2.2 Biến ngẫu nhiên liên tục

Bài tập 2.23. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \begin{cases} k\sin 3x, & x \in \left(0, \dfrac{\pi}{3}\right), \\ 0, & x \notin \left(0, \dfrac{\pi}{3}\right). \end{cases}$$

(a) Xác định k và hàm phân phối $F_X(x)$.

(b) Tính $P(\pi/6 \le X < \pi/3)$.

Bài tập 2.24. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \frac{c}{e^x + e^{-x}}.$$

Xác định hằng số c và sau đó tính kỳ vọng của X.

Bài tập 2.25. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ là $f_X(x) = ae^{-|x|}$, $(-\infty < x < +\infty)$.

(a) Xác định a.

(b) Tìm hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X, biến ngẫu nhiên $Y = X^2$.

(c) Tìm $E(X)$, $V(X)$.

(d) Tính xác suất để sau ba lần lặp lại phép thử một cách độc lập có 2 lần X nhận giá trị trong khoảng $(0; \ln 3)$.

Bài tập 2.26. Nhu cầu hàng năm về loại hàng A là biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất như sau (đơn vị: ngàn sản phẩm):

$$f_X(x) = \begin{cases} k(30 - x), & x \in (0, 30), \\ 0, & x \notin (0, 30). \end{cases}$$

(a) Tìm k.

(b) Tìm hàm phân phối $F_X(x)$.

(c) Tìm nhu cầu trung bình hàng năm về loại hàng đó.

Bài tập 2.27. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác suất

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{2} - k\cos x, & 0 < x \le \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

(a) Tìm k.

(b) Tìm $P\Big(0 < X < \dfrac{\pi}{2}\Big)$.

(c) Tìm $E(X)$.

Bài tập 2.28. Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác suất

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le -a, \\ A + B\arcsin\dfrac{x}{a}, & x \in (-a, a), \\ 1, & x \ge a. \end{cases}$$

(a) Tìm A và B.

(b) Tìm hàm mật độ xác suất $f_X(x)$.

Bài tập 2.29. Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X có dạng

$$F_X(x) = a + b\arctan x, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

(a) Tìm hệ số a và b.

(b) Tìm hàm mật độ xác suất $f_X(x)$.

(c) Tìm xác suất để khi tiến hành 3 phép thử độc lập có 2 lần X nhận giá trị trong khoảng $(-1; 1)$.

Bài tập 2.30. Biến ngẫu nhiên X liên tục trên toàn trục số và có hàm phân phối xác suất $F_X(x) = 1/2 + 1/\pi \arctan x/2$. Tìm giá trị có thể có của x_1 thỏa mãn điều kiện $P(X > x_1) = 1/4$.

Bài tập 2.31. Thu nhập của dân cư tại một vùng là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm phân phối xác suất như sau:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha}, & x \ge x_0,\ \alpha > 0, \\ 0, & x < x_0. \end{cases}$$

Hãy xác định mức thu nhập sao cho lấy ngẫu nhiên một người ở vùng đó thì thu nhập của người này vượt quá mức trên với xác suất 0,5.

Bài tập 2.32. Thời gian phục vụ mỗi khách hàng tại một cửa hàng ăn nhanh là biến ngẫu nhiên X tuân theo quy luật lũy thừa với hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \begin{cases} 5e^{-5x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

với x được tính bằng phút/khách hàng.

(a) Tìm xác suất để thời gian phục vụ một khách hàng nào đó sẽ nằm trong khoảng $(0,4;1)$(phút).

(b) Tính thời gian trung bình để phục vụ một khách hàng.

Bài tập 2.33. Biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{khi} \quad x > 0, \\ 0, & \text{khi} \quad x \le 0. \end{cases}$$

(a) Tính $P(X \ge 5)$.

(b) Xác định hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $Y = -2X + 5$.

Bài tập 2.34. Cho hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & \text{nếu } x \ge 0, \\ 0, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

của biến ngẫu nhiên liên tục X và định nghĩa $Y = [X]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá X (nghĩa là $[x] = 0$ nếu $0 \le x < 1$, $[x] = 1$ nếu $1 \le x < 2 \ldots$).

(a) Tính $P(Y = 0)$.

(b) Tính $E(Y)$.

2.3 Một số phân phối xác suất thông dụng

Bài tập 2.35. Cho X là biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức $X \sim \mathcal{B}(n; p)$. Khẳng định nào sau đây là ĐÚNG?

A. $E(X) = np(1-p)$.

B. $V(X) = np$.

C. $\operatorname{mod}(X) = [np + 1 - p]$.

D. $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Bài tập 2.36. Tỷ lệ sản phẩm lỗi trong một dây chuyền sản xuất là 0,03. Chọn ra 500 sản phẩm do dây chuyền này sản xuất để kiểm tra và ký hiệu X là số sản phẩm đạt yêu cầu trong 500 sản phẩm đó. Khẳng định nào sau đây SAI?

A. $X \sim \mathcal{B}(500; 0,03)$.

B. $X \sim \mathcal{B}(500; 0,97)$.

C. $E(X) = 485$.

D. $V(X) = 14,55$.

Bài tập 2.37. Bắn 5 viên đạn vào một mục tiêu. Xác suất trúng đích của mỗi lần bắn như nhau và bằng 0,2. Muốn phá hủy mục tiêu phải có ít nhất 3 viên trúng mục tiêu. Tìm xác suất mục tiêu bị phá hủy.

Bài tập 2.38. Xác suất để một sinh viên chậm giờ thi là 0,02. Tìm số sinh viên chậm giờ thi có khả năng xảy ra nhiều nhất trong 855 sinh viên dự thi.

Bài tập 2.39. Có 10 máy sản xuất sản phẩm (độc lập nhau), mỗi máy sản xuất ra 2% phế phẩm.

(a) Từ mỗi máy sản xuất lấy ngẫu nhiên ra một sản phẩm. Hỏi xác suất lấy được nhiều nhất 2 phế phẩm trong 10 sản phẩm này là bao nhiêu?

(b) Trung bình có bao nhiêu sản phẩm được sản xuất bởi máy đầu tiên trước khi nó tạo ra phế phẩm đầu tiên (giả sử các sản phẩm sản xuất ra là độc lập)?

Bài tập 2.40. Một ga ra cho thuê ôtô thấy rằng số người đến thuê ôtô vào thứ bảy cuối tuần là một biến ngẫu nhiên có phân bố Poa-xông với tham số $\lambda = 2$. Giả sử gara có 4 chiếc ôtô.

(a) Tìm xác suất để tất cả 4 ôtô đều được thuê vào thứ 7.

(b) Tìm xác suất gara không đáp ứng được yêu cầu (thiếu xe cho thuê) vào thứ 7.

(c) Trung bình có bao nhiêu ôtô được thuê vào ngày thứ 7?

Bài tập 2.41. Số khách hàng đến một cửa hàng bán lẻ là một biến ngẫu nhiên có phân phối Poa-xông với trung bình 6 khách hàng đến trong vòng một giờ.

(a) Nếu có đúng 5 khách hàng đến trong khoảng thời gian từ 10:00 đến 11:00 thì xác suất để có ít nhất 8 khách hàng đến trong khoảng thời gian từ 10:00 đến 11:30 là bao nhiêu?

(b) Nếu có ít hơn 6 khách hàng đến trong khoảng thời gian từ 10:00 đến 12:00 thì cửa hàng được xem như là không có lợi nhuận. Tìm xác suất để cửa hàng có đúng 1 ngày có lãi trong một tuần (giả sử cửa hàng mở cửa 6 ngày trong tuần).

Bài tập 2.42. Gọi biến ngẫu nhiên Y là tỷ lệ người trong 1000 người Mỹ xác nhận rằng có uống nhiều hơn 5 cốc bia mỗi ngày. Giả sử rằng tỷ lệ đúng là 10% trên toàn bộ dân số Mỹ. Tính $E(Y)$, $V(Y)$.

Bài tập 2.43. Giả sử X là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn với trung bình là 3 và phương sai là 0,16.

(a) Hãy tính $P(X > 3)$, $P(X > 3,784)$.

(b) Tìm c sao cho $P(3 - c < X < 3 + c) = 0,9$.

Bài tập 2.44. Cho biên độ dao động của một vật là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm phân phối xác suất là

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}, & \text{nếu } x \geq 0, \\ 0, & \text{nếu } x < 0, \end{cases}$$

trong đó σ là tham số đã biết. Tính xác suất để biên độ giao động đó lớn hơn trị trung bình của nó.

Bài tập 2.45. Lãi suất (%) đầu tư vào một dự án trong năm 2019 được coi như một biến ngẫu nhiên tuân theo quy luật chuẩn. Theo đánh giá của ủy ban đầu tư thì với xác suất 0,1587 cho lãi suất lớn hơn 20% và với xác suất 0,0228 cho lãi suất lớn hơn 25%. Vậy khả năng đầu tư mà không bị lỗ là bao nhiêu?

Bài tập 2.46. Tung một đồng xu vô hạn lần, xác suất thu được mặt ngửa mỗi lần là p.

(a) Gọi X là số lần tung đến khi xuất hiện mặt ngửa lần đầu tiên (tại lần tung thứ X). Tính $E(X)$.

(b) Tính xác suất xuất hiện đúng 6 lần ngửa trong 10 lần tung.

(c) Tính xác suất để lần xuất hiện mặt ngửa thứ 6 rơi vào lần tung thứ 10.

Bài tập 2.47. Xét một phần tư hình tròn tâm O(0,0) bán kính bằng a, ký hiệu là OAB, với tọa độ tương ứng là A$(a, 0)$ và B$(0, a)$.

(a) Trên đoạn OA lấy ngẫu nhiên một điểm C. Tìm phân phối xác suất của độ dài đoạn OC.

(b) Dựng một đường thẳng đi qua C, vuông góc với OA và cắt cung tròn tại điểm D. Tính kỳ vọng và phương sai của độ dài đoạn CD.

Bài tập 2.48. Lấy ngẫu nhiên một điểm M trên nửa đường tròn tâm O, đường kính AB $= 2a$. Biết rằng xác suất điểm M rơi vào cung CD bất kì của nửa đường tròn AMB chỉ phụ thuộc vào độ dài cung CD.

(a) Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên Y chỉ diện tích tam giác AMB.

(b) Tìm giá trị trung bình của diện tích tam giác ấy.

Bài tập 2.49. Từ điểm A$(0, -a)$ $(a > 0)$ trong nửa mặt phẳng tọa độ xOy phần $x \geq 0$, người ta kẻ ngẫu nhiên một tia At hợp với tia Oy một góc φ. Biết φ là biến ngẫu nhiên có phân phối đều trong khoảng $(0, \pi/4)$. Tia At cắt Ox tại điểm M.

(a) Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X chỉ diện tích tam giác AOM.

(b) Tìm giá trị trung bình của diện tích trên.

Bài tập 2.50. Một công ty kinh doanh mặt hàng A dự định sẽ áp dụng một trong hai phương án kinh doanh: Phương án 1: Gọi X_1 (triệu đồng/tháng) là lợi nhuận thu được. X_1 có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(140; 2500)$. Phương án 2: Gọi X_2 (triệu đồng/tháng) là lợi nhuận thu được. X_2 có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(200; 3600)$. Biết rằng công ty tồn tại và phát triển thì lợi nhuận thu được từ mặt hàng A phải đạt ít nhất 80 triệu đồng/tháng. Hỏi nên áp dụng phương án nào để rủi ro thấp hơn.

Bài tập 2.51. Trọng lượng của một loại trái cây tuân theo luật phân phối chuẩn với trọng lượng trung bình là 250g, độ lệch chuẩn là 5g. Trái cây loại I là trái cây có trọng lượng không nhỏ hơn 260g.

(a) Một người lấy 1 trái từ trong sọt trái cây ra. Tính xác suất người này lấy được trái cây loại I.

(b) Nếu lấy được trái loại I thì người này sẽ mua sọt đó. Người ngày kiểm tra 100 sọt. Tính xác suất người này mua được 6 sọt.

Bài tập 2.52. Một dây chuyền tự động khi hoạt động bình thường có thể sản xuất ra phế phẩm với xác suất $p = 0,001$ và được điều chỉnh ngay lập tức khi phát hiện có phế phẩm. Tính số trung bình các sản phẩm được sản xuất giữa 2 lần điều chỉnh.

Bài tập 2.53. Trong một kỳ thi điểm số trung bình của các sinh viên là 80 và độ lệch chuẩn là 10. Giả sử điểm thi của sinh viên tuân theo luật phân phối chuẩn.

(a) Nếu giáo viên muốn 25% số sinh viên đạt điểm A (nhóm điểm cao nhất) thì điểm số thấp nhất để đạt điểm A là bao nhiêu?

(b) Chọn ngẫu nhiên 50 sinh viên, tính xác suất trong đó có nhiều hơn 10 sinh viên đạt điểm A (điểm A lấy ở câu (a)).

Bài tập 2.54. Đường kính của một loại chi tiết do một máy sản xuất tuân theo luật phân phối chuẩn, với kỳ vọng là 20mm và độ lêch chuẩn là 0,2mm. Tính xác suất để lấy ngẫu nhiên một chi tiết có đường kính trong khoảng 19,9mm đến 20,3mm.

Bài tập 2.55. Chiều cao của nam giới khi trưởng thành là biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn với chiều cao trung bình là 160cm và độ lệch chuẩn là 6cm. Tìm xác suất để đo ngẫu nhiên 4 người thì có ít nhất một người có chiều cao nằm trong khoảng (158–162)cm.

Bài tập 2.56. Dùng hai phương pháp để tính sai số của một biến ngẫu nhiên. Phương pháp 1: Cho sai số đó bằng $2X$ với X là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(0; 25)$. Phương pháp 2: Cho sai số đó bằng tổng hai biến ngẫu nhiên độc lập $Y = Y_1 + Y_2$ trong đó $E(Y_1) = E(Y_2) = 0$ và $\sigma(Y_1) = \sigma(Y_2) = 5$. Hỏi phương pháp nào được ưa dùng hơn?