Biến ngẫu nhiên

Toán Chuyên Đề

HUST

Ngày 8 tháng 10 năm 2016

Tài liệu tham khảo

- Eric Lehman, F Thomson Leighton & Albert R Meyer, *Mathematics for Computer Science*, 2013 (Miễn phí)
- Michael Mitzenmacher và Eli Upfal, *Probability and Computing*, 2005
- Nguyễn Tiến Dũng và Đỗ Đức Thái, *Nhập Môn Hiện Đại Xác Suất & Thống Kê*.

Định nghĩa

Một biến ngẫu nhiên X trên không gian mẫu $\mathcal{S}$ là một hàm giá trị thực

$$X : \mathcal{S} \to \mathbb{R}.$$

Cho biến ngẫu nhiên X và một số thực a, sự kiện : "$X = a$" biểu diễn tập $\{s \in \mathcal{S} \mid X(s) = a\}$.

$$\Pr[X = a] \;=\; \sum_{s \in \mathcal{S},\; X(s) = a} \Pr[s].$$

Ví dụ

Tung ba đồng xu và định nghĩa

- Biến ngẫu nhiên $R =$ số mặt ngửa H

$$R(H,T,H) = ?$$
$$\Pr[R = 2] = ?$$

- Biến ngẫu nhiên

$$M = \begin{cases} 1 & \text{nếu kết quả cả ba đồng giống nhau} \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

$$M(H,T,H) = ?$$
$$\Pr[M = 1] = ?$$

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên chỉ báo (hay còn gọi là Bernoulli hoặc đặc trưng) là một biến ngẫu nhiên với miền giá trị là $\{0, 1\}$.

Ví dụ

Biến ngẫu nhiên M là biến ngẫu nhiên chỉ báo. Nó phân hoạch không gian mẫu thành hai phần

$$S_1 = \{s \in \mathcal{S} \mid M(s) = 1\} \quad \text{và} \quad S_2 = \{s \in \mathcal{S} \mid M(s) = 0\}$$

Với mỗi tập con $A \subset \mathbb{R}$, ta có

$$\Pr[X \in A] = \sum_{a \in A} \Pr[X = a].$$

Ví dụ

Với $A = \{1, 3\}$, ta có

$$\Pr[R \in A] = 1/2$$

Tại sao?

Bài tập

Tính

$$\Pr[R = 2 \mid M = 1]$$

Định nghĩa

Hai biến ngẫu nhiên X_1, X_2 là độc lập nếu, với mọi $a, b \in \mathbb{R}$

$$\Pr[X_1 = a \mid X_2 = b] = \Pr[X_1 = a]$$

hoặc $\Pr[X_2 = b] = 0$.

Tương đương với điều kiện: Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$

$$\Pr[(X_1 = a) \cap (X_2 = b)] = \Pr[X_1 = a] \cdot \Pr[X_2 = b]$$

Câu hỏi

Hai biến ngẫu nhiên R và M có độc lập không?

Ví dụ

Xét hai biến ngẫu nhiên D_1 và D_2 là kết quả của việc tung hai con xúc xắc 6 mặt độc lập. Ta định nghĩa hai biến ngẫu nhiên

$$S = D_1 + D_2 \quad \text{và} \quad T = \begin{cases} 1 & \text{nếu } S = 7 \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

Câu hỏi

1. S và D_1 có độc lập không?
2. D_1 và T có độc lập không?

Định nghĩa

Các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là độc lập nếu, với mọi tập con $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ và mọi giá trị $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$,

$$\Pr\left[\bigcap_{i \in I} X_i = a_i\right] = \prod_{i \in I} \Pr[X_i = a_i]$$

Định nghĩa

Xét biến ngẫu nhiên X,

- hàm phân bố cho X là

$$f(a) = \Pr[X = a]$$

- hàm phân bố tích lũy cho X là

$$\begin{aligned} F(a) &= \Pr[X \leq a] \\ &= \sum_{b \leq a} \Pr[X = b] \end{aligned}$$

Ví dụ

- Phân phối Bernoulli

$$f(0) = p, \quad f(1) = 1 - p$$
$$F(0) = ?, \quad F(1) = ?$$

- Phân phối đều trên $\{1, 2, \ldots, n\}$

$$f_n(k) = 1/n, \quad \text{với } 1 \leq k \leq n$$
$$F_n(k) = ?$$

Trò chơi với các số

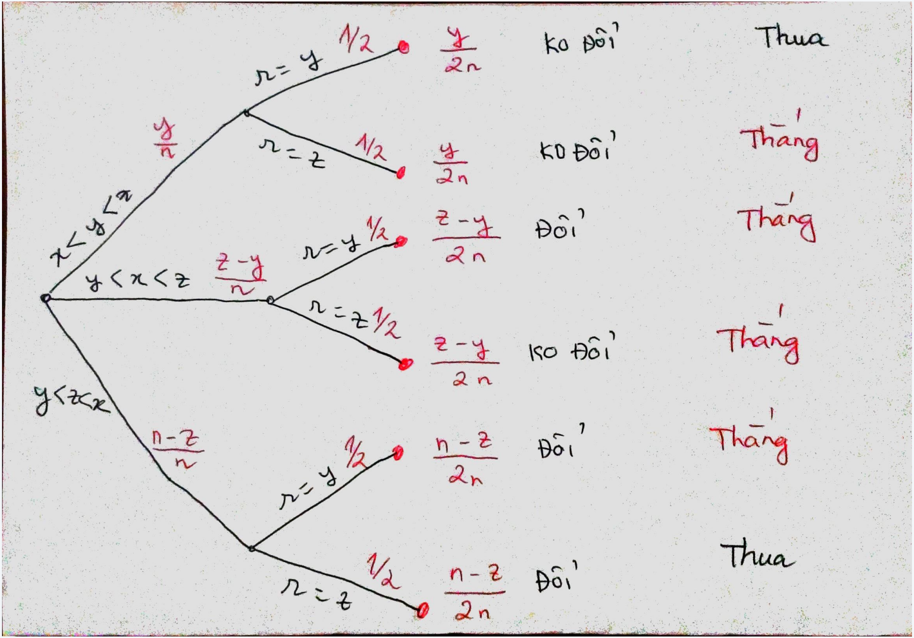
- Ta có hai phong bì. Mỗi phong bì chứa một số thuộc $0, 1, \ldots, 100$ phân biệt nhau.
- Để thắng, bạn phải xác định phong bì nào chứa số lớn hơn. Bạn có thể mở một phong bì ngẫu nhiên.
- Liệu có chiến lược cho phép thắng với xác suất lớn hơn 50%?

Chiến lược ngẫu nhiên

1. Mỗi phong bì chứa $y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}$ với $y < z$;
2. Người chơi chọn x ngẫu nhiên đều trong

$$\left\{\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{2},\ \cdots,\ n - \frac{1}{2}\right\};$$

3. Người chơi hy vọng $y < x < z$;
4. Người chơi mở ngẫu nhiên một phong bì để lộ $r \in \{y, z\}$;
5. Người chơi đổi nếu $r < x$.


x < y < z
y/n
r = y
1/2
y/2n
KO Đổi
Thua
r = z
1/2
y/2n
KO Đổi
Thắng
y < x < z
(z - y)/n
r = y
1/2
(z - y)/2n
Đổi
Thắng
r = z
1/2
(z - y)/2n
KO Đổi
Thắng
y < z < x
(n - z)/n
r = y
1/2
(n - z)/2n
Đổi
Thắng
r = z
1/2
(n - z)/2n
Đổi
Thua

$$
\begin{aligned}
\Pr[\text{ thắng }] &= \frac{y}{2n} + \frac{z-y}{2n} + \frac{z-y}{2n} + \frac{n-z}{2n} \\
&= \frac{n+z-y}{2n} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{z-y}{2n} \\
&\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}
\end{aligned}
$$

Phân bố nhị thức

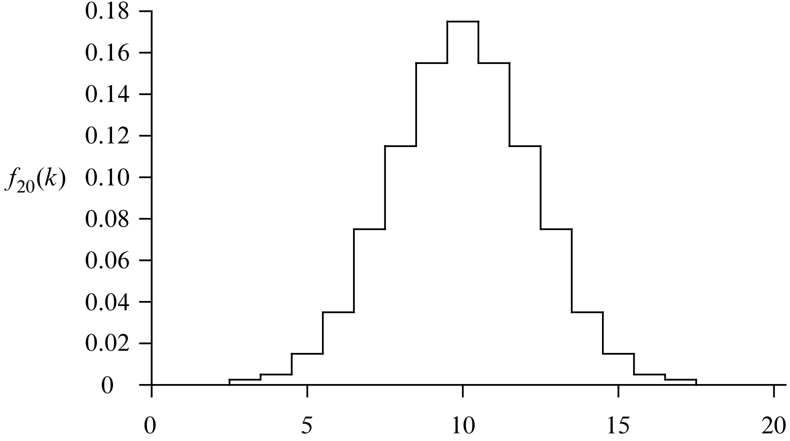
Định nghĩa

- Phân bố nhị thức đều

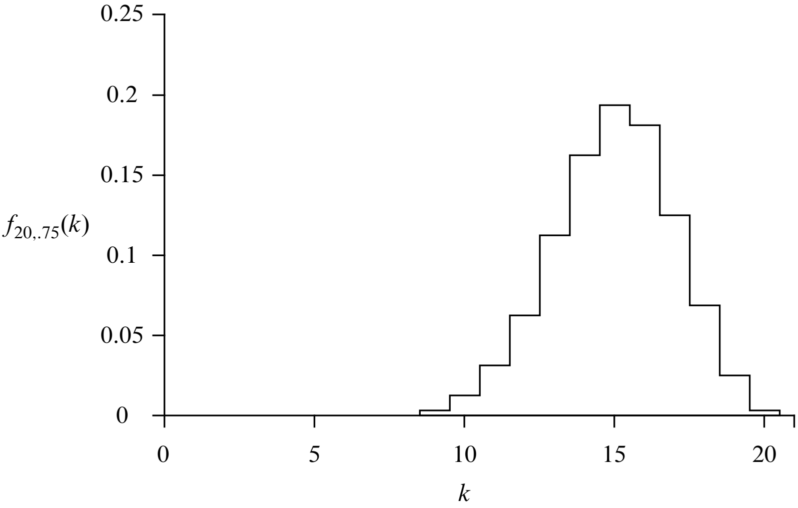
$$f_n(k) = \binom{n}{k} 2^{-n} \qquad \text{với } n \geq 1, 0 \leq k \leq n$$

- Phân bố nhị thức tổng quát

$$f_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$



Hình: Phân phối nhị thức đều với $n = 20$



Hình: Phân phối nhị thức tổng quát với $n = 20$ và $p = 0.75$

Phân bố nhị thức đều

Câu hỏi

Hãy tính xác suất nhận được đúng 25 lần mặt sấp khi tung đồng xu 100 lần.

Phân bố nhị thức tổng quát

- Xét một hệ thống với n thành phần $c_1, c_2, \ldots, c_n$, mỗi thành phần có thể có lỗi một cách độc lập với xác suất p.
- Xét R là biến ngẫu nhiên xác định bởi

$$R(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \text{ tổng số lỗi của các thành phần}$$

Định lý

$$\Pr[R = k] = f_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$