Toán chuyên đề: *Biến ngẫu nhiên & Kỳ vọng*
Bài tập 3

1. Xét trò chơi sau:

> **Trò chơi gợi ý số lớn hơn**
>
> Đội 1:
>
> - Viết lên hai tờ giấy hai số nguyên khác nhau nằm từ 0 đến 7.
> - Úp mặt có số xuống bàn.
>
> Đội 2:
>
> - Lật một trong hai tờ giấy và nhìn số trên đó.
> - Chọn số viết trên tờ giấy này hoặc đổi lấy số trên tờ còn lại.
>
> Đội 2 sẽ thắng nếu chọn được số lớn hơn; ngược lại, Đội 1 thắng.

Ta đã phân tích và chỉ ra rằng Đội 2 có chiến lược để thắng với xác suất 4/7. Liệu Đội 2 có thể làm tốt hơn? Câu trả lời là "không" vì Đội 1 có chiến lược đảm bảo thắng với xác suất ít nhất 3/7 dù Đội 2 có dùng chiến lược gì. Hãy mô tả chiến lược của Đội 1 và giải thích tại sao nó đúng.

2. Xét trò chơi Carnaval Dice công bằng. Đây là trò chơi với số tiền lãi phụ thuộc tham số k. Trò chơi như sau: Tung con xúc xắc ba lần độc lập, nếu bạn nhận được mặt 6

- không lần nào, vậy bạn mất \$1.
- đúng một lần, vậy bạn thắng \$1.
- đúng hai lần, vậy bạn thắng \$2.
- cả ba lần, vậy bạn thắng $\$k$.

Với giá trị nào của k thì đây là trò chơi công bằng?

3. Trong lớp có 16 chiếc bàn được xếp trên lưới 4×4. Nếu có một bạn nữ ngồi đằng trước, đằng sau, bên trái, hoặc bên phải một bạn nam, thì họ sẽ ôm hôn nhau. Một sinh viên có thể ôm hôn nhiều bạn; ví dụ, một sinh viên ngồi ở góc lớp có thể ôm hôn nhiều nhất 2 bạn, trong khi sinh viên ở trung tâm có thể ôm hôn tới 4 bạn. Giả sử các bàn có xác suất để nam hoặc nữ ngồi là bằng nhau và độc lập. Hãy tính kỳ vọng của số các cặp ôm hôn nhau. *Gợi ý:* Dùng tính tuyến tính của kỳ vọng.

4. Xét bảy mệnh đề:

$$\begin{array}{ccccc}
x_1 & \text{OR} & x_3 & \text{OR} & \overline{x_7} \\
\overline{x_5} & \text{OR} & x_6 & \text{OR} & x_7 \\
x_2 & \text{OR} & \overline{x_4} & \text{OR} & x_6 \\
\overline{x_4} & \text{OR} & x_5 & \text{OR} & \overline{x_7} \\
x_3 & \text{OR} & \overline{x_5} & \text{OR} & \overline{x_8} \\
x_9 & \text{OR} & \overline{x_8} & \text{OR} & x_2 \\
\overline{x_3} & \text{OR} & x_9 & \text{OR} & x_4
\end{array}$$

Chú ý rằng:

1. Mỗi mệnh đề là tuyển của ba biến có dạng x_i hoặc $\overline{x_i}$.
2. Các biến trong mỗi mệnh đề phải khác nhau.

Giả sử rằng ta gán giá trị true/false cho các biến $x_1, x_2, \ldots, x_9$ một cách độc lập và với xác suất bằng nhau.

(a) Hãy tính kỳ vọng của số lượng mệnh đề có giá trị true.
Gợi ý: Xét T_i là biến ngẫu nhiên chỉ báo cho sự kiện mệnh đề thứ i là true.

(b) Dùng câu trả lời của bạn để chứng minh rằng với mọi tập gồm 7 mệnh đề thoả mãn điều kiện 1 và 2 ở trên, luôn có một cách gán giá trị cho các biến để cả 7 mệnh đề này đạt giá trị true.

5. Một *literal* là một biến mệnh đề hoặc phủ định của nó. A k-mệnh đề là tuyển của k literal, trong đó không có biến nào xuất hiện nhiều hơn một lần. Ví dụ,

$$P \quad \text{OR} \quad \overline{Q} \quad \text{OR} \quad V,$$

là 4-mệnh đề, nhưng

$$\overline{V} \quad \text{OR} \quad \overline{Q} \quad \text{OR} \quad \overline{X} \quad \text{OR} \quad V,$$

không phải vì V xuất hiện hai lần.

Xét $\mathscr{S}$ là tập gồm n mệnh đề phân biệt trên v biến, mỗi phần tử của $\mathscr{S}$ là một k-mệnh đề. Các biến trong các k-mệnh đề có thể trùng hoặc hoàn toàn khác nhau, vậy $k \leq v \leq nk$.

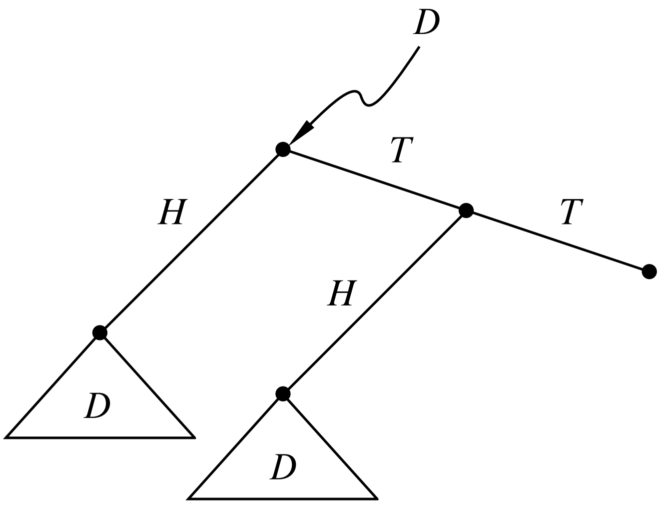
Một cách gán ngẫu nhiên là một cách gán giá trị true/false một cách độc lập cho mỗi biến, với xác suất gán true hoặc false là bằng nhau. Hãy viết công thức theo n, k, và v để trả lời hai câu đầu tiên dưới đây.

(a) Hãy tính xác suất để một k-mệnh đề bất kỳ trong $\mathscr{S}$ bằng true với phép gán ngẫu nhiên.

(b) Hãy tính kỳ vọng của số lượng k-mệnh đề bằng true trong $\mathscr{S}$.

(c) Một mệnh đề là *thoả được* nếu và chỉ nếu có một cách gán giá trị các biến để cho mọi mệnh đề đều bằng true. Hãy dùng câu trả lời ở phần 5b để chứng minh rằng nếu $n < 2^k$, vậy thì $\mathscr{S}$ là thoả được.

6. (a) Giả sử ta tung một đồng xu và xét N_{TT} là số lần tung cho tới khi hai mặt xấp liên tiếp đầu tiên xuất hiện. Hãy tính $\text{Ex}[N_{TT}]$.
Gợi ý: Xét D là sơ đồ cây cho quá trình này. Giải thích tại sao D có thể mô tả bởi cây như hình dưới đây.



(b) Giả sử ta tung một đồng xu cho tới khi một mặt xấp xuất hiện và ngay sau đó là một mặt ngửa. Hãy tính kỳ vọng của số N_{TH} ta vừa thực hiện.

(c) Giả sử bây giờ ta chơi trò chơi: tung một đồng xu cho tới khi hoặc TT hoặc TH xuất hiện lần đầu tiên. Ta thắng nếu TT xuất hiện trước và thua nếu TH xuất hiện trước. Vì TT sẽ lâu hơn 50% về trung bình nên đối thủ của bạn đồng ý rằng anh ta có lợi thế. Bạn nói với anh ta rằng bạn sẽ trả anh ta \$5 nếu anh ta thắng, nhưng anh ta sẽ trả cho bạn cao hơn 20%, tức là \$6, nếu bạn thắng.

Nếu bạn làm điều này, vậy bạn đang lén lút lợi dụng sự thiếu hiểu biết về xác suất của đối thủ: bạn đã nhận được sự đồng ý của anh ta với tỷ lệ cược không công bằng. Lợi nhuận dự kiến của bạn cho mỗi lần chơi là bao nhiêu?

7. Một con bạc đặt cược \$10 cho "màu đỏ" tại một bàn roulette (tỷ lệ cược của màu đỏ là 18/38, thâm chí ít hơn so với 1/2 một chút) để thắng \$10. Nếu anh ta thắng, anh nhận được lại gấp đôi số tiền đặt cược của mình và anh ra về. Nếu không, anh ta tăng gấp đôi tiền cược trước đó của mình và tiếp tục.

(a) Kỳ vọng của số lần chơi của con bạc là bao nhiêu trước khi thắng?

(b) Xác suất thắng của anh ta là bao nhiêu?

(c) Lợi nhuận cuối cùng dự kiến của anh ta (số tiền thắng trừ số tiền bị mất) là gì?

(d) Sự kiện rằng lợi nhuận dự kiến của con bạc là dương, mặc dù trò chơi này thiên vị chống lại anh ta, được biết đến với tên nghịch lý St. Petersberg. Nghịch lý này phát sinh từ một giả sử không thực tế về số tiền của con bạc. Hãy giải thích.
Gợi ý: Kỳ vọng của số tiền đặt cược cuối cùng của con bạc là bao nhiêu?

8. Giả sử bạn có một đồng xu giả với xác suất xuất hiện mặt ngửa là p. Xét J là số mặt ngửa xuất hiện trong n lần tung độc lập. Vậy thì J theo phân bố nhị thức:

$$f_J(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

với $q = 1 - p$.

(a) Chứng minh rằng

$$f_J(k-1) < f_J(k) \text{ với } k < np + p,$$
$$f_J(k-1) > f_J(k) \text{ với } k > np + p.$$

(b) Kết luận rằng giá trị lớn nhất của f_J tiệm cận bằng với

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}.$$

Gợi ý: Để đánh giá tiệm cận, ta có thể giả sử np là số nguyên, vậy giá trị cực đại là $f_J(np)$. Dùng công thức Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$$

để chứng minh tiếp.