BT 12

a) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1$

$= 2\dfrac{n(n+1)}{2} - n = n^2$

b) $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 2^i = \dfrac{1}{2}\dfrac{2\,2^n - 1}{2-1}$

$= 2^n - 1$

c) $\sum_{i=1}^{n} i(3i-1) = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i$

$= \dfrac{3.\,n(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{n(n+1)}{2}$

$= \dfrac{n(n+1).2n}{2} = n^2.(n+1)$

d) $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1}\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{n+1}$

e) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = 4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$

$$= \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - 2n(n+1) + n$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1) - 6n(n+1) + 3n}{3}$$

$$= \frac{n.(2(n+1).(2n+1) - 6.(n+1) + 3)}{3}$$

$$= n.\frac{(4n^2 + 6n + 2 - 6n - 6 + 3)}{3}$$

$$= \frac{n.(4n^2 - 1)}{3}$$

f) $$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{n.(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = \frac{n.(n+1)(n+2)}{3}$$

g) $$\sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^n - 1}{a - 1} \times a.$$

Câu 18.

Ta có biểu thức

$$4x + 5y = k$$

Kiểm tra các số từ 12 tới 15

$12 = 3 \times 4$

$13 = 3 \times 2 + 1 \times 5$

$14 = 1 \times 4 + 2 \times 5$

$15 = 3 \times 5.$

Tổng quát:

$4x = 4.x$

$4x + 1 = 4(x - 1) + 5$

$4x + 2 = 4(x - 2) + 5 \times 2$

$4x + 3 = 4(x - 3) + 5 . 3$

Vậy $x \geq 3$ thì mới có thể hoàn tiền được.

d) $\sum_{i=1}^{n} i 2^i = (n-1) 2^{n+1} + 2$

$P(1) = 1.2^1 = 2 = 2 + 0.2^2$ Đúng

Vậy P(1) đúng

$P(K) + (K+1).2^{K+1} = P(K+1)$

$(K-1).2^{K+1} + 2 + (K+1)2^{K+1} = 2 + K 2^{K+2}$

$= 2 + (K-1) 2^{K+1} + (K+1) 2^{K+1}$

$= 2 + [(K-1) + (K+1)] 2^{K+1} = 2 + 2^{K+2}$

Kết luận $\forall n \geq 1$ P(n) là đúng

Câu 5.

Ta có công thức $20a + 50b = K \Leftrightarrow 10(2a + 5b)$

Với $b = 0$, ta có $K = 20, 40, 60, 80, \ldots$ (chục chẵn)

Với $b = 1$, ta có $\begin{cases} \text{Với } a = 0 \Rightarrow K = 50 \\ a = 1 \Rightarrow K = 70 \\ a = 2 \Rightarrow K = 90 \end{cases}$ Thực tế

Ta suy luận với số 40 \$ trở lên có thể rút được theo ~~bợ~~ ước chung là 10 \$

Câu 7.

a) Thay vì chứng minh nếu $n^3 + 5$ là một số nguyên lẻ thì n là một số chẵn thì ta chứng minh,

nếu n là số lẻ thì $n^3 + 5$ là một số nguyên chẵn.

$n = 2k + 1 \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n^3 + 5 = (2k + 1)^3 + 5.$

$= 8k^3 + 12k^2 + 3.2k1 + 6 \vdots 2$

Vậy $n^3 + 5$ là một số nguyên lẻ thì n là một số chẵn.

Câu 8

Ta đặt p : $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Cho phản chứng $\bar{p}$ $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ

$\sqrt{2} = \dfrac{a}{b} \quad (a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0) \quad$ UCLN$(a, b) = 1 \quad (1)$

$\rightarrow 2 = \dfrac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow$ a là số chẵn.

$\rightarrow$ b là số chẵn

$(4c^2 = 2b^2)$

Vậy UCLN$(a, b) \geq 2$ (mâu thuẫn với (1))

$\Rightarrow \sqrt{2}$ là số vô tỉ

HỒNG HÀ

Câu 9

Giả sử $\log_p q$ là số hữu tỉ

$\log_p q = \frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$

$\Rightarrow p^{\frac{a}{b}} = q$

$\Rightarrow p^a = q^b$

$\Rightarrow \cancel{b \log_p q = a}$

Điều này vô lí vì q, p là các số nguyên dương và không có ước chung lớn nhất là 1

Vậy $\log_p q$ là số vô tỉ.