1. **Ứng dụng phân tích QR giải bài toán LLS**

Phân tích QR(QR decomposition) là phân tích một ma trận A thành tích của hai ma trận Q và R sao cho với :

* Q là một ma trận trực giao.
* R là một ma trận tam giác trên.

Với các bài toán bình phương tối thiểu tuyến tính có dạng , ta sử dụng phương trình chuẩn để tìm tham số x :

Thay ta có

Vì Q là ma trận trực giao nên có tính chất

(\*)

Vậy từ phương trình chuẩn, áp dụng phân tích QR đưa về dạng phương trình (\*), với R là ma trận tam giác và vế phải là 1 vector. Từ đây có thể dễ dàng giải bằng kỹ thuật thay thế lùi(back substitution).

**Lý do sử dụng phân tích QR**

Cách tính trực tiếp từ phương trình chuẩn có sử dụng phép nghịch đảo ma trận cần sử dụng nhiều sức mạnh tính toán, với ma trận cỡ lớn sẽ bị chậm. Hơn nữa máy tính sử dụng số học dấu phẩy động, cho nên phép nghịch đảo sẽ tiềm ẩn nguy cơ gây sai số.

**=> Do đó sử dụng các phương pháp phân tích ma trận để thay để phép nghịch đảo. Phân tích QR là một trong số đó.**

**Demo**

Sử dụng bộ dữ liệu của D. Forbes về mối quan hệ giữa nhiệt độ sôi của nước và áp suất.

Dữ liệu như sau

**A picture containing text, receipt

Description automatically generated**

**Octave code**

**Graphical user interface, text, application

Description automatically generated**

**Kết quả**

**Chart, scatter chart

Description automatically generated**

1. **Tìm hiểu SVD**

Cho ma trận A bất kỳ, phép biến đổi

Sao cho và là hai ma trận trực giao, là ma trận đường chéo.

Các phần tử của (các singular values- SV) là dương và giảm dần về 0 sao cho

– hạng của A(số cột độc lập túyến tính tối đa của ma trận A).

Biểu diễn khác của SVD sử dụng phép nhân ngoài(outer product) các vector

lần lượt là các vector cột của ma trận .

**Nén hình ảnh**

Ma trận A tương đương với một bức ảnh xám hóa (gray scale) có giá trị các phần tử từ 0-255.

Khi nén hình ảnh, tổng trên không thường cộng đến đến SV cuối cùng, các SV có giá trị đủ nhỏ sẽ bị loại bỏ. (Các SV được sắp xếp giảm dần theo đường chéo.)

Xấp xỉ ma trận A bằng ma trận có hạng thấp hơn được thực hiện qua việc chỉ lấy k giá trị SV đầu tiên

Ma trận gọi là xấp xỉ hạng k của A, sử dụng ít lưu trữ hơn mà vẫn đảm bảo được các đặc trưng của ma trận ban đầu.

Số lượng giá trị lưu trữ cho là

Ví dụ

Bức ảnh xám ban đầu có kích cỡ 361 \* 640

A picture containing text, cat, white, screenshot

Description automatically generated A picture containing text, cat, white, screenshot

Description automatically generated

Chọn các giá trị SV lớn hơn 1% giá trị SV lớn nhất(thu được k = 62) , ảnh bị nén vẫn giữ được các nét quan trọng của ảnh gốc.

Vậy là thay vì phải lưu trữ 361 \* 640 = 218 240 giá trị, thì ta chỉ cần lưu trữ 62 \* (361 + 640 + 1) = 50 100 giá trị, xấp xỉ 25% giá trị ban đầu để lưu bức ảnh.

Đoạn code sử dụng

Text

Description automatically generated

1. **Tham khảo**

<https://math.stackexchange.com/questions/3185211/what-does-qr-decomposition-have-to-do-with-least-squares-method>

<http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/133A/lectures/ls.pdf>

<https://www.researchgate.net/publication/348792251_Truncated_singular_value_decomposition_in_ripped_photo_recovery>

<https://stackoverflow.com/questions/13614886/using-svd-to-compress-an-image-in-matlab>