Bt-sh - Bt-sh

Toán rời rạc (Trường Đại học Cần Thơ)

Trường đại học Cần Thơ
Khoa Công nghệ thông tin và truyền thông
Bộ môn Khoa học máy tính

BÀI TẬP CHIA & ĐỒNG DƯ

Bài tập 0

- CM rằng với mọi số nguyên n, dư của phép chia n^2 cho 4 chỉ có thể là 0 hoặc 1.

  n là chẵn => $n = 2k$ => $n^2 = 4k^2$ chia hết cho 4 (dư 0)

  n là lẻ => $n = 2k + 1$ => $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ chia cho 4 dư 1

Bài tập 1

- Tìm tất cả các nghiệm nguyên của PT: $x^2 - y^2 = 2014$

  x^2, y^2 chia cho 4 dư 0 hoặc 1 => $x^2 - y^2$ chia cho 4 dư 0, 1, -1 (hay 3)

  tuy nhiên 2014 chia cho 4 dư 2

  => PT vô nghiệm

Bài tập 2

- CM rằng với mọi số nguyên dương n, dư của phép chia n^3 cho 7 chỉ có thể là 0, 1 hoặc 6

  $n = 7k \Rightarrow n^3 = 7^3k^3 \equiv 0 \pmod 7$

  $n = 7k + 1 \Rightarrow n^3 = (7k+1)^3 \equiv 1 \pmod 7$

  $n = 7k + 2 \Rightarrow n^3 = (7k+2)^3 \equiv 1 \pmod 7$

  $n = 7k + 3 \Rightarrow n^3 = (7k+3)^3 \equiv 6 \pmod 7$

  $n = 7k + 4 \Rightarrow n^3 = (7k+4)^3 \equiv 1 \pmod 7$

  $n = 7k + 5 \Rightarrow n^3 = (7k+5)^3 \equiv 6 \pmod 7$

  $n = 7k + 6 \Rightarrow n^3 = (7k+6)^3 \equiv 6 \pmod 7$

Bài tập 3

- Tìm tất cả các nghiệm nguyên của PT: $x^3 + y^3 = 2013$

  x^3, y^3 chia cho 7 dư 0, 1 hoặc 6

  => $x^3 + y^3$ chia cho 7 dư 0, 1, 2, 5, 6

  tuy nhiên 2013 chia cho 7 dư 4

  => PT vô nghiệm

Bài tập 4

- Trong các nghiệm nguyên không âm của PT: $3x + 5y = 2012$, tìm nghiệm sao cho $x + y$ nhỏ nhất

  Từ PT => $x = 670 - y – 2(y - 1)/3$ là nguyên

  => $2(y-1)/3 = k$ phải là số nguyên

  => $2(y-1) = 3k$ => $k = 2t$, $y = 3t + 1$ => $x = 669 - 5t$

  Do $x \geq 0$ => $669 – 5t \geq 0$ => $t \leq 133.8$

  Hơn nữa, $x + y = 670 – 2t$ nhỏ nhất khi t là nguyên lớn nhất nhưng nhỏ hơn 133.8 => $t = 133$

  => $x = 4$, $y = 400$

Bài tập 5

- Tìm các nghiệm nguyên của PT: $x + y + xy = 9$

  Từ PT => $x + y + xy + 1 = 10$ => $(x+1)(y+1) = 10$

  $(x+1)$ là ước của 10 => $(x+1) = \pm1, \pm2, \pm5, \pm10$

  $(x+1) = \pm1$ => $x = 0, y = 9$ hoặc $x = -2, y = -11$

  $(x+1) = \pm2$ => $x = 1, y = 4$ hoặc $x = -3, y = -6$

  $(x+1) = \pm5$ => $x = 4, y = 1$ hoặc $x = -6, y = -3$

  $(x+1) = \pm10$ => $x = 9, y = 0$ hoặc $x = -11, y = -2$

Bài tập 6

- Tìm các nghiệm nguyên của PT: $2x^2 + 4x = 19 – 3y^2$

  Từ PT => $2x^2 + 4x + 2 = 19 – 3y^2 + 2$ => $2(x+1)^2 = 3(7 – y^2)$

  $7 – y^2 \geq 0$ và chia hết cho 2 => y lẻ và $y^2 \leq 7$ => $y = \pm 1$

  => $(x+1)^2 = 9$ => $x = 2$ hoặc $x = -4$

  PT có 4 cặp nghiệm

Bài tập 7

- Tìm các nghiệm nguyên của PT: $5^x + 1 = 2^y$

  $5 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 5^x \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 5^x + 1 \equiv 2 \pmod 4$

  $\Rightarrow 2^y \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow y = 1$

  $\Rightarrow 5^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Bài tập 8

- Biết p, p + k, p + 2k là các số nguyên tố lớn hơn 3, CM rằng k chia hết cho 6

  p, p + k, p + 2k là các số nguyên tố lớn hơn 3 => p, p + k, p + 2k phải là số lẻ không chia hết cho 3

  Do p, p+k cùng lẻ => (p+k) – p = k chia hết cho 2

  3 số dư của phép chia p, p + k, p + 2k cho 3 là các số 1 hoặc 2 => có 2 số dư bằng nhau => có 3 trường hợp xãy ra:

  $p + k \equiv p \pmod 3 \Rightarrow k = (p + k) - p \equiv 0 \pmod 3$ => k chia hết cho 3

  $p + 2k \equiv p \pmod 3 \Rightarrow 2k = (p + 2k) - p \equiv 0 \pmod 3$ => k chia hết 3

  $p + 2k \equiv (p + k) \pmod 3 \Rightarrow k = (p + 2k) - (p + k) \equiv 0 \pmod 3$ => k chia hết cho 3

  => k chia hết cho 2 vừa chia hết cho 3 => k chia hết cho 6

Bài tập 9

- Có tồn tại số nguyên tố p sao cho p+2, p+4, p+8, p+16 cũng là các số nguyên tố?

  $p + 2$ là nguyên tố => $p \neq 2$ và $p \geq 3$

  Đặt $p = 3 + k$, do p là số nguyên tố nên k phải chẵn => $k = 2t$ ($t \geq 0$)

  => $p = 3 + 2t$, $p+2 = 3 + 2(t+1)$, $p+4 = 3 + 2(t+2)$

  3 số nguyên liên tiếp t, t+1, t+2 phải có số chia hết cho 3

  Nếu $t \neq 0$ => 1 trong 3 số p, p+2, p+4 phải có số chia hết cho 3

  => 1 trong 3 số p, p+2, p+4 không phải số nguyên tố

  Nếu $t = 0$ => $p = 3$, $p+2 = 5$, $p+4 = 7$, $p+8 = 11$, $p+16 = 19$

  là các số nguyên tố

Bài tập 10

- Bộ 3 số nguyên dương lẻ liên tiếp 3, 5 và 7 đồng thời cũng là các số nguyên tố. Tìm tất cả các bộ số như vậy

Xét bộ 3 số nguyên dương lẻ liên tiếp p, p+2, p+4 là các số nguyên tố với $p \geq 3$

Nếu p chia hết cho 3 hơn nữa p là nguyên tố => p = 3, p+2 = 5, p+4 = 7 cùng là số nguyên tố

Nếu p chia cho 3 dư 1 => p = 3t + 1 => p+2 = 3t + 3 chia hết cho 3
p+2 không là số nguyên tố

Nếu p chia cho 3 dư 2 => p = 3t + 2 => p+4 = 3t + 6 chia hết cho 3
p+4 không là số nguyên tố

Bài tập 11

- CM rằng nếu a, b là nguyên tố cùng nhau thì (5a+3b) và (13a+8b) cũng là nguyên tố cùng nhau.

  Theo Euclid, (13a+8b, 5a+3b) = (5a+3b, 3a+2b) = (3a+2b, 2a+b)

  = (2a+b, a+b) = (a+b, a) = (a, b) = 1

  => 13a+8b và 5a+3b là nguyên tố cùng nhau

Bài tập 12

- Tìm số dư của phép chia $2013^{2015} + 2014^{2013}$ cho 13

  $2014 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow 2014^{2013} \equiv -1 \pmod{13}$

  $2013 \equiv -2 \pmod{13} \Rightarrow 2013^{2015} \equiv (-2)^{2015} \pmod{13} \equiv -2^{2015} \pmod{13}$

  $2^{12} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{2015} = 2^{12*167+11} \equiv 2^{11} \pmod{13} \equiv 7 \pmod{13}$

  $\Rightarrow 2013^{2015} \equiv -7 \pmod{13} \equiv 6 \pmod{13}$

  Dư của phép chia $2013^{2015} + 2014^{2013}$ cho 13 là 5

Bài tập 13

- Tìm số dư của phép chia $2013^{2014} + 2014^{2015}$ cho 13

  $2014 \equiv -1(\text{mod } 13) \Rightarrow 2014^{2015} \equiv -1(\text{mod } 13)$

  $2013 \equiv -2(\text{mod } 13) \Rightarrow 2013^{2014} \equiv (-2)^{2014}(\text{mod } 13) \equiv 2^{2014}(\text{mod } 13)$

  $2^{12} \equiv 1(\text{mod } 13) \Rightarrow 2^{2014} = 2^{12*167+10} \equiv 2^{10}(\text{mod } 13) \equiv 10(\text{mod } 13)$

  $\Rightarrow 2013^{2014} \equiv 10(\text{mod } 13)$

  Dư của phép chia $2013^{2014} + 2014^{2015}$ cho 13 là 9

Bài tập 14

- Tìm dư của phép chia $2014^{2015} + 2015^{2016}$ cho 17

  $2014 \equiv 8(\text{mod } 17) \Rightarrow 2014^8 \equiv 8^8(\text{mod } 17) \equiv 1(\text{mod } 17)$

  $2014^{2015} \equiv 8^{2015}(\text{mod } 17) \equiv 8^{8\text{x}251+7}(\text{mod } 17) \equiv 15(\text{mod } 17)$

  $2015 \equiv 9(\text{mod } 17) \Rightarrow 2015^8 \equiv 9^8(\text{mod } 17) \equiv 1(\text{mod } 17)$

  $2015^{2016} \equiv 9^{2016}(\text{mod } 17) \equiv 9^{8\text{x}252}(\text{mod } 17) = 1(\text{mod } 17)$

  Dư của phép chia $2014^{2015} + 2015^{2016}$ cho 17 là 16

Bài tập 15

- Tìm số dư của phép chia $2014^{2013} + 2015^{2014}$ cho 11

  $2014 \equiv 1(\text{mod } 11) \Rightarrow 2014^{2013} \equiv 1(\text{mod } 11)$

  $2015 \equiv 2(\text{mod } 11) \Rightarrow 2015^{10} \equiv 1(\text{mod } 11) \Rightarrow 2015^{2014} = 2015^{10*201+4}$
  $\equiv 2^{10*201+4}(\text{mod } 11) \equiv 5(\text{mod } 11)$

  Dư của phép chia $2014^{2013} + 2015^{2014}$ cho 11 là 6

Bài tập 16

- Tìm dư của phép chia $2012^{2013} + 2014^{2015}$ cho 7

  $2012 = 3 \pmod 7) \Rightarrow 2012^3 \equiv 27 \pmod 7 \equiv -1 \pmod 7$

  $\Rightarrow 2012^{2013} = 2012^{3*671} \equiv (-1)^{671} \pmod 7 \equiv -1 \pmod 7$

  $2014 \equiv -2 \pmod 7 \Rightarrow 2014^2 \equiv 4 \pmod 7$, $2014^3 \equiv -8 \pmod 7 \equiv -1 \pmod 7$

  $2014^{2015} = 2014^{3*671+2} \equiv (-1 \bmod 7)(4 \bmod 7) \equiv -4 \pmod 7 \equiv 3 \pmod 7$

  $2012^{2013} + 2014^{2015} \equiv 2 \pmod 7$

  $2012^{2013} + 2014^{2015}$ chia 7 dư 2

Bài tập 17

- Tìm số dư của phép chia $2013^{2014} + 2014^{2015}$ cho 7

  $2013 \equiv 4 (\bmod 7) \Rightarrow 2013^6 \equiv 1 (\bmod 7)$

  $\Rightarrow 2013^{2014} = 2013^{6*335+4} \equiv 2013^4 (\bmod 7) \equiv 4^4 (\bmod 7) = 4 (\bmod 7)$

  $2014 \equiv -2 (\bmod 7) \Rightarrow 2014^{12} \equiv 1 (\bmod 7)$

  $\Rightarrow 2014^{2015} = 2014^{12*167+11} \equiv 2014^{11} (\bmod 7) \equiv (-2)^{11} (\bmod 7) \equiv$

  $(-2)*4^5 (\bmod 7) \equiv -4 (\bmod 7)$

  $\Rightarrow 2013^{2014} + 2014^{2015}$ chia cho 7 dư 0

Bài tập 18

- Tìm số dư của phép chia $2013^{2014} + 2014^{2015}$ cho 4

  $2013 \equiv 1(\text{mod } 4) \Rightarrow 2013^{2014} \equiv 1(\text{mod } 4)$

  $2014 \equiv 2(\text{mod } 4) \Rightarrow 2014^{2} \equiv 0(\text{mod } 4) \Rightarrow 2014^{2015} = 2014^{2*1007+1}$

  $\equiv 0(\text{mod } 4)$

  Dư của phép chia $2013^{2014} + 2014^{2015}$ cho 4 là 1

Bài tập 19

- CM rằng: $2011^{2009} + 2009^{2011}$ chia hết cho 4

  $2011 = 2012 – 1 = 4*503 – 1 \Rightarrow 2011^{2009} = (4*503 – 1)^{2009} = 4p - 1$

  $2009=2008+1=4*502 + 1 \Rightarrow 2008^{2011} =(4*502 + 1)^{2011} = 4q + 1$

  Ta được: $2011^{2009} + 2009^{2011}$ chia hết cho 4