

CHƯƠNG 1: MỆNH ĐỀ VÀ VỊ TỪ

I- MỆNH ĐỀ

1. Định nghĩa mệnh đề

- Mệnh đề là một phát biểu khẳng định, là đúng hoặc sai
- Một phát biểu mà có biến chưa được gọi là mệnh đề

2. Các phép tính mệnh đề

- Những chữ cái thường dùng để kí hiệu mệnh đề P, Q, R,.....
- Mệnh đề chỉ có một giá trị đơn (luôn đúng hoặc sai) được gọi là mệnh đề nguyên tử (atomic proposition).
- Các mệnh đề không phải là mệnh đề nguyên tử được gọi là mệnh đề phức hợp (compound propositions).

Phép phủ định (NEGATION)

Bảng chân trị	P	$\neg P$
	T	F
	F	T

Quy tắc: Đảo ngược lại

Phép hội (CONJUNCTION)

Bảng chân trị	P	Q	$P \wedge Q$
	T	T	T
	T	F	F
	F	T	F
	F	F	F

Quy tắc: Cả 2 đều đúng thì mới đúng

Phép tuyển (DISJUNCTION)

Bảng chân trị	P	Q	$P \vee Q$
	T	T	T
	T	F	T
	F	T	T
	F	F	F

Quy tắc: Chỉ cần 1 cái đúng là đúng

Phép XOR

Bảng chân trị

P	Q	$P \oplus Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Quy tắc: Ngược lại với phép tương đương, chỉ cần và đủ 1 cái đúng thì đúng

Phép kéo theo (IMPLICATION)

Bảng chân trị

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Quy tắc: P sai hoặc Q đúng thì đúng

Chú ý: Từ $P \rightarrow Q$

$Q \rightarrow P$ là mệnh đề đảo

$\bar{Q} \rightarrow \bar{P}$ là mệnh đề phản đảo

Phép tương đương (BICONDITIONAL)

Bảng chân trị

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Quy tắc: Cùng tính chất thì đúng

3. Biểu thức mệnh đề (LOGICAL CONNECTIVES)

Cho P, Q, R,... là các mệnh đề. Nếu các mệnh đề này liên kết với nhau bằng các phép toán thì ta được một biểu thức mệnh đề.

4. Mệnh đề hệ quả và mệnh đề tương đương.

Một hằng đúng là một mệnh đề luôn có chân trị là **đúng**.

Một hằng sai là một mệnh đề luôn có chân trị là **sai**.

Một tiếp liên là một biểu thức mệnh đề không phải là hằng đúng và không phải là hằng sai.

Mệnh đề hệ quả: Cho F và G là 2 biểu thức mệnh đề. Người ta nói rằng G là mệnh đề hệ quả của F hay G được suy ra từ F nếu $F \rightarrow G$ là hằng đúng.

Tương đương Logic (logically equivalent):

- Mệnh đề P và mệnh đề Q được gọi là tương đương logic nếu phép tương đương của P và Q ($P \leftrightarrow Q$) là hằng đúng.

- Hoặc P và Q có cùng chân trị

Các quy tắc tương đương logic thường dùng

1. $\begin{cases} P \vee T = T \\ P \wedge F = F \end{cases}$ Domination laws (Luật thống trị)
2. $\begin{cases} P \wedge T = P \\ P \vee F = P \end{cases}$ Identity laws (Luật trung hòa)
3. $\begin{cases} P \vee P = P \\ P \wedge P = P \end{cases}$ Idempotent laws (Luật lũy đẳng)
4. $\bar{\bar{P}} = P$ Complement laws (Phủ định của phủ định)
5. $\begin{cases} P \vee \bar{P} = T \\ P \wedge \bar{P} = F \end{cases}$ Complement laws (Luật phản tử bù)
6. $\begin{cases} P \vee Q = Q \vee P \\ P \wedge Q = Q \wedge P \end{cases}$ Commutative laws (Luật giao hoán)
7. $\begin{cases} P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R) \\ P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R) \end{cases}$ Associative laws (Luật kết hợp)
8. $\begin{cases} P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \\ P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \end{cases}$ Distributive laws (Luật phân phối)
9. $\begin{cases} \overline{P \vee Q} = \bar{P} \wedge \bar{Q} \\ \overline{P \wedge Q} = \bar{P} \vee \bar{Q} \end{cases}$ De Morgan's laws
10. $\begin{cases} P \vee (Q \wedge P) = P \\ P \wedge (Q \vee P) = P \end{cases}$ Absorption laws (Luật hấp phụ)
11. $P \rightarrow Q = \bar{P} \vee Q$ Implication law (Luật kéo theo)

5. Các ứng dụng

II- VỊ TỪ

1. Các định nghĩa

Một vị từ là một khẳng định $P(x, y, \dots)$ trong đó có chứa một số biến x, y, \dots lấy giá trị trong những tập hợp A, B, \dots cho trước, sao cho:

- Bản thân $P(x, y, \dots)$ **không phải** là mệnh đề.
- Nếu thay x, y, \dots bằng những giá trị cụ thể thuộc tập hợp A, B, \dots cho trước ta sẽ được một mệnh đề $P(x, y, \dots)$, nghĩa là khi đó chân trị của $P(x, y, \dots)$ hoàn toàn xác định. Các biến x, y, \dots được gọi là các biến tự do của vị từ.

Không gian của vị từ: Không gian mẫu của một biến

Trọng lượng của vị từ: Số biến

2. Phép toán vị từ

Hằng: Giá trị được xác định tại không gian của vị từ

Biến: Thể hiện các lớp tổng quát của các đối tượng hay thuộc tính

Vị từ: Là một sự kiện để khẳng định tính chất hay thuộc tính của đối tượng

Luật: Dùng để diễn tả sự việc

Hàm: Quan hệ trên các đối tượng

Hàm mệnh đề: Cho P là một vị từ có không gian là A . Tập A là một tập hợp không rỗng sao cho ứng với mỗi $x \in A$ ta có một mệnh đề, ký hiệu là $P(x)$. Bây giờ ta nói P (hay $P(x)$) là một hàm mệnh đề theo biến $x \in A$.

Ví dụ: Nếu X yêu Z và Y yêu Z thì 2 người X và Z không yêu nhau

$$\text{Love}(X, Y) = \{X \text{ loves } Y\}$$

$$\Rightarrow \text{Love}(X, Z) \wedge \text{Love}(Y, Z) \rightarrow \overline{\text{Love}(X, Y)} \wedge \overline{\text{Love}(Y, X)}$$

3. Các lượng từ

Lượng từ tồn tại (\exists): Chỉ cần một giá trị thỏa mãn là đúng, bản chất là phép toán **tuyển**

Lượng từ với mọi (\forall): Tìm một giá trị sai thì nó sai, bản chất là phép toán **hội**

Nếu không gian là tập hợp rỗng:

$$\forall x P(x) = T$$

$$\exists x P(x) = F$$

- **Định lý 1:** $\forall a \forall b P(a, b) = \forall b \forall a P(a, b)$

$$\text{Ký hiệu: } \forall (a, b) P(a, b)$$

$$\exists a \exists b P(a,b) = \exists b \exists a P(a, b)$$

$$\text{Ký hiệu: } \exists(a,b) P(a,b)$$

$$\text{Nếu } \exists a \forall b P(a,b) \rightarrow \forall b \exists a P(a,b)$$

$$\text{Nếu } \exists b \forall a P(a,b) \rightarrow \forall a \exists b P(a,b)$$

Định lý 2:

$$\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P(x)}$$

$$\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P(x)}$$

Công thức:

$$\forall x P(x) \wedge Q(x) \quad \leftrightarrow \quad \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$

$$\exists x P(x) \wedge Q(x) \quad \rightarrow \quad \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$$

$$\exists x P(x) \vee Q(x) \quad \leftrightarrow \quad \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

$$\forall x P(x) \vee Q(x) \quad \rightarrow \quad \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

4. Dịch các câu thông thường thành biểu thức logic.

$$\forall x(C(x) \vee \exists y (C(y) \wedge F(x,y)))$$

C(x): x has a computer

F(x,y): x and y are friends

"Everyone x either has a computer or has a friend y who has a computer."

$$\exists x \forall y \forall z ((F(x,y) \wedge F(x,z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \overline{F(y,z)})$$

"There exists a person x such that for all people y and z, if x is friends with both y and z and y is not equal to z, then y and z are not friends with each other."

Ex: "If a person is female and is a parent, then this person is someone's mother."

F(x) : x is female.

P(x): x is a parent.

M(x,y): x is the mother of y

$$\rightarrow \forall x((F(x) \wedge P(x)) \rightarrow \exists y M(x,y))$$

CHƯƠNG II: SUY LUẬN TOÁN HỌC.

I- MỞ ĐẦU

II- CÁC QUY TẮC SUY LUẬN

Quy tắc	Hằng đúng	Tên
$\frac{P}{\therefore P \vee Q}$	$P \rightarrow (P \vee Q)$	Cộng
$\frac{P \wedge Q}{\therefore P(Q)}$	$P \wedge Q \rightarrow P(Q)$	Rút gọn
$\frac{P \quad P \rightarrow Q}{\therefore Q}$	$[P \wedge (P \rightarrow Q)] \rightarrow Q$	Khẳng định Modus Ponens
$\frac{\bar{Q} \quad P \rightarrow Q}{\therefore \bar{P}}$	$[\bar{Q} \wedge (P \rightarrow Q)] \rightarrow \bar{P}$	Phủ định Modus Tollens
$\frac{P \quad Q}{\therefore P \wedge Q}$	$(P) \wedge (Q) \rightarrow (P \wedge Q)$	Kết hợp
$\frac{P \vee Q \quad \bar{P} \vee R}{\therefore Q \vee R}$	$(P \vee Q) \wedge (\bar{P} \vee R) \rightarrow (Q \vee R)$	Phân giải
$\frac{P \rightarrow Q \quad Q \rightarrow R}{\therefore P \rightarrow R}$	$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R)$	Tam đoạn luận giả định
$\frac{\bar{P} \quad P \vee Q}{\therefore Q}$	$\bar{P} \wedge (P \vee Q) \rightarrow Q$	Tam đoạn luận tuyển

Name	Rule	Example
Universal Instantiation (Suy diễn với lượng từ với mọi)	$\frac{\forall xP(x)}{\therefore P(c)}$	“All women are brave” “Therefore, Lily is brave”
Universal Generalization (Tổng quát hóa với lượng từ với mọi)	$\frac{P(c) \text{ for an arbitrary}}{\therefore \forall xP(x)}$	“Lily is brave” “Therefore, all women are brave”
Existential Instantiation (Suy diễn với lượng từ tồn tại)	$\frac{\exists xP(x)}{\therefore P(c) \text{ for some element } c}$	“There is someone who ran a mile in 4 minutes” “Let’s call him Sparky and say that Sparky ran a mile in 4 minutes”
Existential Generalization (Tổng quát với lượng từ tồn tại)	$\frac{P(c) \text{ for some element } c}{\therefore \exists xP(x)}$	“Sparky ran a mile in 4 minutes” “Therefore, someone ran a mile in 4 minutes”

III- CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

1. Chứng minh rỗng (P là sai)

Chứng minh P sai dù cho Q là sai hay đúng thì $P \rightarrow Q$ là đúng

2. Chứng minh tầm thường (Q là đúng)

Chứng minh Q đúng thì dù P đúng hay sai thì $P \rightarrow Q$ là đúng

3. Chứng minh trực tiếp.

Chứng minh rằng nếu P đúng thì Q đúng

4. Chứng minh gián tiếp.

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \bar{Q} \rightarrow \bar{P}$$

5. Chứng minh phản chứng.

Giả sử $Q = F$ đi đến $P \rightarrow Q = T$, với $P = T$, ta nhận thấy có mâu thuẫn do vì đặt $Q = F$

6. Chứng minh qui nạp

$$\forall n \geq n_0, P(n)$$

B1: Kiểm chứng $P(n_0) = T$

B2: Giả sử $P(k) = T$, chứng minh $P(k+1) = T$

B3: Kết luận $\forall n \geq n_0, P(n)$ luôn đúng

Một số biểu thức cần phải nhớ

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\sum_{i=1}^n i(i+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

7. Chứng minh từng trường hợp

$$P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n \rightarrow Q$$

$$\Leftrightarrow (P_1 \rightarrow Q) \wedge (P_2 \rightarrow Q) \wedge \dots \wedge (P_n \rightarrow Q)$$

8. Chứng minh tương đương

$$[P_1 \leftrightarrow P_2 \leftrightarrow P_3] \Leftrightarrow (P_1 \rightarrow P_2) \wedge (P_2 \rightarrow P_3) \wedge (P_3 \rightarrow P_1)$$

CHƯƠNG III: QUAN HỆ

I- KHÁI NIỆM VỀ QUAN HỆ.

1. Quan hệ giữa hai tập hợp

Tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{11, 12, 13\}$

a là phần tử thuộc A , b là phần tử thuộc B

a có quan hệ với $b \Leftrightarrow a$ là ước của b

Phát biểu: Một phần tử a của A được gọi là có quan hệ với phần tử b của $B \Leftrightarrow a$ là ước của b

Biểu diễn quan hệ:

$\{(1, 11), (1, 12), (1, 13), (2, 12), (3, 12), (4, 12)\}$

Đây được gọi là tập hợp con của tích Descartes $A \times B$

2. Ký hiệu một quan hệ.

\in (thuộc về)

\subset (là tập hợp con)

$=$ (bằng)

$<$ (nhỏ thua)

\leq (nhỏ thua hoặc bằng)

$//$ (song song)

\perp (vuông góc)

.....

3. Đồ thị của một quan hệ.

Kí hiệu quan hệ: aRb

Như ví dụ trong phần 1 là $aRb \Leftrightarrow a$ là ước của b

Đồ thị của quan hệ R :

$R = \{(1, 11), (1, 12), (1, 13), (2, 12), (3, 12), (4, 12)\}$

Hai quan hệ bằng nhau, viết là $R_1 \equiv R_2$, khi chúng cùng đồ thị

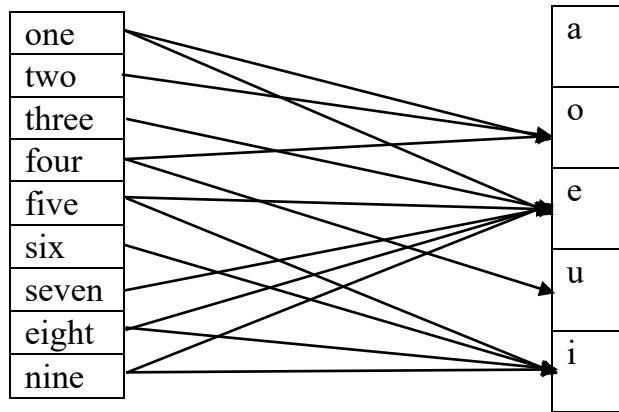
4. Biểu diễn một quan hệ

$A = \{\text{one, two, three, four, five, six, seven, eight, nine}\}$

$B = \{e, a, i, o, u\}$

$aRb \Leftrightarrow$ một từ trong tập hợp A có quan hệ với một kí tự của tập hợp $B \Leftrightarrow$ từ đó có chứa kí tự đó

a. Dùng giản đồ



b. Bảng Descartes

	a	e	i	o	u
one					
two					
three					
four					
five					
six					
seven					
eight					
nine					

c. Ma trận:

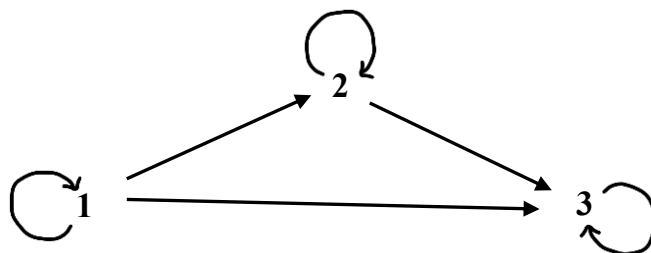
Tương tự như bảng Descartes nhưng không tô là 0, có tô là 1

II- CÁC TÍNH CHẤT CỦA QUAN HỆ HAI NGÔI TRÊN MỘT TẬP HỢP.

1. Quan hệ hai ngôi trên một tập hợp.

Một quan hệ R giữa tập hợp A và chính nó được gọi là một quan hệ hai ngôi trên tập hợp A , ta viết (A, R)

Cho tập $A = \{1, 2, 3\}$ quan hệ \leq trên A được biểu diễn bằng giản đồ như sau:



2. Các tính chất của quan hệ trên một tập hợp.

a. Phản hồi

$$\forall a \in A, aRa$$

b. Đối xứng

$$\forall a, b \in A, \text{ nếu } aRb \rightarrow bRa$$

c. Phản đối xứng

$$\forall a, b \in A, \text{ nếu } aRb \text{ và } bRa \rightarrow a = b$$

d. Quan hệ bắc cầu

$$\forall a, b, c \in A, \text{ nếu } aRb \text{ và } bRc \rightarrow aRc$$

III- QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

1. Quan hệ tương đương

Một quan hệ R trên tập hợp A được gọi là quan hệ tương đương khi và chỉ khi R thỏa 3 tính chất

1)- Phản hồi

2)- Đối xứng

3)- Bắc cầu

2. Lớp tương đương

Một lớp tương đương gồm những phần tử có tính đối xứng với nhau, thỏa mãn quan hệ R

3. Phép phân hoạch

IV- QUAN HỆ THỨ TỰ

1. Quan hệ phản đối xứng

Quan hệ R trên một tập hợp A được gọi là có tính chất phản đối xứng khi và chỉ khi không tồn tại cặp (a, b) với $a \neq b$ sao cho đồng thời a có quan hệ với b và b cũng có quan hệ với a.

$$\forall a, b \in A, \text{ nếu } aRb \text{ và } bRa \rightarrow a = b$$

2. Quan hệ thứ tự - tập hợp thứ tự

Một quan hệ R trên tập hợp A được gọi là một quan hệ thứ tự khi và chỉ khi R thỏa các tính chất:

1)- Phản hồi

2)- Phản đối xứng

3)- Bắc cầu

3. Trôi và bị trôi

4. Sơ đồ Hasse của một tập hợp thứ tự

5. Tập hợp thứ tự toàn phần - riêng phần

6. Những phần tử đặc biệt của tập hợp thứ tự

V- DÀN

1. Mở đầu

2. Cân trên và cân dưới.

3. Dàn và các tính chất của dân

4. Tình phân phối trong dân

5. Phần tử bù - Dàn bị bù

VI- ĐẠI SỐ BOOL

1. Đại số bool..

2. Các tính chất của đại số bool

VII- ĐỊNH LÝ STONE

1. Đăng cấu

2. Atom

3. Định lý Stone

CHƯƠNG IV - V: HÀM BOOL & ĐƠN GIẢN CÔNG THỨC

I- MỞ ĐẦU.

1. Cấu hình của mạch điện.

Nếu mạch điện có n ngắt thì mạch điện có 2^n cấu hình

→ Có số dây nhị nhân tất cả là 2^{2^n}

Số ngắt lớn biểu diễn bằng hình vẽ không thuận lợi

→ Biểu diễn bằng bảng

2. Mô tả mạch điện bằng bảng.

3. Ví dụ

II- HÀM BOOL n BIẾN.

1. Đại số bool B^1 .

2. Hàm bool

3. Đại số bool của các hàm bool.

III - DẠNG TUYỂN (v) CHUẨN TÁC

1. Nhắc lại định lý Stone

2. Từ tối thiểu

3. Biểu diễn từ tối thiểu dưới dạng tích các literal.

4. Viết dạng tuyển chuẩn tắc

1)- Lập bảng chân trị của hàm f

2)- Mỗi lần f nhận giá trị 1 tại bộ các bit $(a_1 a_2 \dots a_n)$ thì:

Viết tích của các biến.

Đặt dấu bù lên biến mà bit tương ứng với nó bằng 0.

3)- Viết f bằng tổng của các tích vừa tìm.

IV- DẠNG HỘI (^) CHUẨN TÁC.

1. Từ tối đại

2. Biểu diễn từ tối đại dưới dạng tổng các literal

3. Viết dạng hội chuẩn tắc

1)- Lập bảng chân trị của hàm f

2)- Mỗi lần f nhận giá trị 0 tại bộ các bit $(a_1 a_2 \dots a_n)$ thì:

Viết tổng của các biến.

Đặt dấu bù lên biến mà bit tương ứng với nó bằng 1.

3)- Viết f bằng tích của các tổng vừa xác định.

V- HỆ PHƯƠNG TRÌNH BOOL VÀ PHỦ TỐI THIỂU

1. Hệ phương trình bool

2. Phương pháp giải hệ phương trình bool

Giai đoạn 1: Biến thành về các tổng

Giai đoạn 2: Dùng định lý sau đây

$$(G = D) \Leftrightarrow (GD \vee \bar{G}\bar{D}) = 1$$

Biến đổi các tổng bằng 1

Giai đoạn 3: Biến đổi hệ phương trình tương đương thành:

$$1 = F_1 F_2 F_3 \dots F_k$$

Giai đoạn 4: Thu gọn về thành các tổng của các tích gọn nhất.

Giai đoạn 5: Biến đổi phương trình về dạng

$$1 = h_1 \vee h_2 \vee \dots \vee h_p \text{ với } h_i \text{ là tích các biến}$$

Phương trình biến đổi thành

$$\begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = 1 \\ h_3 = 1 \\ \dots \\ h_p = 1 \end{cases}$$

Biến đổi thành dạng bảng

Kết thúc bài toán

3. Phủ tối thiểu

Người ta sử dụng hệ phương trình bool để giải quyết bài toán phủ tối thiểu được phát biểu như sau: Cho e_1, e_2, \dots, e_n là các phần tử của tập hợp E và A_1, A_2, \dots, A_n là p tập hợp con của E . Hãy tìm một hệ nhỏ nhất trong số các tập hợp con này sao cho tập hợp của chúng phủ $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Hệ tìm được này được gọi là phủ tối thiểu.

Một ví dụ của bảng tối thiểu:

	x_1 A_1	x_2 A_2	x_3 A_3	x_4 A_4	x_5 A_5	
e_1						$x_1 \vee x_5$
e_2						$x_2 \vee x_3 \vee x_4$
e_3						$x_1 \vee x_4$
e_4						$x_2 \vee x_3 \vee x_5$
e_5						$x_1 \vee x_2$
e_6						$x_3 \vee x_4$
e_7						x_2

Sau khi giải hệ phương trình ta được các phủ tối thiểu:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Phủ tối thiểu
1	1	1			$A_1 A_2 A_3$
1	1		1		$A_1 A_2 A_4$
	1		1	1	$A_2 A_4 A_5$

VI. SỰ TỔNG HỢP HÀM BOOL

- 1. Mạch điện**
- 2. Hàm truyền của mạch điện**
- 3. Mắc nối tiếp và mắc song song**
- 4. Phép toán trên tập hợp các mạch điện**
- 5. Tổng hợp hàm bool...**
- 6. Các loại cổng**

ĐƠN GIẢN CÔNG THỨC (có sự chèn vào những phần trước)

I- VẤN ĐỀ VỀ SỰ ĐƠN GIẢN CÔNG THỨC

- 1. Mở đầu.**
- 2. Sự đơn giản công thức**

II- CÔNG THỨC TỐI TIỂU...

- 1. Đơn thức**
- 2. Ước**
- 3. Công thức dạng đa thức.....**
- 4. Công thức tối giản dạng đa thức.**
- 5. Quan hệ đơn giản hơn.**
- 6. Công thức tối thiểu dạng đa thức.**

III- PHƯƠNG PHÁP KARNAUGH

- 1. Giới thiệu phương pháp.**
- 2. Sắp xếp các phần tử của B^3 và B^4 vào bảng Karnaugh**
- 3. Sơ đồ Karnaugh của hàm bool 3 biến và 4 biến**
- 4. Sơ đồ Karnaugh của một từ tối thiểu**
- 5. Sơ đồ Karnaugh của một đơn thức**
- 6. Tìm công thức tối thiểu bằng phương pháp Karnaugh**
- 7. Vài ví dụ**

IV- PHƯƠNG PHÁP CONSENSUS

- 1. Nguyên nhân.**
- 2. Nguyên nhân nguyên tố**
- 3. Consensus**
- 4. Tìm nguyên nhân nguyên tố**
- 5. Tìm phủ tối thiểu các nguyên nhân nguyên tố**

V- PHƯƠNG PHÁP QUINE-MC CLUSKEY

CHƯƠNG VI: LÝ THUYẾT CHIA VÀ ĐỒNG DƯ

I- PHÉP CHIA HẾT VÀ CÓ DƯ.

1. Phép chia hết

Xét $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$

b chia hết a (b là ước của a)

a chia hết cho b (a là bội của b)

Kí hiệu: $b \mid a \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}$ sao cho $a = bq \Leftrightarrow a : b$

Với $\forall b \neq 0$

0 chia hết cho b vì $\exists 0 \in \mathbb{Z}$ sao cho $0 = 0b$

$\rightarrow 0$ là bội của mọi số nguyên

Với $\forall a$ thì

$1 \mid a$ vì $\exists a \in \mathbb{Z}$ sao cho $a = 1a$

$\rightarrow 1$ là ước của mọi số nguyên

Tính chất của phép chia hết

1- $b \mid a \Leftrightarrow \pm b \mid \pm a$

2- $\forall a \neq 0 \ a \mid a$

3- $\forall a \quad 1 \mid a$

4- $\forall a \neq 0 \ a \mid 0$

5- ($a \mid b$ và $b \mid a$) khi và chỉ khi $a = \pm b$

6- Nếu ($a \mid b$ và $b \mid c$) thì $a \mid c$ (Tính bắc cầu)

7- Nếu $c \mid a$ và $c \mid b$ thì $c \mid ax + by$

8- Nếu $a \mid x$ và $b \mid y$ thì $ab \mid xy$

2. Phép chia có dư

Định lý

$a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$

Tồn tại duy nhất cặp số nguyên q và $r \in \mathbb{Z}$ sao cho:

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}$$

q được gọi là thương, r được gọi là dư

II- ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT VÀ BỘI CHUNG NHỎ NHẤT...

1. Ước chung lớn nhất (UCLN)

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ là các số nguyên không đồng thời bằng 0

Ước chung

Số nguyên $d \in \mathbb{Z}$ được gọi là ước chung của các a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) khi và chỉ khi d là ước của mỗi a_i

Ước chung lớn nhất

Ước chung d của các a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) được gọi là ước chung lớn nhất (UCLN) của các a_i nếu và chỉ nếu d là bội của mọi ước chung khác của a_i

Nếu d là ước chung lớn nhất của các a_i , giữa chúng sẽ có một giá trị dương. Người ta quy ước UCLN là một số dương.

Định lý: Tồn tại ước chung lớn nhất của các số nguyên không đồng thời bằng 0

Nhận xét:

$$(a, b) = (|a|, |b|)$$

$$(a, b) = (b, a) \quad (\text{Tính giao hoán})$$

$$(a, b, c) = ((a, b), c) = (a, (b, c)) \quad (\text{Tính kết hợp})$$

Số nguyên tố cùng nhau: Khi UCLN của những số a_i bằng 1

Số nguyên tố sánh đôi: Khi bất kì cặp số nào cũng có UCLN bằng 1

Tính chất:

1- Nếu $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = d$ thì \exists các số nguyên x_1, x_2, \dots, x_n sao cho:

$$a_1.x_1 + a_2.x_2 + \dots + a_n.x_n = d$$

2- Nếu m là số nguyên dương thì

$$(m.a_1, m.a_2, \dots, m.a_n) = m(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

3- Nếu $d > 0$ là ước chung của $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ thì

$$\left(\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}\right) = \frac{(a_1, a_2, \dots, a_n)}{d}$$

4- Nếu $d > 0$ là UC của a_1, a_2, \dots, a_n thì d là UCLN của a_1, a_2, \dots, a_n khi và chỉ khi

$$\left(\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}\right) = 1$$

5- Nếu $b > 0$ là ước của a thì $(a, b) = b$, đặc biệt $(0, b) = b$

6- Nếu $c|ab$ và $(a, c) = 1$ thì $c|b$

7- Nếu $b|a$ và $c|a$ và $(b,c) = 1$ thì $bc|a$

8- Nếu $(a, b) = 1$ thì $(ac, b) = (c, b)$

9- Nếu $(a, b) = (a, c) = 1$ thì $(a, bc) = 1$

Định lý:

Nếu a và b là 2 số nguyên dương và $a = bq + r$ với $0 \leq r < b$ thì:
 $(a, b) = (b, r)$

Thuật toán Euclide tìm UCLN

$(a, b) = (b, r)$ (nếu $a = bq + r$)

...

$(f, 0) = f$

2. Bội chung nhỏ nhất (BCNN)

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ là các số nguyên khác 0

Bội chung:

Số nguyên M được gọi là bội chung của các a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) khi và chỉ khi M là bội của mỗi a_i

Bội chung lớn nhất:

Bội chung M của các a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) được gọi là BCNN của các a_i nếu và chỉ nếu nó là ước của mọi bội chung khác của các a_i

Bội chung nhỏ nhất được quy ước là một số nguyên dương

Nhận xét:

$$[a, b] = [|a|, |b|]$$

$$[a, b] = [b, a] \quad \text{tính giao hoán}$$

$$[a, b, c] = [[a, b], c] = [a, [b, c]] \quad \text{tính kết hợp}$$

Định lý về sự tồn tại BCNN

Luôn luôn tồn tại BCNN của các số nguyên khác 0 cho trước

Định lý tìm BCNN

Với hai số nguyên a và b khác 0, ta có

$$[a, b] = \frac{|ab|}{(a,b)}$$

Tính chất của BCNN

a_1, a_2, \dots, a_n là các số nguyên tố khác 0

1- Nếu số nguyên $M > 0$ là bội chung của các a_1, a_2, \dots, a_n , thì

$$M = [a_1, a_2, \dots, a_n] \text{ khi và chỉ khi } \left(\frac{M}{a_1}, \frac{M}{a_2}, \dots, \frac{M}{a_n}\right) = 1$$

2- Nếu $k > 0$ là một số nguyên thì:

$$[ka_1, ka_2, \dots, ka_n] = k[a_1, a_2, \dots, a_n]$$

3- Nếu $d = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ thì

$$\left[\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}\right] = \frac{[a_1, a_2, \dots, a_n]}{d}$$

4- Nếu a_1, a_2, \dots, a_n là các số nguyên sánh đôi thì;

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = a_1.a_2. \dots .a_n$$

III- SỐ NGUYÊN TỐ VÀ HỢP SỐ.

1. Định nghĩa

Số nguyên tố

Số nguyên $p > 1$ được gọi là số nguyên tố nếu p không có ước số dương nào khác ngoài 1 và chính nó

Số nguyên tố là số chỉ chia hết cho 1 và chính nó

Hợp số

Số nguyên $a > 1$ được gọi là hợp số nếu a có ước số dương khác 1 và khác chính nó

Hợp số là số có thể chia hết cho ngoài 2 số 1 và chính nó

Định lý:

Ước số dương nhỏ nhất lớn hơn 1 của các số nguyên lớn hơn 1 là một số nguyên tố

Mọi số nguyên lớn hơn 1 đều có ước là số nguyên tố

2. Bảng số nguyên tố - Sàng Erathosthene

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Viết dãy số từ 2 đến n
- Tìm các số nguyên tố từ 2 đến \sqrt{n}
- Xóa đi các bội thực sự của các số nguyên tố này
- Các số còn lại là số nguyên tố

3. Định lý cơ bản của số học.

4. Một số vấn đề về số nguyên tố

IV- PHƯƠNG TRÌNH NGUYÊN

1. Phương trình nguyên bậc nhất 2 ẩn

Định nghĩa:

$a, b \in \mathbb{Z}$ là các hệ số

$x, y \in \mathbb{Z}$ là các ẩn số cần xác định giá trị

Xét phương trình 2 ẩn: $ax + by = c$

$d = (a, b)$

Khi đó

1- Nếu d không là ước của c thì (1) không có nghiệm nguyên

2- Nếu d là ước của c thì (1) có vô số nghiệm nguyên

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

Nếu phương trình $ax + by = c$ có $|a| = 1$ hoặc $|b| = 1$ thì việc tìm nghiệm coi như được giải quyết xong

VD: $x + by = c$

$$\begin{cases} x = c - bt \\ y = t \end{cases}$$

2. Phương trình nguyên bậc nhất nhiều ẩn

Định nghĩa

Phương trình nguyên bậc nhất $n > 2$ ẩn có dạng:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$$

$$a_i, x_i \in \mathbb{Z} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Phương trình nhiều ẩn nói chung là phức tạp, vậy cho nên chủ yếu chỉ là 3 ẩn

VD: $ax + by + z = c$

$$\begin{cases} z = c - at - bu \\ y = u \\ x = t \end{cases}$$

3. Phương trình bậc cao

V- QUAN HỆ ĐỒNG DƯ

$a, b, m > 0$ là các số nguyên

a được gọi là đồng dư với b theo modulo m , kí hiệu $a \equiv b \pmod{m}$, nếu a có cùng số dư với b khi chia cho m

Nhận xét:

- 1)- $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{m}$
- 2)- a chia hết cho $m \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{m}$
- 3)- Quan hệ đồng dư là một quan hệ tương đương

Định lý: $a, b, m > 0$ là các số nguyên

Những mệnh đề sau đây là tương đương

- 1)- $a \equiv b \pmod{m}$
- 2)- $a = b + mt$ (t là một số nguyên)
- 3)- $(a-b) \equiv 0 \pmod{m}$

Tính chất của quan hệ đồng dư:

- 1- Nếu $a_i \equiv b_i \pmod{m}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) thì

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \equiv (b_1 + b_2 + \dots + b_n) \pmod{m}$$

$$(a_1 a_2 \dots a_n) \equiv (b_1 b_2 \dots b_n) \pmod{m}$$
- 2- $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow (a \pm c) \equiv (b \pm c) \pmod{m}$ (c là số nguyên)
- 3- $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv b + km \pmod{m}$ (k là số nguyên)

$$\Leftrightarrow a + km \equiv b \pmod{m}$$
- 4- $a \equiv b \pmod{m} \rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$ (n là số nguyên dương)
- 5- $a \equiv b \pmod{m} \rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$ (c là số nguyên)
- Nếu $(c, m) = 1$ thì $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$
- 6- Nếu c là số nguyên dương thì $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}$
- 7- Nếu $d > 0$ là ước chung của a, b, m thì

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$$

8- Nếu d là ước chung của a và b và $(d, m) = 1$

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$$

9- $a \equiv b \pmod{m_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) và $m = [m_1, m_2, m_3, \dots, m_n]$

$$\rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

10- $a \equiv b \pmod{m}$ và $d > 0$ là ước của $m \rightarrow a \equiv b \pmod{d}$

11- $a \equiv b \pmod{m}$ và d là ước chung của $a, m \rightarrow d$ là ước của b

12- $a \equiv b \pmod{m} \rightarrow (a, m) = (b, m)$

Định lý Wilson phát biểu rằng: cho p là số tự nhiên lớn hơn 1, khi đó p là số nguyên tố, khi và chỉ khi $(p-1)! + 1$ chia hết cho p .

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

VI- VÀNH CÁC LỚP THẲNG DƯ...

1. Vành các lớp thẳng dư

Định nghĩa:

Quan hệ đồng dư theo modulo m trên tập số nguyên Z là một quan hệ tương đương, nó phân hoạch tập hợp này thành m lớp tương đương, gọi là lớp thẳng dư, được kí hiệu như sau:

- Lớp $\bar{0}$ gồm các số đồng dư với 0 theo modulo m
- Lớp $\bar{1}$ gồm các số đồng dư với 1 theo modulo m
- Lớp $\bar{2}$ gồm các số đồng dư với 2 theo modulo m
-
- Lớp $\overline{m-1}$ gồm các số đồng dư với $(m-1)$ theo modulo m

Gọi Z_m là tập hợp các lớp thẳng dư

Ta định nghĩa Z_m như sau:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

Phần tử khả nghịch

$$\bar{a} \in Z_m$$

\bar{a} được gọi là phần tử khả nghịch của Z_m khi và chỉ khi tồn tại $\bar{b} \in Z_m$ sao cho:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1}$$

$\rightarrow a$ và m là số nguyên tố cùng nhau

2. Hệ thặng dư đầy đủ và hệ thặng dư thu gọn

Định nghĩa

Trong mỗi lớp của Z_m người ta chọn ra một phần tử, gọi là phần tử đại diện. Tập hợp phần tử đại diện đó gọi là một hệ thặng dư đầy đủ theo modulo m .

Hệ thặng dư thường dùng theo modulo m là:

$$0 \ 1 \ 2 \ \dots \dots \dots (m-1)$$

Nếu m là số lẻ, hệ thặng dư đầy đủ giá trị tuyệt đối nhỏ nhất có dạng:

$$-(m-1)/2 \ \dots \dots \dots -2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ \dots \dots \dots (m-1)/2$$

Định nghĩa

Trong mỗi lớp là phần tử khả nghịch của Z_m người ta chọn ra một phần tử, gọi là phần tử đại diện. Tập hợp các phần tử đại diện đó được gọi là một hệ thặng dư thu gọn theo modulo m . Người ta cũng nói đến hệ thặng dư thu gọn không âm bé nhất và giá trị tuyệt đối nhỏ nhất.

VD: Một hệ thặng dư thu gọn trong Z_8 là: $\{1, 3, 5, 7\}$

Bổ đề:

$a, b, m > 0$ là các số nguyên, $(a, m) = 1$

1)- Nếu x chạy qua hệ thặng dư đầy đủ modulo m thì $ax + b$ cũng chạy qua hệ thặng dư đầy đủ modulo m .

2)- Nếu x chạy qua hệ thặng dư thu gọn modulo m thì ax cũng chạy qua hệ thặng dư thu gọn modulo m .

3. Định lý Euler

Hàm số Euler $\varphi(m)$

m là số nguyên dương.

Hàm số Euler $\varphi(m)$ được định nghĩa như sau:

$$1)- \varphi(1) = 1$$

2)- Với $m > 1$, $\varphi(m)$ là số các số nguyên tố cùng nhau với m không vượt quá m

$$\varphi(10) = 4$$

$$\varphi(7) = 6$$

Nhận xét: Nếu p là số nguyên tố thì $\varphi(p) = p - 1$

Định lý:

1)- Nếu m_1 và m_2 là hai số nguyên dương và nguyên tố cùng nhau thì:

$$\varphi(m_1 m_2) = \varphi(m_1) \cdot \varphi(m_2)$$

2)- Nếu $m = p^\alpha$ với p là số nguyên tố và α là một số nguyên dương thì:

$$\varphi(m) = \varphi(p^\alpha) = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

3)- Nếu $m > 1$ và có dạng phân tích tiêu chuẩn $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$

thì:

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Định lý Euler:

Nếu a và $m > 0$ là hai số nguyên tố cùng nhau thì:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

Định lý Fermat:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$\rightarrow a^p \equiv a \pmod{p}$$

VII- PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ MỘT ẨN

1. Phương trình đồng dư một ẩn

Phép biến đổi tương đương **được sử dụng** trong phương trình đồng dư 1 ẩn:

$$1- a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow (a \pm c) \equiv (b \pm c) \pmod{m} \quad (c \text{ là số nguyên})$$

$$2- a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv b + km \pmod{m} \quad (k \text{ là số nguyên})$$

$$\Leftrightarrow a + km \equiv b \pmod{m}$$

$$3- \text{Nếu } (c, m) = 1 \text{ thì } a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$

$$4- \text{Nếu } c \text{ là số nguyên dương thì } a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}$$

5- Nếu $d > 0$ là ước chung của a, b, m thì

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$$

6- Nếu d là ước chung của a và b và $(d, m) = 1$

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$$

2. Phương trình đồng dư bậc nhất một ẩn.

Xét phương trình $ax \equiv b \pmod{m}$

$d = (a, m)$, khi đó

1)- Nếu d không là ước của b thì (2) vô nghiệm

2)- Nếu d là ước của b thì (2) có đúng d nghiệm

Gọi x_0 là một giá trị thỏa phương trình thì d nghiệm đó được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} x \equiv x_0 + 0 \cdot \frac{m}{d} & (\text{mod } m) \\ x \equiv x_0 + 1 \cdot \frac{m}{d} & (\text{mod } m) \\ \dots\dots\dots \\ x \equiv x_0 + (d-1) \cdot \frac{m}{d} & (\text{mod } m) \end{cases}$$

VIII- HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ BẬC NHẤT MỘT ẨN

Định lý Trung Quốc về phần dư

Nếu các modulo m_1, m_2, \dots, m_n là các số nguyên tố đôi thì hệ có duy nhất x xác định

$$\text{Tính } M = [m_1, m_2, \dots, m_n] = m_1 m_2 \dots m_n$$

$$\text{Tính } M_i = \frac{M}{m_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{Giải các phương trình đồng dư } M_i y \equiv a_i \pmod{m_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\rightarrow \text{Tìm được các nghiệm } y \equiv N_i \pmod{m_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Nghiệm của hệ:

$$x = M_1 N_1 + M_2 N_2 + \dots + M_n N_n \pmod{M}$$

Phương pháp thế

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} & (1) \\ x \equiv b \pmod{n} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} & (1) \\ x \equiv b \pmod{n} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad x \equiv a \pmod{m}$$

$$\Leftrightarrow x = mt + a \quad (*)$$

Thay (*) vào (2)

$$mt + a \equiv b \pmod{n}$$

$$\Rightarrow t \equiv c \pmod{o}$$

$$\Leftrightarrow t = ok + c \quad (**)$$

Thay (**) vào (*)

$$x = m(ok + c) + a$$

IX- PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ BẬC CAO MỘT ẨN

X- ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT ĐỒNG DƯ

CHƯƠNG 7: PHÉP ĐẾM

I- CÁC NGUYÊN LÝ ĐẾM

Nguyên lý cộng: Giả sử để làm công việc A có 2 phương pháp

- Phương pháp 1: n cách - Phương pháp 2: m cách

→ **Khi đó số cách làm công việc A là $n + m$**

Nguyên lý nhân: Giả sử để làm công việc A cần 2 bước

- Bước 1: n cách - Bước 2: m cách

→ **Khi đó số cách làm công việc A là $n.m$**

Nguyên lý bù trừ:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) + |A \cap B \cap C|$$

Nguyên lý Dirichlet: Nếu có N vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\lceil N/k \rceil$ vật.

II- ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Hoán vị: $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$

Chỉnh hợp: Sắp xếp có thứ tự của k phần tử vào n phần tử

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k \leq n)$$

Tổ hợp: Sắp xếp không có thứ tự của k phần tử vào n phần tử

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k \leq n)$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \quad C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$$

Hoán vị lặp: Cho n đối tượng trong đó có n_i đối tượng loại i giống hệt nhau ($i = 1, 2, \dots, k; n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$). Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n đối tượng đã cho gọi là một hoán vị lặp của n

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

$$C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!}$$

Chỉnh hợp lặp: Có n phần tử khác nhau, mỗi cách lấy k phần tử từ n phần tử có lặp, có kể thứ tự được gọi là chỉnh hợp chập k của n

$$B_n^k = n^k$$

Tổ hợp lặp: Mỗi cách chọn ra k vật từ n loại vật khác nhau (trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là tổ hợp lặp chập k của n

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

III- HỆ THỨC TRUY HỒI

Định nghĩa: Hệ thức truy hồi đối với dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi một hay nhiều số hạng đứng trước nó, cụ thể là $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ với mọi số nguyên $n \geq n_0, n_0 \geq 0$. Dãy số được gọi là lời giải hay là nghiệm của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi này.

Một số bài toán tiêu biểu:

1. Tháp Hà Nội

$hanoi(n - 1, a, b, c);$ //chuyển $n-1$ đĩa từ cột a sang cột b với c làm trung gian

$hanoi(1, a, c, b)$ //chuyển 1 đĩa từ cột a sang cột c với b làm cột trung gian

$hanoi(n - 1, b, c, a);$ //chuyển $n-1$ đĩa từ cột b sang cột c với a làm trung gian

Số lần di chuyển đĩa:

$$H_n = 2H_{n-1} + 1 = 2^n - 1$$

2. Bài toán lãi kép

$$P_n = (a)^n P_0$$

3. Họ nhà thỏ và số Fibonacci

$$F(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & \text{ khi } n = 1 \\ F(n - 1) + F(n - 2) & n > 1 \end{cases}$$

GIẢI HỆ THỨC TRUY HỒI

Định lý 1: Cho c_1, c_2 là hai số thực. Giả sử $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là r_1 và r_2 . Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1r_1^n + \alpha_2r_2^n$, với $n = 0, 1, 2, \dots$, trong đó α_1 và α_2 là các hằng số.

Định lý 2: Cho c_1, c_2 là hai số thực, với $c_2 \neq 0$. Giả sử $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ chỉ có một nghiệm là r_0 . Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1r_0^n + \alpha_2nr_0^n$, với $n = 0, 1, 2, \dots$, trong đó α_1 và α_2 là các hằng số.

Định lý 3: Cho c_1, c_2, \dots, c_k là các số thực. Giả sử rằng phương trình đặc trưng

$$r^k - c_1r^{k-1} - \dots - c_k = 0$$

có k nghiệm phân biệt là r_1, r_2, \dots, r_k . Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k r_{n-k}$$

nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \dots + \alpha_k r_k^n$, với $n = 0, 1, 2, \dots$, trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ là các hằng số.

Các bước để giải một bài toán hệ thức truy hồi: Ví dụ đây là giải hệ thức truy hồi dạng hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$

1. Phương trình đặc trưng

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0 \rightarrow r = ?$$

2. Nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng:

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \quad (*) \text{ hoặc } a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n \quad (*)$$

Dựa vào a_0, a_1 , (hoặc a_1, a_2 tùy bài toán) $\rightarrow \alpha_1$ và α_2

3. Thay vào (*) và cho ra kết quả cuối cùng

MUC LUC

CHƯƠNG 1: MỆNH ĐỀ VÀ VỊ TỪ	1
I- MỆNH ĐỀ	1
1. Định nghĩa mệnh đề.....	1
2. Các phép tính mệnh đề	1
3. Biểu thức mệnh đề (LOGICAL CONNECTIVES).....	2
4. Mệnh đề hệ quả và mệnh đề tương đương.	2
5. Các ứng dụng.....	3
II- VỊ TỪ	4
1. Các định nghĩa	4
2. Phép toán vị từ.....	4
3. Các lượng từ	4
4. Dịch các câu thông thường thành biểu thức logic.	5
CHƯƠNG II: SUY LUẬN TOÁN HỌC.....	6
I- MỞ ĐẦU	6
II- CÁC QUY TẮC SUY LUẬN.....	6
III- CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH	7
1. Chứng minh rằng (P là sai).....	7
2. Chứng minh tầm thường (Q là đúng)	7
3. Chứng minh trực tiếp.....	7

4. Chứng minh gián tiếp.	7
5. Chứng minh phản chứng.	7
6. Chứng minh qui nạp.	7
7. Chứng minh từng trường hợp.	7
8. Chứng minh tương đương.	7
CHƯƠNG III: QUAN HỆ.	8
I- KHÁI NIỆM VỀ QUAN HỆ.	8
1. Quan hệ giữa hai tập hợp.	8
2. Ký hiệu một quan hệ.	8
3. Đồ thị của một quan hệ.	8
4. Biểu diễn một quan hệ.	8
II- CÁC TÍNH CHẤT CỦA QUAN HỆ HAI NGÔI TRÊN MỘT TẬP HỢP.	9
1. Quan hệ hai ngôi trên một tập hợp.	9
2. Các tính chất của quan hệ trên một tập hợp.	10
III- QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG.	10
1. Quan hệ tương đương.	10
2. Lớp tương đương.	10
3. Phép phân hoạch.	10
IV- QUAN HỆ THỨ TỰ.	10
1. Quan hệ phản đối xứng.	10
2. Quan hệ thứ tự - tập hợp thứ tự.	10
3. Trội và bị trội.	10
4. Sơ đồ Hasse của một tập hợp thứ tự.	11
5. Tập hợp thứ tự toàn phần - riêng phần.	11
6. Những phần tử đặc biệt của tập hợp thứ tự.	11
V- DÀN.	11
1. Mở đầu.	11
2. Cận trên và cận dưới.	11
3. Dàn và các tính chất của dân.	11
4. Tình phân phối trong dân.	11
5. Phần tử bù - Dàn bị bù.	11
VI- ĐẠI SỐ BOOL.	11
1. Đại số bool.	11

2. Các tính chất của đại số bool.....	11
VII- ĐỊNH LÝ STONE	11
1. Đẳng cấu	11
2. Atom	11
3. Định lý Stone	11
CHƯƠNG IV - V: HÀM BOOL & ĐƠN GIẢN CÔNG THỨC	11
I- MỞ ĐẦU.	11
1. Cấu hình của mạch điện.	11
2. Mô tả mạch điện bằng bảng.....	11
3. Ví dụ	11
II- HÀM BOOL n BIẾN.....	11
1. Đại số bool B^1	11
2. Hàm bool	11
3. Đại số bool của các hàm bool.....	12
III - DẠNG TUYỂN (v) CHUẨN TẮC	12
1. Nhắc lại định lý Stone	12
2. Từ tối tiểu	12
3. Biểu diễn từ tối tiểu dưới dạng tích các literal.	12
4. Viết dạng tuyển chuẩn tắc.....	12
IV- DẠNG HỘI (^) CHUẨN TẮC.....	12
1. Từ tối đại.....	12
2. Biểu diễn từ tối đại dưới dạng tổng các literal	12
3. Viết dạng hội chuẩn tắc	12
V- HỆ PHƯƠNG TRÌNH BOOL VÀ PHỦ TỐI TIỂU	12
1. Hệ phương trình bool.....	12
2. Phương pháp giải hệ phương trình bool	12
3. Phủ tối tiểu.....	13
VI. SỰ TỔNG HỢP HÀM BOOL	14
1. Mạch điện	14
2. Hàm truyền của mạch điện	14
3. Mắc nối tiếp và mắc song song	14
4. Phép toán trên tập hợp các mạch điện	14
5. Tổng hợp hàm bool.....	14

6. Các loại cổng	14
I- VẤN ĐỀ VỀ SỰ ĐƠN GIẢN CÔNG THỨC	14
1. Mở đầu. 2. Sự đơn giản công thức	14
II- CÔNG THỨC TỐI TIỂU.....	14
1. Đơn thức 2. Ước 3. Công thức dạng đa thức.....	14
4. Công thức tối giản dạng đa thức.....	14
5. Quan hệ đơn giản hơn.....	14
6. Công thức tối thiểu dạng đa thức.....	14
III- PHƯƠNG PHÁP KARNAUGH.....	14
1. Giới thiệu phương pháp.....	14
2. Sắp xếp các phần tử của B^3 và B^4 vào bảng Karnaugh	14
3. Sơ đồ Karnaugh của hàm bool 3 biến và 4 biến.....	14
4. Sơ đồ Karnaugh của một từ tối thiểu.....	14
5. Sơ đồ Karnaugh của một đơn thức	14
6. Tìm công thức tối thiểu bằng phương pháp Karnaugh.....	14
7. Vài ví dụ	14
IV- PHƯƠNG PHÁP CONSENSUS.....	14
1. Nguyên nhân. 2. Nguyên nhân nguyên tố.....	14
3. Consensus	14
4. Tìm nguyên nhân nguyên tố	14
5. Tìm phủ tối thiểu các nguyên nhân nguyên tố	14
V- PHƯƠNG PHÁP QUINE-MC CLUSKEY	14
CHƯƠNG VI: LÝ THUYẾT CHIA VÀ ĐỒNG DƯ	15
I- PHÉP CHIA HẾT VÀ CÓ DƯ.	15
1. Phép chia hết.....	15
2. Phép chia có dư.....	15
II- ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT VÀ BỘI CHUNG NHỎ NHẤT.....	16
1. Ước chung lớn nhất (UCLN).....	16
2. Bội chung nhỏ nhất (BCNN).....	17
III- SỐ NGUYÊN TỐ VÀ HỢP SỐ.....	18
1. Định nghĩa	18
2. Bảng số nguyên tố - Sàng Erathosthene	18
3. Định lý cơ bản của số học.	19

4. Một số vấn đề về số nguyên tố	19
IV- PHƯƠNG TRÌNH NGUYÊN	19
1. Phương trình nguyên bậc nhất 2 ẩn	19
2. Phương trình nguyên bậc nhất nhiều ẩn	19
3. Phương trình bậc cao	20
V- QUAN HỆ ĐỒNG DƯ	20
VI- VÀNH CÁC LỚP THẶNG DƯ.....	21
1. Vành các lớp thặng dư	21
2. Hệ thặng dư đầy đủ và hệ thặng dư thu gọn	22
3. Định lý Euler	22
VII- PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ MỘT ẨN	23
1. Phương trình đồng dư một ẩn.....	23
2. Phương trình đồng dư bậc nhất một ẩn.	23
VIII- HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ BẬC NHẤT MỘT ẨN	24
IX- PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ BẬC CAO MỘT ẨN.....	24
X- ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT ĐỒNG DƯ	24
CHƯƠNG 7: PHÉP ĐẾM	25
I- CÁC NGUYÊN LÝ ĐẾM	25
II- ĐẠI SỐ TỔ HỢP.....	25
III- HỆ THỨC TRUY HỒI.....	26