3

a) Gọi 2 số chẵn liên tiếp là 2a và 2a + 2

Tích của chúng $2a.(2a+2) = \underbrace{4n.(n+1)}_{\vdots 2}$

Vì $n(n+1) \vdots 2 \Rightarrow 4n.(n+1) \vdots 8$

b) Gọi 3 số liên tiếp là n, $n+1$, $n+2$

Tổng của chúng $n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 \vdots 3$

Vậy số này chia hết cho 3

c) Gọi 3 số nguyên liên tiếp được biểu diễn dưới dạng

$n, n+1, n+2$

Tổng lập phương của chúng

$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$

$= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 = 3(n^3 + 3n^2 + 5n + 3)$

$= \underbrace{3(3n^2+3)}_{\vdots 9} + 3n.(n^2+5)$

$\Downarrow$

$3n(n^2 - 1 + 6)$

$= \underbrace{3.n(n-1).(n+1)}_{\vdots 9} + \underbrace{3.6n}_{\vdots 9}$

Vậy lập phương 3 số liên tiếp $\vdots 9$

d). Giả sử số chính phương là

n^2

=> số đứng liền trước nó là n^2-1

Thì do tích của chúng

$$n^2(n^2-1) = n\underbrace{(n-1)n(n+1)}_{\vdots 6}$$

~~Do n^2-1 là snt nên n^2 chỉ có thể là~~

Xét 2 trường hợp.

- Nếu n lẻ => $(n-1)$ và $(n+1)$ là số chẵn => $(n-1)n(n+1) \vdots 12$

- Nếu n chẵn: => $(n-1)n(n+1)$ lẻ $\vdots 6$

mà $n \vdots 2$ => $n^2(n^2-1) \vdots 12$

1. C/m $1997^{1999} - 1997^{1998} \vdots 4$ (*)

Ta có: $* = 1997^{1998}(1997-1)$

$= 1997^{1998} . \underbrace{1996}_{\vdots 4}$

Vậy $1997^{1999} - 1997^{1998} \vdots 4$

+ C/m $1997^{1998} - 1998^{1999} \not\vdots 4$

Ta có $1997^{1998} = (1996+1)^{1998}$

$= \underbrace{C_{1998}^{0} 1^{0} . 1996^{1998}}_{\vdots 4} + \underbrace{C_{1998}^{1} 1^{1} 1996^{1997}}_{\vdots 4} + \dots$

$+ \underbrace{C_{1998}^{1997} 1^{1997} . 1996^{1}}_{\vdots 4} + \underbrace{C_{1998}^{1998} 1^{1998} . 1996^{0}}_{\not\vdots 4}$

Vậy $1997^{1998} = k4 + 1$ $(k \in Z)$

Ta lại có: $1998^{1999} = (1996+2)^{1999} \vdots 4$ (Chứng minh tương tự).

Vậy $1997^{1998} - 1998^{1999} \not\vdots 4$

8)

a) $a^3 + 11a \vdots 6$

Ta có $a^3 + 11a = a(a^2 + 11)$

$= a(a^2 - 1 + 12)$

$= \underbrace{a(a^2-1)}_{3 \text{ số liên tiếp}} + \underbrace{12a}_{6} \vdots 6.$

$\vdots 6.$

b) $a^5 - a \vdots 30$

Ta có $a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2-1)(a^2+1)$

$= a.(a-1)(a+1).(a^2 - 4 + 5)$

$= 5a(a-1)(a+1) \vdots + (a^2 - 2)(a-1)a(a+1)(a+2) \vdots 30$

c) $a(a+1)(2a+1) \vdots 6$

Ta có $a(a+1)(2a+1) = a(a+1)(2a+4-3) \vdots$

$= 2a.(a+1).(a+2) - a(a+1).3 \vdots 6$

d) $a^5 - 5a^3 + 4a \vdots 120$

Ta có $a^5 - 5a^3 + 4a = a(a^4 - 5a^2 + 4)$

$= a[(a^2-4)(a^2-1)]. = (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$

Ta thấy $120 = 2^3 \times 3 \times 5$.

Biểu thức trên thoả mãn. Là bội của 8, 3, 5.

c) Nếu $a^2 + b^2 \vdots 3$ thì a chia hết cho 3 và b chia hết cho 3

Phương pháp chứng minh gián tiếp.

Nếu a không chia hết cho 3 hoặc $b \not\vdots 3$ thì $a^2 + b^2 \not\vdots 3$

TH1: Nếu 1 trong 2 $\not\vdots 3$

$$\underset{\vdots 3}{a^2} + \underset{\not\vdots 3}{b^2} \not\vdots 3$$

TH2: Nếu có 2 $\not\vdots 3$

Do $a^2 \not\vdots 3$ chỉ có thể dư 1, không có dư 2 nên

$$\underset{\not\vdots 3}{a^2} + \underset{\not\vdots 3}{b^2} \not\vdots 3 \quad \text{(Chỉ dư 2)}$$

Câu 9.

Cho mọi dãy số n số nguyên liên tiếp.

$$S = a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + \dots + (a+n-1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (a+i) = \frac{n.(n-1)}{2} + na \vdots n$$

Thấy rằng cuả n số nguyên liên tiếp chia hết cho n

Câu 10.

1 Kiểm chứng $P(n = n_0 = 1) = 1 + 1 : 2^1$ Đúng.

HỒNG HÀ