Trường đại học Cần Thơ
Khoa Công nghệ thông tin và truyền thông
Bộ môn Khoa học máy tính

Toán rời rạc

(Discrete Mathematics)

Chương 3

Phép đếm

Nội dung

- Các nguyên lí đếm
- Đại số tổ hợp
- Hệ thức truy hồi

Các nguyên lí đếm

- **Nguyên lý cộng:** Giả sử để làm công việc A có 2 phương pháp

  -Phương pháp 1 có n cách làm

  -Phương pháp 2 có m cách làm

=> Khi đó số cách làm công việc A là **n+m**

- ***Ví dụ 1:*** An có 3 áo tay dài, 5 áo tay ngắn. Để chọn 1 cái áo thì An có mấy cách?

Các nguyên lí đếm

- ***Ví dụ 1:*** Một sinh viên có thể chọn đề tài niên luận từ 3 danh sách đề tài tương ứng có 23, 15 và 19 đề tài. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đề tài.

- ***Đáp án:***

  23+15+19=57

Các nguyên lí đếm

- **Nguyên lý nhân:** Giả sử để làm công việc A cần thực hiện 2 bước
  - Bước 1 có n cách làm
  - Bước 2 có m cách làm

=>Khi đó số cách làm công việc A là **n.m**

- **Ví dụ:** Có bao nhiêu xâu bit nhị phân có độ dài là 7?
- Đáp án: $2^7 = 128$

Các nguyên lí đếm

- ***Ví dụ 2:*** Giá trị k bằng bao nhiêu khi thực hiện đoạn chương trình sau:

```
k=0;
for (i=1; i≤n1; ++i)
    k=k+1;
for (i=1; i≤n2; ++i)
    k=k+1;
  ......
for (i=1; i≤nm; ++i)
    k=k+1;
```

$k = n_1 + n_2 + ...+ n_m$

Các nguyên lí đếm

- ***Ví dụ 2:*** Giá trị k bằng bao nhiêu khi thực hiện đoạn chương trình sau:

```
k=0;
for (i=1; i≤n1; ++i)
    for (i=1; i≤n2; ++i)
        for (i=1; i≤n3; ++i)
        ......
            for (i=1; i≤nm; ++i)
                k=k+1;
```

$\mathbf{k = n_1 * n_2 * ... * n_m}$

Các nguyên lí đếm

- ***Ví dụ:*** Cho tập X ={0, 1, 2, 3, 4, 5}. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau mà chia hết cho 2

Giải

- Gọi số có 3 chữ số là abc
- **TH1:** c=0. Khi đó
  - c có 1 cách chọn
  - a có 5 cách chọn (a ∈ X\{0})
  - b có 4 cách chọn (b ∈ X\{a, 0})

TH1 có 1*5*4 =20

- **TH2:** c≠0. Khi đó
  - c có 2 cách chọn
  - a có 4 cách chọn (a ∈ X\{c, 0})
  - b có 4 cách chọn (b ∈ X\{a, c})

TH2 có 2*4*4 =32

Vậy có 20+32 =52

Các nguyên lí đếm

- **Ví dụ:** Mỗi người sử dụng mail đều có một mật khẩu dài từ 6 đến 8 kí tự, trong đó mỗi kí tự là một chữ cái in hoa hoặc chữ số. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Hỏi có thể có bao nhiêu mật khẩu?

$P = P_6 + P_7 + P_8$

$P_6 = 36^6 - 26^6$

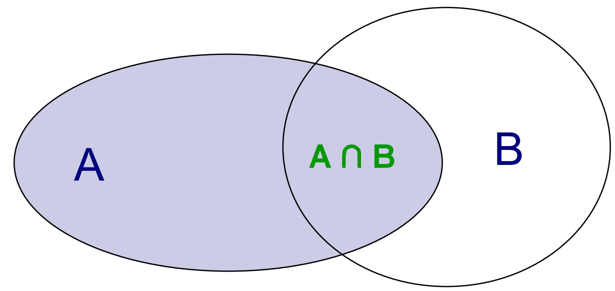
$P_7 = 36^7 - 26^7$

$P_8 = 36^8 - 26^8$

$(36^6 - 26^6) + (36^7 - 26^7) + (36^8 - 26^8)$

Các nguyên lí đếm

- **Nguyên lý bù trừ:** Cho A và B là hai tập hữu hạn. Khi đó |A U B|= |A|+|B| - |A ∩ B|



Các nguyên lí đếm

- ***Ví dụ:*** Trong một lớp ngoại ngữ Anh Pháp. Có 24 HS học tiếng Pháp, 26 học sinh học tiếng Anh. 15 học sinh học tiếng Anh và tiếng Pháp. Hỏi lớp có bao nhiêu người?
- **Giải.**
  - Gọi A là những học sinh học Tiếng Pháp
  - B là những học sinh học Tiếng Anh
  - Khi đó. Số học sinh của lớp là |A U B|. Theo nguyên lý bù trừ ta có

|A U B|= |A|+|B| -|A ∩ B|=24+26-15=35.

Các nguyên lí đếm

- ***Ví dụ:*** Có bao nhiêu xâu bit nhị phân có độ dài bằng 8 bit được bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bit 00?
- **Giải.**
  - Xâu bit có độ dài bằng tám và có bit 1 đầu tiên?
  - Xâu bit có độ dài bằng tám và kết thúc bằng hai bit 00?
  - Xâu bit có độ dài bằng 8 bắt đầu bằng bit 1 và kết thúc bằng hai bit 00?

$$2^7 + 2^6 - 2^5 = 128 + 64 - 32 = 160$$

Nguyên lí chuồng chim bồ câu

- Có 9 cái chuồng
- 10 con chim bồ cầu
- Hỏi mỗi chuồng có bao nhiêu con chim bồ câu?

Các nguyên lí đếm

- ***Nguyên lý Dirichlet:*** Nếu có N vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất [N/k] vật.
- ***Ví dụ:*** Trong 100 người có ít nhất 9 người sinh cùng một tháng vì nếu chọn:
  - Số vật là 100 (người)
  - Số hộp là 12 (tháng)
- ⇨sẽ có một cái hộp chứa không ít hơn =8,333.. người, tức là chứa ít nhất là 9 người.

Các nguyên lí đếm

- **Ví dụ:** Cho tập X ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Lấy A là tập hợp con của X gồm 6 phần tử. Khi đó trong A sẽ có hai phần tử có tổng bằng 10.
- **Giải.**
  - Ta lập các chuồng như sau: {1,9} {2,8} {3,7} {4,6} {5}.
  - Do A có 6 phần tử nên trong 6 phần tử đó sẽ có 2 phần tử trong 1 chuồng.

Các nguyên lí đếm

- Ví dụ: Bài thi các môn học được chấm theo thang điểm A, B+, B, C+, C, D+, D, F. Vậy một lớp học cần phải có bao nhiêu sinh viên để đảm bảo trong mọi môn thi đều có ít nhất hai sinh viên nhận được cùng điểm?
- Giải:
- Thang điểm có 8 bậc. Vậy lớp học cần phải có ít nhật 9 sinh viên.

Nội dung

- Các nguyên lí đếm
- Đại số tổ hợp
- Hệ thức truy hồi

Hoán vị

- ***Định nghĩa.*** Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách thay đổi vị trí của n phần tử được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.
- **Kí hiệu:** P_n = n! = n*(n-1)*(n-2)*…*1
- Quy ước 0! =1
- **Ví dụ:** Cho A ={a,b,c}. Khi đó A có các hoán vị sau:
  - abc,acb,
  - bac,bca,
  - cab,cba

Hoán vị

- **Ví dụ:** Một thương nhân định đi bán hàng tại 8 thành phố. Anh ta bắt đầu cuộc hành trình của mình từ một thành phố nào đó, nhưng có thể đến bảy thành phố khác theo bất kì thứ tự nào mà anh ta muốn. Hỏi anh ta có thể đi qua tất cả các thành phố còn lại theo bao nhiêu lộ trình khác nhau?
- **Đáp án:**

$$7! = 7*6*5*4*3*2*1 = 5040$$

Hoán vị

- **Ví dụ:** Có bao nhiêu cách sắp xếp các chữ cái {A, B, C, D, E, F, G, H} có chứa xâu ABC?
- Đáp án:

$$P_6 = 6! = 6*5*4*3*2*1 = 720$$

Chỉnh hợp

- **Định nghĩa:** Cho A là tập hợp gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp có thứ tự k phần tử của tập hợp n phần tử được gọi là chỉnh hợp chập k của tập n phần tử.
- **Công thức:**

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}(k \le n)$$

Chỉnh hợp

- **Ví dụ:** Cho X ={a,b,c}. Khi đó X có các chỉnh hợp chập 2 của 3 là: ab, ba, ac, ca, bc, cb.
- **Ví dụ:** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số được tạo thành từ 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- Đáp án:

$$A_6^3 = \frac{6!}{3!} = \frac{6*5*4*3!}{3!} = 6*5*4 = 120$$

Chỉnh hợp

- **Ví dụ:** Có tám vận động viên tham gia thi chạy xe đạp. Hỏi có bao nhiêu cách để chọn ra được 3 người để trao giải nhất, nhì và ba nếu tất cả các kết cục của cuộc thi đều có thể xảy ra?
- **Đáp án:**

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8*7*6*5!}{5!} = 8*7*6 = 336$$

Tổ hợp

- **Tổ hợp:** Một tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử là một cách chọn không có thứ tự k phần tử của n phần tử.
- **Công thức:**

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}(k \le n)$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \qquad C_n^{n-k} = C_n^k$$

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$$

Tổ hợp

- **Ví dụ.** Cho X = {1,2,3,4}. Tổ hợp chập 3 của 4 phần tử của X là {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4} , {2,3,4}
- Một lớp có 30 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 10 bạn?
- Số cách chọn là tổ hợp chập 10 của 30.

$$C_{30}^{10} = \frac{30!}{10!(30-10)!}$$

Tổ hợp

- Ví dụ: Một nhóm 30 người được đào tạo để trở thành nhà du hành vũ trụ thực hiện chuyến bay đầu tiên tới sao Hỏa. Hỏi có bao nhiêu cách lựa chọn một phi đội gồm sáu người cho nhiệm vụ đó (giả sử rằng cả sáu người đều làm cùng một công việc)?

$$C_{30}^6 = \frac{30!}{6!*24!} = \frac{30*29*28*27*26*25*24!}{6*5*4*3*2*1*24!} = 593775$$

Tổ hợp

- Ví dụ: Xác đinh số cách lựa chọn một hội đồng để triển khai môn toán rời rạc tại một trường đại học, nếu hội đồng gồm 3 thành viên của khoa toán, 4 thành viên của khoa CNTT. Biết rằng khoa toán có 9 thành viên và khoa CNTT có 11 thành viên.
- Đáp án:

$$C_9^3 * C_{11}^4 = \frac{9!}{3!*6!} * \frac{11!}{4!*7!} = 27720$$

Hoán vị lặp

- **Ví dụ:** Có thể nhận bao nhiêu xâu khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ SUCCESS?
- **Đáp án:**

$$C_7^3 * C_4^2 * C_2^1 * C_1^1 = \frac{7!}{3!*2!*1!*1!} = 420$$

Hoán vị lặp

- **Định nghĩa.** Cho n đối tượng trong đó có n_i đối tượng loại i giống hệt nhau (i =1, 2, …, k ; $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$). Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n đối tượng đã cho gọi là một *hoán vị lặp* của n.
- Số hoán vị lặp của n đối tượng

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Hoán vị lặp

- **Ví dụ:** Có bao nhiêu số có 3 chữ số được lặp nên từ các số {1, 2, 3} sao cho trong đó có hai chữ số giống nhau?
- **Đáp án:**

Chọn 1 số làm số giống nhau

Đổi chỗ

$$3 * 2 * \frac{3!}{2!} = 18$$

Chọn 1 số còn lại

Chỉnh hợp lặp

- Ví dụ: Từ bảng chữ cái tiếng Anh có thể tạo ra được bao nhiêu xâu có độ dài n?
- **Đáp án:**

Theo qui tắc nhân, vì có 26 chữ cái và vì mỗi chữ có thể dùng lại nên chúng ta có 26^n xâu với độ dài n.

Chỉnh hợp lặp

- **Định nghĩa:** Có n phần tử khác nhau, mỗi cách lấy k phần tử từ n phần tử có lặp, có kể thứ tự được gọi là chỉnh hợp lặp chập k của n.

$$B_n^k = n^k$$

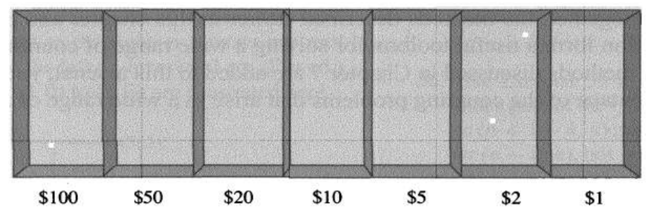
Tổ hợp lặp

- **Ví dụ:** Giả sử trong một đĩa trái cây có táo, cam, lê, mỗi loại có ít nhất 4 quả. Tính số cách lấy 4 quả từ đĩa này nếu giả sử rằng thứ tự các quả được chọn không quan trọng.

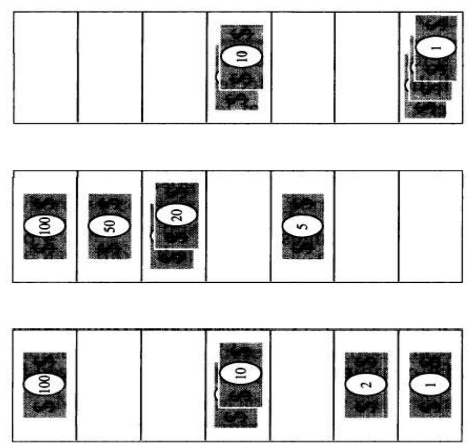
4 táo	4 cam	4 lê
3 táo, 1 cam	3 táo, 1 lê	3 cam, 1 táo
3 cam, 1 lê	3 lê, 1 táo	3 lê, 1 cam
2 táo, 2 cam	2 táo, 2 lê	2 cam, 2 lê
2 táo, 1 cam, 1 lê	2 cam, 1 táo, 1 lê	2 lê, 1 táo, 1 cam

Tổ hợp lặp

- Ví dụ: Có bao nhiêu cách chọn năm tờ giấy bạc từ một két đựng tiền gồm những tờ có mệnh giá là 1$, 2$, 5$, 10$, 20$, 50$ và 100$? Giả sử thứ tự các tờ tiền chọn ra là không quan trọng, các tờ tiền cùng loại là không phân biệt và mỗi loại có ít nhất năm tờ.



Tổ hợp lặp



| | | | * * | | | | * * *

* | * | * * | | * | |

* | | | * * | | * | *

$$C_{11}^{5} = \frac{11!}{5!*6!} = 462$$

Tổ hợp lặp

- **Định nghĩa.** Mỗi cách chọn ra k vật từ n loại vật khác nhau (trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là ***tổ hợp lặp*** *chập k của n*

$$C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Tổng kết

Loại	Có lặp không?	Công thức
Chỉnh hợp chập k	Không	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Tổ hợp chập k	Không	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$
Chỉnh hợp chập k	Có	n^k
Tổ hợp chập k	Có	$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Nội dung

- Các nguyên lí đếm
- Đại số tổ hợp
- **Hệ thức truy hồi**

Hệ thức truy hồi

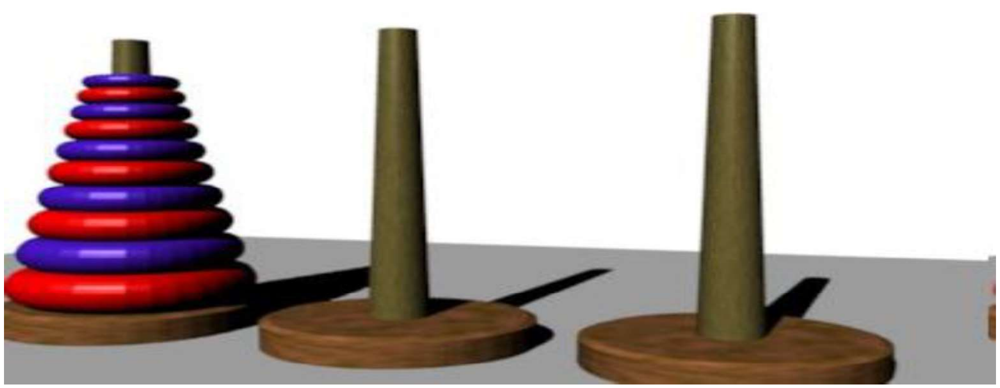
- **Định nghĩa:** Hệ thức truy hồi đối với dãy $\{a_n\}$ qua một hay nhiều số hạng đứng trước nó, cụ thể a_0, a_1, a_2, …, a_{n-1} với mọi số nguyên $n \geq n_0$, $n_0 \geq 0$. Dãy số được gọi là lời giải hay là nghiệm của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi này.
- **Ví dụ:** Cho dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ với n=2, 3, 4, … giả sử $a_0=3$, $a_1=5$. Tìm a_2 và a_3.
  - $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$
  - $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$

Hệ thức truy hồi

- **Ví dụ:** Hãy xác định xem dãy $\{a_n\}$, trong đó $a_n=3n$ với mọi n ≥ 0, có phải là lời giải của hệ thức truy hồi $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}$, với n=2, 3, 4,.. hay không?
- **Đáp án:**

$$a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}= 2[3(n-1)] - 3(n-2)=3n$$

Tháp Hà Nội



Hệ thức truy hồi

$$H_n = 2H_{n-1} +1$$
$$= 2(2H_{n-2}+1)+1=2^2H_{n-2} +2 +1$$
$$= 2^2(2H_{n-3}+1)+2+1=2^3 H_{n-3} +2^2 +2 +1$$
$$\ldots.$$
$$= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots +2 +1$$
$$= 2^{n-1} +2^{n-2} + \ldots + 2 + 1$$
$$= 2^n - 1.$$

Hệ thức truy hồi

- **Ví dụ:** Một người gửi 1.000.000 VNĐ vào tài khoản ngân hàng với lãi suất kép 11% mỗi năm. Sau 30 năm tài khoản anh ta có bao nhiêu tiền?

Hệ thức truy hồi

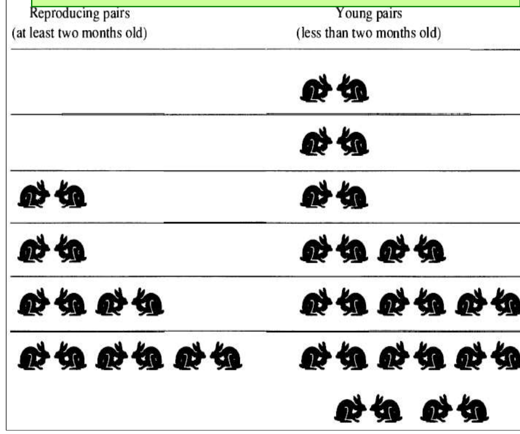
- Gọi P_n là tổng số tiền có trong tài khoản sau n năm.
- Vì số tiền có trong tài khoản sau n năm bằng số có sau n – 1 năm cộng lãi suất của năm thứ n,
- Nên ta thấy dãy $\{P_n\}$ thoả mãn hệ thức truy hồi sau:
  - $P_n = P_{n-1} + 0,11P_{n-1} = (1,11)P_{n-1}$
  - $P_1=1,11P_0$
  - $P_2=1,11P_1=(1,11)^2P_0$
  - …
  - $P_n=1,11P_{n-1} = (1,11)^nP_0$.
  - P_0 = 1.000.000 VNĐ. Từ đó suy ra $P_n = (1,11)^n * 1.000.000$. Thay n = 30 cho ta P_{30} = 22.892.297 VNĐ.

Họ nhà thỏ và các số Fibonacci

- Một cặp thỏ mới sinh (1 đực + 1 cái) được thả trên một hòn đảo. Kể khi chúng đầy 2 tháng tuổi, mỗi tháng chúng đẻ được một đôi thỏ con. Tìm công thức truy hồi tính số cặp thỏ trên đảo sau n tháng? (Giả sử các con thỏ là trường thọ)

Họ nhà thỏ và các số Fibonacci

$$F(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & khi\ n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & n > 1 \end{cases}$$



Tháng	Số cặp sinh sản	Số cặp thỏ con	Tổng
1	0	1	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8

Hệ thức truy hồi

- **Ví dụ:** Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu đối với số các xâu nhị phân độ dài n và không có hai bit 0 liên tiếp. Có bao nhiêu xâu như thế có độ dài bằng 5?
- Đáp án: 13
- Hệ thức truy hồi: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Giải hệ thức truy hồi

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất

- Ví dụ: Tìm công thức hiển của các số Fibonacci

$$f(n)=\begin{cases}0 & n=0\\ 1 & khi\ n=1\\ f(n-1)+f(n-2) & n>1\end{cases}$$

Phương trình đặc trưng

$$r^2-r-1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} r_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ r_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

$$f_n=\alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\begin{cases} f_0=\alpha_1+\alpha_2=0\\ f_1=\alpha_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\alpha_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\ \alpha_2=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

r_1 và r_2

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất

Định lí 1: Cho c_1, c_2 là hai số thực. Giả sử $r^2-c_1r-c_2=0$ có hai nghiệm phân biệt là r_1 và r_2. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$ nếu và chỉ nếu $a_n=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n$, với n=0, 1, 2, … trong đó α_1 và α_2 là các hằng số.

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất

Định lí 2: Cho c_1, c_2 là hai số thực, với $c_2\neq 0$. Giả sử $r^2-c_1r-c_2=0$ chỉ có một nghiệm là r_0. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$ nếu và chỉ nếu $a_n=\alpha_1r_0^n+\alpha_2nr_0^n$, với n=0, 1, 2,… trong đó α_1 và α_2 là các hằng số.

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất

- **Ví dụ:** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 6 & khi\ n=1 \\ 6a_{n-1} - 9a_{n-2} & n>1 \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng:

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \quad \Rightarrow r = 3$$

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 . n . 3^n$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 = \alpha_1, \\ a_1 = 6 = \alpha_1 .3 + \alpha_2 .3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

$$a_n = 3^n + n.3^n$$

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất

Định lí 3: Cho $c_1, c_2, ..., c_k$ là các số thực. Giả sử rằng phương trình đặc trưng

$$r^k - c_1 r^{k-1} - ... - c_k = 0$$

có k nghiệm phân biệt $r_1, r_2, ..., r_k$. Khi đó, dãy {a_n} là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k}$$

nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + ... + \alpha_k r_k^n$,

Với n=0, 1, 2, …, trong đó $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ là các hằng số.

$a_n = 1 - 2^n + 2.3^n$

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất

- Ví dụ: Hãy tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = \begin{cases} 2 & n=0 \\ 5 & n=1 \\ 15 & khi\ n=2 \\ 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} & n>2 \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng:

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ r=2 \\ r=3 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng: $a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 2^n + \alpha_3 3^n$

$$\begin{cases} a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2 .2 + \alpha_3 .3 \\ a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_2 .4 + \alpha_3 .9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 2 \end{cases} \qquad a_n = 1 - 2^n + 2.3^n$$

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất

Định lí 4: Cho $c_1, c_2, ..., c_k$ là các số thực. Giả sử rằng phương trình đặc trưng $r^k - c_1 r^{k-1} - ... - c_k = 0$ có t nghiệm phân biệt $r_1, r_2, ..., r_t$ với các bội lần lượt là $m_1, m_2, ..., m_t$ sao cho $m_i \ge 1$, với $i = 1, 2, ..., t$ và $m_1 + m_2 + ... + m_t = k$. Khi đó dãy {$a_n$} là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k}$ nếu và chỉ nếu

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + ... + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + ... + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}) r_2^n$$
$$+ ... + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + ... + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}) r_t^n$$

Với n=0, 1, 2, …, trong đó $\alpha_{i,j}$ là các hằng số với $1 \le i \le t$ và $0 \le j \le m_i - 1$

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất

- ***Ví dụ:*** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ -2 & n=1 \\ -1 & \text{khi } n=2 \\ -3a_{n-1}-3a_{n-2}-a_{n-3} & n>2 \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng:

$$r^3+3r^2+3r+1=0$$

$$r^3+3r^2+3r+1=(r+1)^3=0 \Rightarrow r=-1$$

Nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng:

$$a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}.n(-1)^n + \alpha_{1,2}n^2(-1)^n$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 = \alpha_{1,0} \\ a_1 = -2 = -\alpha_{1,0}-\alpha_{1,1}-\alpha_{1,2} \\ a_2 = -1 = \alpha_{1,0}+2\alpha_{1,1}+4\alpha_{1,2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{1,0}=1 \\ \alpha_{1,1}=3 \\ \alpha_{1,2}=-2 \end{cases} \quad a_n=(1+3n-2n^2)(-1)^n$$

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính KHÔNG thuần nhất

- ***Ví dụ:*** *Tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi*

$$a_n = \begin{cases} 3 & n=1 \\ 3a_{n-1}+2n & \text{khi } n>1 \end{cases}$$

Nghiệm của hệ thức truy hồi liên đới $a_n = 3a_{n-1} \Rightarrow a_n^{(h)} = \alpha.3^n$

$$F(n)=2n \quad \Rightarrow P_n = cn+d$$

$$cn+d = 3(c(n-1)+d)+2n \quad \Rightarrow (2+2c)n+(2d-3c)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2+2c)=0 \\ (2d-3c)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-1 \\ d=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \quad a_n = a_n^{(p)}+a_n^{(h)} = -n-\frac{3}{2}+\alpha.3^n$$

$$a_n = a_n^{(p)}+a_n^{(h)} = -n-\frac{3}{2}+\frac{11}{6}.3^n$$

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính KHÔNG thuần nhất

Định lí 5: Nếu $\{a_n^{(p)}\}$ là một nghiệm riêng của hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng $a_n = c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+...+c_ka_{n-k}+F(n)$ thì mọi nghiệm của nó đều có dạng $\{a_n^{(p)}+a_n^{(h)}\}$, trong đó $\{a_n^{(h)}\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất liên đới $a_n = c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+...+c_ka_{n-k}$

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính KHÔNG thuần nhất

- ***Ví dụ:*** *Tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi*

$$a_n = 5a_{n-1}-6a_{n-2}+7^n$$

Nghiệm của hệ thức truy hồi liên đới $a_n = 5a_{n-1}-6a_{n-2}$

$$a_n^{(h)} = \alpha_1.3^n+\alpha_2.2^n$$

$$F(n)=7^n \quad \Rightarrow a_n^{(p)} = C.7^n$$

$$C.7^n = 5.C.7^{n-1}-6.C.7^{n-2}+7^n \Rightarrow C.\frac{7^n}{7^{n-2}} = 5.C.\frac{7^{n-1}}{7^{n-2}}-6.C.\frac{7^{n-2}}{7^{n-2}}+\frac{7^n}{7^{n-2}}$$

$$49C = 35C-6C+49 \quad \Rightarrow C=\frac{49}{20} \quad \Rightarrow a_n^{(P)} = (49/20).7^n$$

$$a_n = \alpha_1.3^n+\alpha_2.2^n+(49/20).7^n$$

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính KHÔNG thuần nhất

Định lí 6: Giả sử $\{a_n^{(p)}\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k} + F(n)$, Trong đó $c_1, c_2, .., c_k$ là các số thực và $F(n) = (b_tn^t + b_{t-1}n^{t-1} + ... + b_1n + b_0)s^n$,

Trong đó $b_1, b_2, ..., b_k$ và s là các số thực. Khi s không là nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất liên đới, thì tồn tại một nghiệm riêng có dạng $(p_tn^t + p_{t-1}n^{t-1} + ... + p_1n + p_0)s^n$.

Khi s là nghiệm của phương trình đặc trưng đó và m là bội của nó thì tồn tại một nghiệm riêng có dạng $n^m(p_tn^t + p_{t-1}n^{t-1} + ... + p_1n + p_0)s^n$.

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính KHÔNG thuần nhất

- ***Ví dụ:*** *Xác định nghiệm riêng của hệ thức truy hồi*

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + F(n)$$

$$F(n) = 3^n; F(n) = n.3^n; F(n) = n^2.2^n \text{ và } F(n) = (n^2 + 1).3^n.$$

$$r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0$$

$p_0n^2.3^n$ — $F(n) = 3^n;$

$n^2(p_1n + p_0).3^n$ — $F(n) = n.3^n;$ $F(n) = b_tn^t + b_{t-1}n^{t-1} + ... + b_1n + b_0$

$(p_2n^2 + p_1n + p_0).2^n$ — $F(n) = n^2.2^n;$

$n^2(p_2n^2 + p_1n + p_0).3^n$ — $F(n) = (n^2 + 1).3^n;$

End of chapter 3