

## MÔ HÌNH HOÁ VÀ ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU CHO HỆ XE HAI BÁNH TỰ CÂN BẰNG MODELLING AND OPTIMAL CONTROL FOR TWO-WHEELED SELF-BALANCING ROBOT

Nguyễn Minh Tâm, Nguyễn Văn Đông Hải, Nguyễn Phong Lưu, Lê Văn Tuấn  
Trường Đại học Sư Phạm Kỹ Thuật TP. Hồ Chí Minh

Ngày tòa soạn nhận bài 01/3/2016, ngày phản biện đánh giá 16/6/2016, ngày chấp nhận đăng 15/8/2016

### TÓM TẮT

Hệ xe hai bánh tự cân bằng là một hệ thống được áp dụng nhiều trong các thí nghiệm điều khiển tự động. Đây là một hệ thống MIMO (multi-input and multi-output) mang tính lý thuyết và thực tiễn cao, đã được áp dụng trong cuộc sống. Tuy nhiên, đa phần các nghiên cứu chỉ xoay quanh việc điều khiển cân bằng dùng các giải thuật tìm kiếm thử sai hoặc phương trình toán học đơn giản. Các nghiên cứu chi tiết về phương trình toán học hệ thống và giải thuật ứng dụng chính trên sự hiểu biết mô hình là không nhiều. Bài báo phân tích phương trình toán học của một hệ xe hai bánh tự cân bằng. Qua đó, tác giả áp dụng thành công giải thuật điều khiển tối ưu cho hệ trên. Giải thuật điều khiển tối ưu được thử nghiệm với các trường hợp di chuyển khác nhau của xe. Kết quả điều khiển là tốt trên cả mô phỏng Matlab/Simulink và thực nghiệm.

**Từ khóa:** xe hai bánh tự cân bằng; điều khiển tối ưu; LQR; Matlab/Simulink; MIMO; thực nghiệm.

### ABSTRACT

Two-wheeled Self-balancing Cart is a popular model in automatic experiments. This is a MIMO system (multi-input and multi-output) which is theoretical, practical and has been applied in normal life. Anyway, most research just focuses on balancing this model through try-on experiments or simple form of mathematical model. There are still so few research works focusing on modelling algorithm and designing a mathematical model-based controller for this system. This paper developed all mathematical equations of the system. Then, the authors successfully applied optimal control for this system. Optimal controller was tested with different cases of cart motion. Controlling results was proved to work well through both experiments and simulation on Matlab/Simulink.

**Keywords:** Two-wheeled Self-balancing Robot/Cart; optimal control; LQR; Matlab/Simulink; MIMO; experiment.

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Hệ xe hai bánh tự cân bằng là một đối tượng quen thuộc trong các bài toán lý thuyết điều khiển. Thế nhưng, phần lớn các nghiên cứu chỉ dựa trên phương trình toán học dạng

đơn giản với ngõ vào hệ thống là momen bánh trái hoặc momen bánh phải và chỉ hoàn thành trên mô phỏng [1], [2], [3] trong khi mô hình thực tế thì ngõ vào là điện áp cấp cho

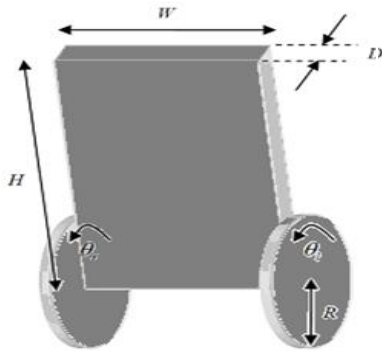
động cơ bánh trái hoặc bánh phải (phương trình toán học hệ thống phức tạp hơn). Nhiều nghiên cứu lại áp dụng các giải thuật điều khiển thử sai (PID, FUZZY,...), không dựa trên mô hình toán học của hệ thống nên tính ổn định của hệ thống không được đảm bảo nhờ toán học [4], [5], [6]. Do đó, việc thiết lập một mô hình toán học chi tiết với ngõ vào điều khiển điện áp là cần thiết. Và khi phương trình toán học chi tiết đã được thành lập, một giải thuật điều khiển tối ưu (LQR) được thiết kế để điều khiển hệ thống. Việc ổn định của hệ thống được đảm bảo nhờ phương trình Riccati. Nhờ đó, bộ điều khiển tối ưu ổn định được hệ thống trên mô phỏng cũng đảm

bảo việc áp dụng được trên thực tế.

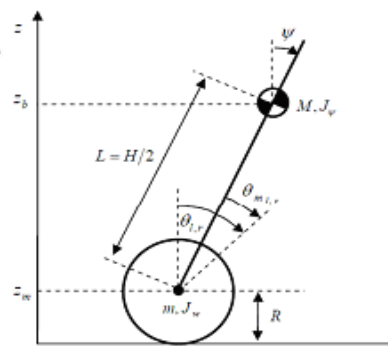
Các mục tiếp theo của bài báo được trình bày như sau: Mục II sẽ đề cập cách thức mô hình hóa đối tượng hệ xe hai bánh tự cân bằng. Tiếp đó, mục III, sẽ trình bày giải thuật điều khiển tối ưu áp dụng cho hệ xe này. Sau đó, mục IV và V lần lượt trình bày các kết quả điều khiển trên mô phỏng và thực nghiệm. Cuối cùng, mục VI đưa ra kết luận về điều khiển LQR cho hệ thống trên.

## 2. MÔ HÌNH TOÁN HỌC

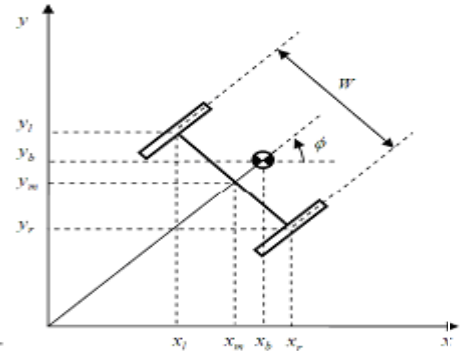
Sơ đồ và hệ quy chiếu hệ xe hai bánh tự cân bằng được thể hiện như ở hình 1, 2, 3 ở dưới:



**Hình 1.** Hình ảnh mô tả hệ xe hai bánh tự cân bằng



**Hình 2.** Hệ xe hai bánh tự cân bằng nhìn nghiêng



**Hình 3.** Hệ xe hai bánh tự cân bằng nhìn từ trên xuống

Trong đó, các thành phần của hệ được liệt kê ở bảng 1:

**Bảng 1.** Ký hiệu và ý nghĩa của các đại lượng

Kí hiệu	Đơn vị	Ý nghĩa
$m$	$kg$	Khối lượng của bánh xe
$M$	$kg$	Khối lượng của robot
$R$	$m$	Bán kính bánh xe
$W$	$m$	Chiều rộng của robot
$D$	$m$	Chiều ngang của robot
$H$	$m$	Chiều cao của robot
$L$	$m$	Khoảng cách từ trọng tâm robot đến trục bánh xe
$f_w$		Hệ số ma sát giữa bánh xe và mặt phẳng di chuyển

Kí hiệu	Đơn vị	Ý nghĩa
$f_m$		Hệ số ma sát giữa robot và động cơ DC
$J_m$	$kg\ m^2$	Moment quán tính động cơ DC
$R_m$	$\Omega$	Điện trở động cơ DC
$K_b$	$Vs/rad$	Hệ số EMF của động cơ DC
$K_t$	$Nm/A$	Moment xoắn của động cơ DC
$N$		Tỉ số giảm tốc
$G$	$m/s^2$	Gia tốc trọng trường

Kí hiệu	Đơn vị	Ý nghĩa
$\theta$	$rad$	Góc trung bình của bánh trái và phải
$\theta_{l,r}$	$rad$	Góc của bánh trái và phải
$\psi$	$rad$	Góc nghiêng của phần thân robot
$\phi$	$rad$	Góc xoay của robot
$x_l, y_l, z_l$	$m$	Tọa độ bánh trái
$x_r, y_r, z_r$	$m$	Tọa độ bánh phải

Ta sử dụng phương pháp Euler-Lagrange để xây dựng mô hình động học. Giả sử tại thời điểm  $t = 0$ , robot di chuyển theo chiều dương trục  $x$ , ta có góc tịnh tiến trung bình của hai bánh xe và góc xoay của robot được xác định như sau:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\theta_l + \theta_r) \\ \frac{R}{W}(\theta_l - \theta_r) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Trong đó tọa độ trung bình của Robot trong hệ qui chiếu:

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int \dot{x}_m \\ \int \dot{y}_m \\ R \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\text{Và } \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\dot{\theta} \cos \phi \\ R\dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (3)$$

Tọa độ bánh trái trong hệ qui chiếu:

$$\begin{bmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m - \frac{W}{2} \sin \phi \\ y_m + \frac{W}{2} \cos \phi \\ z_m \end{bmatrix} \quad (4)$$

Tọa độ bánh phải trong hệ qui chiếu:

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m + \frac{W}{2} \sin \phi \\ y_m - \frac{W}{2} \cos \phi \\ z_m \end{bmatrix} \quad (5)$$

Kí hiệu	Đơn vị	Ý nghĩa
$x_m, y_m, z_m$	$m$	Tọa độ trung bình
$F_\theta, F_\psi, F_\phi$	$Nm$	Moment phát động theo các phương khác nhau
$F_{l,r}$	$Nm$	Moment phát động của động cơ bánh trái, phải
$i_l, i_r$	$A$	Dòng điện động cơ bánh trái, phải
$v_l, v_r$	$V$	Điện áp động cơ bánh trái, phải

Tọa độ tâm đối xứng giữa hai động cơ trong hệ qui chiếu:

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m + L \sin \psi \cos \phi \\ y_m L \sin \psi \cos \phi \\ z_m + L \cos \psi \end{bmatrix} \quad (6)$$

Phương trình động năng của chuyển động tịnh tiến:

$$\begin{aligned} T_1 = & \frac{1}{2} m (\dot{x}_l^2 + \dot{y}_l^2 + \dot{z}_l^2) + \\ & + \frac{1}{2} m (\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2 + \dot{z}_r^2) + \\ & + \frac{1}{2} m (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2 + \dot{z}_b^2) \end{aligned} \quad (7)$$

Phương trình động năng của chuyển động quay:

$$\begin{aligned} T_2 = & \frac{1}{2} J_w \dot{\theta}_l^2 + \frac{1}{2} J_w \dot{\theta}_r^2 + \frac{1}{2} J_w \dot{\psi}^2 \\ & + \frac{1}{2} J_\phi \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} n^2 J_m (\dot{\theta}_l - \dot{\psi})^2 + \\ & + \frac{1}{2} n^2 J_m (\dot{\theta}_r - \dot{\psi})^2 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{Với } \frac{1}{2} n^2 J_m (\dot{\theta}_l - \dot{\psi})^2 ; \frac{1}{2} n^2 J_m (\dot{\theta}_r - \dot{\psi})^2 \quad (9)$$

là động năng quay của phần ứng động cơ trái và phải.

Phương trình thế năng:

$$U = m g z_l + m g z_r + m g z_b \quad (10)$$

Phương trình Lagrange:

$$L = T_1 + T_2 - U$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = F_\theta$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = F_\psi$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = F_\phi$$

Lấy đạo hàm L theo các biến ta được:

$$\left[ \begin{array}{l} (2m + M)R^2 + \\ + 2J_w + 2n^2J_m \end{array} \right] \ddot{\theta} + (MLR \cos \psi - 2n^2J_m) \ddot{\psi} - MLR \dot{\psi}^2 \sin \psi = F_\theta$$

$$\left[ \begin{array}{l} MLR \cos \psi + \\ - 2n^2J_m \end{array} \right] \ddot{\theta} + \left[ \begin{array}{l} ML^2 + J_\psi + \\ + 2n^2J_m \end{array} \right] \ddot{\psi} - MGL \sin \psi - ML^2 \dot{\phi}^2 \sin \psi \cos \psi = F_\psi$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2}mW^2 + J_\phi + \\ + \frac{W^2}{2R^2}(J_w + n^2J_m) + \\ + ML^2 \sin^2 \psi \end{array} \right] \ddot{\phi} + 2ML^2 \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \psi \cos \psi = F_\phi$$

Momen động lực do động cơ DC sinh ra:

$$\begin{bmatrix} F_\theta \\ F_\psi \\ F_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_l + F_r \\ F_\psi \\ \frac{W}{R}(F_l - F_r) \end{bmatrix}$$

Và:

$$F_l = nK_t i_l + f_m (\dot{\psi} - \dot{\theta}_l) - f_w \dot{\theta}_l$$

$$F_r = nK_t i_r + f_m (\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) - f_w \dot{\theta}_r$$

$$F_\psi = -nK_t i_l - nK_t i_r - f_m (\dot{\psi} - \dot{\theta}_l) - f_m (\dot{\psi} - \dot{\theta}_r)$$

Sử dụng phương pháp PWM để điều khiển động cơ nên chuyển từ dòng điện sang điện áp động cơ:

$$L_m \dot{i}_{l,r} = v_{l,r} + K_b (\dot{\psi} - \dot{\theta}_{l,r}) - R_m i_{l,r} \quad (22)$$

Xem điện cảm phần ứng tương đối nhỏ (gần bằng 0), có thể bỏ qua, suy ra:

$$i_{l,r} = \frac{v_{l,r} + K_b (\dot{\psi} - \dot{\theta}_{l,r})}{R_m} \quad (23)$$

Từ đó, các moment lực sinh ra:

$$F_\theta = \alpha (v_l + v_r) - 2(\beta + f_w) \dot{\theta} + 2\beta \dot{\psi} \quad (24)$$

$$F_\psi = -\alpha (v_l + v_r) + 2\beta \dot{\theta} - 2\beta \dot{\psi} \quad (25)$$

$$\text{Với } \alpha = \frac{nK_t}{R_m} \text{ và } \beta = \frac{nK_t K_b}{R_m} + f_m \quad (26)$$

$$F_\phi = \frac{W}{2R} \alpha (v_r - v_l) - \frac{W^2}{2R^2} (\beta + f_w) \dot{\phi} \quad (27)$$

Thu được phương trình động lực học mô tả chuyển động của robot như sau:

$$\left[ (2m + M)R^2 + 2J_w + 2n^2J_m \right] \ddot{\theta} + (MLR \cos \psi - 2n^2J_m) \ddot{\psi} - MLR \dot{\psi}^2 \sin \psi = \alpha (v_l + v_r) - 2(\beta + f_w) \dot{\theta} + 2\beta \dot{\psi}$$

$$-MLR \dot{\psi}^2 \sin \psi = \alpha (v_l + v_r) - 2(\beta + f_w) \dot{\theta} + 2\beta \dot{\psi}$$

$$\left[ \begin{array}{l} MLR \cos \psi + \\ - 2n^2J_m \end{array} \right] \ddot{\theta} + \left[ \begin{array}{l} ML^2 + J_\psi + \\ + 2n^2J_m \end{array} \right] \ddot{\psi} - MGL \sin \psi - ML^2 \dot{\phi}^2 \sin \psi \cos \psi = -\alpha (v_l + v_r) + 2\beta \dot{\theta} - 2\beta \dot{\psi}$$

$$= -\alpha (v_l + v_r) + 2\beta \dot{\theta} - 2\beta \dot{\psi}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2}mW^2 + J_\phi + \\ + \frac{W^2}{2R^2}(J_w + n^2J_m) + \\ + ML^2 \sin^2 \psi \end{array} \right] \ddot{\phi} + 2ML^2 \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \psi \cos \psi = \frac{W}{2R} \alpha (v_r - v_l) - \frac{W^2}{2R^2} (\beta + f_w) \dot{\phi}$$

$$+ 2ML^2 \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \psi \cos \psi =$$

$$\frac{W}{2R} \alpha (v_r - v_l) - \frac{W^2}{2R^2} (\beta + f_w) \dot{\phi}$$

### 3. ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU

Từ (28), (29), (30), ta có hệ phương trình mô tả hệ thống xe hai bánh cân bằng có dạng sau:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, v_l, v_r) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, v_l, v_r) \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, v_l, v_r) \end{cases} \quad (31)$$

$$\text{Với: } u = \begin{bmatrix} v_l \\ v_r \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial v_l} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial v_r} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \\ 0 & 0 \\ \left. \frac{\partial f_4}{\partial v_l} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} & \left. \frac{\partial f_4}{\partial v_r} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \\ 0 & 0 \\ \left. \frac{\partial f_6}{\partial v_l} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} & \left. \frac{\partial f_6}{\partial v_r} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_5} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left. \frac{\partial f_4}{\partial x_1} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} & \left. \frac{\partial f_4}{\partial x_2} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} & \left. \frac{\partial f_4}{\partial x_3} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} & \left. \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} & \left. \frac{\partial f_4}{\partial x_5} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} & \left. \frac{\partial f_4}{\partial x_6} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \left. \frac{\partial f_6}{\partial x_1} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} & \left. \frac{\partial f_6}{\partial x_2} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} & \left. \frac{\partial f_6}{\partial x_3} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} & \left. \frac{\partial f_6}{\partial x_4} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} & \left. \frac{\partial f_6}{\partial x_5} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} & \left. \frac{\partial f_6}{\partial x_6} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Lúc này, ta có các ma trận trọng số như sau:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_6 \end{bmatrix}$$

$$\text{and } R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$$

Với các thông số  $Q_1, Q_2, \dots, Q_5, Q_6$ ,  $R_1$  và  $R_2$  để tinh chỉnh cho bộ điều khiển LQR. Trong đó, thông số  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  lần lượt là các trọng số tối ưu tương ứng cho các giá trị  $\theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}, \phi, \dot{\phi}$ , tín hiệu điều khiển cho góc tiến tới và tín hiệu điều khiển cho góc xoay. Nếu muốn biến trạng thái

Với:

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T \\ = [\theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi} \ \phi \ \dot{\phi}]^T \quad (32)$$

Nếu chọn điểm làm việc là:

$$x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T; u_0 = [0 \ 0]^T \quad (33)$$

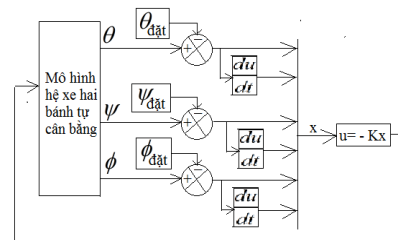
Ta có thể tuyến tính hoá hệ thống (31) về dạng:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (34)$$

nào được ưu tiên trong việc điều khiển thì ta cho thông số trọng số tương ứng đó lớn hơn tương đối so với các thông số trọng số khác.

Sau khi chọn được thông số điều khiển tương ứng, ta tiến hành xây dựng thông số hồi tiếp K với tín hiệu điều khiển  $u = -Kx$

Thông số K được tính dựa vào phương trình Riccati. Tuy nhiên, Matlab đã hỗ trợ ta hàm lqr() để tính ra thông số K khi đã biết ma trận A, B, Q, R.



**Hình 4.** Sơ đồ chi tiết bộ điều khiển LQR cho hệ xe hai bánh tự cân bằng

#### 4. KẾT QUẢ MÔ PHỎNG

Thông số mô hình được chọn như sau:

$$\begin{aligned} m &= 1 ; \quad M = 5 ; \quad R = 0.0725 ; \quad W = 0.24 ; \\ D &= 0.2 ; \quad H = 0.5 ; \quad L = 0.18 ; \quad f_w = 0.18 ; \\ f_m &= 0.002 ; \quad J_m = 0.01 ; \quad J_\psi = 2ML^2/3 ; \\ J_\phi &= M(W^2 + D^2)/12 ; \quad R_m = 50 ; \quad K_b = 0.468 ; \\ K_t &= 0.317 ; \quad n = 40 ; \quad g = 9.81 ; \quad T = 0.01 \end{aligned}$$

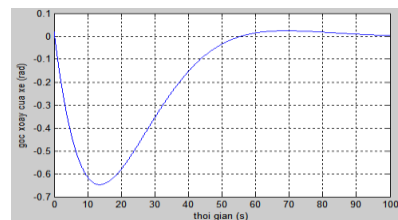
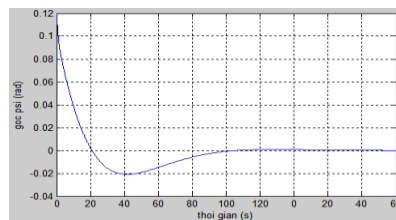
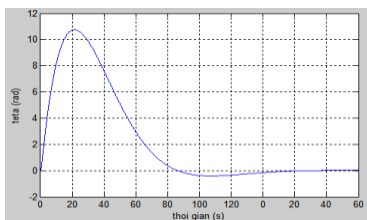
Ma trận trọng số LQR được chọn như sau:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lúc này, ta được ma trận K theo lệnh  $K = \text{lqr}(A, B, Q, R)$

$$K = \begin{bmatrix} -0.7 & 236.3 & -6066 & -1390.9 & -0.7 & -10.4 \\ -0.7 & 236.3 & -6066 & -1390.9 & 0.7 & 10.4 \end{bmatrix}$$

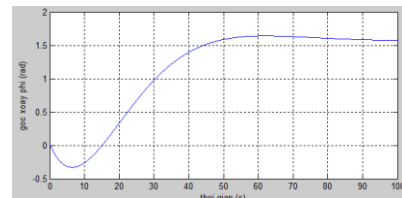
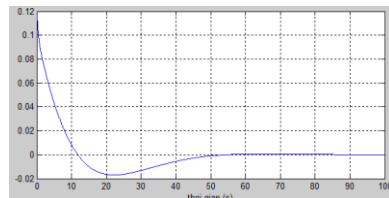
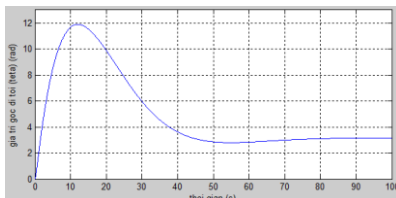
##### 4.1. Giá trị đặt bằng 0



Hình 5. Góc bánh xe  $\theta$  (rad) Hình 6. Góc nghiêng  $\psi$  (rad) Hình 7. Góc xoay  $\phi$  (rad)

##### 4.2. Giá trị đặt khác 0

Chọn là  $\theta_{\text{đặt}} = \pi$  (rad),  $\phi_{\text{đặt}} = \pi/2$  (rad) (xe tiến tới 1 đoạn bằng chiều quay của một vòng hai bánh xe và quay 1 góc 90 độ quanh trục của xe)



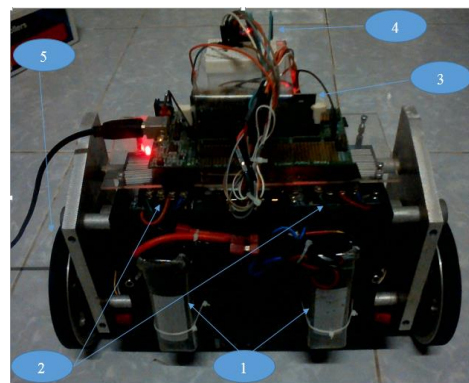
Hình 8. Góc bánh xe  $\theta$  (rad) Hình 9. Góc nghiêng  $\psi$  (rad) Hình 10. Góc xoay  $\phi$  (rad)

##### 4.3. Nhận xét

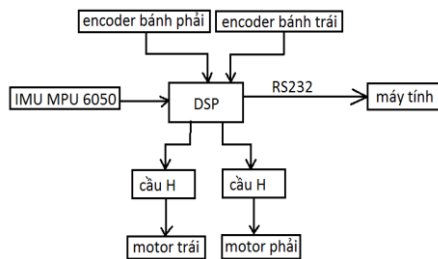
Như kết quả mô phỏng ở các hình 5-9, ta thấy trạng thái xe luôn bám sát tín hiệu đặt, bộ điều khiển LQR đáp ứng tốt. Điều này chứng tỏ xe có thể đi tới, lui, quẹo phải, trái tùy giá trị đặt. Thời gian quá độ còn dài và có thể được cải thiện thông qua việc chọn ma trận trọng số phù hợp.

#### 5. KẾT QUẢ THỰC TẾ

Mô hình thực nghiệm được thể hiện ở hình 11 như sau:



Hình 11. Mô hình phần cứng thực nghiệm  
 1. Nguồn Pin; 2. Mạch cầu H; 3. Vi điều khiển DSP;  
 4. Cảm biến MPU 6050; 5. Bánh xe mô hình



**Hình 12.** Sơ đồ kết nối phần cứng

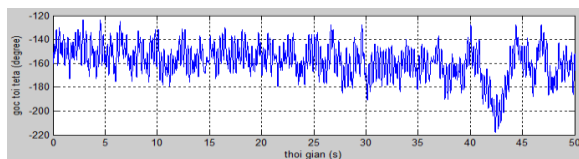
Trong khuôn khổ điều khiển LQR, ta chọn các ma trận như sau:

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

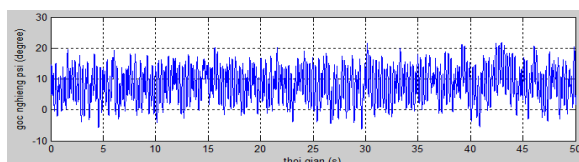
Như vậy, với thông số hệ thống thực tế, ta tính toán ra:

$$K = \begin{bmatrix} -0.7 & 236.3 & -6066 & -1390.9 & -0.7 & -10.4 \\ -0.7 & 236.3 & -6066 & -1390.9 & -0.7 & 10.4 \end{bmatrix}$$

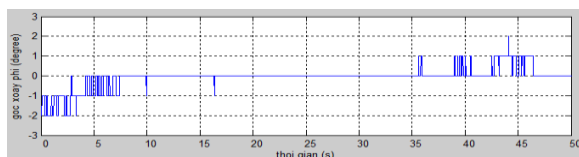
### 5.1. Điều khiển đứng yên tại vị trí cân bằng



**Hình 13.** Giá trị góc tới  $\theta$  (độ)



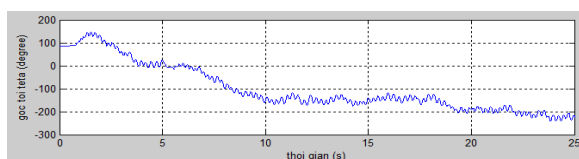
**Hình 14.** Giá trị góc nghiêng  $\psi$  (độ)



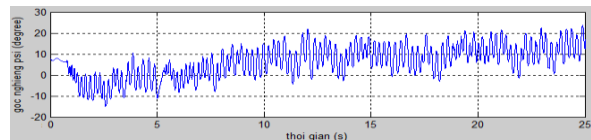
**Hình 15.** Giá trị góc xoay  $\phi$  (độ)

### 5.2. Điều khiển với vị trí đặt khác 0

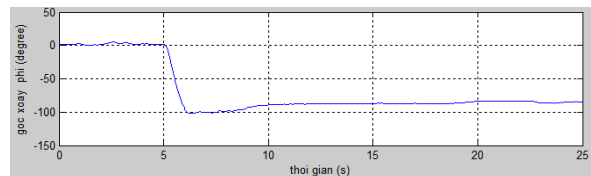
**Thí nghiệm 1:** Điều khiển quẹo trái



**Hình 16.** Giá trị góc tới  $\theta$  (độ)

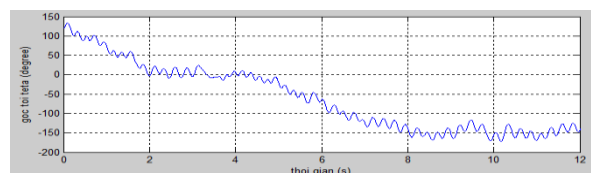


**Hình 17.** Giá trị góc nghiêng  $\psi$  (độ)

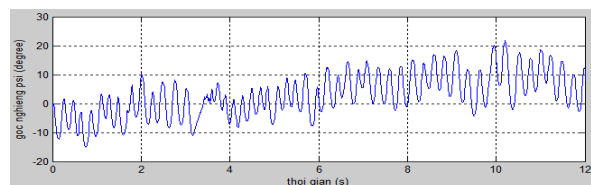


**Hình 18.** Giá trị góc xoay  $\phi$  (độ)

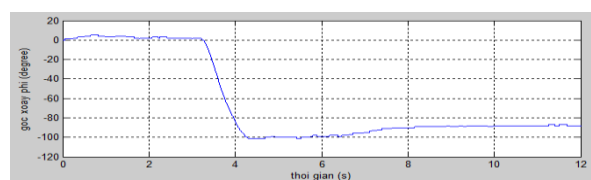
**Thí nghiệm 2:** Điều khiển quẹo phải



**Hình 19.** Giá trị góc tới  $\theta$  (độ)

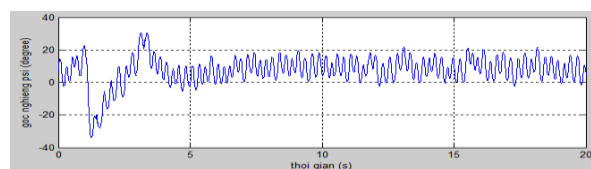


**Hình 20.** Giá trị góc nghiêng  $\psi$  (độ)

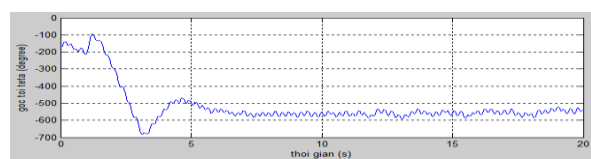


**Hình 21.** Giá trị góc xoay  $\phi$  (độ)

**Thí nghiệm 3:** Điều khiển đi lùi

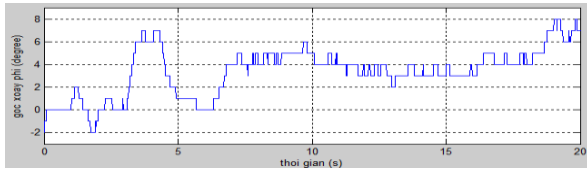


**Hình 22.** Giá trị góc tới  $\theta$  (độ)



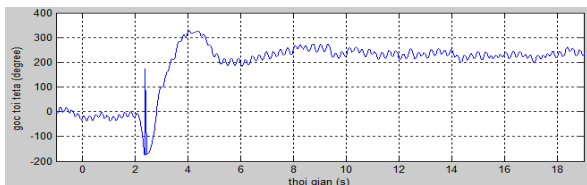
**Hình 23.** Giá trị góc nghiêng  $\psi$  (độ)



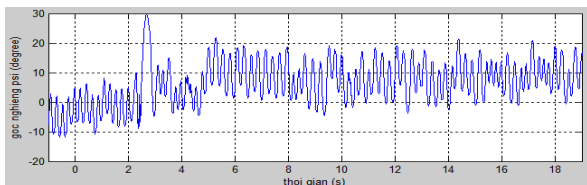


Hình 24. Giá trị góc xoay  $\phi$  (độ)

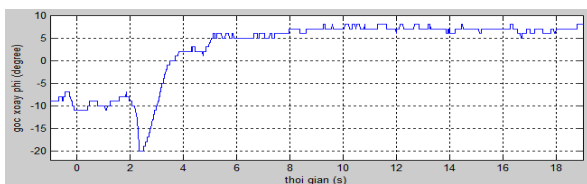
**Thí nghiệm 4:** Điều khiển đi tới



Hình 25. Giá trị góc tới  $\theta$  (độ)



Hình 26. Giá trị góc nghiêng  $\psi$  (độ)



Hình 27. Giá trị góc xoay  $\phi$  (độ)

**5.3. Nhận xét**

Qua các hình 16-27, ta nhận thấy hệ thống xe hai bánh cân bằng thực tế đã điều khiển được theo các trạng thái đi tới, đi lui,

quẹo trái, quẹo phải để đạt các giá trị đặt cho trước. Tuy nhiên, biến trạng thái trong thực tế không bám hoàn toàn các giá trị đặt. Đó là vì tính chất thỏa hiệp trong điều khiển LQR- sự sai lệch trong một biến trạng thái được bù đắp bằng sự sai lệch của một biến trạng thái tương ứng khác nhưng đủ để đảm bảo tính hiệu điều khiển vẫn đúng giá trị thiết kế. Đây là một khuyết điểm của điều khiển LQR so với các giải thuật điều khiển phi tuyến khác. Tuy nhiên, một giải thuật điều khiển LQR là đơn giản rất nhiều và dễ thiết kế cho hệ MIMO phức tạp so với các giải thuật điều khiển phi tuyến khác vốn chỉ phù hợp với đa số các hệ thống SISO.

**6. KẾT LUẬN**

Bài báo đã tính toán mô hình hóa về phương trình toán học của một hệ xe hai bánh tự cân bằng với ngõ vào là điện áp để có thể áp dụng cho đối tượng trên cả mô phỏng và thực tế. Từ đó, dựa trên mô hình vừa tính toán ra của hệ thống, nhóm tác giả thiết kế giải thuật điều khiển tối ưu cho hệ thống trên. Kết quả điều khiển cho kết quả tốt ở cả mô phỏng và thực tế.

**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

- [1] A. N. K. Nasir, M. A. Ahmad, R. M. T. Raja Ismail, *The Control of a Highly Nonlinear Two-wheeled Balancing Robot: A Comparative Assessment between LQR and PID-PID Control Schemes*, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering, Vol. 4, No. 10, 2010.
- [2] Nguyen Ngoc Son, Ho Pham Huy Anh, *Adaptive Backstepping Self-balancing Control of a Two-wheel Electric Scooter*, International Journal of Advanced Robotic Systems, Vol. 11, No. 1, 2014.
- [3] Ming Yue, Wei Sun, Ping Hu, *Sliding Mode Robust Control for Two-wheeled Mobile Robot with Lower Center of Gravity*, International Journal of Innovative Computing, Information and Control, Vol. 7, No. 2, 2011.



- [4] Samer Miasa, Mohammad Al-Mjali, Anas Al-Haj Ibrahim, and Tarek A. Ttunji, *Fuzzy Control of a Two-Wheel Balancing Robot using DSPIC*, 7th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices, 2010.
- [5] Unluturk, A, Aydogdu, O, Guner, U., *Design and PID control of two wheeled autonomous balance robot*, International Conference on Electronics, Computer and Computation (ICECCO), (IEEE), pp. 260-264, 2013.
- [6] Congying Qiu, Yibin Huang, *The Design of Fuzzy Adaptive PID Controller of Two-Wheeled Self-Balancing Robot*, International Journal of Information and Electronics Engineering, Vol. 5, No. 3, 2015.

**Tác giả chịu trách nhiệm bài viết**

ThS. Nguyễn Phong Lưu

Trường Đại học Sư Phạm Kỹ Thuật TP.HCM

Email: luunp@hcmute.edu.vn