



01-Menh de va vi tu - Lý thuyết mệnh đề và vị từ môn toán rời rạc

Toán rời rạc (Trường Đại học Cần Thơ)



Scan to open on Studocu

CHƯƠNG I

MỆNH ĐỀ VÀ VỊ TỪ

A- MỆNH ĐỀ

I- Định nghĩa mệnh đề

Mỗi câu phát biểu là đúng hay là sai được gọi là một mệnh đề.

Ví dụ 1: Các câu xác định dưới đây là một mệnh đề

- . $2 + 3 = 5$
- . $3 * 4 = 10$
- . Tam giác đều có 3 cạnh bằng nhau
- . Washington D.C. là thủ đô của Hoa Kỳ
- . Toronto là thủ đô của Canada

Câu xác định " $2 + 3 = 5$ ", "Tam giác đều có 3 cạnh bằng nhau" và "Washington D.C. là thủ đô của Hoa Kỳ" là các mệnh đề đúng. Còn các câu xác định " $3 * 4 = 10$ " và "Toronto là thủ đô của Canada" là các mệnh đề sai.

Như vậy, một mệnh đề có thể là mệnh đề đúng hoặc mệnh đề sai. Hay nói cách khác, một mệnh đề chỉ có thể lựa chọn 1 trong 2 giá trị là đúng hoặc là sai.

Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

Ví dụ 2: Xét các câu phát biểu sau

- . Hôm nay là thứ mấy ?
- . Một số thực âm không phải là số chính phương
- . Hãy đọc kỹ đoạn này
- . $x + 1 = 2$
- . $x + y = z$

Câu "Hôm nay là thứ mấy?" không là mệnh đề vì nó chỉ là một câu hỏi không có giá trị đúng, sai. Câu "Một số thực âm không phải là số chính phương" có chân trị là đúng nếu xét trên tập hợp số thực R nhưng lại có chân trị sai khi xét trên tập hợp số phức. Câu " $x+1=2$ " và câu " $x+y=z$ " không phải là mệnh đề vì chúng chẳng đúng cũng chẳng sai bởi các biến trong những câu đó chưa được gán cho một giá trị cụ thể nào.

Giá trị đúng, sai của một mệnh đề được gọi là chân trị của mệnh đề đó. Chân trị của mệnh đề đúng ký hiệu là T (true), chân trị của mệnh đề sai ký hiệu là F (false).

Bảng chân trị của mệnh đề bao gồm các trường hợp đúng, sai có thể xảy ra của mệnh đề đó.

Mục đích của các hoạt động khoa học là phân biệt các mệnh đề để xác định chân trị của nó. Sự xác định chân trị này dựa vào thực nghiệm và lý luận. Lý luận ở đây là xác định chân trị của mệnh đề bằng cách kết hợp các mệnh đề mà ta đã biết chân trị. Các luật lệ chế ngự cách kết hợp mang tính chính xác của phép toán đại số. Vì thế, chúng ta cần nói đến "Đại số mệnh đề".

II- Các phép tính mệnh đề

Trong phép tính mệnh đề, người ta không quan tâm đến ý nghĩa của câu phát biểu mà chỉ chú ý đến chân trị của các mệnh đề. Do đó, khi thực hiện các phép toán mệnh đề thông thường người ta không ghi rõ các câu phát biểu mà chỉ ghi ký hiệu. Các chữ cái sẽ được dùng để ký hiệu các mệnh đề. Những chữ cái thường dùng là P, Q, R,.....

Mệnh đề chỉ có một giá trị đơn (luôn đúng hoặc sai) được gọi là mệnh đề nguyên tử (atomic proposition). Các mệnh đề không phải là mệnh đề nguyên tử được gọi là mệnh đề phức hợp (compound propositions). Thông thường, tất cả mệnh đề phức hợp là mệnh đề liên kết (có chứa phép tính mệnh đề).

Các phép tính mệnh đề được sử dụng nhằm mục đích kết nối các mệnh đề lại với nhau tạo ra một mệnh đề mới. Các phép toán mệnh đề được trình bày trong chương này bao gồm : phép phủ định, phép hội, phép tuyển, phép XOR, phép kéo theo, phép tương đương.

Phép phủ định (NEGATION)

Cho P là một mệnh đề, câu "không phải là P" là một mệnh đề khác được gọi là phủ định của mệnh đề P. Ký hiệu : \bar{P}).

Ví dụ : $P = "2 > 0"$

$\bar{P} = "2 \leq 0"$

Bảng chân trị (truth table)

P	\bar{P}
T	F
F	T

Qui tắc: Nếu P có giá trị là T thì phủ định P có giá trị là F.

Phép hội (CONJUNCTION)

Cho hai mệnh đề P, Q. Câu xác định "P và Q" là một mệnh đề mới được gọi là hội của 2 mệnh đề P và Q. Ký hiệu $P \wedge Q$.

Ví dụ : Cho 2 mệnh đề P và Q như sau

$P = "2 > 0"$ là mệnh đề đúng

$Q = "2 = 0"$ là mệnh đề sai

$P \wedge Q = "2 > 0 \text{ và } 2 = 0"$ là mệnh đề sai.

Bảng chân trị

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Qui tắc : Hội của 2 mệnh đề **chỉ đúng** khi cả hai mệnh đề là đúng. Các trường hợp còn lại là sai.

Phép tuyển (DISJUNCTION)

Cho hai mệnh đề P, Q. Câu xác định "P hay (hoặc) Q" là một mệnh đề mới được gọi là tuyển của 2 mệnh đề P và Q. Kí hiệu $P \vee Q$.

Ví dụ : Cho 2 mệnh đề P và Q như sau

$P = "2 > 0"$ là mệnh đề đúng

$Q = "2 = 0"$ là mệnh đề sai

$P \vee Q = "2 \geq 0"$ là mệnh đề đúng.

Bảng chân trị

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Qui tắc : Tuyển của 2 mệnh đề **chỉ sai** khi cả hai mệnh đề là sai. Các trường hợp còn lại là đúng.

Phép XOR

Cho hai mệnh đề P và Q. Câu xác định "loại trừ P hoặc loại trừ Q", nghĩa là "hoặc là P đúng hoặc Q đúng nhưng không đồng thời cả hai là đúng" là một mệnh đề mới được gọi là P xor Q. Kí hiệu $P \oplus Q$.

Bảng chân trị

P	Q	$P \oplus Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Qui tắc : XOR của 2 mệnh đề **chỉ sai** khi cả hai mệnh đề có cùng chân trị. Các trường hợp còn lại là đúng.

Phép toán trên bit

Các máy tính dùng các bit để biểu diễn thông tin. Một bit có 2 giá trị khả dĩ là 0 và 1. Bit cũng có thể được dùng để biểu diễn chân trị. Thường người ta dùng bit 1 để biểu diễn chân trị đúng và bit 0 để biểu diễn chân trị sai. Các phép toán trên bit trong máy tính là các

phép toán logic. Thông tin thường được biểu diễn bằng cách dùng các chuỗi bit. Ta có định nghĩa chuỗi bit như sau:

Định nghĩa : Một chuỗi bit (hoặc chuỗi nhị phân) là dãy có một hoặc nhiều bit. Chiều dài của chuỗi là số các bit trong chuỗi đó.

Ví dụ : 101011000 là một chuỗi bit có chiều dài là 9

Có thể mở rộng các phép toán trên bit tới các chuỗi bit. Người ta định nghĩa các OR bit, AND bit và XOR bit đối với 2 chuỗi bit có cùng chiều dài là các chuỗi có các bit của chúng là calc OR, AND, XOR của các bit tương ứng trong 2 chuỗi tương ứng. Chúng ta cũng dùng các kí hiệu \wedge , \vee , \oplus để biểu diễn các phép tính OR bit, AND và XOR tương ứng.

Ví dụ : Tìm OR bit, AND bit và XOR bit đối với 2 chuỗi sau đây (mỗi chuỗi được tách thành 2 khối, mỗi khối có 5 bit cho dễ đọc)

01101	10110	
11000	11101	
<hr/>		
11101	11111	OR bit
01000	10100	AND bit
10101	01011	XOR bit

Phép kéo theo (IMPLICATION)

Cho P và Q là hai mệnh đề. Câu "Nếu P thì Q" là một mệnh đề mới được gọi là mệnh đề kéo theo của hai mệnh đề P, Q. Kí hiệu $P \rightarrow Q$. P được gọi là giả thiết và Q được gọi là kết luận.

Ví dụ : Cho hai mệnh đề P và Q như sau

P = " tam giác T là đều "

Q = " tam giác T có một góc bằng 60° "

Để xét chân trị của mệnh đề $P \rightarrow Q$, ta có nhận xét sau :

- Nếu P đúng, nghĩa là tam giác T là đều thì rõ ràng rằng $P \rightarrow Q$ là đúng.
- Nếu P sai, nghĩa là tam giác T không đều và cũng không là cân thì dù Q là đúng hay sai thì mệnh đề $P \rightarrow Q$ vẫn đúng.

Sau đây là bảng chân trị của ví dụ và cũng là bảng chân trị của mệnh đề $P \rightarrow Q$.

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Qui tắc : mệnh đề kéo theo **chỉ sai** khi giả thiết đúng và kết luận sai. Các trường hợp khác là đúng.

Từ mệnh đề $P \rightarrow Q$, chúng ta có thể tạo ra các mệnh đề kéo theo khác như là mệnh đề $Q \rightarrow P$ và $\bar{Q} \rightarrow \bar{P}$ được gọi là mệnh đề đảo và mệnh đề phản đảo của mệnh đề $P \rightarrow Q$.

Ví dụ : Tìm mệnh đề đảo và phản đảo của mệnh đề sau

" Nếu tôi có nhiều tiền thì tôi mua xe hơi"

Mệnh đề đảo là :

" Nếu tôi mua xe hơi thì tôi có nhiều tiền"

Mệnh đề phản đảo là :

" Nếu tôi không mua xe hơi thì tôi không có nhiều tiền"

Phép tương đương (BICONDITIONAL)

Cho P và Q là hai mệnh đề. Câu "P nếu và chỉ nếu Q" là một mệnh đề mới được gọi là P tương đương Q. Kí hiệu $P \leftrightarrow Q$.

Qui tắc: Mệnh đề tương đương là đúng khi P và Q có cùng chân trị.

$$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

Đọc là : P nếu và chỉ nếu Q

P là cần và đủ đối với Q

Nếu P thì Q và ngược lại

Bảng chân trị

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

III- Biểu thức mệnh đề (LOGICAL CONNECTIVES)

Cho P, Q, R,... là các mệnh đề. Nếu các mệnh đề này liên kết với nhau bằng các phép toán thì ta được một biểu thức mệnh đề.

Chú ý :

. Một mệnh đề cũng là một biểu thức mệnh đề

. Nếu P là một biểu thức mệnh đề thì \bar{P} cũng là biểu thức mệnh đề

Chân trị của biểu thức mệnh đề là kết quả nhận được từ sự kết hợp giữa các phép toán và chân trị của các biến mệnh đề.

Ví dụ :

Tìm chân trị của biểu thức mệnh đề $\bar{P} \vee (Q \wedge R)$

P	\bar{P}	Q	R	$Q \wedge R$	$\bar{P} \vee (Q \wedge R)$
T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
T	F	F	F	F	F

F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	T	F	T	F	T
F	T	F	F	F	T

Do biểu thức mệnh đề là sự liên kết của nhiều mệnh đề bằng các phép toán nên chúng ta có thể phân tích để biểu diễn các biểu thức mệnh đề này bằng một cây mệnh đề.

Ví dụ : Xét câu phát biểu sau :

" Nếu Michelle thắng trong kỳ thi Olympic, mọi người sẽ khâm phục cô ấy, và cô ta sẽ trở nên giàu có. Nhưng, nếu cô ta không thắng thì cô ta sẽ mất tất cả."

Đây là một biểu thức mệnh đề và phép toán chính là phép hội. Có thể viết lại như sau :

"Nếu Michelle thắng trong kỳ thi Olympic, mọi người sẽ khâm phục cô ấy, và cô ta sẽ trở nên giàu có. Nhưng, nếu cô ta không thắng thì cô ta sẽ mất tất cả. "

Cả hai mệnh đề chính trong biểu thức mệnh đề này là mệnh đề phức hợp. Có thể định nghĩa các biến mệnh đề như sau:

P: Michelle thắng trong kỳ thi Olympic

Q: mọi người sẽ khâm phục cô ấy

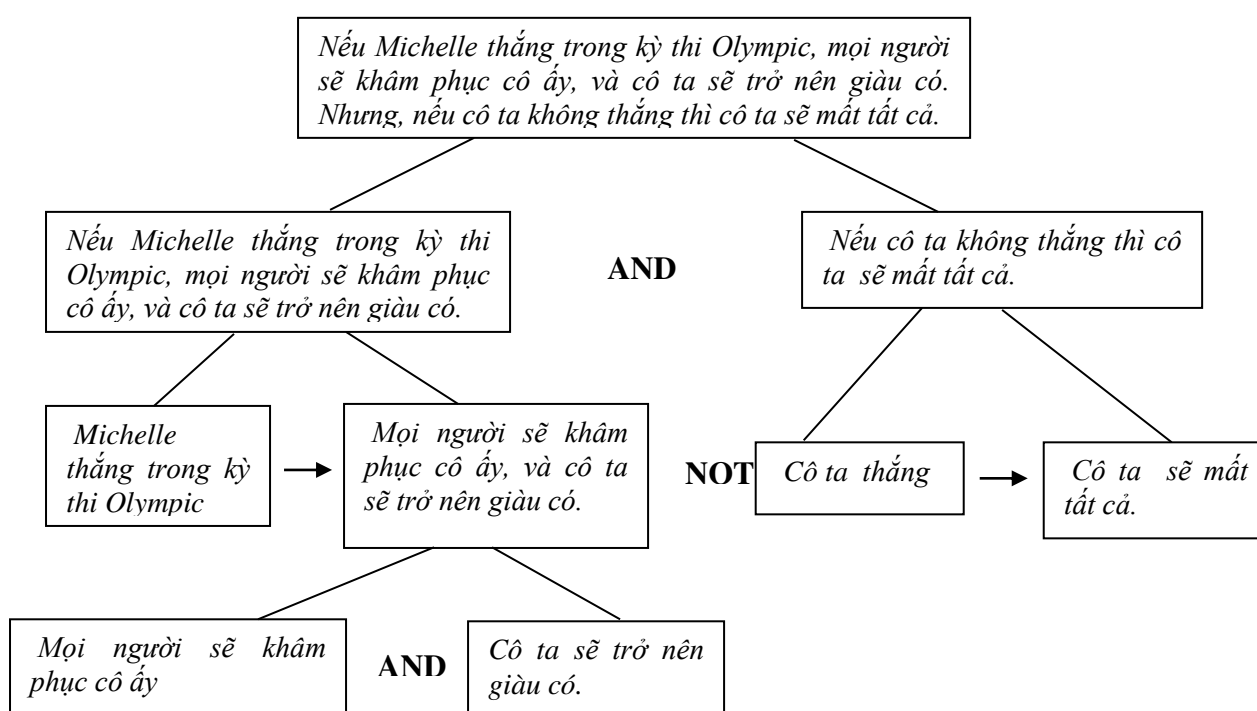
R: cô ta sẽ trở nên giàu có

S: cô ta sẽ mất tất cả

Biểu diễn câu phát biểu trên bằng các mệnh đề và các phép toán, ta có biểu thức mệnh đề sau :

$$(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (\bar{P} \rightarrow S)$$

Biểu diễn câu phát biểu trên thành một cây ngữ nghĩa như sau :



IV- Mệnh đề hệ quả và mệnh đề tương đương

Định nghĩa Hằng đúng:

Một hằng đúng là một mệnh đề luôn có chân trị là đúng.

Một hằng đúng cũng là một biểu thức mệnh đề luôn có chân trị là đúng bất chấp sự lựa chọn chân trị của biến mệnh đề.

Ví dụ : xét chân trị của biểu thức mệnh đề $\bar{P} \vee P$

P	\bar{P}	$\bar{P} \vee P$
T	F	T
F	T	T

Vậy $\bar{P} \vee P$ là một hằng đúng.

Định nghĩa Hằng sai:

Một hằng sai là một mệnh đề luôn có chân trị là sai.

Một hằng sai cũng là một biểu thức mệnh đề luôn có chân trị là sai bất chấp sự lựa chọn chân trị của biến mệnh đề.

Ví dụ : xét chân trị của biểu thức mệnh đề $\bar{P} \wedge P$

P	\bar{P}	$\bar{P} \wedge P$
T	F	F
F	T	F

Vậy $\bar{P} \wedge P$ là một hằng sai.

Định nghĩa tiếp liên:

Một tiếp liên là một biểu thức mệnh đề không phải là hằng đúng và không phải là hằng sai.

Ví dụ : Tìm chân trị của biểu thức mệnh đề $(P \wedge Q) \vee \bar{Q}$

P	Q	\bar{Q}	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee \bar{Q}$
T	T	F	T	T
T	F	T	F	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	T

Vậy $(P \wedge Q) \vee \bar{Q}$ là một tiếp liên vì nó không phải là hằng đúng và cũng không phải là hằng sai.

Mệnh đề hệ quả

Định nghĩa : Cho F và G là 2 biểu thức mệnh đề. Người ta nói rằng G là mệnh đề hệ quả của F hay G được suy ra từ F nếu $F \rightarrow G$ là hằng đúng.

Kí hiệu $F \vdash G$

Ví dụ : Cho $F = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$

$$G = P \rightarrow R$$

Xét xem G có là mệnh đề hệ quả của F không ?

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow R$	F	G	$F \rightarrow G$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

Vậy G là mệnh đề hệ quả của F

Nhận xét : Nếu G là hệ quả của F thì khi F là đúng thì bắt buộc G phải đúng. Ngược lại, nếu G là đúng thì chưa có kết luận gì về chân trị của F.

Tương đương Logic (LOGICALLY EQUIVALENT)

Định nghĩa 1 : Mệnh đề P và mệnh đề Q được gọi là tương đương logic nếu phép tương đương của P và Q ($P \leftrightarrow Q$) là hằng đúng.

Định nghĩa 2 : Hai mệnh đề P và Q được gọi là tương đương logic nếu và chỉ nếu chúng có cùng chân trị.

Mệnh đề P và Q tương đương logic được kí hiệu là $P = Q$

Ví dụ 1 : Cho $F = P \vee (Q \wedge R)$

$$G = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Xét xem hai mệnh đề trên là có tương đương logic không ?

P	Q	R	$Q \wedge R$	F	$P \vee Q$	$P \vee R$	G	$F \leftrightarrow G$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F	T
F	F	T	F	F	F	T	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

Vậy F và G là tương đương logic hay $F=G$.

Ví dụ 2: Cho $F = P \rightarrow Q$

$$G = \bar{P} \vee Q$$

Xét xem hai mệnh đề trên là có tương đương logic không ?

P	Q	$P \rightarrow Q$	\bar{P}	$\bar{P} \vee Q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Vậy $F = G$ hay $P \rightarrow Q = \bar{P} \vee Q$

Các quy tắc tương đương logic thường dùng

Đặt T= hằng đúng, F = hằng sai

- 1- $\begin{cases} P \vee T = T \\ P \wedge F = F \end{cases}$ Domination laws
- 2- $\begin{cases} P \wedge T = P \\ P \vee F = P \end{cases}$ Identity laws
- 3- $\begin{cases} P \vee P = P \\ P \wedge P = P \end{cases}$ Idempotent laws
- 4- $\bar{\bar{P}} = P$ Double negation law
- 5- $\begin{cases} P \vee \bar{P} = T \\ P \wedge \bar{P} = F \end{cases}$ Complement laws
- 6- $\begin{cases} P \vee Q = Q \vee P \\ P \wedge Q = Q \wedge P \end{cases}$ Commutative laws
- 7- $\begin{cases} P \vee Q \vee R = (P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R) \\ P \wedge Q \wedge R = (P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R) \end{cases}$ Associative laws
- 9- $\begin{cases} P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \\ P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \end{cases}$ Distributive laws
- 10- $\begin{cases} \overline{P \vee Q} = \bar{P} \wedge \bar{Q} \\ \overline{P \wedge Q} = \bar{P} \vee \bar{Q} \end{cases}$ De Morgan's laws
- 11- $\begin{cases} P \vee (P \wedge Q) = P \\ P \wedge (P \vee Q) = P \end{cases}$ Absorption laws

$$12- P \rightarrow Q = \bar{P} \vee Q \quad \text{Implication law}$$

V- Các ứng dụng:

Ngày nay, logic mệnh đề được ứng dụng nhiều trong các lĩnh vực khác nhau như:

- Viết
- Nói
- Tìm kiếm trên mạng (search engines)
- Toán học
- Các chương trình máy tính (logic in programming)

Do đó, hiểu biết các qui tắc để sử dụng logic là rất hữu ích. Sau đây là một vài ví dụ để chỉ ra các ứng dụng đó.

Ví dụ 1: Logic trong lập trình (Logic in programming)

Đặt vấn đề : Bạn muốn đặt điều kiện là nếu $0 < x < 10$ hay $x = 10$ thì tăng x lên 1 đơn vị.

`if (0 < x < 10 || x == 10) x++;`

Cách giải quyết : Bạn có thể viết lại câu lệnh như sau

`if (x > 0 && x <= 10) x++ ;`

Ví dụ 2:

Giả sử trong chương trình có câu lệnh sau :

`while(!(A[i]!=0 && !(A[i]>= 10)))`

Ta có thể viết lại câu lệnh này một cách đơn giản hơn bằng cách sử dụng công thức De Morgan:

`while(A[i]==0 || A[i]>= 10)`

Ví dụ 3:

Giả sử trong chương trình có câu lệnh sau :

`while((i < size && A[i] > 10) OR (i < size && A[i] < 0) || ! (A[i] != 0 && ! (A[i] >= 10)))`

Trước hết chúng ta sẽ áp dụng công thức De Morgan để biến đổi biểu thức sau cùng như sau :

`while((i < size && A[i] > 10) || (i < size && A[i] < 0) || (A[i] == 0 || A[i] >= 10))`

Sau đó, chúng ta lại sử dụng công thức về tính phân bố của phép hội đối với phép tuyển để rút gọn biểu thức phía trước. Ta có câu lệnh sau cùng là :

`while((i < size && (A[i] > 10 || A[i] < 0)) || (A[i] == 0 || A[i] >= 10))`

Ví dụ 4: Logic trong tính toán

Đặt vấn đề : Bạn có 3 lần kiểm tra trong lớp học. Nếu bạn đạt được 2 lần điểm A, hoặc chỉ một lần điểm A nhưng không được có một lần nào rớt trong 3 lần kiểm tra đó thì bạn sẽ đạt điểm A cho toàn khóa học. Bạn là người không được siêng năng lắm, vậy thì bạn sẽ chọn cách nào để đạt điểm A cho toàn khóa học ?

Cách giải quyết : Bởi vì điều kiện là OR nên cách giải quyết là bạn có thể đạt 2 điểm A và rớt lần 3, hay là chỉ cần đạt một điểm A và không rớt lần nào. Bạn sẽ lựa chọn đạt một điểm A và không rớt lần nào.

Ví dụ 5: Logic trong đời sống

Đặt vấn đề: Sau khi nướng 1 chiếc bánh cho 2 đứa cháu trai và 2 đứa cháu gái đến thăm, Di Nellie lấy bánh ra khỏi lò nướng và để nguội. Sau đó, cô rời khỏi nhà để đến đóng cửa hàng ở gần đó. Lúc trở về thì có ai đó đã ăn $\frac{1}{4}$ chiếc bánh và thậm chí còn đặt lại cái đĩa dơ bên phần bánh còn lại. Vì không còn ai đến nhà Di ngày hôm đó trừ 4 đứa cháu nên Di biết ngay là 1 trong 4 đứa đã ăn mà chưa được cho phép. Di Nellie bèn hỏi 4 đứa thì được các câu trả lời như sau:

- Charles : Kelly đã ăn phần bánh
- Dawn : Con không ăn bánh
- Kelly : Tyler ăn bánh
- Tyler : Con không ăn, Kelly nói chơi khi bảo rằng con ăn bánh.

Nếu chỉ 1 trong 4 câu trả lời trên là đúng và chỉ 1 trong 4 đứa cháu là thủ phạm, hãy tìm ra người mà Di Nellie phải phạt ?

Cách giải quyết : Vì chỉ 1 trong 4 câu trả lời trên là đúng nên chúng ta có thể dùng phép vét cạn để tìm lời giải.

- Giả sử Charles nói đúng nghĩa là Kelly ăn bánh. Ba câu còn lại là sai. Dawn nói "Con không ăn bánh" là sai nghĩa là Dawn có ăn bánh. Vậy có đến 2 người ăn bánh, điều này mâu thuẫn giả thiết, giả sử không được chấp thuận.

- Giả sử Dawn nói đúng nghĩa là Dawn không ăn bánh và 3 câu còn lại là sai. Nhận thấy có mâu thuẫn giữa Kelly và Tyler. Bởi vì Kelly nói "Tyler ăn bánh" là sai nghĩa là Tyler không ăn. Trong khi đó, Tyler lại nói rằng "Con không ăn..." là sai, vậy thực tế là nó có ăn. Giả thuyết này là không chấp nhận được.

- Giả sử Kelly nói đúng nghĩa là Tyler ăn bánh và 3 câu còn lại là sai. Như vậy, cũng có 2 thủ phạm là Kelly và Dawn. Mâu thuẫn giả thiết.

- Giả sử sau cùng là Tyler nói đúng nghĩa là nó không ăn bánh và 3 câu còn lại là sai. Nhận thấy chỉ có một người ăn bánh chính là Dawn. Vậy giả thuyết này là hợp lý và thủ phạm chính là Dawn.

Ví dụ 6 : Logic trong toán học

Đặt vấn đề : Tìm số tự nhiên a biết rằng trong 3 mệnh đề dưới đây có 2 mệnh đề là đúng và 1 mệnh đề là sai.

- 1/ $a + 51$ là số chính phương
- 2/ Chữ số tận cùng của a là 1
- 3/ $a - 38$ là số chính phương

Cách giải quyết : Trước hết, chúng ta sẽ phải xác định xem 2 mệnh đề đúng và 1 mệnh đề sai là mệnh đề nào ? Sau đó từ 2 mệnh đề đúng để tìm ra số tự nhiên a.

Số chính phương là số nguyên dương khi lấy căn bậc hai. Do đó, số chính phương có các chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9.

- Nhận thấy giữa mệnh đề 1 và 2 có mâu thuẫn. Bởi vì, giả sử 2 mệnh đề này đồng thời là đúng thì $a+51$ có chữ số tận cùng là 2 nên không thể là số chính phương. Vậy trong 2 mệnh đề này phải có 1 mệnh đề là đúng và 1 là sai.

- Tương tự, nhận thấy giữa mệnh đề 2 và 3 cũng có mâu thuẫn. Bởi vì, giả sử mệnh đề này đồng thời là đúng thì $a-38$ có chữ số tận cùng là 3 nên không thể là số chính phương.

Vậy trong 3 mệnh đề trên thì mệnh đề 1 và 3 là đúng, còn mệnh đề 2 là sai.

Với $x > 0$ và $y > 0$. Đặt :

$$a + 51 = x^2$$

$$a - 38 = y^2$$

$$89 = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Suy ra :

$$x + y = 1 \text{ và } x - y = 89$$

(loại vì x, y là nguyên dương nên không thể có $x + y = 1$)

Hay là :

$$x + y = 89 \text{ và } x - y = 1$$

Giải hệ phương trình này ta được $x = 45$ và $y = 44$. Vậy $a = 1974$.

Ví dụ 7:

Không lập bảng chân trị, sử dụng các tương đương logic để chứng minh rằng :

$(P \wedge Q) \rightarrow Q$ là hằng đúng.

$$\begin{aligned} (P \wedge Q) \rightarrow Q &= \overline{P \wedge Q} \vee Q \\ &= (\overline{P} \vee \overline{Q}) \vee Q \\ &= \overline{P} \vee (\overline{Q} \vee Q) \\ &= \overline{P} \vee T \\ &= T \end{aligned}$$

Ví dụ 8:

Chứng minh rằng $\overline{Q \rightarrow P} \vee (P \wedge Q) = Q$

$$\begin{aligned} \overline{Q \rightarrow P} \vee (P \wedge Q) &= \overline{\overline{Q} \vee P} \vee (P \wedge Q) \\ &= (Q \wedge \overline{P}) \vee (P \wedge Q) \\ &= Q \wedge (\overline{P} \vee P) \\ &= Q \wedge T \\ &= Q \end{aligned}$$

Trên đây là vài ví dụ đơn giản. Hy vọng rằng các ví dụ này cho chúng ta thấy được sự quan trọng của logic không chỉ trong toán học, khoa học máy tính mà còn trong cuộc sống hàng ngày.

B- VỊ TỪ

I- Các định nghĩa

Trong toán học hay trong chương trình của máy tính, chúng ta thường gặp những câu có chứa các biến như sau : " $x > 3$ ", " $x = y + 3$ ", " $x + y = z$ "...

Các câu này không đúng cũng không sai vì các biến chưa được gán cho những giá trị xác định. Trong chương này, chúng ta sẽ xem xét cách tạo ra những mệnh đề từ những câu như vậy.

Định nghĩa vị từ:

Một vị từ là một khẳng định $P(x, y, \dots)$ trong đó có chứa một số biến x, y, \dots lấy giá trị trong những tập hợp A, B, \dots cho trước, sao cho :

- Bản thân $P(x, y, \dots)$ không phải là mệnh đề.
- Nếu thay x, y, \dots bằng những giá trị cụ thể thuộc tập hợp A, B, \dots cho trước ta sẽ được một mệnh đề $P(x, y, \dots)$, nghĩa là khi đó chân trị của $P(x, y, \dots)$ hoàn toàn xác định. Các biến x, y, \dots được gọi là các biến tự do của vị từ.

Ví dụ 1: Các câu có liên quan đến các biến như: " $x > 3$ ", " $x + y = 5$ " rất thường gặp trong toán học và trong các chương trình của máy tính. Các câu này không đúng cũng không sai vì các biến chưa được cho những giá trị xác định.

Nói cách khác, vị từ có thể xem là một hàm mệnh đề có nhiều biến hoặc không có biến nào, nó có thể đúng hoặc sai tùy thuộc vào giá trị của biến và lập luận của vị từ.

Ví dụ 2: Câu $\{n \text{ là chẵn}\}$ là một vị từ. Nhưng, khi cho n là một số cụ thể là chẵn hay là lẻ ta được một mệnh đề:

$n = 2 : \{2 \text{ là chẵn}\} : \text{mệnh đề đúng.}$

$n = 5 : \{5 \text{ là chẵn}\} : \text{mệnh đề sai.}$

Vị từ $\{n \text{ là chẵn}\}$ có 2 phần. Phần thứ nhất là biến x là chủ ngữ của câu. Phần thứ hai " là chẵn " cũng được gọi là vị từ, nó cho biết tính chất mà chủ ngữ có thể có.

Ký hiệu: $P(n) = \{n \text{ là chẵn}\}$

Tổng quát, người ta nói $P(n)$ là giá trị của hàm mệnh đề P tại n . Một khi biến n được gán trị thì $P(n)$ là một mệnh đề.

Ví dụ 3: Cho vị từ $P(x) = \{x > 3\}$. Xác định chân trị của $P(4)$ và $P(2)$.

Giải: $P(4) = \{4 > 3\} : \text{mệnh đề đúng.}$

$P(2) = \{2 > 3\} : \text{mệnh đề sai.}$

Không gian của vị từ:

Người ta có thể xem vị từ như là một ánh xạ P , với mỗi phần tử x thuộc tập hợp E ta được một ảnh $P(x) \in \{0, 1\}$. Tập hợp E này được gọi là không gian của vị từ. Không gian này sẽ chỉ rõ các giá trị khả dĩ của biến x làm cho $P(x)$ trở thành mệnh đề đúng hoặc sai.

Trọng lượng của vị từ

Chúng ta thường gặp những câu có nhiều biến. Vị từ xuất hiện cũng như một hàm nhiều biến, khi đó số biến được gọi là trọng lượng của vị từ.

Ví dụ 1: Vị từ $P(a,b) = \{a + b = 5\}$ là một vị từ 2 biến trên không gian N . Ta nói P có trọng lượng 2.

Trong một vị từ $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ có trọng lượng là n . Nếu gán giá trị xác định cho một biến trong nhiều biến thì ta được một vị từ mới $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ có trọng lượng là $(n-1)$. Qui luật này được áp dụng cho đến khi $n=1$ thì ta có một mệnh đề. Vậy, thực chất mệnh đề là một vị từ có trọng lượng là 0.

Ví dụ 2: Cho vị từ $P(x, y, z) = \{x + y = z\}$.

Cho $x = 0$: $Q(y,z) = P(0, y, z) = \{0 + y = z\}$

$y = 0$: $R(z) = Q(0, z) = P(0, 0, z) = \{0 + 0 = z\}$

$z = 0$: $T = P(0, 0, 1) = \{0 + 0 = 1\}$

là mệnh đề sai.

Câu có dạng $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là giá trị của hàm mệnh đề P tại (x_1, x_2, \dots, x_n) và P cũng được gọi là vị từ.

II- Phép toán vị từ

Phép toán vị từ sử dụng các phép toán logic mệnh đề và là sự mở rộng của phép toán mệnh đề để thể hiện rõ hơn các tri thức.

Ví dụ 1: Cần viết câu "nếu hai người cùng thích một người thì họ không thích nhau" dưới dạng logic vị từ.

Trước khi viết câu trên ta hãy tìm hiểu các câu đơn giản được viết như sau:

"Nam thích Mai" được viết theo phép toán vị từ là: thích (Nam, Mai).

"Đồng thích Mai" được viết theo phép toán vị từ là: thích (Đồng, Mai).

Tổng quát khẳng định trên được viết như sau:

Thích (X, Z) AND thích (Y, Z) \rightarrow NOT thích (X, Y) AND NOT thích (Y, X)

hay (Thích (X, Z) \wedge thích (Y, Z) \rightarrow $\overline{\text{thích}}(X, Y) \wedge \overline{\text{thích}}(Y, X)$

Ví dụ 2: Cho vị từ "Quả bóng màu xanh". Phép toán vị từ cho phép mô tả theo quan hệ tri thức theo dạng: (quả bóng, xanh).

Cách thể hiện này thuận tiện đối với việc dùng biến và hàm trong xử lý tri thức.

Ví dụ 3: Ta có tam đoạn luận sau:

"Người ta ai cũng chết

Socrates là người

Vậy Socrates phải chết"

Trong phần này sẽ giới thiệu các khái niệm cơ bản trong lập trình Prolog có sử dụng các vị từ:

PROLOG là ngôn ngữ được sử dụng phổ biến nhất trong dòng các ngôn ngữ lập trình logic (Prolog có nghĩa là PROgramming in LOGic). Ngôn ngữ PROLOG do giáo sư người Pháp Alain Colmerauer và nhóm nghiên cứu của ông đề xuất lần đầu tiên tại trường đại học Marseille đầu những năm 1970. Đến năm 1980, PROLOG nhanh chóng được áp dụng rộng rãi ở Châu Âu. PROLOG còn được gọi là ngôn ngữ *lập trình ký hiệu* (symbolic programming) tương tự các ngôn ngữ *lập trình hàm* (functional programming), hay *lập trình phi số* (nonnumerical programming). PROLOG rất thích hợp để giải quyết các bài toán liên quan đến các *đối tượng* (object) và *mối quan hệ* (relation) giữa chúng. Nguyên lý lập trình PROLOG dựa trên các mệnh đề Horn (Horn logic). Một mệnh đề Horn biểu diễn một sự kiện (vị từ) hay một sự việc (luật) nào đó là đúng hoặc không đúng, xảy ra hoặc không xảy ra, có hoặc không có, ...

Ví dụ :

1. Nếu một người già mà mạnh khỏe thì người đó hạnh phúc
2. Trung là người hạnh phúc
3. Nếu X là cha mẹ của Y và Y là cha mẹ của Z thì X là ông bà của Z
4. Hoa là ông bà của Cúc
5. Người ta ai cũng phải chết (Nếu bạn là người thì bạn phải chết)
6. Socrates là người

Trong các ví dụ trên thì 1,3,5 là luật, còn 2,4,6 là sự kiện. Một chương trình logic có thể được xem như là một cơ sở dữ liệu gồm các mệnh đề ở dạng luật hoặc dạng sự kiện, các mệnh đề này được xây dựng từ các vị từ. Thực thi một chương trình logic bằng cách đặt câu hỏi truy vấn trên cơ sở dữ liệu. Ví dụ : “ Socrat có chết không ?”

a) Hằng:

Là một giá trị xác định trong không gian của vị từ. các hằng được ký hiệu bởi các chữ thường, dùng để đặt tên các đối tượng đặc biệt hay thuộc tính.

Ví dụ : xe hơi, đồ, hoa, cúc.

b) Biến:

Dùng để thể hiện các lớp tổng quát của các đối tượng hay các thuộc tính. Biến được qui ước bắt đầu là một chữ cái in hoa. Vậy có thể dùng vị từ có biến để thể hiện các vị từ tương tự.

Ví dụ: Vị từ "quả bóng màu xanh" có thể viết lại: "X màu Y".

quả bóng, xanh là các hằng được xác định trong không gian của vị từ. X, Y là biến.

c) Vị từ:

Là một sự kiện dùng để khẳng định tính chất hay thuộc tính của đối tượng.

Ví dụ : Hoa là nữ.

Sự kiện trên theo cách viết vị từ và biến như sau : woman(Hoa).

Đây là quan hệ đơn bao gồm vị từ và một đối số. Ngoài ra, có thể sử dụng quan hệ nhị phân để mô tả giới tính.

Ví dụ : sex(Hoa, nữ).

d) Luật :

Dùng để diễn tả sự việc. Luật được mô tả theo dạng sau :

Kết luận :- Điều kiện

Mệnh đề trên có ý nghĩa là "Nếu điều kiện thì kết luận". Đây là mệnh đề đúng, do đó nếu điều kiện đúng thì kết luận đúng.

Ví dụ 1:

Với mọi X và Y,

Nếu X là cha mẹ của Y thì

Y là con của X

Trong phát biểu này có 2 quan hệ : $\text{chame}(X, Y)$ và $\text{con}(Y, X)$. Luật được thiết lập như sau :

$\text{con}(Y, X) :- \text{chame}(X, Y).$

Ví dụ 2:

"Người ta ai cũng chết

Socrates là người

Socrates phải chết"

Được viết như sau :

$\text{mortal}(X) :- \text{man}(X),$

$\text{man}(\text{socrat}).$

d) Hàm :

Được người sử dụng định nghĩa như là một quan hệ trên các đối tượng. Các tham số của hàm và giá trị trả về của hàm phải là các đối tượng của quan hệ đó.

Ví dụ : Định nghĩa hàm tổng để cộng hai số bất kỳ

$\text{tong}(X, Y, Z) :-$

$\text{so}(X), \text{so}(Y),$

$Z = X + Y.$

Thực thi chương trình :

?- $\text{tong}(3, 5, Z)$

$Z = 8$

Yes.

e) Hàm mệnh đề :

- Cho P là một vị từ có không gian là A. Tập A là một tập hợp không rỗng sao cho ứng với mỗi $x \in A$ ta có một mệnh đề, ký hiệu là $P(x)$. Bây giờ ta nói P (hay $P(x)$) là một hàm mệnh đề theo biến $x \in A$. Như vậy, khi nói ứng với mỗi $x \in A$, ta có một mệnh đề $P(x)$, nghĩa là khi đó tính đúng sai của P được hoàn toàn xác định phụ thuộc vào từng giá trị của $x \in A$.

Ví dụ : Cho hàm mệnh đề

$$P(x) = \{ x \text{ là số lẻ} \} ; x \in \mathbb{N}$$

Ta có : $P(1)$ là mệnh đề đúng

$P(2)$ là mệnh đề sai.

- Tổng quát, với các tập hợp không rỗng A_1, A_2, \dots, A_n , sao cho ứng với mỗi $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n$, ta có một mệnh đề, ký hiệu $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ta nói $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là một hàm mệnh đề theo n biến x .

Ví dụ : Cho hàm mệnh đề

$$P(x, y, z) = \{ 2x + y - z = 0 \} \quad x, y, z \in \mathbb{Z}$$

Ta có : $P(x, y, z)$ là mệnh đề đúng khi $x = 1, y = -1, z = 1$.

$P(x, y, z)$ là mệnh đề sai khi $x = 1, y = 1, z = 1$.

III- Các lượng từ

Khi tất cả các biến trong một hàm mệnh đề đều được gán cho một giá trị xác định. Ta được chân trị của biểu thức mệnh đề. Tuy nhiên, còn có một cách khác để biến các vị từ thành mệnh đề mà người ta gọi là sự lượng hóa (hay lượng từ).

Lượng từ tồn tại (\exists)

Câu xác định "Tập hợp những biến x làm cho $P(x)$ là đúng không là tập hợp rỗng" là một mệnh đề. Hay "Tồn tại ít nhất một phần tử x trong không gian sao cho $P(x)$ là đúng" là một mệnh đề được gọi là lượng từ tồn tại của $P(x)$.

Ký hiệu: $\exists x P(x)$.

Lượng từ với mọi (\forall)

Câu xác định "Tập hợp những x làm cho $P(x)$ đúng là tất cả tập hợp E " là một mệnh đề. Hay " $P(x)$ đúng với mọi giá trị x trong không gian" cũng là một mệnh đề được gọi là lượng từ với mọi của $P(x)$.

Ký hiệu: $\forall x P(x)$

Ví dụ: Cho vị từ $P(x) = \{ \text{số nguyên tự nhiên } x \text{ là số chẵn} \}$.

Xét chân trị của hai mệnh đề $\forall x P(x)$ và $\exists x P(x)$.

Giải:

$\forall x P(x) = \{ \text{tất cả số nguyên tự nhiên } x \text{ là số chẵn} \}$ là mệnh đề sai khi $x = 5$.

$\exists x P(x) = \{ \text{hiện hữu một số nguyên tự nhiên } x \text{ là số chẵn} \}$ là mệnh đề đúng khi $x = 10$.

Chú ý: Cho P là một vị từ có không gian E . Nếu $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, mệnh đề $\forall x P(x)$ là đúng khi tất cả các mệnh đề $P(e_1), P(e_2), \dots, P(e_n)$ là đúng. Nghĩa là $\forall x P(x) \Leftrightarrow P(e_1) \wedge P(e_2) \wedge \dots \wedge P(e_n)$ là đúng.

Tương tự $\exists x P(x)$ là đúng nếu có ít nhất một trong những mệnh đề $P(e_1), P(e_2), \dots, P(e_n)$ là đúng. Nghĩa là $\exists x P(x)$ đúng có nghĩa là $P(e_1) \vee P(e_2) \vee \dots \vee P(e_n)$ là đúng.

- Nếu không gian E là một tập trống thì $\forall x P(x)$ và $\exists x P(x)$ có chân trị như thế nào ? (Sinh viên tự giải đáp).

Ví dụ: Cho $P(a,b) = \{\text{cặp số nguyên tương ứng thỏa } a + b = 5\}$

Hãy xác định chân trị của các mệnh đề sau:

$\forall(a,b) P(a,b)$	{Tất cả cặp số nguyên tương ứng}	F
$\exists(a,b) P(a,b)$	{Hiện hữu một cặp số nguyên tương ứng (a,b) sao cho $a + b = 5$ }	V
$\exists b \forall a P(a,b)$	{Hiện hữu một cặp số nguyên tương ứng b sao cho tất cả số nguyên tương ứng a ta có $a + b = 5$ }	F
$\forall a \exists b P(a,b)$	{Tất cả số nguyên tương ứng a, hiện hữu một số nguyên tương ứng b sao cho $a + b = 5$ }	V
$\exists a \forall b P(a,b)$	{Hiện hữu một cặp số nguyên tương ứng a sao cho tất cả số nguyên tương ứng b ta có $a + b = 5$ }	F
$\forall b \exists a P(a,b)$	{Tất cả số nguyên tương ứng b, hiện hữu một số nguyên tương ứng a sao cho $a + b = 5$ }	V

Định lý 1: Cho vị từ $P(a, b)$ có trọng lượng là 2. Khi đó:

$\forall a \forall b P(a,b)$ và $\forall b \forall a P(a, b)$ là có cùng chân trị.

Nghĩa là : $\forall a \forall b P(a,b) = \forall b \forall a P(a, b)$

Ký hiệu: $\forall(a,b) P(a,b)$

$\exists a \exists b P(a,b)$ và $\exists b \exists a P(a, b)$ là có cùng chân trị.

Nghĩa là: $\exists a \exists b P(a,b) = \exists b \exists a P(a, b)$

Ký hiệu: $\exists(a,b) P(a,b)$

Nếu $\exists a \forall b P(a,b)$ là đúng thì $\forall b \exists a P(a,b)$ cũng đúng nhưng điều ngược lại chưa đúng. Nghĩa là : Nếu $\exists a \forall b P(a,b)$ thì $\forall b \exists a P(a,b)$

Nếu $\exists b \forall a P(a,b)$ là đúng thì $\forall a \exists b P(a,b)$ cũng đúng nhưng điều ngược lại chưa đúng. Nghĩa là : Nếu $\exists b \forall a P(a,b)$ thì $\forall a \exists b P(a,b)$

Định lý 2:

$$1. \overline{(\forall x)P(x)} = \exists x (\bar{P}(x))$$

$$2. \overline{(\exists x)P(x)} = \forall x (\bar{P}(x))$$

Giải thích:

1. Phủ định với $\forall x P(x)$ nói rằng tập hợp những x làm cho $P(x)$ đúng không là tất cả tập hợp E. Vậy nói rằng hiện hữu ít nhất một phần tử $x \in E$ mà ở chúng $P(x)$ là sai hay nói rằng hiện hữu ít nhất một phần tử $x \in E$ mà ở chúng $\bar{P}(x)$ là đúng.

2. $\overline{(\exists x)P(x)}$ nói rằng tập hợp những x mà ở chúng $P(x)$ là đúng là tập hợp trống. Nghĩa là, tập hợp những x mà ở chúng $P(x)$ là sai là tập hợp E hay không có phần tử nào làm $P(x)$ đúng. Ta có $\forall x (\bar{P}(x))$.

Ví dụ: Phủ định của "Mọi số nguyên n là chia chắn cho 3"

là "Tồn tại ít nhất một số nguyên n không chia chắn cho 3"

- Phương pháp ứng dụng.

Để đạt được phủ định của một mệnh đề xây dựng bằng liên kết của những biến của vị từ với phương tiện định lượng, người ta thay thế những định lượng với mọi \forall bởi tồn tại \exists , tồn tại \exists bởi với mọi \forall và sau cùng thay thế vị từ bằng phủ định của vị từ đó.

Định lý 3: Cho $P(x)$ và $Q(x)$ là hai vị từ có cùng không gian.

1. Mệnh đề $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ và $(\forall x (P(x)) \wedge \forall x (Q(x)))$ là có cùng chân trị.

2. Nếu mệnh đề $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$ là đúng thì ta có mệnh đề:

$$(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \text{ cũng đúng.}$$

3. Mệnh đề $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ và $(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$ là có cùng chân trị.

4. Nếu mệnh đề $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ là đúng thì ta có mệnh đề $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ là đúng, nhưng điều ngược lại không luôn luôn đúng.

Chú thích:

Nếu $P(x)$ và $Q(x)$ là hai vị từ có cùng không gian E . Ta có :

- Tập hợp $A \subseteq E$: Tập hợp những phần tử x thuộc E mà ở chúng thì $P(x)$ là đúng.

- Tập hợp $B \subseteq E$: Tập hợp những phần tử x thuộc E mà ở chúng thì $Q(x)$ là đúng.

Khi đó người ta lưu ý rằng, $A \cap B$ là tập hợp những x thuộc E mà ở chúng mệnh đề $P(x) \wedge Q(x)$ là đúng. Trong khi đó $A \cup B$ là tập hợp những x của E mà ở đó mệnh đề $P(x) \vee Q(x)$ là đúng.

Quy tắc đặc biệt hóa phổ dụng

Nếu một mệnh đề đúng có dạng phổ dụng $\forall x \in A p(x)$ thì khi thay thế x bởi $a \in A$ ta có $p(a)$ là một mệnh đề đúng.

Quy tắc tổng quát hóa phổ dụng

Nếu trong mệnh đề phổ dụng $\forall x p(x)$ khi thay x bởi một giá trị tùy ý $a \in A$ mà mệnh đề có được $p(a)$ là đúng thì mệnh đề phổ dụng $\forall x \in A p(x)$ là đúng

IV- Dịch các câu thông thường thành biểu thức logic

Sau khi đã được giới thiệu về các lượng từ, chúng ta có thể biểu diễn được một tập hợp rộng lớn các câu thông thường thành các biểu thức logic. Việc làm này nhằm mục đích loại đi những điều chưa rõ ràng và người ta có thể sử dụng các câu suy luận này trong việc lập trình logic và trí tuệ nhân tạo.

Ví dụ 1: Biểu diễn câu "Mọi người đều có chính xác một người bạn tốt nhất" thành một biểu thức logic.

Giải: Giả sử $B(x,y)$ là câu "y là bạn tốt của x". Để dịch câu trong ví dụ cần chú ý $B(x,y)$ muốn nói rằng đối với mỗi cá nhân x có một cá nhân khác là y sao cho y là bạn tốt nhất của x , nếu z là một cá nhân khác y thì z không phải là bạn tốt nhất của x . Do đó, câu trong ví dụ có thể dịch thành:

$$\forall x \exists y \forall z [B(x,y) \wedge ((z \neq y) \rightarrow \neg B(x,z))]$$

Ví dụ 2: Biểu diễn câu: "Nếu một người nào đó là phụ nữ và đã sinh con, thì người đó sẽ là mẹ của một người nào khác" thành một biểu thức logic:

Giải: Giả sử $F(x) = "x \text{ là phụ nữ}"$

$P(x) = "x \text{ đã sinh con}"$

và $M(x,y) = "x \text{ là mẹ của } y"$

Vì trong ví dụ áp dụng cho tất cả mọi người nên ta có thể viết nó thành biểu thức như sau:

$$\forall x (F(x) \wedge P(x)) \rightarrow \exists y M(x,y)$$

Ví dụ 3: Xét các câu sau. Hai câu đầu tiên là tiền đề và câu ba là kết luận. Toàn bộ tập hợp 3 câu này được gọi là một suy lý.

"Tất cả sư tử Hà Đông đều hung dữ".

"Một số sư tử Hà Đông không uống cà phê".

"Một số sinh vật hung dữ không uống cà phê".

Giải: Gọi $P(x) = \{x \text{ là sư tử Hà Đông}\}$

$Q(x) = \{x \text{ hung dữ}\}$

$R(x) = \{x \text{ uống cà phê}\}$

Giả sử rằng không gian là tập hợp toàn bộ các sinh vật, ta có cách suy diễn sau:

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\exists x (P(x) \wedge \bar{R}(x))$$

$$\exists x (Q(x) \wedge \bar{R}(x))$$

Nhận xét

Có một số điều cần lưu ý trong việc phủ định các lượng từ trong định lý 2.

Ví dụ : Hãy xét phủ định của câu sau đây :

"Tất cả sinh viên trong lớp đều đã học môn Toán rời rạc I"

Câu này chính là câu sử dụng lượng từ với mọi như sau: $\forall x P(x)$

Trong đó $P(x) = \{x \text{ đã học môn Toán rời rạc I}\}$.

Phủ định của câu này là: "Không phải tất cả các sinh viên trong lớp đều đã học môn Toán rời rạc I". Điều này có nghĩa là: "Có ít nhất một sinh viên ở lớp này chưa học Toán rời rạc I". Đây chính là lượng từ tồn tại của phủ định hàm mệnh đề ban đầu được viết như sau: $\exists x \bar{P}(x)$. Ta có :

$$\overline{(\forall x)P(x)} = \exists x \bar{P}(x)$$

$$\overline{(\exists x)P(x)} = \forall x \bar{P}(x)$$

Phép phủ định các lượng từ được minh họa rõ hơn trong bảng chú thích sau:

Phủ định	Mệnh đề tương đương	Khi nào phủ định là đúng	Khi nào sai
$\overline{(\exists x)P(x)}$	$\forall x \bar{P}(x)$	$P(x)$ sai với mọi x	Có một x để $P(x)$ là đúng
$\overline{(\forall x)P(x)}$	$\exists x \bar{P}(x)$	Có một x để $P(x)$ sai	$P(x)$ đúng với mọi x