

Xác suất có điều kiện

Toán Chuyên Đề

HUST

Ngày 9 tháng 9 năm 2016

Tài liệu tham khảo

- Eric Lehman, F Thomson Leighton & Albert R Meyer, *Mathematics for Computer Science*, 2013 ([Miễn phí](#))
- Michael Mitzenmacher và Eli Upfal, *Probability and Computing*, 2005
- Nguyễn Tiến Dũng và Đỗ Đức Thái, *Nhập Môn Hiện Đại Xác Suất & Thống Kê*.

Xác suất có điều kiện

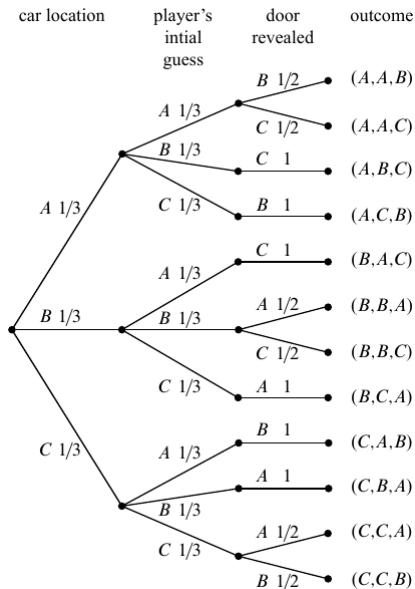
$\Pr[A \mid B]$ = xác suất của sự kiện A nếu sự kiện B xảy ra.

Ví dụ

- F = sự kiện phần thưởng được đặt ở cửa A .
- E = sự kiện người chơi chọn cửa A .
- Vậy thì

$$\Pr[E \mid F] = 1/3.$$

Tại sao?



Định nghĩa

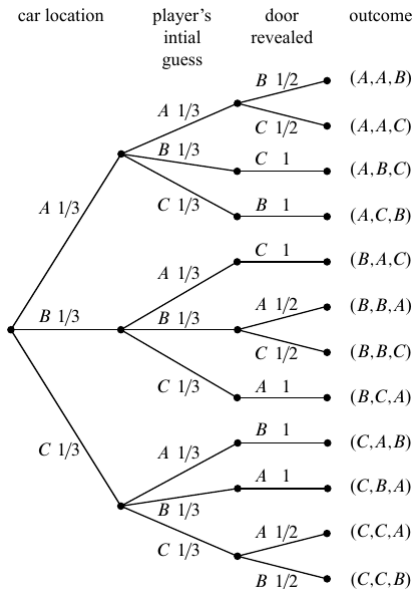
$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$$

Nếu $\Pr[B] = 0$ thì $\Pr[A \mid B]$ không xác định.

Ví dụ

- F = sự kiện phần thưởng đặt ở cửa A
- E = sự kiện người chơi chọn cửa A .
- Hỏi

$$\Pr[E \cap F] = ?$$



Bài tập

- Giả sử ta có hai đồng xu.
- Đồng xu thật $\Pr[\text{ngửa}] = \Pr[\text{xấp}] = 1/2$
- Đồng xu giả $\Pr[\text{ngửa}] = 1, \quad \Pr[\text{xấp}] = 0$
- Lấy một đồng với mặt ngửa lên trên, hãy tính xác suất để đồng đó là thật.

Luật tích

Nếu $\Pr[B] \neq 0$, thì

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[B] \cdot \Pr[A \mid B]$$

Ví dụ

- F = sự kiện phần thưởng đặt ở cửa A
- E = sự kiện người chơi chọn cửa A .

$$\Pr[E \cap F] = \Pr[F] \cdot \Pr[E \mid F] = 1/3 \times 1/3$$

Bài tập

Hãy tìm công thức cho luật tích của 3 tập

$$\Pr[E_1 \cap E_2 \cap E_3] = ?$$

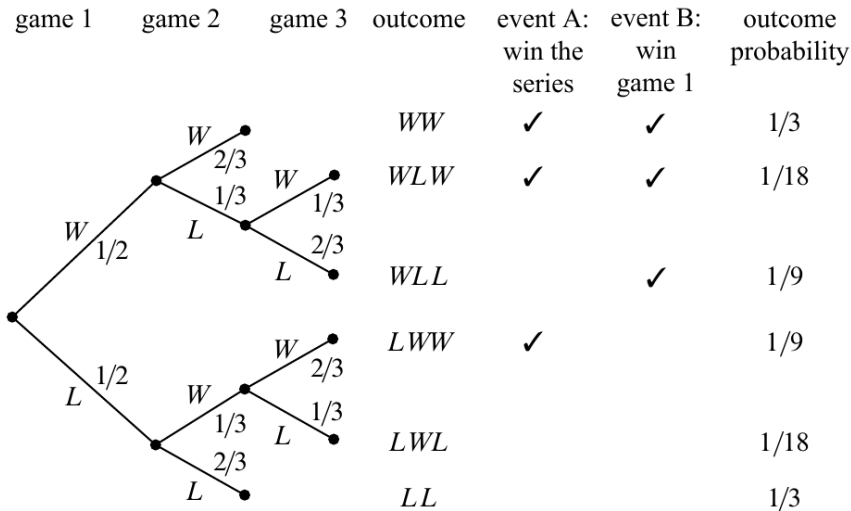
Best-of-three playoff

A best-of-three playoff là kiểu chơi đối đầu trực tiếp giữa hai đội trong đó đội thắng hai trận sẽ thắng. Nếu một đội thắng cả hai trận đầu, trận thứ ba sẽ không phải chơi nữa.

- Xác suất đội BK thắng trận đầu là $1/2$.
- Với các trận sau, xác suất thắng của BK phụ thuộc vào kết quả của trận trước đó.
- Nếu trận trước thắng, thì trận sau cũng thắng với xác suất $2/3$.
- Nếu trận trước thua, thì trận sau thắng với xác suất chỉ $1/3$.
- Hãy tính xác suất của đội BK thắng, biết rằng họ đã thắng trận đầu tiên.

- A = sự kiện đội BK thắng.
- B = sự kiện đội BK thắng trận đầu tiên.

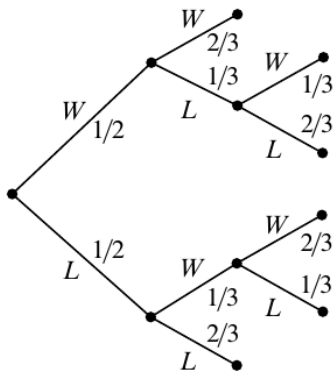
$$\Pr[A \mid B] = ?$$



- A = sự kiện đội BK thắng.
- B = sự kiện đội BK thắng trận đầu tiên.

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = ?$$

Xác suất có điều kiện trên cạnh của cây



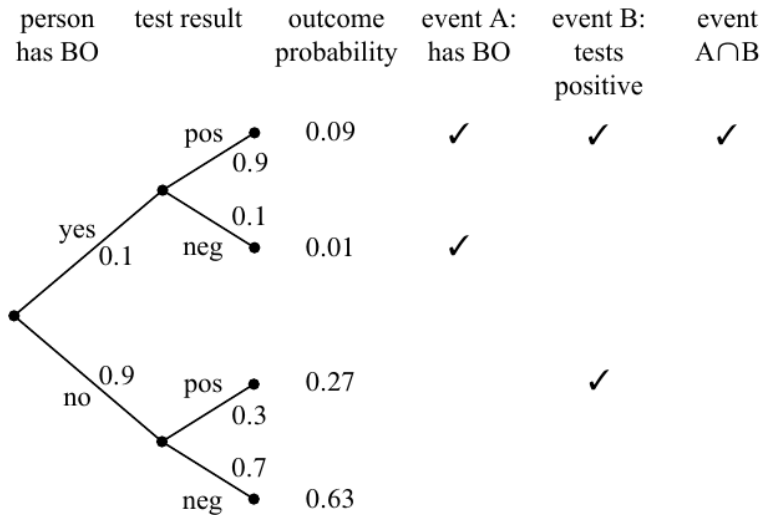
$$\begin{aligned}\Pr[WW] &= \Pr[\text{thắng trận 1}] \cdot \Pr[\text{thắng trận 2} \mid \text{thắng trận 1}] \\ &= 1/2 \times 2/3 = 1/3\end{aligned}$$

Xét nghiệm y khoa

Có một bệnh mà 10% dân số bị. Có một test để phát hiện bệnh tiềm ẩn; test này không phải là hoàn hảo, tuy nhiên :

- Nếu bạn có bệnh, chỉ có 10% khả năng test nói bạn không có (false negatives).
- Nếu bạn không có bệnh, có 30% khả năng test nói bạn có (false positives).

Giả sử một người ngẫu nhiên được test. Nếu test là dương tính, vậy thì xác suất người này mắc bệnh là bao nhiêu?



- A sự kiện người này có bệnh.
- B sự kiện người này có test dương tính.

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = ?$$

$$\Pr[\text{test là đúng}] = ?$$

Xác suất hậu nghiệm

Bài tập

Trong trò chơi best-of-three, hãy tính xác suất đội BK đã thắng trận đầu tiên, biết rằng cuối cùng họ đã thắng.

Định lý (Bayes)

Nếu $\Pr[A]$ và $\Pr[B]$ khác 0, vậy thì

$$\Pr[B \mid A] = \frac{\Pr[A \mid B] \cdot \Pr[B]}{\Pr[A]}.$$

Bài tập

Chứng minh Định lý Bayes.

Đây là một bài toán được 3 nhà toán học Cassels, Shoenberger và Grayboys đem đố 60 sinh viên và cán bộ y khoa tại Harvard Medical School năm 1978.

Bài tập

- Giả sử có một loại bệnh mà tỷ lệ người mắc bệnh là $1/1000$.
- Giả sử có một loại xét nghiệm, mà ai mắc bệnh khi xét cũng ra phản ứng dương tính, nhưng tỷ lệ phản ứng dương tính nhầm (false positive) là 5% (tức là trong số những người không bị bệnh có 5% số người thử ra phản ứng dương tính).
- Hỏi khi một người xét nghiệm bị phản ứng dương tính, thì khả năng mắc bệnh của người đó là bao nhiêu?