

# ĐIỀU KHIỂN HỒI TIẾP PHI TUYẾN XE HAI BÁNH TỰ CÂN BẰNG DI CHUYỂN TRÊN MẶT PHẶNG NGHIÊNG

## NONLINEAR FEEDBACK CONTROL OF TWO-WHEELED SELF-BALANCING ROBOT MOVING ON THE SLOPE

NGUYỄN ĐÌNH KHIÊM, HOÀNG MẠNH CƯỜNG\*, NGUYỄN HOÀNG HẢI

Viện Cơ khí, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

\*Email liên hệ: cuonghm@vimaru.edu.vn

### Tóm tắt

Trong bài báo này, tập trung xây dựng mô hình động lực học và thiết kế quy luật điều khiển cho xe hai bánh khi di chuyển trên mặt phẳng nghiêng. Việc xây dựng phương trình động lực học được thực hiện bằng phương pháp Lagrange. Phương trình vi phân thu được là cơ sở để thiết kế quy luật điều khiển. Các kết quả tính toán cho thấy tính hiệu quả của bộ điều khiển.

**Từ khóa:** Động lực học, điều khiển, phương trình Lagrange, hồi tiếp, hồi tiếp phi tuyến.

### Abstract

This paper focuses on establishing dynamic model and control design for two-wheeled self-balancing car running on slope. First, the motion equation of the system is obtained by using Lagrange II formulation. The differential equations of motion of the robot play a vital role in designing controller. In this paper, results demonstrate how effective controller is.

**Keywords:** Dynamics, control, Lagrange, feedback, nonlinear feedback.

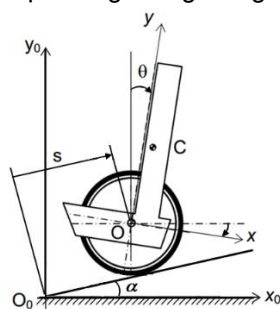
### 1. Mở đầu

Xe hai bánh tự cân bằng, được sử dụng rất phổ biến để di chuyển trong một phạm vi gần, như trong các phân xưởng nhà máy, trong siêu thị hay trong các khu du lịch nghỉ dưỡng,... Từ khi phát minh, loại xe này đã được nhiều nhà khoa học quan tâm. Việc nghiên cứu về động lực học và thiết kế quy luật điều khiển cho xe đã được đề cập trong rất nhiều các công trình [2, 3, 4, 5, 6, 7], tuy nhiên trong phần lớn các công trình đã công bố, chủ yếu tập trung vào việc nghiên cứu khi xe di chuyển trên mặt phẳng ngang, còn với việc xe di chuyển trên mặt phẳng nghiêng còn ít được đề cập đến.

Trong bài báo này, nghiên cứu thiết lập phương trình động lực học khi xe di chuyển trên mặt phẳng nghiêng và thiết kế quy luật điều khiển hồi tiếp dựa trên phương trình vi phân phi tuyến nhằm mục tiêu bánh xe chuyển động đều mà thân xe không bị mất ổn định.

### 2. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động

Mô hình cơ học của xe hai bánh kiểu con lắc ngược được cho như trên Hình 1, trong đó bánh xe được xem là vật rắn đồng chất có khối lượng  $m_1$ , bán kính  $r$ , mô men quán tính của bánh xe đối với khối tâm  $O$  của nó là  $J_1$ , chịu tác dụng của ngẫu lực  $M_{dk}$  do động cơ gắn trên thân xe gây ra. Thân xe là vật rắn có khối lượng  $m_2$ , mô men quán tính của thân xe đối với khối tâm  $C$  của nó là  $J_2$ , tọa độ của khối tâm  $C$  đối với hệ trục  $Oxy$  là  $(x_c = a, y_c = b)$ . Gọi  $M_l$  là ngẫu lực ma sát cản lăn giữa bánh xe và mặt đường,  $M_0$  là ngẫu lực cản do ma sát tại các ổ trục. Khi di chuyển trên mặt phẳng nghiêng, hệ có hai bậc tự do. Gọi  $q = [\varphi, \theta]^T$  là vectơ tọa độ suy rộng của xe,  $\varphi$  là góc quay của bánh xe,  $\theta$  là góc nghiêng của thân xe so với phương thẳng đứng.



**Hình 1. Mô hình cơ học của xe hai bánh kiểu con lắc ngược**

Áp dụng phương trình Lagrange loại II [1, 2], ta thu được hệ phương trình vi phân mô tả chuyển động của xe hai bánh dạng con lắc ngược có dạng như sau:

$$\begin{cases} (J_1 + m_1 r^2 + m_2 r^2) \ddot{\varphi} - m_2 r \ddot{\theta} [a \sin(\theta + \alpha) - b \cos(\theta + \alpha)] \\ \quad - m_2 r \dot{\theta}^2 [a \cos(\theta + \alpha) + b \sin(\theta + \alpha)] = -(m_1 + m_2) g r \sin \alpha + M_{dk} - M_l - M_0 \\ (J_2 + m_2 a^2 + m_2 b^2) \ddot{\theta} - m_2 r \ddot{\varphi} [a \sin(\theta + \alpha) - b \cos(\theta + \alpha)] \\ \quad = m_2 g (a \cos \theta + b \sin \theta) - M_{dk} + M_0 \end{cases} \quad (1)$$

Dựa trên hệ phương trình (1), ta đi thiết kế quy luật điều khiển đối với xe nhằm đạt được mục tiêu, xe di chuyển lên dốc với vận tốc không đổi và góc nghiêng  $\theta = 0$ .

### 3. Thiết kế quy luật điều khiển

Do ảnh hưởng của ma sát cản lăn và ma sát tại các ổ trục là nhỏ, để đơn giản, ta bỏ qua các ma sát này ( $M_l = M_o = 0$ ), sau đây, ta đi thiết kế quy luật điều khiển đối với  $M_{dk}$ , để cho xe chuyển động ổn định lên dốc hoặc xuống dốc với vận tốc  $v = \text{const}$  và  $\theta = 0$ .

Xét hệ phương trình (1), ta đặt:

$$C_1 = (J_1 + m_1 r^2 + m_2 r^2), \quad C_2 = (J_2 + m_2 a^2 + m_2 b^2), \quad C_3 = (m_1 + m_2) g r \sin \alpha$$

$$h_1(\theta) = m_2 r [a \sin(\theta + \alpha) - b \cos(\theta + \alpha)], \quad h_2(\theta) = m_2 r [a \cos(\theta + \alpha) + b \sin(\theta + \alpha)]$$

$$h_3(\theta) = m_2 g (a \cos \theta + b \sin \theta), \quad u = M_{dk}$$

Khi đó hệ hai phương trình trên được viết lại như sau:

$$\begin{cases} C_1 \ddot{\theta} - h_1(\theta) \ddot{\theta} - h_2(\theta) \dot{\theta}^2 = -C_3 + u \\ C_2 \ddot{\theta} - h_1(\theta) \ddot{\theta} = h_3(\theta) - u \end{cases} \quad (2)$$

Từ phương trình thứ nhất của (2), ta suy ra:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{C_1} [h_1(\theta) \ddot{\theta} + h_2(\theta) \dot{\theta}^2 - C_3 + u] \quad (3)$$

Thay (3) vào phương trình thứ 2 của (2), ta được:

$$C_2 \ddot{\theta} - h_1(\theta) \frac{1}{C_1} [h_1(\theta) \ddot{\theta} + h_2(\theta) \dot{\theta}^2 - C_3 + u] = h_3(\theta) - u$$

$$\Leftrightarrow [C_1 C_2 - h_1^2(\theta)] \ddot{\theta} = [h_1(\theta) - C_1] u + h_1(\theta) h_2(\theta) \dot{\theta}^2 + C_1 h_3(\theta) - h_1(\theta) C_3 \quad (4)$$

Ta đặt:

$$\Delta_1 = C_1 C_2 - h_1^2(\theta), \quad \Delta_2 = h_1(\theta) - C_1, \quad \Delta_3 = h_1(\theta) h_2(\theta) \dot{\theta}^2 + C_1 h_3(\theta) - h_1(\theta) C_3$$

Với  $\Delta_1 \neq 0$ , từ (4) ta suy ra được:

$$\ddot{\theta} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} u + \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \quad (5)$$

Gọi  $\theta_d$  là giá trị mong muốn đạt được của  $\theta$ :  $\theta \rightarrow \theta_d$ ,  $\dot{\theta} \rightarrow 0$ ,  $\ddot{\theta} \rightarrow 0$ , ta đặt:

$$e = \theta - \theta_d \Rightarrow \dot{e} = \dot{\theta}, \quad \ddot{e} = \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{e} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} u + \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \quad (6)$$

Để  $e, \dot{e}, \ddot{e} \rightarrow 0$ , theo phương pháp phản hồi tuyến tính hóa, ta có:

$$\ddot{e} = -K_p e - K_d \dot{e} \quad (7)$$

Với  $K_p, K_d$  là các hằng số dương. Thay (7) vào (6), ta được:

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} u + \frac{\Delta_3}{\Delta_1} = -K_p e - K_d \dot{e} \quad (8)$$

Từ đó ta suy ra:

$$u = \frac{\Delta_1 [-K_p e - K_d \dot{e}] - \Delta_3}{\Delta_2} \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{\Delta_1 [-K_p (\theta - \theta_d) - K_d \dot{\theta}] - \Delta_3}{\Delta_2} \quad (10)$$

Sau đây, sẽ chứng minh rằng với tín hiệu điều khiển (10) hệ thống sẽ ổn định.

Ta dễ thấy hệ (7) là hệ tuyến tính nên nghiệm của nó có dạng:

$$e(t) = k_1 e^{-\lambda_1 t} + k_2 e^{-\lambda_2 t} \quad (11)$$

Với  $k_1, k_2$  là hằng số,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  và  $-\lambda_1, -\lambda_2$  là nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 + K_d \lambda + K_p = 0 \quad (12)$$

Để đơn giản cho việc chứng minh, ta có thể chọn  $K_p, K_d$  sao cho  $\lambda_1, \lambda_2$  là những số thực (vì hệ ổn định nên  $-\lambda_1 < 0, -\lambda_2 < 0$  suy ra  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ).

Vì thế  $\dot{e}(t), \ddot{e}(t)$  đều hội tụ về 0 dưới dạng hàm mũ, dẫn đến  $\dot{\theta}(t) = \dot{e}(t), \ddot{\theta}(t) = \ddot{e}(t)$  cũng hội tụ về 0 với dạng hàm mũ. Mặt khác thay tín hiệu điều khiển (10) vào (13), ta được:

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{C_1 \Delta_2} [h_1^2 \ddot{\theta} - C_1 h_1 \ddot{\theta} - C_1 h_2 \dot{\theta}^2 + C_1 (C_3 - h_3) + (C_1 C_2 - h_1^2) (-K_p e - K_d \dot{e})] \quad (13)$$

Để tìm chặn trên của  $|\ddot{\varphi}(t)|$  ta cần chú ý mấy vấn đề sau:

+ Để tồn tại  $u(t)$ , thì:  $|\Delta_2| > \varepsilon_2 > 0$ .

+ Người ta đã chứng minh được:

$$|\cos \theta + b \sin \theta| \leq \sqrt{a^2 + b^2}; |\sin(\theta + \alpha) - b \cos(\theta + \alpha)| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \quad (14)$$

Từ đó ta có thể tìm chặn trên của  $h_1(\theta)$ ,  $h_2(\theta)$  có dạng:

$$|h_1(\theta)| \leq m_2 r \sqrt{a^2 + b^2} = H_1 > 0; |h_2(\theta)| \leq m_2 r \sqrt{a^2 + b^2} = H_1 > 0 \quad (15)$$

+ Để tìm chặn trên của  $h_3(\theta)$  ta làm như sau: Theo cách đặt  $\theta = \theta_d + e$ , Do  $\theta_d$  là góc ở vị trí cân bằng nên nó phải thỏa mãn phương trình:

$$m_2 g (\cos \theta_d + b \sin \theta_d) = (m_1 + m_2) g r \sin \alpha = C_3 \quad (16)$$

Từ đó ta suy ra:

$$h_3 = m_2 g (\cos \theta_d + b \sin \theta_d) \cos e + m_2 g (-\sin \theta_d + b \cos \theta_d) \sin e \quad (17)$$

Đặt:

$$C_3 = m_2 g (\cos \theta_d + b \sin \theta_d) \cos e; C_4 = m_2 g (-\sin \theta_d + b \cos \theta_d) \sin e \quad (18)$$

Để thấy  $C_3$ ,  $C_4$  là các hằng số, vậy:

$$C_1 (C_3 - h_3) = C_1 [C_3 - C_3 \cos e - C_4 \sin e] = C_1 [2C_3 \sin^2(e/2) - C_4 \sin e] \quad (19)$$

Chú ý rằng:  $\sin x < |x|$ ,  $|a+b| \leq |a|+|b|$ , khi đó ta có:

$$|C_1 (C_3 - h_3)| \leq |2C_1 C_3 \sin^2(e/2)| + |C_4 \sin e| \leq C_1 C_3 |e| + C_4 |e| \quad (20)$$

Với những chú ý trên, từ phương trình (13) ta suy ra:

$$|\ddot{\varphi}| \leq \frac{1}{C_1 \varepsilon_2} [H_1^2 |\ddot{\theta}| + C_1 H_1 |\ddot{\theta}| + C_1 H_2 |\dot{\theta}|^2 + |C_1 (C_3 - h_3)| + (|C_1 C_2| + |h_1|^2) (|K_p| |e| + |K_d| |\dot{e}|)] \quad (21)$$

$$\Leftrightarrow |\ddot{\varphi}| \leq \frac{1}{C_1 \varepsilon_2} [H_1^2 |\ddot{\theta}| + C_1 H_1 |\ddot{\theta}| + C_1 H_2 |\dot{\theta}|^2 + C_1 C_3 |e|^2 + C_4 |e| + (C_1 C_2 + H_1^2) (|K_p| |e| + |K_d| |\dot{e}|)] \quad (22)$$

Với  $\ddot{\theta} = \ddot{e}$ ,  $\dot{\theta} = \dot{e}$  nên ta có:

$$|\ddot{\varphi}| \leq \frac{1}{C_1 \varepsilon_2} [H_1^2 |\ddot{e}| + C_1 H_1 |\ddot{e}| + C_1 H_2 |\dot{e}|^2 + C_1 C_3 |e|^2 + C_4 |e| + (C_1 C_2 + H_1^2) (|K_p| |e| + |K_d| |\dot{e}|)] \quad (23)$$

Do  $e(t)$  hội tụ về 0 theo hàm mũ,  $\dot{e}(t)$ ,  $\ddot{e}(t)$  cũng hội tụ về 0 theo hàm mũ. Nên luôn tồn tại  $R$ ,  $\bar{\lambda} > 0$  sao cho:

$$|e(t)| < R e^{-\bar{\lambda} t}, |\dot{e}(t)| < R e^{-\bar{\lambda} t}, |\ddot{e}(t)| < R e^{-\bar{\lambda} t} \Rightarrow |\dot{e}|^2 \leq R^2 e^{-2\bar{\lambda} t}; |e|^2 \leq R^2 e^{-2\bar{\lambda} t} \quad (24)$$

Vế phải của (24) sẽ bị chặn bởi 1 hàm có dạng  $M e^{-\bar{\lambda} t}$ , với  $M$  đủ lớn và  $\bar{\lambda}$  chọn giá trị thích hợp:

$$|\ddot{\varphi}(t)| \leq M e^{-\bar{\lambda} t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |\ddot{\varphi}(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} M e^{-\bar{\lambda} t} = 0 \quad (25)$$

Từ đó ta có:

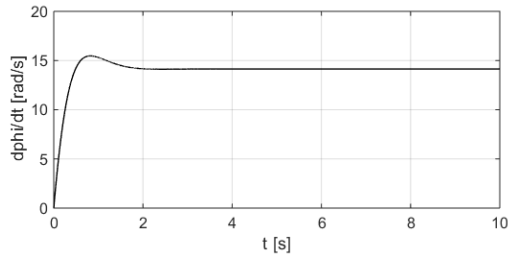
$$|\dot{\varphi}(t)| = \left| \int_0^t \ddot{\varphi}(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |\ddot{\varphi}(\tau)| d\tau \leq \int_0^t M e^{-\bar{\lambda} \tau} d\tau = -\frac{1}{\bar{\lambda}} M e^{-\bar{\lambda} \tau} \Big|_0^t = \frac{M}{\bar{\lambda}} - \frac{M}{\bar{\lambda}} e^{-\bar{\lambda} t} \quad (26)$$

Nên  $\dot{\varphi}(t)$  luôn bị chặn, tức là tích phân  $\int_0^\infty |\ddot{\varphi}(\tau)| d\tau$  luôn hữu hạn (đây là điều cần chứng minh).

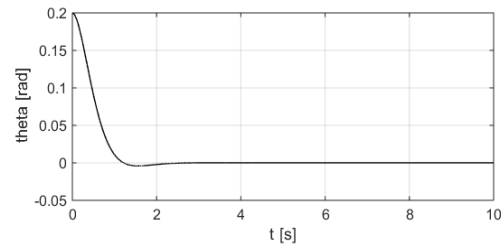
#### 4. Các kết quả mô phỏng

Để tính toán số, giá trị các tham số của hệ được cho như sau:  $g = 9,81(\text{m/s}^2)$ ;  $m_1 = 0,51(\text{kg})$ ;  $J_1 = 5,1 \cdot 10^{-4}(\text{kg.m}^2)$ ;  $r = 0,062(\text{m})$ ;  $m_2 = 9,01(\text{kg})$ ;  $J_2 = 0,228(\text{kg.m}^2)$ ;  $a = 0(\text{m})$ ;  $b = 0,7(\text{m})$ ;  $\alpha = 15^\circ$ ;  $\theta_d = 1,392^\circ$ ;  $K_p = 10$ ;  $K_d = 5$ .

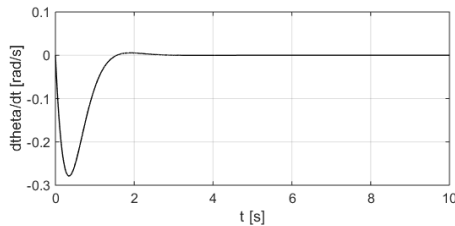
Với các số liệu cho như trên sau khi tính toán, ta được một số kết quả mô phỏng cho trên các Hình 2, 3, 4, 5, 6, 7. Từ Hình 2, 3, 4, ta thấy khi xe di chuyển trên mặt phẳng nằm ngang ta có thể điều khiển để xe chuyển động với vận tốc không đổi và thân xe ổn định ở vị trí thẳng đứng ( $\theta = 0$ ). Nhưng khi xe di chuyển trên mặt phẳng nghiêng, từ các Hình 5, 6, 7, ta thấy, muốn vận tốc của xe không đổi thì thân xe phải nghiêng một góc  $\theta_d = 1,39^\circ$ .



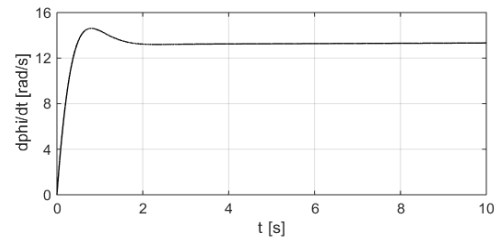
**Hình 2. Vận tốc quay của bánh xe khi xe di chuyển trên mặt phẳng ngang**



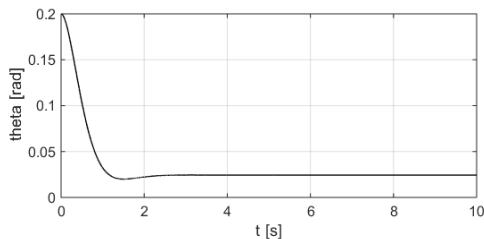
**Hình 3. Góc lắc của thân xe khi xe di chuyển trên mặt phẳng ngang**



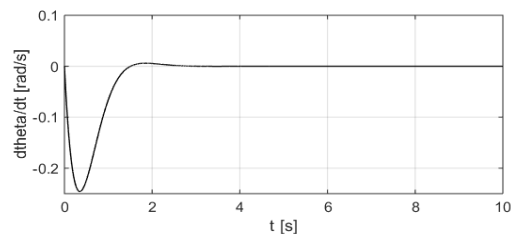
**Hình 4. Vận tốc lắc của thân xe khi xe di chuyển trên mặt phẳng ngang**



**Hình 5. Vận tốc quay của bánh xe khi xe di chuyển trên mặt phẳng nghiêng**



**Hình 6. Góc lắc của thân xe khi xe di chuyển trên mặt phẳng nghiêng**



**Hình 7. Vận tốc lắc của thân xe khi xe di chuyển trên mặt phẳng nghiêng**

## 5. Kết luận

Trong bài báo này, đã nghiên cứu động lực học và thiết kế quy luật điều khiển cho xe hai bánh kiểu con lắc ngược di chuyển trên mặt phẳng nghiêng. Từ các kết quả tính toán cho thấy, xe hoạt động ổn định với quy luật điều khiển đã đưa ra, tuy nhiên, để xe di chuyển với vận tốc không đổi trên mặt phẳng nghiêng thì thân xe phải nghiêng một góc  $\theta_d$  không đổi nào đó, tùy thuộc vào kết cấu thân xe.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Văn Khang, "Động lực học hệ nhiều vật", NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2007.
- [2] Nguyễn Quang Hoàng, "Thiết kế điều khiển trượt cho robot di động kiểu con lắc ngược tự cân bằng", Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc 4.2009, tr. 272-281, 2009.
- [3] Nguyễn Văn Sơn, "Xây dựng mô hình con lắc ngược dạng quay trên Simulink của MATLAB", Tạp chí Đại học Thủ Dầu Một, số 6 (25) - 2015, tr. 48-56, 2015.
- [4] Robert Grepl, "Balancing Wheeled Robot: Effective Modelling Sensory Processing and Simplified Control", Engineering MECHANICS, Vol. 16, 2009, No. 2, pp.141-154, 2009.
- [5] Modestus Oliver Asali, Ferry Hadary, Bomo Wibowo Sanjaya, "Modeling, Simulation, and Optimal Control for Two-Wheeled Self-Balancing Robot", International Journal of Electrical Computer Engineering, Vol. 7, No. 4, August 2017, pp. 2008-2017, 2017.
- [6] Hau-Shiue Juang and Kai-Yew Lum, "Design and Control of a Two-Wheel Self-Balancing Robot using the Arduino Microcontroller Board", 2013 10<sup>th</sup> IEEE International Conference on Control and Automation, Hangzhou, China, June 12-14, 2013, pp. 634-639, 2013.
- [7] A. N. K. Nasir, M. A. Ahmad, R. M. T. Raja Ismail, "The Control of a Highly Nonlinear Two-Wheels Balancing Robot: A Comparative Assessment between LQR and PID-PID Control Schemes", International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering, Vol. 4, No10, 2010, pp. 942-947, 2010.

Ngày nhận bài: 23/4/2019  
 Ngày nhận bản sửa: 14/5/2019  
 Ngày duyệt đăng: 20/5/2019