Engenharia
Transferência de calor e Mecânica dos Sólidos

AULA 26 – MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

CONTEÚDO E OBJETIVOS DE APRENDIZADO: Como implementar a solução por diferenças finitas da equação do calor?

PARTE 1 – INTRODUÇÃO

Verificamos, nas ultimas aulas, que a expressão geral para a difusão de calor, em coordenadas cartesianas pode ser escrita como:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q}$$

- Faça uma revisão da última aula para relembrar qual a condição física descrita acima e o significado de cada um dos termos na equação.

A equação do calor ou de difusão de calor é uma equação diferencial parcial parabólica de segunda ordem e que com condições de contorno apropriadas determina o campo de temperatura, ou seja, representa como a temperatura varia com a posição no meio. Observamos também que, para transferência de calor unidimensional em regime permanente e sem geração de energia, a equação da difusão se reduz a:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$$

Essa equação é chamada de equação de Laplace, e é usada tipicamente para caracterizar sistemas estacionários, indicado pela ausência de derivada temporal.

PARTE 2 – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO CALOR

Em geral, a solução analítica ou exata de problemas complexos envolvendo equações diferenciais parciais, demandam grande esforço e sofisticação matemática. Daí a necessidade do desenvolvimento de algoritmos ou métodos numéricos para solução de problemas reais. Entre os principais métodos numéricos utilizados para resolução dessas equações encontramos, além do método dos elementos finitos, o método das diferenças finitas.

PARTE 3 – MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

A ideia central do método das diferenças finitas é substituir as derivadas parciais na equação diferencial parcial, que descreve a condução do calor, por uma equação de diferença algébrica. Dessa forma, é possível transformar a resolução de uma equação diferencial parcial em um sistema de equações algébricas que pode facilmente ser executado em computadores. Em outras palavras, o método consiste na discretização do domínio, como ilustra a Fig. 1a e 1b, e na substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações utilizando apenas os valores numéricos da função. Para representar a aproximação da segunda derivada no espaço, utilizamos a diferença finita centrada, reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

Para representar a primeira derivada no tempo utilizamos a diferença progressiva, que é expressa da seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t}$$

Os valores T_i^l representam valores de temperatura na malha definida como na Fig. 1.

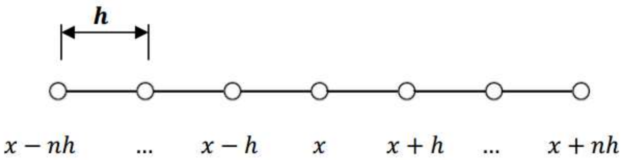

Fig. 1a – Discretização de malha unidimensional.

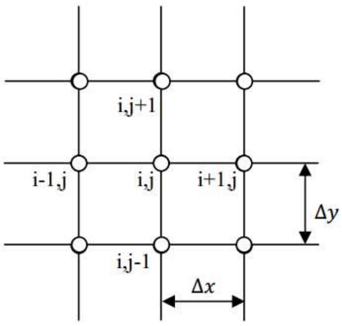

Fig. 1b – Discretização de malha bidimensional

- ✓ Para entender os detalhes da aplicação do método das diferenças finitas, faça a leitura do Cap 29 “Diferenças Finitas: Equações elípticas”, e Cap30 “Diferenças Finitas: Equações parabólicas”, do livro CHAPRA, STEVEN C.; CANALE, RAYMOND P. Numerical Methods for Engeneers. 6TH ED. NEW YORK: MCGRAW-HILL HIGHER EDUCATION.

PARTE 4 – IMPLEMENTAÇÃO UNIDIMENSIONAL

Para praticar, vamos aplicar os conceitos discutidos sobre o método das diferenças finitas e obter a solução aproximada de um problema envolvendo condução de calor em uma barra unidimensional. Nesse caso, aplicando o método das diferenças finitas na equação do calor considerando o regime transiente teremos:

$$T_i^{l+1} = T_i^l + \left(\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)\left(T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l\right)$$

- ✓ Verifique a relação anterior substituindo os termos para a aproximação das derivadas parciais na equação do calor após as devidas simplificações do modelo e sabendo que $F_0 = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$.

- ✓ Considere a seguinte situação: Uma barra de alumínio com 50 cm de comprimento e dimensões desprezíveis em relação ao eixo y e z, foi isolada termicamente em ambos os lados de modo a não trocar calor com o ambiente externo. Inicialmente, essa barra foi mantida a uma temperatura constante de $20°C$ e suas extremidades foram mantidas a 0 °C, como ilustra a Fig. 2. Sabendo que o alumínio possui difusividade térmica $\alpha = 1 \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$, faça a implementação de um programa para determinar a temperatura $T(x, t)$ em qualquer instante de tempo e posição na barra, usando o método das diferenças finitas.

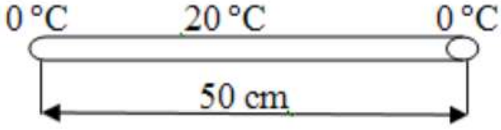

Fig. 2 – Distribuição de temperatura inicial em uma barra de alumínio.

Lembre-se que a temperatura $\boldsymbol{T(x,t)}$ da barra, satisfaz a equação do calor

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{\alpha}\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{x}^2}$$

Com condições iniciais$\boldsymbol{T(x,0) = 20}$ para $\boldsymbol{0 < x < 50cm}$ e condições de contorno, $\boldsymbol{T(0,t) = 0}$ e $\boldsymbol{T(L,t) = 0}$ para $\boldsymbol{t > 0}$.

- ✓ Use uma malha uniforme com espaçamento de 5 cm no comprimento da barra (Δx) e $5s$ em relação ao tempo (Δt), de modo que $\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0{,}2$.

- ✓ Compare seus resultados com a solução analítica para um determinado instante de tempo.

$$T(x,t) = \frac{80}{\pi}\sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} e^{\left(\frac{-n^2\pi^2\alpha t}{2500}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

- ✓ Construa um gráfico ($Temperatura \times posição$) para diferentes intervalos de tempo.
- ✓ Na Tabela 4.2 (INCROPERA, F. P.; WITT, D. P. Fundamentos de Transferência de Calor e Massa, 6A EDIÇÃO, LTC, 2008.) são fornecidas as equações de diferenças finitas para regiões nodais comuns. Faça uma pesquisa e discuta com os colegas quais seriam as modificações necessárias para adaptar o modelo para simulação do comportamento térmico de uma aleta.

PARTE 5 – DIFERENÇAS FINITAS BIDIMENSIONAL

A transferência de calor em uma placa retangular, cujos lados estão submetidos a diferentes temperaturas, como ilustra a Fig. 3, pode ser representada pela expressão geral para a difusão de calor, em coordenadas cartesianas.

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q}$$

Considerando que todos os pontos da placa estejam a uma temperatura inicial To e sendo esta temperatura diferente das temperaturas das bordas e que o termo fonte de geração de calor seja nulo, o problema que se coloca é determinar a temperatura em qualquer ponto interno da placa em um dado instante de tempo.

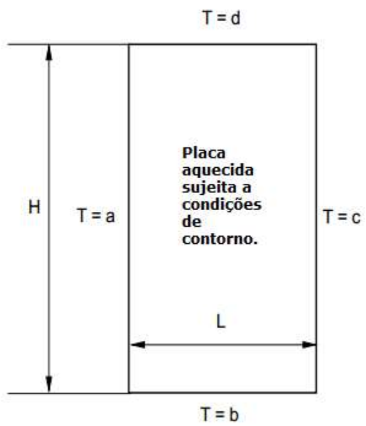

Fig. 3 – Domínio do problema para análise térmica da placa.

- ✓ Faça as devidas simplificações no modelo e determine a equação do calor, em coordenadas cartesianas, para o problema da condução de calor na placa.

PARTE 6 – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO CALOR BIDIMENSIONAL

A aplicação do MDF (método das diferenças finitas) para o problema proposto pode ser resumida em três etapas:

- ❖ Discretização do domínio (malha espacial) e das derivadas.

Nessa etapa devemos considerar uma malha cuja distância entre os nós sejam Δx na direção x e Δy na direção y.

- ❖ Escolha de um esquema temporal e discretização temporal.

Nessa etapa devemos considerar a discretização usando diferenças adiantadas para a derivada temporal.

- ❖ Cálculo de $T(x, y, t)$.

Nessa etapa os valores de temperatura para qualquer ponto interno da placa são determinados para cada instante de tempo.

- ✓ Usando diferenças centrais para o cálculo das derivadas espaciais, diferenças adiantadas para a derivada temporal, faça as devidas simplificações na equação do calor para obter uma expressão que represente a temperatura em pontos discretos da placa.

PARTE 7 – IMPLEMENTAÇÃO BIDIMENSIONAL

Se considerarmos $\Delta \mathrm{x} = \Delta \mathrm{y}$ na equação anterior, como na Fig 4, podemos isolar o termo $T_{i,j}^{p+1}$ que representa a temperatura em um ponto (i, j) da malha, no instante de tempo $p + 1$, com o termo $F_0 = \alpha \Delta t / \Delta x^2$. Nesse caso, todos os valores de temperatura da iteração atual são calculados com base nos valores de T da iteração anterior, por esse método de solução é chamado explícito, ou seja, o campo de temperatura é calculado explicitamente para cada iteração temporal.

$$T_{i,j}^{p+1} = \mathrm{F}_0\left(T_{i+1,j}^{p} + T_{i-1,j}^{p} + T_{i,j+1}^{p} + T_{i,j-1}^{p}\ \right) + (1 - 4\mathrm{F}_0)T_{i,j}^{p}$$

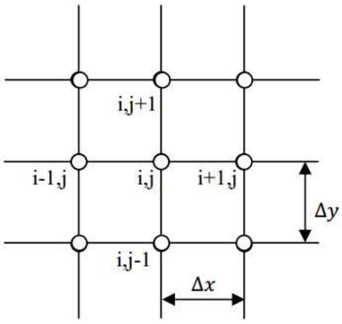

Fig. 4 – Discretização de malha bidimensional

- ✓ É bom lembrar que na formulação por diferenças finitas explícita, devemos observar com cuidado os problemas relacionados à estabilidade. Portanto, faça a leitura da seção 30.2.1 “Convergência e estabilidade” do livro CHAPRA, STEVEN C.; CANALE, RAYMOND P. Numerical Methods for Engeneers. 6TH ED. NEW YORK: MCGRAW-HILL HIGHER EDUCATION.

Para praticar, trabalhe com seu grupo o desenvolvimento do programa usando diferenças finitas para solução numérica da equação do calor em uma placa com condições de contorno definidas, como ilustra a Fig. 3. Procure discutir sobre os seguintes tópicos:

I. Implementação de função para construção da malha de cálculo que represente o domínio discretizado no qual se deseja conhecer o campo de temperatura;
II. Implementação de função para aplicação das condições de contorno para o problema, na qual as temperaturas dos nós de fronteira são conhecidas;
III. Procedimento iterativo de evolução temporal.
IV. Construção de um modelo para validar o programa implementado (Fusion, Energy2D).

Considere a placa quadrada $40 \times 40\ cm$ de alumínio, e com as condições de contorno de temperatura como indicado na Fig. 5.

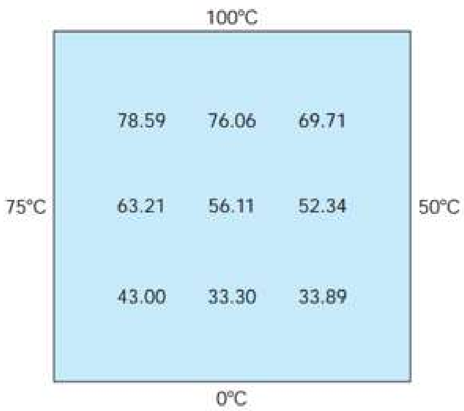

Fig. 5 – Distribuição de temperatura em placa quadrada de alumínio. Condições de contorno de Dirichlet. A temperatura nas bordas é mantida constante.

Considere $\alpha = 9.4967 \times 10^{-5}\, m^2/s$ e use uma malha com espaçamento $\Delta x = \Delta y = 0{,}08\, m$ e $\Delta t = 1s$. Assuma que as temperaturas indicadas na figura estão em °C e que todos os nós internos na malha estão a 0°C.

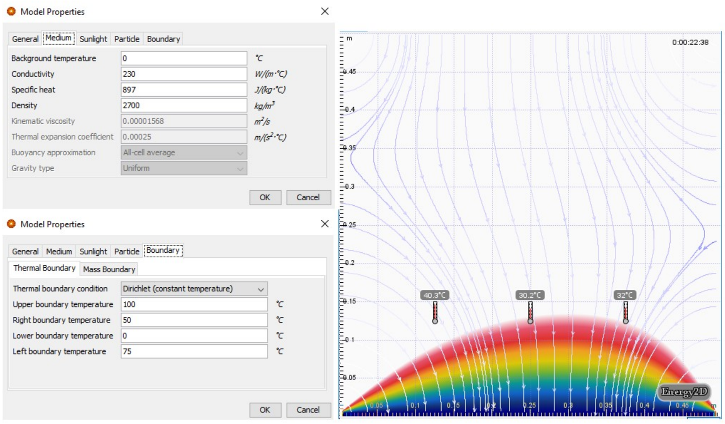

Fig. 6 – Distribuição de temperatura em uma placa aquecida sujeita a condições de contorno fixa de temperatura nas bordas. O modelo foi simulado usando o software Energy 2D.

Para avaliar a convergência da solução, considere o máximo valor para o erro relativo de acordo com a relação, para cada iteração.

$$|(\varepsilon_a)_{i,j}| = \left| \frac{T_{i,j}^{\text{new}} - T_{i,j}^{\text{old}}}{T_{i,j}^{\text{new}}} \right| 100\%$$

BIBLIOGRAFIA:

- ✓ MUNSON, B. R.; MORAN, M. J.; SHAPIRO, H. N. INTRODUÇÃO À ENGENHARIA DE SISTEMAS TÉRMICOS, LTC, 2012.
- ✓ INCROPERA, F. P.; WITT, D. P. FUNDAMENTOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA, 6A EDIÇÃO, LTC, 2008.
- ✓ CHAPRA, STEVEN C.; CANALE, RAYMOND P. NUMERICAL METHODS FOR ENGENEERS. 6TH ED. NEW YORK: MCGRAW-HILL HIGHER EDUCATION, C2010. 968 P. ISBN 9780073401065 (ENC.)