Kỳ vọng

Toán Chuyên Đề

HUST

Ngày 8 tháng 10 năm 2016

Tài liệu tham khảo

- Eric Lehman, F Thomson Leighton & Albert R Meyer, *Mathematics for Computer Science*, 2013 (Miễn phí)
- Michael Mitzenmacher và Eli Upfal, *Probability and Computing*, 2005
- Nguyễn Tiến Dũng và Đỗ Đức Thái, *Nhập Môn Hiện Đại Xác Suất & Thống Kê*.

Định nghĩa

Kỳ vọng (hay còn gọi là giá trị trung bình) của biến ngẫu nhiên R trên không gian mẫu $\mathcal{S}$ là

$$\mathrm{Ex}[R] = \sum_{w \in \mathcal{S}} R(w) \cdot \Pr[w].$$

Ví dụ

Xét biến ngẫu nhiên

$$R = \text{ kết quả của việc tung con xúc xắc } 6 \text{ mặt.}$$

Kỳ vọng của R:

Ví dụ

Xét biến ngẫu nhiên

$$R = \text{ kết quả của việc tung con xúc xắc } 6 \text{ mặt.}$$

Kỳ vọng của R:

$$\mathrm{Ex}[R] = 1 \times 1/6 + 2 \times 1/6 + \cdots + 6 \times 1/6 = 3.5$$

không thuộc miền giá trị của R.

Ví dụ

Xét biến ngẫu nhiên

$$R = \text{ kết quả của việc tung con xúc xắc } 6 \text{ mặt.}$$

Kỳ vọng của R:

$$\mathrm{Ex}[R] = 1 \times 1/6 + 2 \times 1/6 + \cdots + 6 \times 1/6 = 3.5$$

không thuộc miền giá trị của R.

Câu hỏi

Nếu R_n là biến ngẫu nhiên với phân phối đều trên $\{1, 2, \ldots, n\}$, vậy thì

$$\mathrm{Ex}[R_n] = ?$$

Định nghĩa

Trung vị của biến ngẫu nhiên R là giá trị x thuộc miền giá trị của R thoả mãn

$$\Pr[R < x] \leq 1/2 \quad \text{và}$$
$$\Pr[R > x] < 1/2.$$

Định nghĩa

Trung vị của biến ngẫu nhiên R là giá trị x thuộc miền giá trị của R thoả mãn

$$\Pr[R < x] \leq 1/2 \quad \text{và}$$
$$\Pr[R > x] < 1/2.$$

Ví dụ

Xét biến ngẫu nhiên

$$R = \text{ kết quả của việc tung con xúc xắc } 6 \text{ mặt.}$$

Trung vị của R là 4 vì

$$\Pr[R < 4] = 3/6 \quad \text{và}$$
$$\Pr[R > 4] = 2/6.$$

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên chỉ báo

Bổ đề

Nếu I_A *là* **biến ngẫu nhiên chỉ báo cho sự kiện** A, *vậy thì*

$$\mathrm{Ex}[I_A] = \Pr[A].$$

Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên chỉ báo

Bổ đề

Nếu I_A *là* **biến ngẫu nhiên chỉ báo cho sự kiện** A, *vậy thì*

$$\mathrm{Ex}[I_A] = \Pr[A].$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ex}[I_A] &= 1 \cdot \Pr[I_A = 1] + 0 \cdot \Pr[I_A = 0] \\
&= 1 \cdot \Pr[I_A = 1] \\
&= \Pr[A].
\end{aligned}$$

□

Ví dụ

Bạn chơi trò tung đồng xu: thắng $\$1$ nếu đồng xu sấp, và thua $\$1$ nếu đồng xu ngửa

$$R = \text{số tiền lãi}$$

Vậy thì

$$\mathrm{Ex}[R] =$$

Ví dụ

Bạn chơi trò tung đồng xu: thắng \$1 nếu đồng xu sấp, và thua \$1 nếu đồng xu ngửa

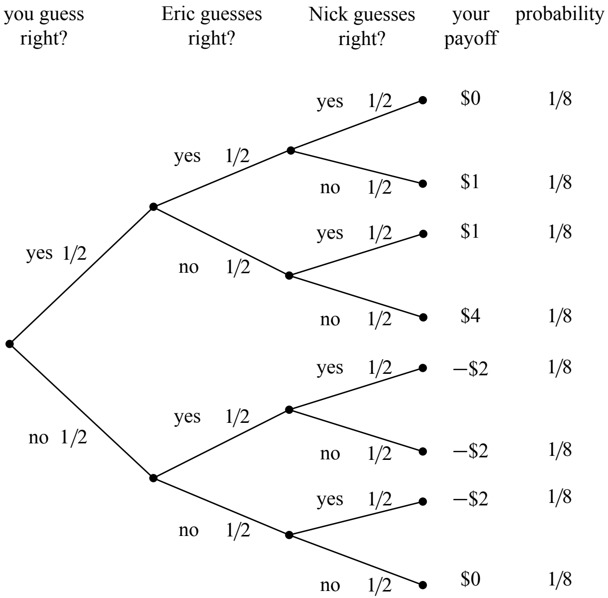
$$R = \text{số tiền lãi}$$

Vậy thì

$$\mathrm{Ex}[R] = 1 \times 1/2 - 1 \times 1/2 = 0.$$

Đánh cuộc

- Nick và Eric gợi ý bạn chơi trò chơi đánh cuộc.
- Mỗi người đặt $\$2$ lên bàn và bí mật viết H hoặc T vào một tờ giấy.
- Một người chơi sẽ tung đồng xu.
- $\$6$ sẽ chia đều cho những người viết đúng kết quả.
- Liệu bạn có thể thua?


you guess right?
Eric guesses right?
Nick guesses right?
your payoff
probability
yes 1/2
no 1/2
yes 1/2
no 1/2
yes 1/2
no 1/2
yes 1/2
no 1/2
yes 1/2
no 1/2
yes 1/2
no 1/2
yes 1/2
no 1/2
$0
$1
$1
$4
−$2
−$2
−$2
$0
1/8
1/8
1/8
1/8
1/8
1/8
1/8
1/8

Câu hỏi

- Giá trị

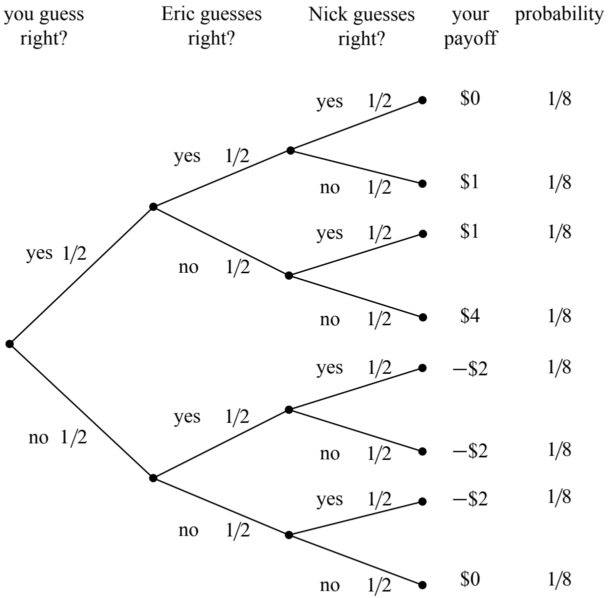
$$\mathrm{Ex}[\text{ Số tiền Lãi }] = ?$$

Câu hỏi

- Giá trị

$$\mathrm{Ex}[\text{ Số tiền Lãi }] = ?$$

- Chuyên gì xảy ra nếu Eric và Nick luôn đặt ngược nhau?



you guess right?
Eric guesses right?
Nick guesses right?
your payoff
probability
yes 1/2
no 1/2
yes 1/2
no 1/2
yes 1/2
no 1/2
yes 1/2
no 1/2
yes 1/2
no 1/2
yes 1/2
no 1/2
yes 1/2
no 1/2
$0 1/8
$1 1/8
$1 1/8
$4 1/8
−$2 1/8
−$2 1/8
−$2 1/8
$0 1/8

Câu hỏi

Trong trường hợp Eric và Nick luôn đặt ngược nhau thì

$$\mathrm{Ex}[\text{ Số tiền Lãi }] = ?$$

Làm thế nào để thắng xổ số?

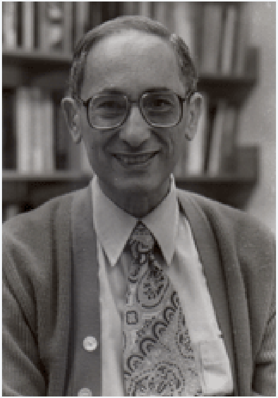
- Người chơi đặt $\$1$ và chọn 4 số trong khoảng 1 đến 36;
- Công ty sổ xố của nhà nước rút ngẫu nhiên 4 số trong khoảng 1 đến 36;
- Công ty sổ xố chia đều $1/2$ số tiền thu được cho những người đoán đúng và dành một nửa còn lại cho ngân sách.

Khám phá của Herman Chernoff

Phần lớn mọi người chọn số giống nhau. Có vẻ như họ nghĩ theo cũng một cách.

Vậy, họ hợp tác với nhau để giành phần thua! Nếu họ đoán đúng, họ sẽ phải chia sẻ phần thưởng với nhiều người khác.

Vậy thì, chọn ngẫu nhiên là một lợi thế. Kỳ vọng Lãi là $+\$0.7$ chứ không phải là $-\$0.5$.



Định nghĩa tương đương của kỳ vọng

Định lý

$$\mathrm{Ex}[R] = \sum_{x \in Range(R)} x \cdot \Pr[R = x].$$

Định nghĩa tương đương của kỳ vọng

Định lý

$$\mathrm{Ex}[R] = \sum_{x \in Range(R)} x \cdot \Pr[R = x].$$

$$\mathrm{Ex}[R] = \sum_{w \in \mathcal{S}} R(w) \Pr[w]$$

Định nghĩa tương đương của kỳ vọng

Định lý

$$\mathrm{Ex}[R] = \sum_{x \in Range(R)} x \cdot \Pr[R = x].$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}[R] &= \sum_{w \in \mathcal{S}} R(w)\Pr[w] \\ &= \sum_{x \in Range(R)} \sum_{w \in [R=x]} R(w)\Pr[w]\end{aligned}$$

Định nghĩa tương đương của kỳ vọng

Định lý

$$\mathrm{Ex}[R] = \sum_{x \in Range(R)} x \cdot \Pr[R = x].$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ex}[R] &= \sum_{w \in \mathcal{S}} R(w)\Pr[w] \\
&= \sum_{x \in Range(R)} \sum_{w \in [R=x]} R(w)\Pr[w] \\
&= \sum_{x \in Range(R)} \sum_{w \in [R=x]} x \cdot \Pr[w]
\end{aligned}$$

Định nghĩa tương đương của kỳ vọng

Định lý

$$\mathrm{Ex}[R] = \sum_{x \in Range(R)} x \cdot \Pr[R = x].$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ex}[R] &= \sum_{w \in \mathcal{S}} R(w)\Pr[w] \\
&= \sum_{x \in Range(R)} \sum_{w \in [R=x]} R(w)\Pr[w] \\
&= \sum_{x \in Range(R)} \sum_{w \in [R=x]} x \cdot \Pr[w] \\
&= \sum_{x \in Range(R)} x \left(\sum_{w \in [R=x]} \Pr[w] \right)
\end{aligned}$$

Định nghĩa tương đương của kỳ vọng

Định lý

$$\mathrm{Ex}[R] = \sum_{x \in Range(R)} x \cdot \Pr[R = x].$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ex}[R] &= \sum_{w \in \mathcal{S}} R(w)\Pr[w] \\
&= \sum_{x \in Range(R)} \sum_{w \in [R=x]} R(w)\Pr[w] \\
&= \sum_{x \in Range(R)} \sum_{w \in [R=x]} x \cdot \Pr[w] \\
&= \sum_{x \in Range(R)} x \left(\sum_{w \in [R=x]} \Pr[w] \right) = \sum_{x \in Range(R)} x \cdot \Pr[R = x].
\end{aligned}$$

Hệ quả

Nếu $R : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{N}$ *thì*

$$\mathrm{Ex}[R] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[R = i].$$

Định lý

Nếu $R : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{N}$ *thì*

$$\mathrm{Ex}[R] = \sum_{i=0}^{\infty} \Pr[R > i].$$

Chứng minh.

$$\begin{array}{rcr}
\Pr[R > 0] & = & \Pr[R = 1] + \Pr[R = 2] + \Pr[R = 3] + \cdots \\
\Pr[R > 1] & = & \Pr[R = 2] + \Pr[R = 3] + \cdots \\
\Pr[R > 2] & = & \Pr[R = 3] + \cdots \\
 & \vdots & \\
\hline
\sum_{i=0}^{\infty} \Pr[R > i] & = & \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[R = i]
\end{array}$$

$\square$

Câu hỏi

Xét một hệ thống chạy với xác suất xảy ra lỗi (độc lập) tại mỗi bước là p.

$$R = \text{ bước xuất hiện lỗi } .$$

Hãy tính $\mathrm{Ex}[R]$.

Lời giải

$$\mathrm{Ex}[R] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[R = i]$$

Lời giải

$$\mathrm{Ex}[R] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[R = i] = \sum_{i=0}^{\infty} \overbrace{\Pr[R > i]}^{\Pr[\ i \text{ bước đầu OK }]}$$

Lời giải

$$\mathrm{Ex}[R] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[R = i] = \sum_{i=0}^{\infty} \overbrace{\Pr[R > i]}^{\Pr[\ i \text{ bước đầu OK }]}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr[\text{ OK bước 1 }] \cdot \Pr[\text{ OK bước 2 }] \cdots \Pr[\text{ OK bước } i\ ]$$

Lời giải

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ex}[R] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[R = i] = \sum_{i=0}^{\infty} \overbrace{\Pr[R > i]}^{\Pr[\ i \text{ bước đầu OK }]} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr[\text{ OK bước 1 }] \cdot \Pr[\text{ OK bước 2 }] \cdots \Pr[\text{ OK bước } i\ ] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i
\end{aligned}
$$

Lời giải

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ex}[R] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[R = i] = \sum_{i=0}^{\infty} \overbrace{\Pr[R > i]}^{\Pr[\ i \text{ bước đầu OK }]} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr[\text{ OK bước 1 }] \cdot \Pr[\text{ OK bước 2 }] \cdots \Pr[\text{ OK bước } i\ ] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \\
&= \frac{1}{1-(1-p)}
\end{aligned}
$$

Lời giải

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ex}[R] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[R = i] = \sum_{i=0}^{\infty} \overbrace{\Pr[R > i]}^{\Pr[\text{ } i \text{ bước đầu OK }]} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \Pr[\text{ OK bước 1 }] \cdot \Pr[\text{ OK bước 2 }] \cdots \Pr[\text{ OK bước } i \text{ }] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \\
&= \frac{1}{1-(1-p)} \\
&= 1/p
\end{aligned}
$$

Câu hỏi

Về trung bình, cần sinh bao nhiêu lần thì có được con gái biết rằng $\Pr[\text{ sinh con gái }] = 1/2$?

Câu hỏi

Xét D là thời gian trễ của gói tin. Nếu

$$\Pr[D > i] = 1/i$$

thì thời gian trễ trung bình của gói tin bằng bao nhiêu?

Câu hỏi

Xét D là thời gian trễ của gói tin. Nếu

$$\Pr[D > i] = 1/i$$

thì thời gian trễ trung bình của gói tin bằng bao nhiêu?

$$\text{Ex}[D] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[D \geq i]$$

Câu hỏi

Xét D là thời gian trễ của gói tin. Nếu

$$\Pr[D > i] = 1/i$$

thì thời gian trễ trung bình của gói tin bằng bao nhiêu?

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}[D] &= \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[D \geq i] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} 1/i\end{aligned}$$

Câu hỏi

Xét D là thời gian trễ của gói tin. Nếu

$$\Pr[D > i] = 1/i$$

thì thời gian trễ trung bình của gói tin bằng bao nhiêu?

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}[D] &= \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[D \geq i] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} 1/i = \infty.\end{aligned}$$

Tính tuyến tính của kỳ vọng

Định lý

Với các biến ngẫu nhiên R_1, R_2 *(không nhất thiết phải độc lập) trên không gian xác suất* $\mathcal{S}$*,*

$$\mathrm{Ex}[R_1 + R_2] = \mathrm{Ex}[R_1] + \mathrm{Ex}[R_2].$$

Tính tuyến tính của kỳ vọng

Hệ quả

Với các biến ngẫu nhiên $R_1, R_2, \ldots, R_n$ *(không nhất thiết phải độc lập) trên không gian xác suất* $\mathcal{S}$*,*

$$\mathrm{Ex}[R_1 + R_2 + \cdots + R_n] = \mathrm{Ex}[R_1] + \mathrm{Ex}[R_2] + \cdots + \mathrm{Ex}[R_n].$$

Ví dụ

Tung hai con xúc xắc và đặt

$$R_1 = \text{ kết quả của con xúc xắc } 1$$
$$R_2 = \text{ kết quả của con xúc xắc } 2$$

Vậy thì

$$\mathrm{Ex}[R_1 + R_2]$$

Ví dụ

Tung hai con xúc xắc và đặt

$$\begin{aligned} R_1 &= \text{ kết quả của con xúc xắc } 1 \\ R_2 &= \text{ kết quả của con xúc xắc } 2 \end{aligned}$$

Vậy thì

$$\mathrm{Ex}[R_1 + R_2] = \mathrm{Ex}[R_1] + \mathrm{Ex}[R_2]$$

Ví dụ

Tung hai con xúc xắc và đặt

$$\begin{aligned} R_1 &= \text{ kết quả của con xúc xắc } 1 \\ R_2 &= \text{ kết quả của con xúc xắc } 2 \end{aligned}$$

Vậy thì

$$\begin{aligned} \mathrm{Ex}[R_1 + R_2] &= \mathrm{Ex}[R_1] + \mathrm{Ex}[R_2] \\ &= 3.5 + 3.5 = 7. \end{aligned}$$

Bài toán kiểm tra mũ

Có n người đàn ông đến Casino. Mỗi người có một cái mũ. Khi đến, họ cất mũ lên giá. Khi về, mỗi người lấy ngẫu nhiên một chiếc mũ. Đặt

$$R = \text{ Số người lấy đúng mũ của mình.}$$

Hãy tính $\mathrm{Ex}[R]$.

Bài toán kiểm tra mũ

Có n người đàn ông đến Casino. Mỗi người có một cái mũ. Khi đến, họ cất mũ lên giá. Khi về, mỗi người lấy ngẫu nhiên một chiếc mũ. Đặt

$$R = \text{ Số người lấy đúng mũ của mình.}$$

Hãy tính $\mathrm{Ex}[R]$.

$$\mathrm{Ex}[R] = \sum_{i=0}^{n} k \cdot \Pr[R = k]$$

$$\Pr[R = k] = \begin{cases} \frac{1}{k!(n-k)!} & \text{với } k \leq n-2 \\ \frac{1}{n!} & \text{với } k = n-1, n \end{cases}$$

Bài toán kiểm tra mũ

Có n người đàn ông đến Casino. Mỗi người có một cái mũ. Khi đến, họ cất mũ lên giá. Khi về, mỗi người lấy ngẫu nhiên một chiếc mũ. Đặt

$$R = \text{ Số người lấy đúng mũ của mình.}$$

Hãy tính $\mathrm{Ex}[R]$.

$$\mathrm{Ex}[R] = \sum_{i=0}^{n} k \cdot \Pr[R = k]$$

$$\Pr[R = k] = \begin{cases} \frac{1}{k!(n-k)!} & \text{với } k \leq n-2 \\ \frac{1}{n!} & \text{với } k = n-1, n \end{cases}$$

Bài toán có vẻ khó!

Một lời giải dễ

Đặt

$$R_i = \begin{cases} 1 & \text{nếu người thứ } i \text{ lấy đúng mũ} \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

Một lời giải dễ

Đặt

$$R_i = \begin{cases} 1 & \text{nếu người thứ } i \text{ lấy đúng mũ} \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

Ta có

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n.$$

Một lời giải dễ

Đặt

$$R_i = \begin{cases} 1 & \text{nếu người thứ } i \text{ lấy đúng mũ} \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

Ta có

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n.$$

Vậy thì

$$\mathrm{Ex}[R] = \mathrm{Ex}[R_1] + \mathrm{Ex}[R_2] + \cdots + \mathrm{Ex}[R_n]$$

Một lời giải dễ

Đặt

$$R_i = \begin{cases} 1 & \text{nếu người thứ } i \text{ lấy đúng mũ} \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

Ta có

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n.$$

Vậy thì

$$\begin{aligned} \mathrm{Ex}[R] &= \mathrm{Ex}[R_1] + \mathrm{Ex}[R_2] + \cdots + \mathrm{Ex}[R_n] \\ &= \Pr[R_1 = 1] + \Pr[R_2 = 1] + \cdots + \Pr[R_n = 1] \end{aligned}$$

Một lời giải dễ

Đặt

$$R_i = \begin{cases} 1 & \text{nếu người thứ } i \text{ lấy đúng mũ} \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

Ta có

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n.$$

Vậy thì

$$\begin{aligned} \mathrm{Ex}[R] &= \mathrm{Ex}[R_1] + \mathrm{Ex}[R_2] + \cdots + \mathrm{Ex}[R_n] \\ &= \Pr[R_1 = 1] + \Pr[R_2 = 1] + \cdots + \Pr[R_n = 1] \\ &= 1/n + 1/n + \cdots + 1/n \end{aligned}$$

Một lời giải dễ

Đặt

$$R_i = \begin{cases} 1 & \text{nếu người thứ } i \text{ lấy đúng mũ} \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

Ta có

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n.$$

Vậy thì

$$\begin{aligned} \mathrm{Ex}[R] &= \mathrm{Ex}[R_1] + \mathrm{Ex}[R_2] + \cdots + \mathrm{Ex}[R_n] \\ &= \Pr[R_1 = 1] + \Pr[R_2 = 1] + \cdots + \Pr[R_n = 1] \\ &= 1/n + 1/n + \cdots + 1/n \\ &= 1. \end{aligned}$$

Bài tập

- Một con khỉ đánh máy với bàn phím chỉ có 26 chữ cái thường.
- Mỗi ký tự được chọn độc lập và theo phân phối đều trên bảng chữ.
- Nếu con khỉ đánh $1,000,000$ ký tự, vậy trung bình có bao nhiêu xâu "proof" xuất hiện?