

**Handout Buổi 7:**  
**Chương 3: Đồ thị - Đẳng cấu, đồ thị con và các đơn đồ thị đặc biệt.**

### 1. Mục tiêu buổi học

- Hiểu định nghĩa **đẳng cấu** đồ thị và cách xác định hai đồ thị có đẳng cấu hay không.
- Nắm được khái niệm **đồ thị con** và các loại đồ thị con.
- Làm quen với các **đơn đồ thị đặc biệt**: đồ thị đầy đủ, đồ thị vòng, đồ thị bánh xe, đồ thị lập phương, đồ thị phân đôi.
- Vận dụng kiến thức vào bài tập nhận dạng và phân tích các loại đồ thị đặc biệt và ứng dụng thực tiễn.

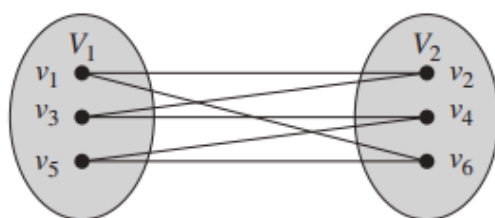
## PHẦN 1: LÝ THUYẾT

### 3.4. Đẳng cấu và đồ thị con

#### 3.4.1. Đẳng cấu

**Định nghĩa:** Hai đồ thị  $G=(V,E)$  và  $G'=(V',E')$  được gọi là **đẳng cấu** với nhau nếu tồn tại một ánh xạ song ánh  $f:V\rightarrow V'$  (tức là  $f$  là vừa **một-một** (injective) vừa **onto** (surjective)), sao cho:  $\{u,v\} \in E$  nếu và chỉ nếu  $\{f(u),f(v)\} \in E'$

Nói cách khác, ánh xạ  $f$  sẽ "gán" mỗi đỉnh của  $G$  cho đúng một đỉnh của  $G'$ , đồng thời giữ nguyên mỗi liên hệ cạnh giữa các đỉnh.



**FIGURE 7** Showing that  $C_6$  is bipartite.

#### Ý nghĩa thực tiễn:

- Đẳng cấu đồ thị cho thấy rằng về mặt **cấu trúc kết nối**, hai đồ thị hoàn toàn giống nhau, dù hình vẽ có thể trông rất khác nhau.

- Với sinh viên IT, khái niệm này rất quan trọng trong các bài toán **so khớp mạng máy tính, cấu trúc dữ liệu, tối ưu hóa thuật toán đồ thị, so sánh các sơ đồ cơ sở dữ liệu**, v.v.

#### Ví dụ minh họa:

- Một mạng máy tính có sơ đồ kết nối khác với sơ đồ lý thuyết, nhưng nếu hai sơ đồ đẳng cấu, chúng thực sự tương đương về khả năng truyền tin.

#### Cách nhận biết hai đồ thị có đẳng cấu:

##### Ghi chú:

1. **Số lượng đỉnh và số lượng cạnh phải bằng nhau.** Nếu không, lập tức loại trừ khả năng đẳng cấu.
2. **Bậc của từng đỉnh phải tương ứng.** (Số cạnh nối vào từng đỉnh phải giống nhau qua ánh xạ.)
3. **Kiểm tra các đặc trưng cấu trúc:**
  - Số lượng chu trình (vòng) trong đồ thị.
  - Các kiểu cấu trúc nhỏ như tam giác (cycle độ dài 3), tứ giác,...
4. **Nếu khả thi, tìm ánh xạ song ánh thực sự giữa các đỉnh.**

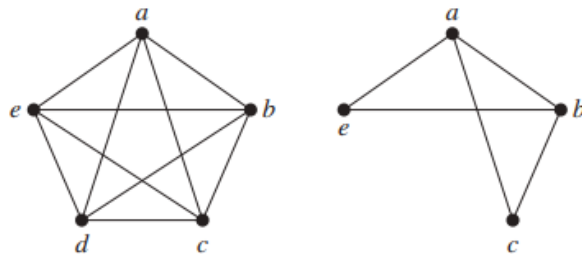
##### Lưu ý:

- Việc tìm ánh xạ đẳng cấu tổng quát là **bài toán NP-complete**. Với đồ thị lớn, cần có kỹ thuật hoặc phần mềm hỗ trợ.
- Với đồ thị nhỏ ( $\leq 6$  đỉnh), sinh viên nên thực hành kiểm tra thủ công để hiểu bản chất.

#### 3.4.2. Đồ thị con

**Định nghĩa:** Cho đồ thị  $G=(V,E)$ , một đồ thị  $H = (V_H,E_H)$  gọi là **đồ thị con** của  $G$  nếu:

- $V_H \subseteq V$  (tập đỉnh của  $H$  là tập con của tập đỉnh  $G$ ),
- $E_H \subseteq E$  (tập cạnh của  $H$  là tập con của tập cạnh  $G$ ).



### Ý nghĩa thực tiễn:

- Khi phân tích mạng lớn hoặc cấu trúc dữ liệu phức tạp, ta thường cần tập trung vào các phần nhỏ hơn (các đồ thị con) để xử lý, kiểm thử, hoặc tối ưu.

### Ví dụ thực tế:

- Trong mạng xã hội, một nhóm bạn bè có thể được xem như một đồ thị con của toàn bộ mạng người dùng.

### Phân loại đồ thị con:

#### 1. Đồ thị con đơn thuần:

- Lấy một tập con đỉnh tùy ý và một tập con cạnh tùy ý từ  $G$ .
- Không nhất thiết giữ toàn bộ các cạnh giữa các đỉnh.

#### 2. Đồ thị con cảm ứng (Induced Subgraph):

- Lấy một tập con các đỉnh  $V_H \subseteq V$
- **Bắt buộc** lấy toàn bộ các cạnh có cả hai đầu mút trong  $V_H$
- Tức là:  $E_H = \{ \{u,v\} \in E : u, v \in V_H \}$

### Ghi nhớ nhanh:

- Nếu chỉ lấy đỉnh, bỏ cạnh, gọi là đồ thị con thường.
- Nếu lấy đỉnh và **giữ nguyên tất cả các kết nối có sẵn giữa chúng**, gọi là **đồ thị con cảm ứng**.

### Minh họa:

- Đồ thị  $G$ :  
 $V = \{a, b, c, d\}, E = \{ \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, d\}, \{b, d\} \}$
- Chọn  $V_H = \{a, b, d\}$ :
  - Nếu  $E_H = \{ \{a, b\} \} = \{ \{a, b\} \} \rightarrow$  Đồ thị con thường.
  - Nếu  $E_H = \{ \{a, b\}, \{a, d\}, \{b, d\} \} \rightarrow$  Đồ thị con cảm ứng.

### Ghi chú:

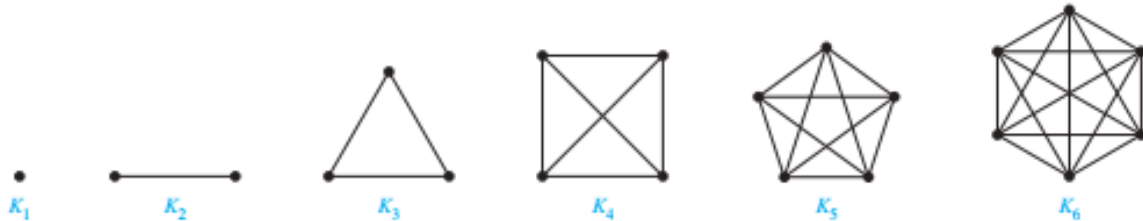
- **Khi dạy phần này**, người học dễ bị nhầm giữa đồ thị con và đồ thị con cảm ứng.
- **Mẹo nhớ:** "Cảm ứng" nghĩa là **không tự ý bỏ cạnh** nào giữa các đỉnh đã chọn.

### 3.5. Những đơn đồ thị đặc biệt

#### 3.5.1. Đồ thị đầy đủ $K_n$

**Định nghĩa:** Đồ thị đầy đủ  $K_n$  là đồ thị đơn trong đó **mọi cặp hai đỉnh khác nhau đều được nối với nhau bằng đúng một cạnh**.

- $n$  là số lượng đỉnh trong đồ thị.



**Tính chất quan trọng:**

- Mỗi đỉnh có bậc  $n-1$ .

Tổng số cạnh của đồ thị đầy đủ  $K_n$  là:

$$|E| = \frac{n(n-1)}{2}$$

(vì mỗi cặp hai đỉnh tạo ra đúng một cạnh, và có  $\binom{n}{2}$  cặp).

**Ý nghĩa thực tiễn:**

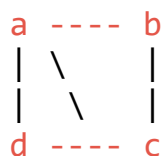
- Mô hình hóa mạng kết nối hoàn toàn, nơi mọi nút đều giao tiếp trực tiếp với mọi nút khác.

Ví dụ: Trong một mạng máy tính nội bộ nhỏ, nếu mỗi máy kết nối trực tiếp với mọi máy khác  $\rightarrow$  mô hình  $K_n$

**Minh họa:**

- $K_3$  (3 đỉnh): Tam giác đầy đủ (3 đỉnh, 3 cạnh)
- $K_4$  (4 đỉnh): Tứ giác đầy đủ (6 cạnh nối mọi cặp đỉnh)
- $K_5$ : Mỗi đỉnh nối với 4 đỉnh khác, tổng 10 cạnh.

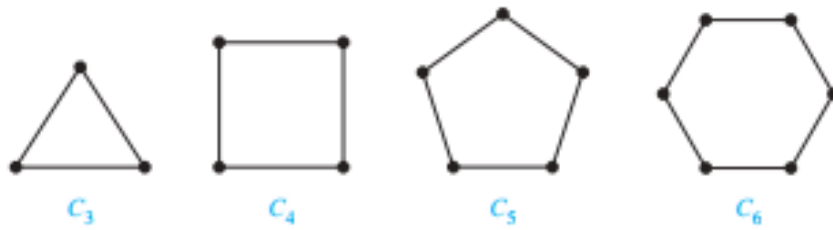
**Hình ảnh sơ đồ  $K_4$**



#### 3.5.2. Đồ thị vòng $C_n$

**Định nghĩa:** Đồ thị vòng  $C_n$  là đồ thị đơn gồm  $n$  đỉnh được nối thành **một chu trình đơn khép kín**, sao cho:

- Mỗi đỉnh liên kết đúng với **2 đỉnh lân cận** (bậc đỉnh = 2).
- Không có cạnh lặp hay cạnh đa nối giữa hai đỉnh.



### Tính chất:

- Số lượng cạnh bằng số lượng đỉnh:  $|E|=n$ .
- Mỗi chu trình bao quanh toàn bộ các đỉnh, không có nhánh rẽ.

### Ý nghĩa thực tiễn:

- Mô hình hóa các hệ thống tuần hoàn:
  - Vòng đồng hồ (các trạng thái quay tuần hoàn).
  - Dạng sơ đồ kiểm tra tuần tự (trong các thuật toán hoặc quy trình kỹ thuật).

### Lưu ý:

$C_3$  cũng chính là  $K_3$  (tam giác), vì trong 3 đỉnh thì mọi cặp đều nối.

### Minh họa:

- $C_4$



- Cạnh nối:  $\{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{d,a\}$ .

### Ghi chú:

- Người học thường dễ nhầm giữa  $K_n$  và  $C_n$  nếu không để ý kỹ:
- $K_n$  : Mọi cặp đỉnh đều nối.
- $C_n$  : Chỉ nối thành **vòng tuần tự**, mỗi đỉnh nối 2 đỉnh lân cận thôi.
- **Mẹo nhớ nhanh:**  
 "K đầy đủ" → "Kết nối mọi nơi",  
 "C vòng" → "Chu trình tuần tự".

### 3.5.3. Đồ thị bánh xe $W_n$

**Định nghĩa:** Đồ thị bánh xe  $W_n$  là đồ thị được tạo thành bằng cách:

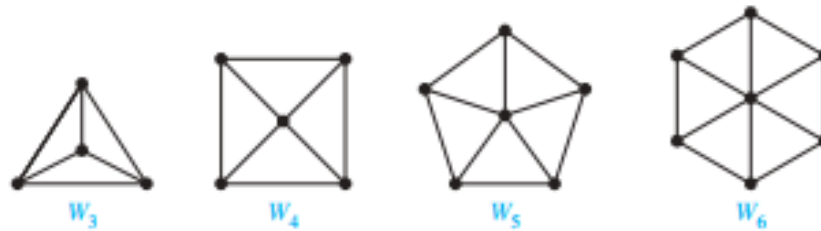
Bắt đầu từ một **đồ thị vòng**  $C_{n-1}$  (chu trình với  $n - 1$  đỉnh).

- o Thêm một **đỉnh trung tâm** mới.

Nối đỉnh trung tâm này với **tất cả** các đỉnh của  $C_{n-1}$ .

Tổng cộng đồ thị  $W_n$  sẽ có:

- $n$  đỉnh (gồm  $n-1$  đỉnh của  $C_{n-1}$  + 1 đỉnh trung tâm).
- $2(n-1)$  cạnh.



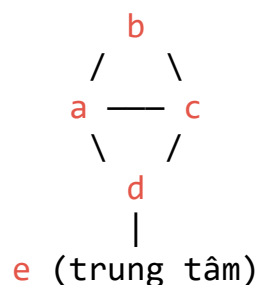
**Lưu ý:**

- Các đỉnh của  $C_{n-1}$  vẫn giữ nguyên liên kết vòng ban đầu.
- Đỉnh trung tâm có bậc  $n-1$  (nối tới mọi đỉnh khác).

**Ý nghĩa thực tiễn:**

- Mô hình hóa mạng giao thông có **một trung tâm kết nối** (ví dụ: một bến xe trung tâm nối với các tuyến đường vòng quanh thành phố).
- Mô hình **kiến trúc mạng máy tính phân cấp**: Server trung tâm kết nối tới các máy con xung quanh.

**Minh họa: Sơ đồ  $W_5$  (bánh xe 5 đỉnh):**

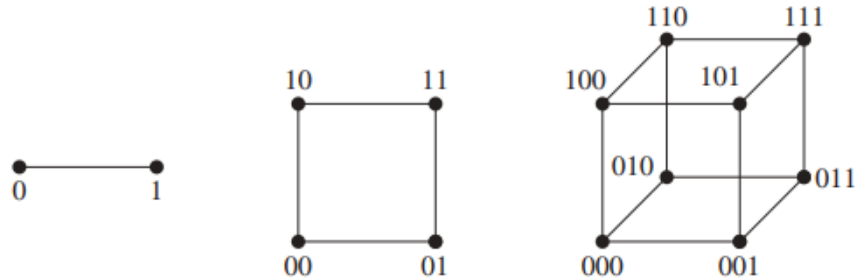


- $a, b, c, d$  tạo thành vòng  $C_4$
- $e$  nối với  $a, b, c, d$ .

### 3.5.4. Đồ thị lập phương $Q_n$

**Định nghĩa:** Đồ thị lập phương  $Q_n$  là đồ thị có:

- **Đỉnh:** Các chuỗi nhị phân độ dài  $n$  (tức là các xâu gồm 0 và 1 có  $n$  ký tự).
- **Cạnh:** Hai đỉnh được nối với nhau nếu và chỉ nếu **chúng khác nhau đúng một bit**.



**Tính chất:**

- Số lượng đỉnh:  $2^n$  (vì có  $2^n$  chuỗi nhị phân độ dài  $n$ ).
- Số lượng cạnh:  $\frac{n \times 2^n}{2} = n \times 2^{n-1}$  cạnh.

**Ví dụ cụ thể:**

$Q_1$

- 2 đỉnh: 0, 1
- 1 cạnh nối giữa 0 và 1.

$Q_2$

- 4 đỉnh: 00, 01, 10, 11
- Mỗi đỉnh nối với 2 đỉnh khác (khác nhau đúng 1 bit).
- Hình dạng: hình vuông.

$Q_3$

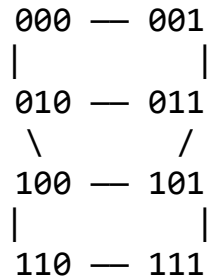
- 8 đỉnh: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111
- Hình dạng: hình lập phương 3 chiều.

**Ý nghĩa thực tiễn:**

- Mô hình hóa **mạng hypercube** trong thiết kế mạng máy tính song song, siêu máy tính.

- Áp dụng trong các bài toán tối ưu hoán vị bit, thuật toán tìm kiếm nhị phân mở rộng.

**Minh họa: Sơ đồ đơn giản cho  $Q_3$  (lập phương 3 chiều):**



- Các cạnh nối các đỉnh chỉ khác đúng 1 bit.

**Ghi chú:**

- **Đồ thị bánh xe:** Giúp người học nắm mô hình mạng trung tâm.
- **Đồ thị lập phương:** Là ví dụ cực kỳ quan trọng cho tư duy về **cấu trúc mạng song song** trong hệ thống máy tính lớn.

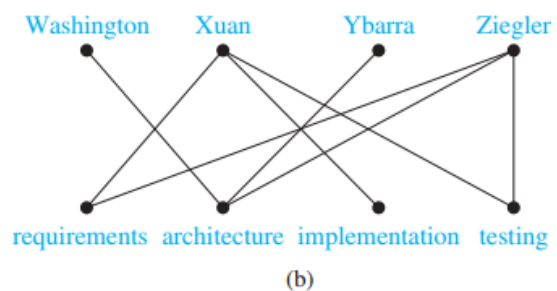
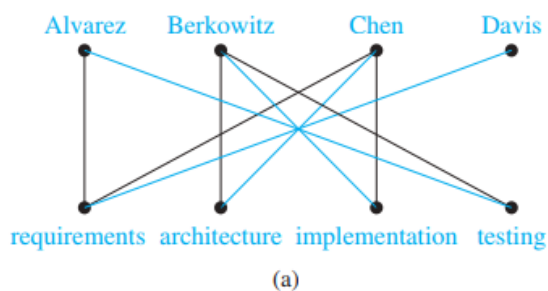
Người học nên vẽ tay  $Q_2$  và  $Q_3$  để thực sự cảm nhận được "khác 1 bit" nghĩa là thế nào.

### 3.5.5. Đồ thị phân đôi (Đồ thị hai phe)

**Định nghĩa:** Một đồ thị phân đôi (bipartite graph) là đồ thị đơn  $G=(V,E)$  mà trong đó:

Tập đỉnh  $V$  có thể chia thành **hai tập con phân biệt**  $V_1$  và  $V_2$  sao cho:

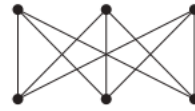
- Không có cạnh nào nối giữa hai đỉnh cùng thuộc một tập con.
- Mỗi cạnh của  $G$  chỉ nối một đỉnh của  $V_1$  với một đỉnh của  $V_2$



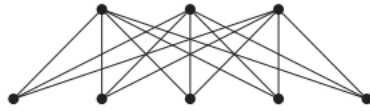




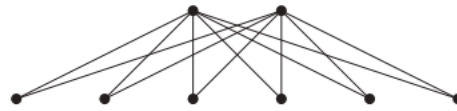
$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



$K_{3,5}$



$K_{2,6}$

Ký hiệu:  $V = V_1 \cup V_2$  và  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

### Tính chất quan trọng:

- Một đồ thị là phân đôi **nếu và chỉ nếu** nó không chứa **chu trình lẻ** (chu trình có số lượng đỉnh lẻ).
- Một cách kiểm tra đơn giản: **Tô màu** các đỉnh bằng hai màu sao cho không có hai đỉnh kề nhau cùng màu  $\rightarrow$  Nếu làm được, đồ thị là phân đôi.

**Ý nghĩa thực tiễn:** Mô hình hóa các bài toán "bắt cặp" giữa hai nhóm đối tượng khác nhau:

- Phân công công việc (nhân viên và nhiệm vụ).
- Kết nối giữa sinh viên và đề tài nghiên cứu.
- Ghép cặp trong mạng xã hội, thương mại điện tử (người bán  $\leftrightarrow$  người mua).

**Minh họa:** Ví dụ đơn giản:

- Tập  $V_1 = \{\text{giảng viên}\}$
- Tập  $V_2 = \{\text{môn học}\}$
- Cạnh nối nếu giảng viên có thể dạy môn học đó.

Sơ đồ:

Giảng viên **A**  $\rightarrow$  Môn **T**oán

Giảng viên **B**  $\rightarrow$  Môn Tìn học

Giảng viên **A**  $\rightarrow$  Môn Tìn học

(Chỉ có kết nối giữa "giảng viên" và "môn học", không có kết nối giữa hai giảng viên hay hai môn học.)

### 3.5.6. Ứng dụng của các đồ thị đặc biệt

Dưới đây là các ứng dụng tiêu biểu của từng loại đồ thị đặc biệt đã học, rất quan trọng cho sinh viên IT nắm vững:

#### 1. Đồ thị đầy đủ $K_n$

- **Ứng dụng:**
  - **Mô hình hóa kết nối mạng toàn phần.**
  - Trong đó, mỗi nút (máy chủ, máy trạm) kết nối trực tiếp với tất cả các nút khác.
- **Ví dụ:**
  - Mô hình mạng nội bộ quy mô nhỏ (LAN) tốc độ cao, không có trung gian.

#### 2. Đồ thị vòng $C_n$

- **Ứng dụng:**
  - **Thiết kế chu trình tuần tự.**
  - Các hệ thống vận hành theo **vòng tuần hoàn** (ví dụ: các trạng thái trong máy trạng thái hữu hạn FSM).
- **Ví dụ:**
  - Thiết kế bài toán người giao hàng di chuyển qua các điểm theo vòng khép kín.

#### 3. Đồ thị bánh xe $W_n$

- **Ứng dụng:**
  - **Mô hình giao thông thành phố**, nơi có trung tâm (downtown) nối với các tuyến phố vòng ngoài.
  - **Mạng lưới trung tâm:** Server chính kết nối tới các client.
- **Ví dụ:**
  - Thiết kế hệ thống phân phối điện/nước thành phố.

#### 4. Đồ thị lập phương $Q_n$

- **Ứng dụng:**
  - **Mô hình hóa kiến trúc mạng máy tính**, đặc biệt là mạng **Hypercube** trong siêu máy tính (supercomputer).
- **Ví dụ:**
  - Mạng song song trong siêu máy tính Cray, thiết kế mạng Hypercube để tối ưu độ trễ giao tiếp.

## 5. Đồ thị phân đôi

- **Ứng dụng:**

- **Phân công công việc:** Ghép nhân viên với nhiệm vụ phù hợp.
- **Bài toán ghép cặp:** Trong mạng xã hội, thương mại điện tử, hệ thống giới thiệu đối tượng (matching systems).

- **Ví dụ:**

- Thuật toán tìm ghép cặp cực đại trong lý thuyết đồ thị (Maximum Bipartite Matching - dùng trong đề cử việc làm, hẹn hò online).

### Ghi chú:

- Về ứng dụng, nên luôn gắn với các **hệ thống máy tính thực tế** (networking, parallel computing) hoặc **vấn đề tối ưu vận hành** (matching, scheduling) giúp người học thấy được Toán rời rạc thực sự **gần gũi** với ngành IT của mình.

## PHẦN 2: BÀI TẬP CÓ GIẢI

**Bài 1:** Cho hai đồ thị  $G$  và  $H$  như sau:

- $G$  có tập đỉnh  $V=\{a,b,c,d\}$  và tập cạnh  $E=\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,a\}\}$ .

$H$  có tập đỉnh  $V'=\{w,x,y,z\}$  và tập cạnh  $E'=\{\{w,x\},\{x,y\},\{y,z\},\{z,w\}\}$ .

**Yêu cầu:** Kiểm tra xem  $G$  và  $H$  có đẳng cấu hay không.

### Hướng dẫn giải:


1. **So sánh số lượng đỉnh:**

$$|V|=4, |V'|=4$$

2. **So sánh số lượng cạnh:**

- $|E|=4, |E'|=4$

3. **Kiểm tra bậc các đỉnh:**

- Trong  $G$ , mỗi đỉnh nối với 2 đỉnh khác  $\rightarrow$  bậc 2.
- Trong  $H$ , mỗi đỉnh cũng nối với 2 đỉnh khác  $\rightarrow$  bậc 2. 

4. **Kiểm tra cấu trúc liên kết:**

- Cả hai đồ thị là **chu trình 4 đỉnh** (dạng  $C_4$ )

5. **Kết luận:**

- Có ánh xạ song ánh từ  $V$  đến  $V'$  bảo toàn liên kết.

○  $\Rightarrow G$  và  $H$  đẳng cấu.

### Ứng dụng trong IT:

- Trong **mạng máy tính**, nếu hai sơ đồ mạng khác nhau nhưng đẳng cấu, thì chúng có **khả năng truyền tin** tương đương.
- Các công cụ **kiểm thử hệ thống** (network verification) sử dụng kiểm tra đẳng cấu để tối ưu hóa sơ đồ mạng.

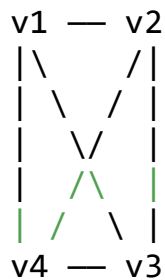
**Bài 2:** Vẽ đồ thị đầy đủ  $K_4$  và xác định số cạnh.

### Hướng dẫn giải:

#### 1. Vẽ đồ thị $K_4$

- Các đỉnh:  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
- Nối mỗi cặp đỉnh bằng đúng một cạnh.

Sơ đồ:



#### 2. Xác định số cạnh:

- Công thức tính số cạnh đồ thị đầy đủ:

$$|E| = \frac{n(n-1)}{2}$$

- Với  $n=4$ :

$$|E| = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

- Các cạnh cụ thể:  $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}$

### Ứng dụng trong IT:

- Trong mô hình **mạng nội bộ LAN nhỏ**,  $K_4$  có nghĩa là **4 máy tính đều kết nối trực tiếp** với nhau, **không qua máy chủ trung gian**.
- Trong thiết kế **giao thức peer-to-peer**, mạng kiểu  $K_n$  đảm bảo tính **ổn định cực cao** vì mỗi nút đều có đường truyền trực tiếp tới mọi nút khác.

**Bài 3:** Vẽ đồ thị vòng  $C_5$  và liệt kê các cạnh.

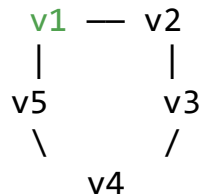
### Hướng dẫn giải:

#### 1. Vẽ đồ thị $C_5$

- Các đỉnh:  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$
- Nối các đỉnh thành một vòng khép kín, mỗi đỉnh nối với 2 đỉnh kề:

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5 \rightarrow v_1$$

Sơ đồ:



#### 2. Liệt kê các cạnh:

- $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_1\}$
- Tổng cộng 5 cạnh.

### Ứng dụng trong IT:

#### • Mô hình chu trình tuần tự:

- Trong hệ thống **bảo mật token ring**, các thiết bị truyền thông điệp theo vòng kín.
- Trong thiết kế **vòng tuần hoàn** các trạng thái của giao thức truyền thông (protocol FSM – Finite State Machine).

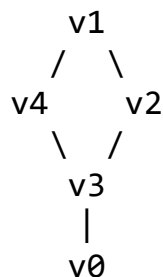
### Bài 4: Mô tả và vẽ đồ thị bánh xe $W_5$

### Hướng dẫn giải:

#### 1. Xây dựng đồ thị:

- Bắt đầu từ đồ thị vòng  $C_4$  gồm các đỉnh:  $v_1, v_2, v_3, v_4$
- Thêm một đỉnh trung tâm  $v_0$
- Nối  $v_0$  với tất cả  $v_1, v_2, v_3, v_4$

Sơ đồ:



## 2. Liệt kê các cạnh:

- Cạnh chu trình  $C_4$  :  $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}$
- Cạnh nối trung tâm:  $\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_3\}, \{v_0, v_4\}$
- Tổng số cạnh: 8 cạnh.

## Ứng dụng trong IT:

- Mô hình **mạng có trung tâm điều phối**:
  - Ví dụ: Mạng WiFi với router trung tâm kết nối tới các thiết bị.
  - Mô hình thiết kế mạng **Star Topology** với đường backup vòng quanh.

**Bài 5:** Cho đồ thị  $G$  với tập đỉnh  $V = \{a, b, c, d, e, f\}$  và tập cạnh  $E = \{\{a, d\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{c, f\}\}$ .

Hãy phân chia  $V$  thành hai tập con để đồ thị là phân đôi.

## Hướng dẫn giải:

### 1. Quan sát kết nối:


- Các đỉnh  $a, b, c$  chỉ nối với  $d, e, f$ , và ngược lại.

### 2. Phân chia tập đỉnh:

- $V_1 = \{a, b, c\}$  (nhóm thứ nhất)
- $V_2 = \{d, e, f\}$  (nhóm thứ hai)

### 3. Kiểm tra lại:

- Mọi cạnh đều nối từ một đỉnh  $V_1$  tới một đỉnh  $V_2$
- Không có cạnh nào nối nội bộ trong  $V_1$  hoặc  $V_2$ .

 Kết quả đúng, đồ thị  $G$  là đồ thị phân đôi.

## Ứng dụng trong IT:

- Mô hình **phân công nhiệm vụ**:
  - $V_1$  = nhân viên,  $V_2$  = dự án.
  - Tìm ghép cặp phù hợp giữa người và việc (bài toán tối ưu matching).
- Ứng dụng trong các hệ thống **recommender** (gợi ý sản phẩm): người dùng – sản phẩm.

### PHẦN 3: TRẮC NGHIỆM

#### Mức độ dễ (Câu 1–8)

**Câu 1:**

Hai đồ thị được gọi là đẳng cấu nếu:

- A. Có cùng số đỉnh và số cạnh.
- B. Có ánh xạ song ánh giữa tập đỉnh giữ nguyên liên kết cạnh.
- C. Có cùng số chu trình.
- D. Cả A và B đều đúng.

**Câu 2:**

Số cạnh trong đồ thị đầy đủ  $K_5$  là:

- A. 10
- B. 15
- C. 5
- D. 20

**Câu 3:**

Mỗi đỉnh trong đồ thị vòng  $C_n$  có bậc bằng:

- A. 1
- B. 2
- C.  $n-1$
- D.  $n$

**Câu 4:**

Trong đồ thị bánh xe  $W_n$ , đỉnh trung tâm có bậc:

- A. 2
- B.  $n-1$
- C.  $n$
- D.  $2n$

**Câu 5:**

Đồ thị lập phương  $Q_n$  có bao nhiêu đỉnh?

- A.  $2n$
- B.  $2^n$
- C.  $n^2$
- D.  $n!$

**Câu 6:**

Đồ thị nào sau đây **không phải** là đồ thị phân đôi?

- A. Cây (tree).
- B. Đồ thị đầy đủ  $K_3$
- C. Chu trình chẵn  $C_4$
- D. Đồ thị chỉ gồm một cạnh.

**Câu 7:**

Chu trình lẻ (có số đỉnh lẻ) **làm mất** tính chất gì?

- A. Đồ thị phân đôi.
- B. Đồ thị đầy đủ.
- C. Đồ thị vòng.
- D. Đồ thị bánh xe.

**Câu 8:**

Trong ứng dụng IT, đồ thị vòng  $C_n$  được dùng để:

- A. Thiết kế mạng LAN.
- B. Mô hình hóa tuần tự trạng thái.
- C. Tính toán phân tán dữ liệu.
- D. Phân công công việc.

**Mức độ trung bình (Câu 9–15)**

**Câu 9:**

Số lượng cạnh trong đồ thị lập phương  $Q_3$  là:

- A. 12
- B. 16
- C. 8
- D. 24

**Câu 10:**

Đồ thị phân đôi có thể được kiểm tra bằng cách:

- A. Tính số chu trình.
- B. Tô màu hai màu khác nhau.
- C. Đếm bậc các đỉnh.
- D. Kiểm tra số lượng cạnh.

**Câu 11:**

Đỉnh có bậc cao nhất trong đồ thị bánh xe  $W_n$  là:

- A. Một đỉnh trong vòng ngoài.
- B. Đỉnh trung tâm.
- C. Bất kỳ đỉnh nào.
- D. Không xác định.



**Câu 12:**

Hai đồ thị đẳng cấu nhất thiết phải:

- A. Cùng số đỉnh nhưng khác số cạnh.
- B. Cùng số đỉnh, số cạnh, cấu trúc kết nối.
- C. Cùng hình vẽ.
- D. Có cùng nhãn đỉnh.

**Câu 13:**

Ứng dụng của đồ thị phân đôi trong IT là:

- A. Phân chia mạng máy chủ.
- B. Thiết kế hệ thống giao thông.
- C. Ghép cặp giữa nhân viên và công việc.
- D. Tạo ra kiến trúc hypercube.

**Câu 14:**

Trong đồ thị vòng  $C_n$ , số cạnh bằng:

- A.  $n-1$
- B.  $n+1$
- C.  $n$
- D.  $n/2$

**Câu 15:**

Đồ thị lập phương  $Q_2$  có hình dạng giống:

- A. Tam giác.
- B. Hình vuông.
- C. Hình lục giác.
- D. Hình tròn.

**Mức độ khó (Câu 16–20)****Câu 16:**

Trong đồ thị  $K_5$ , số cạnh liền kề một đỉnh là:

- A. 5
- B. 10
- C. 4
- D. 6

**Câu 17:**

Khi nào một đồ thị con là đồ thị con cảm ứng?

- A. Khi chọn một tập đỉnh và tùy ý cạnh.
- B. Khi lấy tất cả cạnh giữa các đỉnh được chọn.

- C. Khi lấy mọi đỉnh từ đồ thị gốc.
- D. Khi đồ thị con có cùng số cạnh như đồ thị gốc.

**Câu 18:**

Mạng hypercube  $Q_4$  có bao nhiêu đỉnh và cạnh?

- A. 8 đỉnh, 12 cạnh
- B. 16 đỉnh, 32 cạnh
- C. 16 đỉnh, 64 cạnh
- D. 8 đỉnh, 24 cạnh

**Câu 19:**

Một đồ thị có tập đỉnh chia thành hai nhóm, mọi cạnh nối từ nhóm này sang nhóm kia, ta có thể gọi đồ thị đó là:

- A. Đồ thị đầy đủ.
- B. Đồ thị phân đôi.
- C. Đồ thị vòng.
- D. Đồ thị bánh xe.

**Câu 20:**

Để kiểm tra đẳng cấu giữa hai đồ thị lớn, cách hiệu quả nhất là:

- A. Vẽ tay và so sánh.
- B. So số lượng chu trình.
- C. Dùng phần mềm kiểm tra tự động.
- D. Kiểm tra bậc thủ công từng đỉnh.

**PHẦN 4: BÀI TẬP LUYỆN TẬP**

**Bài 1:** Cho hai đồ thị  $G_1$  và  $G_2$  cùng có 5 đỉnh và 6 cạnh.

- a) Xác định các điều kiện tối thiểu cần kiểm tra để kết luận chúng có thể đẳng cấu.
- b) Nếu  $G_1$  có chu trình 5 đỉnh, còn  $G_2$  không có, thì chúng có đẳng cấu không?

**Gợi ý chi tiết:**

- Với câu (a):
  - Xác định các yếu tố cơ bản: số đỉnh, số cạnh, bậc của các đỉnh.
  - Xem xét các đặc trưng cấu trúc như số chu trình, dạng chu trình.
- Với câu (b):
  - Nhớ rằng hai đồ thị đẳng cấu phải bảo toàn toàn bộ cấu trúc, bao gồm cả chu trình.

**Bài 2:** Vẽ đồ thị đầy đủ  $K_5$ 

- a) Tính tổng số cạnh.
- b) Cho biết bậc của mỗi đỉnh.

**Gợi ý chi tiết:**

- Với câu (a):

○ Dùng công thức tính số cạnh của đồ thị đầy đủ:  $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$

- Với câu (b):

Trong  $K_n$ , mỗi đỉnh nối với mọi đỉnh khác.

**Bài 3:** Vẽ đồ thị vòng  $C_6$ 

- a) Liệt kê danh sách các cạnh.
- b) Cho biết bậc của mỗi đỉnh và tổng số cạnh.

**Gợi ý chi tiết:**

- Với câu (a):

Sắp xếp các đỉnh theo thứ tự  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ , sau đó nối theo thứ tự vòng khép kín.

- Với câu (b):

Mỗi đỉnh trong  $C_n$  nối với 2 đỉnh kề bên, suy ra bậc mỗi đỉnh là 2.

○ Số cạnh bằng số đỉnh.

**Bài 4:** Tạo đồ thị bánh xe  $W_6$  từ đồ thị vòng  $C_5$ 

- a) Vẽ sơ đồ đồ thị.
- b) Tính số lượng cạnh trong  $W_6$

**Gợi ý chi tiết:**

- Với câu (a):

Tạo vòng  $C_5$  trước, sau đó thêm 1 đỉnh trung tâm nối với toàn bộ 5 đỉnh của vòng.

- Với câu (b):

Tổng số cạnh bằng số cạnh của  $C_5$  cộng thêm số cạnh nối từ trung tâm tới các đỉnh.

**Bài 5:** Cho đồ thị  $G$  với tập đỉnh  $V=\{a,b,c,d,e\}$  và các cạnh:

$$E=\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,e\},\{e,a\}\}$$

- a) Đây là đồ thị gì?
- b) Tính số chu trình.

**Gợi ý chi tiết:**

- Với câu (a):
  - Xem xét đặc điểm: 5 đỉnh nối thành một chu trình khép kín  $\rightarrow$  loại đồ thị đã học.
- Với câu (b):
  - Chu trình cơ bản là gì? Liệu có nhiều chu trình nhỏ hơn không?

**Bài 6:** Cho đồ thị  $H$  có các đỉnh là các chuỗi nhị phân độ dài 3.

- a) Vẽ sơ đồ  $Q_3$
- b) Tính số cạnh và số đỉnh.

**Gợi ý chi tiết:**

- Với câu (a):
  - Viết ra tất cả các chuỗi nhị phân dài 3 ký tự (gồm 8 chuỗi).
  - Nối hai đỉnh nếu chúng **khác nhau đúng 1 bit**.
- Với câu (b):
  - Số đỉnh  $= 2^3$ .
  - Số cạnh dùng công thức đồ thị lập phương:  $n \times 2^{n-1}$

**Bài 7:** Xác định xem đồ thị sau có phải là phân đôi không:

- Tập đỉnh:  $V=\{a,b,c,d\}$ .
- Tập cạnh:  $E=\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,a\}\}$ .

**Gợi ý chi tiết:**

- Đây là một đồ thị chu trình.
- Kiểm tra độ dài chu trình (chẵn/lẻ).
- Gợi ý: Một đồ thị là phân đôi nếu và chỉ nếu nó không chứa chu trình lẻ.

**Bài 8:** Tìm tất cả các đồ thị con cảm ứng gồm 3 đỉnh của đồ thị  $G$  với:

- $V=\{1,2,3,4\}$ ,
- $E=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,1\},\{1,3\}\}$ .

**Gợi ý chi tiết:**

- Chọn mọi tập con 3 đỉnh từ 4 đỉnh đã cho  $\binom{4}{3} = 4$  tập.
- Với mỗi tập 3 đỉnh:
  - Xác định tất cả các cạnh hiện diện giữa các đỉnh trong tập đó.
  - Nhớ rằng **đồ thị con cảm ứng** phải lấy đủ tất cả các cạnh hiện có giữa các đỉnh.

**Bài 9:** Ứng dụng thực tế: Một công ty có 4 dự án và 4 nhân viên. Mỗi nhân viên có thể làm một số dự án nhất định.

Mô hình hóa bài toán này thành đồ thị phân đôi.

- Nhân viên:  $A, B, C, D$ .
- Dự án: 1, 2, 3, 4.
- Quan hệ:  $A \rightarrow 1, 2; B \rightarrow 2, 3; C \rightarrow 3, 4; D \rightarrow 1, 4$ .

**Gợi ý chi tiết:**

Tập  $V_1$  : Các nhân viên.

Tập  $V_2$  : Các dự án.

- Nối cạnh từ nhân viên đến dự án theo mỗi quan hệ cho trước.

Vẽ sơ đồ sao cho các đỉnh  $V_1$  và  $V_2$  nằm hai bên, các cạnh nối chéo.

**Bài 10:** Một mạng máy tính được thiết kế dưới dạng hypercube  $Q_4$

- Tính số lượng nút và liên kết.
- Tính độ bền mạng nếu một nút bị lỗi (số nút còn kết nối).

**Gợi ý chi tiết:**

- Với câu (a):
  - Số đỉnh:  $2^n$  với  $n=4$ .
  - Số cạnh:  $n \times 2^{n-1}$
- Với câu (b):
  - Sau khi một nút bị lỗi, mạng còn lại bao nhiêu nút?

- Liệu các nút còn lại có còn được kết nối trực tiếp với nhau? (gợi ý: hypercube có độ liên thông cao).

## **PHẦN 5: BÀI TẬP DỰ ÁN**

### **Dự án 1: Phân tích đẳng cấu trong sơ đồ mạng máy tính nhỏ**

Bạn được giao nhiệm vụ kiểm tra tính tương đương về mặt kết nối giữa hai sơ đồ mạng máy tính nhỏ (mỗi mạng có 6 máy chủ). Mỗi sơ đồ mạng được mô tả bằng danh sách các máy chủ và các kết nối giữa chúng.

#### **Yêu cầu:**

1. Mô hình hóa hai sơ đồ thành hai đồ thị  $G_1$  và  $G_2$   
Kiểm tra xem  $G_1$  và  $G_2$  có đẳng cấu hay không.  
Nếu có, tìm ánh xạ song ánh giữa tập đỉnh của  $G_1$  và  $G_2$
2. Trình bày báo cáo gồm:
  - Các bước kiểm tra đẳng cấu.
  - Phân tích nguyên nhân nếu hai đồ thị không đẳng cấu.
  - Đưa ra kết luận: mạng có tương đương hay không.

#### **Phân tích chi tiết (hướng dẫn làm bài):**

##### **• Bước 1:**

- Vẽ sơ đồ hai mạng thành hai đồ thị đơn giản.
- Các máy chủ là đỉnh, các kết nối mạng là cạnh.

##### **• Bước 2:**

- So sánh nhanh:
  - Số lượng đỉnh.
  - Số lượng cạnh.
  - Bậc của từng đỉnh.
- Kiểm tra đặc trưng sâu hơn:
  - Số lượng chu trình.
  - Cấu trúc các thành phần liên thông.

##### **• Bước 3:**

- Nếu thỏa các điều kiện cơ bản, cố gắng tìm một ánh xạ song ánh bảo toàn liên kết giữa các đỉnh.

- Sử dụng sơ đồ hoặc bảng đối chiếu để trình bày ánh xạ.

- **Bước 4:**

- Viết báo cáo: Nêu rõ từng bước, nhận xét logic, trình bày đồ thị minh họa (vẽ bằng tay hoặc phần mềm như draw.io).

## **Dự án 2: Thiết kế mạng hypercube $Q_3$ cho hệ thống tính toán song song**

Một trung tâm dữ liệu muốn thiết kế một hệ thống gồm 8 máy chủ kết nối theo cấu trúc mạng hypercube  $Q_3$  Bạn được yêu cầu:

### **Yêu cầu:**

Mô hình hóa các máy chủ thành các đỉnh của  $Q_3$  (dùng chuỗi nhị phân 3 bit).

1. Xác định cách nối cáp mạng giữa các máy chủ.
2. Vẽ sơ đồ chi tiết mạng hypercube.
3. Phân tích ưu điểm của mô hình này so với mạng vòng (circle topology) cùng số lượng máy chủ.

### **Phân tích chi tiết (hướng dẫn làm bài):**

- **Bước 1:**

- Gán mỗi máy chủ một chuỗi nhị phân 3 bit (từ 000000 đến 111111).
- Ghi lại danh sách đỉnh.

- **Bước 2:**

- Nối hai máy chủ nếu hai chuỗi nhị phân tương ứng khác nhau đúng 1 bit (1 bit flip).
- Có thể liệt kê danh sách cạnh chi tiết.

- **Bước 3:**

- Vẽ sơ đồ mạng:
  - Các đỉnh đặt thành khối lập phương (cube),
  - Các cạnh nối các đỉnh đúng quy tắc hypercube.

- **Bước 4:**

- Phân tích so sánh:
  - Số bước tối đa cần đi từ máy này sang máy khác (độ sâu mạng).
  - Số lượng kết nối trên mỗi máy chủ.
  - Tính khả dụng và khả năng chịu lỗi (nếu một máy chủ hoặc một liên kết bị lỗi).