng bên ngoài cùng (số 1, 2, 6, 10, ...), đi qua tất cả các cửa phòng, mỗi cửa chỉ một lần; báu vật được giấu sau cửa cuối cùng.

Hãy tìm nơi giấu báu vật



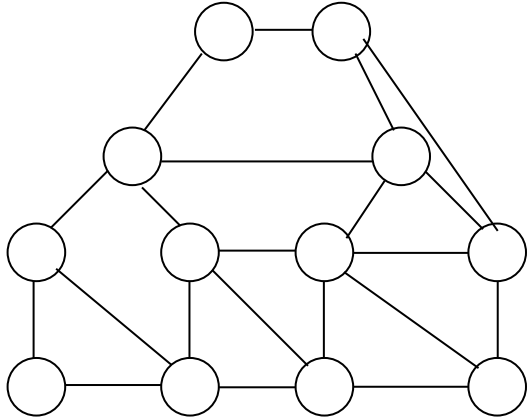
**Bài 20.** Đồ thị cho trong hình sau gọi là đồ thị Peterson P.



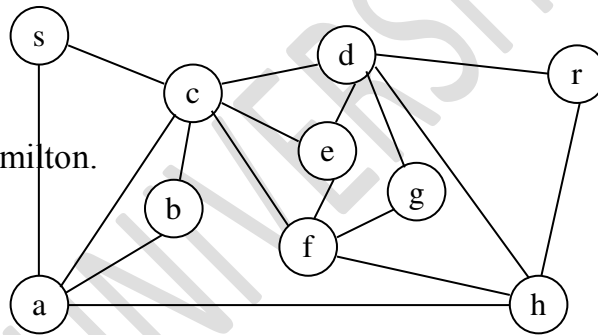
a) Tìm một đường đi Hamilton trong P.

b) Chứng minh rằng  $P \setminus \{v\}$ , với  $v$  là một đỉnh bất kỳ của P, là một đồ thị Hamilton.

**Bài 20.** Giải bài toán người phát thư Trung Hoa với đồ thị cho trong hình sau:



**Bài 21.** Chứng minh rằng đồ thị  $G$  cho trong hình sau có đường đi Hamilton (từ  $s$  đến  $r$ ) nhưng không có chu trình Hamilton.



**Bài 22.** Cho thí dụ về:

- 1) Đồ thị có một chu trình vừa là chu trình Euler vừa là chu trình Hamilton;
- 2) Đồ thị có một chu trình Euler và một chu trình Hamilton, nhưng hai chu trình đó không trùng nhau;

- 3) Đồ thị có 6 đỉnh, là đồ thị Hamilton, nhưng không phải là đồ thị Euler;  
4) Đồ thị có 6 đỉnh, là đồ thị Euler, nhưng không phải là đồ thị Hamilton.

**Bài 23.** Chứng minh rằng con mã không thể đi qua tất cả các ô của một bàn cờ có  $4 \times 4$  hoặc  $5 \times 5$  ô vuông, mỗi ô chỉ một lần, rồi trở về chỗ cũ.

## CHƯƠNG 5. CÂY

### A. LÝ THUYẾT

**Câu 1.** Định nghĩa cây và các tính chất của cây ? Cho ví dụ?

**Câu 2.** Định nghĩa cây khung của đồ thị? Cho ví dụ ?

**Câu 3.** Trình bày thuật toán Kruskal cho bài toán tìm cây khung nhỏ nhất? Cho ví dụ minh họa?

**Câu 4.** Trình bày thuật toán Prim cho bài toán tìm cây khung nhỏ nhất? Cho ví dụ minh họa?

**Câu 5.** Định nghĩa cây nhị phân? Cho ví dụ minh họa?

**Câu 6.** Định nghĩa cây m- phân? Cho ví dụ minh họa?

### BÀI TẬP

**Bài 1.** Vẽ tất cả các cây (không đẳng cấu) có:

a) 4 đỉnh

b) 5 đỉnh

c) 6 đỉnh

**Bài 2.** Một cây có  $n_2$  đỉnh bậc 2,  $n_3$  đỉnh bậc 3, ...,  $n_k$  đỉnh bậc k. Hỏi có bao nhiêu đỉnh bậc 1?

**Bài 3.** Tìm số tối đa các đỉnh của một cây m-phân có chiều cao h.

**Bài 4.** Có thể tìm được một cây có 8 đỉnh và thỏa điều kiện dưới đây hay không? Nếu có, vẽ cây đó ra, nếu không, giải thích tại sao:

a) Mọi đỉnh đều có bậc 1.

b) Mọi đỉnh đều có bậc 2.

c) Có 6 đỉnh bậc 2 và 2 đỉnh bậc 1.

d) Có đỉnh bậc 7 và 7 đỉnh bậc 1.

**Bài 5.** Chứng minh hoặc bác bỏ các mệnh đề sau đây.

a) Trong một cây, đỉnh nào cũng là đỉnh cắt.

b) Một cây có số đỉnh không nhỏ hơn 3 thì có nhiều đỉnh cắt hơn là cầu.

**Bài 6.** Có bốn đội bóng đá A, B, C, D lọt vào vòng bán kết trong giải các đội mạnh khu vực. Có mấy dự đoán xếp hạng như sau:

a) Đội B vô địch, đội D nhì.

b) Đội B nhì, đội C ba.

c) Đội A nhì, đội C tư.

Biết rằng mỗi dự đoán trên đúng về một đội. Hãy cho biết kết quả xếp hạng của các đội.

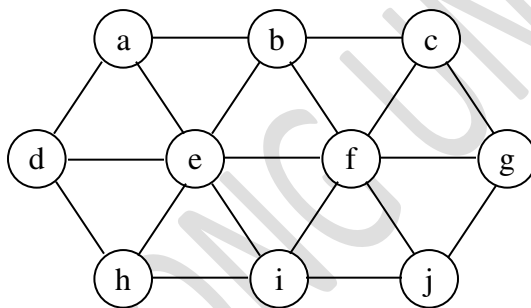
**Bài 7.** Cây *Fibonacci* có gốc  $T_n$  được định nghĩa bằng hồi quy như sau.  $T_1$  và  $T_2$  đều là cây có gốc chỉ gồm một đỉnh và với  $n=3,4, \dots$  cây có gốc  $T_n$  được xây dựng từ gốc với  $T_{n-1}$  như là cây con bên trái và  $T_{n-2}$  như là cây con bên phải.

a) Hãy vẽ 7 cây *Fibonacci* có gốc đầu tiên.

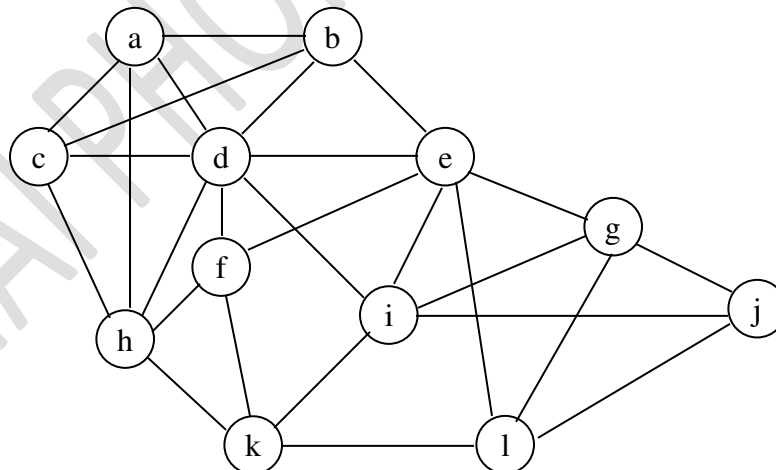
b) Cây *Fibonacci*  $T_n$  có bao nhiêu đỉnh, lá và bao nhiêu đỉnh trong. Chiều cao của nó bằng bao nhiêu?

**Bài 8.** Hãy tìm cây khung của đồ thị sau bằng cách xóa đi các cạnh trong các chu trình đơn.

a)

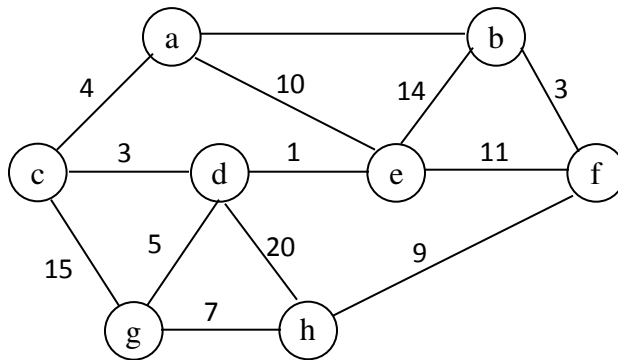


b)



**Bài 9.** Đồ thị  $K_n$  với  $n=3, 4, 5$  có bao nhiêu cây khung không đẳng cấu?

**Bài 10.** Tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị sau theo thuật toán Kruskal và Prim.



**Bài 11.** Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán Prim của đồ thị gồm các đỉnh A, B, C, D, E, F, H, I được cho bởi ma trận trọng số sau.

		B	C	D	E	F	G	H
A								
A	$\infty$	16	15	23	19	18	32	20
B	16	$\infty$	13	33	24	20	19	11
C	15	13	$\infty$	13	29	21	20	19
D	23	33	13	$\infty$	22	30	21	12
E	19	24	29	22	$\infty$	34	23	21
F	18	20	21	30	34	$\infty$	17	14
G	32	19	20	21	23	17	$\infty$	18
H	20	11	19	12	21	14	18	$\infty$

Yêu cầu viết các kết quả trung gian trong từng bước lặp, kết quả cuối cùng cần đưa ra tập cạnh và độ dài của cây khung nhỏ nhất.

**Bài 12.** Duyệt các cây sau đây lần lượt bằng các thuật toán tiền thứ tự, trung thứ tự và hậu thứ tự.

