

Toán chuyên đề: *Độ lệch*
Bài tập 4

1. Một đàn bò đang bị ảnh hưởng bởi một đợt bùng phát của bệnh bò lạnh. Bệnh sẽ làm giảm thân nhiệt bình thường của bò, và con bò sẽ chết nếu thân nhiệt xuống dưới 90 độ F . Dịch bệnh phát triển mạnh đến mức nó đã hạ thân nhiệt trung bình của cả đàn bò xuống còn 85 độ. Con bò có thân nhiệt thấp nhất tìm thấy trong đàn có thân nhiệt 70 độ.

- (a) Chứng minh rằng nhiều nhất chỉ $3/4$ số bò có thể sống sót. *Gợi ý:* Gọi T là nhiệt độ của một con bò ngẫu nhiên. Hãy sử dụng chặn Markov.
- (b) Giả sử có 400 con bò trong đàn. Hãy chứng minh rằng chặn đưa ra trong phần (1a) là tốt nhất có thể bằng cách đưa ra một ví dụ về thân nhiệt của các con bò sao cho thân nhiệt trung bình của đàn bò là 85, và với xác suất $3/4$, một con bò được chọn ngẫu nhiên sẽ có nhiệt độ đủ cao để sống sót.

2. n nhân viên của công ty Hat-check đã có một ngày Team Building đủ vui; và cuối bữa tiệc, mọi người đều đã mệt mỏi. Họ lấy mũ một cách ngẫu nhiên trong n chiếc mũ treo trên giá sao cho xác suất mỗi người lấy đúng mũ của mình là $1/n$, rồi ra về.

Đặt X_i là biến ngẫu nhiên chỉ báo cho sự kiện người thứ i lấy đúng mũ của mình. Đặt S_n là tổng số người lấy đúng mũ của mình.

- (a) Kỳ vọng số người lấy đúng mũ của mình là bao nhiêu?
- (b) Hãy viết công thức cho $\text{Ex}[X_i X_j]$ cho $i \neq j$?
Gợi ý: $\text{Pr}[X_j = 1 | X_i = 1]$ là gì?
- (c) Giải thích xem tại sao bạn không thể dùng công thức phương sai của tổng để tính $\text{Var}[S_n]$.
- (d) Chứng minh rằng $\text{Ex}[S_n^2] = 2$. *Gợi ý:* $X_i^2 = X_i$.
- (e) Phương sai của S_n là gì?
- (f) Chứng minh rằng có nhiều nhất chỉ 1% cơ hội có 10 người lấy đúng mũ của mình. Hãy cố gắng giải thích về mặt trực giác xem tại sao cơ hội này vẫn rất nhỏ bất kể n bằng bao nhiêu.
3. Với biến ngẫu nhiên bất kỳ R có phương sai μ và độ lệch chuẩn σ , chặn Chebyshev chỉ ra rằng, với mọi số thực $x > 0$,

$$\text{Pr}[|R - \mu| \geq x] \leq \left(\frac{\sigma}{x}\right)^2.$$

Hãy chứng minh rằng với mọi số thực μ , và các số thực $x \geq \sigma > 0$, có một R sao cho chặn Chebyshev là chặt, có nghĩa rằng,

$$\text{Pr}[|R - \mu| \geq x] = \left(\frac{\sigma}{x}\right)^2.$$

Gợi ý: Đầu tiên, giả sử $\mu = 0$ và xét R chỉ lấy các giá trị 0, $-x$, và x .

4. Chúng ta muốn lưu trữ 2 tỷ bản ghi vào một bảng băm có 1 tỷ ô. Giả sử các bản ghi gán cho mỗi ô được chọn ngẫu nhiên và độc lập theo phân phối đều. Kỳ vọng số bản ghi được gán cho mỗi ô là 2. Với cách gán ngẫu nhiên, tất nhiên, một số ô có thể được gán nhiều hơn hai bản ghi.
- (a) Hãy chứng minh rằng xác suất một ô cho trước được gán nhiều hơn 23 bản ghi phải nhỏ hơn e^{-36} .
Gợi ý: Với $c = 12$, giá trị của $c \ln(c) - c + 1$ là lớn hơn 18.
- (b) Chứng minh rằng xác suất tồn tại một ô được gán nhiều hơn 23 bản ghi phải nhỏ hơn e^{-15} . Con số này nhỏ hơn $1/3,000,000$. Gợi ý: $\ln(10^9) < 21$.
5. Đôi khi tôi quên đồ khi ra khỏi nhà vào buổi sáng. Ví dụ, dưới đây là xác suất tôi quên các đồ liên quan đến giày và tất:

Tất bên trái	0.2
Tất bên phải	0.1
Giày trái	0.1
Giày phải	0.3

- (a) Xét X là số đồ tôi quên. Giá trị $Ex[X]$ là gì?
- (b) Tính cận trên của xác suất tôi quên ít nhất một đồ. Không cần giả sử về tính độc lập.
- (c) Dùng bất đẳng thức Markov để tính cận trên của xác suất để tôi quên ít nhất 3 đồ.
- (d) Bây giờ giả sử rằng tôi quên các đồ một cách độc lập. Hãy dùng bất đẳng thức Chebyshev để tính cận trên của xác suất tôi quên ít nhất hai đồ.
- (e) Sử dụng luật Murphy để tính cận dưới của xác suất tôi quên ít nhất một đồ.
- (f) Tôi giả sử tôi nhớ nhiều đồ khác nhau, tất nhiên: quần áo, đồng hồ, ba lô, máy tính xách tay, bút chì, kleenex, ID, chìa khóa,... Xét X là tổng số đồ tôi nhớ. Giả sử tôi nhớ chúng một cách độc lập và $Ex[X] = 36$. Dùng Chặn Chernoff để tìm một cận trên cho xác suất tôi nhớ ít nhất 48 đồ.
- (g) Hãy tìm cận trên cho xác suất tôi nhớ ít nhất 108 đồ.