# Độ lệch

Toán Chuyên Đề

HUST

Ngày 24 tháng 9 năm 2015

# Tài liệu tham khảo


- Eric Lehman, F Thomson Leighton & Albert R Meyer, *Mathematics for Computer Science*, 2013 (Miễn phí)
- Michael Mitzenmacher và Eli Upfal, *Probability and Computing*, 2005
- Nguyễn Tiến Dũng và Đỗ Đức Thái, *Nhập Môn Hiện Đại Xác Suất & Thống Kê*.

# Nội dung

# Ví dụ

## Trò chơi A

Bạn sẽ thắng $\$2$ với xác suất $2/3$ và thua $\$1$ với xác suất $1/3$.

## Trò chơi B

Bạn sẽ thắng $\$1002$ với xác suất $2/3$ và thua $\$2001$ với xác suất $1/3$.

Bạn nên chơi trò chơi nào? Kỳ vọng lãi thu được từ mỗi trò chơi là bao nhiêu?

# Kỳ vọng lãi

$$\mathrm{Ex}[A] = 2 \cdot \frac{2}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{3} = 1$$
$$\mathrm{Ex}[B] = 1002 \cdot \frac{2}{3} + (-2001) \cdot \frac{1}{3} = 1$$

**Câu hỏi**

Trò chơi nào rủi ro hơn?

Định nghĩa

***Phương sai*** của biến ngẫu nhiên $R$ là

$$\mathrm{Var}[R] = \mathrm{Ex}[(R - \mathrm{Ex}[R])^2]$$

Nói cách khác, phương sai là trung bình của bình phương độ lệch so với trung bình.

# Trò chơi A

$$A - \mathrm{Ex}[A] = \begin{cases} 1 & \text{với xác suất } 2/3 \\ -2 & \text{với xác suất } 1/3 \end{cases}$$

$$(A - \mathrm{Ex}[A])^2 = \begin{cases} 1 & \text{với xác suất } 2/3 \\ 4 & \text{với xác suất } 1/3 \end{cases}$$

$$\mathrm{Ex}[(A - \mathrm{Ex}[A])^2] = 1 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Var}[A] = 2.$$

# Trò chơi B

$$B - \mathrm{Ex}[B] = \begin{cases} 1001 & \text{với xác suất } 2/3 \\ -2002 & \text{với xác suất } 1/3 \end{cases}$$

$$(B - \mathrm{Ex}[B])^2 = \begin{cases} 1,002,001 & \text{với xác suất } 2/3 \\ 4,008,004 & \text{với xác suất } 1/3 \end{cases}$$

$$\mathrm{Ex}[(B - \mathrm{Ex}[B])^2] = 1,00,001 \cdot \frac{2}{3} + 4,008,004 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Var}[B] = 2,004,002.$$

# Trò chơi nào rủi ro hơn?

## Trò chơi A

$$\mathrm{Var}[A] = 2$$

Lãi suất thường gần với giá trị trung bình $\$1$.

## Trò chơi B

$$\mathrm{Var}[B] = 2,0004,002$$

Lãi suất lệch rất xa so với giá trị trung bình là $\$1$.

Phương sai cao thường gắn với rủi ro nhiều. Ví dụ, trong 10 lần chơi trò chơi A, ta có lãi trung bình $\$10$ nhưng cũng có thể mất $\$10$. Còn với trò chơi B thì sao?

# "Đơn vị" của phương sai

- Biến ngẫu nhiên và phương sai không cùng "đơn vị".

$$\mathrm{Var}[R] = \mathrm{Ex}[(R - \mathrm{Ex}[R])^2]$$

- Ví dụ, nếu đơn vị của biến ngẫu nhiên là \$, vậy thì đơn vị của phương sai là $\$^2$.
- Độ lệch chuẩn tương tự như phương sai nhưng cùng "đơn vị" với biến ngẫu nhiên.

## Định nghĩa

***Độ lệch chuẩn*** $\sigma_R$ của biến ngẫu nhiên $R$ là căn bậc hai của phương sai:

$$\sigma_R = \sqrt{\mathrm{Var}[R]} = \sqrt{\mathrm{Ex}[(R - \mathrm{Ex}[R])^2]}.$$

## Ví dụ

Độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên lãi trong trò chơi A và B là

$$\sigma_A = \sqrt{\mathrm{Var}[A]} = \sqrt{2} \approx 1.14,$$
$$\sigma_B = \sqrt{\mathrm{Var}[B]} = \sqrt{2,004,002} \approx 1416.$$

# Công thức khác cho phương sai

## Bổ đề

*Với mọi biến ngẫu nhiên $R$,*

$$\mathrm{Var}[R] = \mathrm{Ex}[R^2] - (\mathrm{Ex}[R])^2.$$

## Ví dụ

Với trò chơi A

$$\mathrm{Ex}[A] = 2 \cdot \frac{2}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{3} = 1$$
$$\mathrm{Ex}[A^2] = 2 \cdot \frac{2}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{3} = 3$$
$$\mathrm{Var}[A] = \mathrm{Ex}[A^2] - (\mathrm{Ex}[A])^2 = 3 - 1^2 = 2.$$

# Bài tập

Hãy chứng minh bổ đề trước.

# Phương sai của biến ngẫu nhiên chỉ báo

## Bổ đề

*Xét $B$ là biến ngẫu nhiên chỉ báo với $\Pr[B = 1] = p$. Vậy thì*

$$\mathrm{Var}[B] = p(1 - p).$$

## Bài tập

Hãy chứng minh bổ đề trên.

# Số bước trung bình dẫn đến lỗi

- Hệ thống lỗi ở mỗi bước với xác suất $p$.
- Xét $C$ là số bước để có lỗi đầu tiên xuất hiện (kể cả bước lỗi). Vậy

$$\mathrm{Ex}[C] = 1/p.$$

- Phương sai của $C$ bằng bao nhiêu?

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ex}[C^2] &= \overbrace{1^2 \cdot p}^{\text{lỗi ngay bước đầu tiên}} + \overbrace{\mathrm{Ex}[(C+1)^2] \cdot (1-p)}^{\text{hoặc không}} \\
&= p + \mathrm{Ex}[C^2] \cdot (1-p) + 2 \cdot \mathrm{Ex}[C] \cdot (1-p) + (1-p) \\
&= 1 + \mathrm{Ex}[C^2] \cdot (1-p) + 2 \cdot \left( \frac{1-p}{p} \right)
\end{aligned}$$

Ta được

$$p \cdot \mathrm{Ex}[C^2] = \frac{2-p}{p}.$$

và được

$$\mathrm{Ex}[C^2] = \frac{2-p}{p^2}.$$

# Bài tập

Hãy tính tiếp $\mathrm{Var}[C]$.

# Bài tập: Biến ngẫu nhiên đều

Với biến ngẫu nhiên đều $R$ trên $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, phương sai của $R$ bằng bao nhiêu?

## Định lý

*Nếu $R_1, R_2$ là hai biến ngẫu nhiên độc lập, vậy thì*

$$\mathrm{Var}[R_1 + R_2] = \mathrm{Var}[R_1] + \mathrm{Var}[R_2].$$

Bài tập: Hãy chứng minh định lý trên.

## Bổ đề

*Xét $J$ là biến ngẫu nhiên theo phân bố nhị thức với tham số $n$ và $p$, vậy thì*

$$\mathrm{Var}[J] = np(1-p).$$

## Chứng minh

Xem $J$ như số mặt "ngửa" khi tung $n$ đồng xu độc lập, mỗi đồng có xác suất xuất hiện mặt ngửa là $p$. Đặt

$$J_i = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{đồng thứ } i \text{ ngửa}$$

Vậy thì

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[J] &= \mathrm{Var}[J_1 + J_2 + \cdots + J_n] \\ &= \mathrm{Var}[J_1] + \mathrm{Var}[J_2] + \cdots + \mathrm{Var}[J_n] \\ &= np(1-p).\end{aligned}$$

# Nội dung

# Ví dụ

- Intelligent Quotients trung bình của mọi người là $100$.
- Vậy nhiều nhất chỉ $1/3$ dân số có IQ lớn hơn $300$. Tại sao?
- Suy ra, xác suất một người ngẫu nhiên có IQ lớn hơn $300$ là $\leq 1/3$.

## Định lý (Markov)

*Nếu $R$ là biến ngẫu nhiên không âm, vậy thì với mọi $x > 0$,*

$$\Pr[R \geq x] \leq \frac{\mathrm{Ex}[R]}{x}.$$

# The Chinese Appetizer Problem

- Có $n$ người ngồi ăn quanh một mâm tròn.
- Mỗi người có một món khai vị trước mặt. Giả sử các món khai vị này khác nhau.
- Lợi dụng lúc mọi người mải nói chuyện, ai đó đã quay mâm một cách ngẫu nhiên để mỗi người nhận được ngẫu nhiên một món khai vị.
- Hãy tính xác suất để cả $n$ người đều nhận lại được đúng món khai vị của mình.

# The Chinese Appetizer Problem

- Giả sử mỗi người nhận lại được món khai vị ban đầu của mình với xác suất $1/n$.
- Kỳ vọng của số người $R$ nhận đúng món khai vị của mình là

$$\mathrm{Ex}[R] = n \cdot \frac{1}{n}.$$

- Theo định lý Markov,

$$\Pr[R = n] = \Pr[R \geq n] \leq \frac{\mathrm{Ex}[R]}{n} = \frac{1}{n}.$$

# Bài tập

Hãy chứng minh định lý Markov.

# Giả thiết $R$ không âm là quan trọng

Xét biến ngẫu nhiên $R$ với

$$\Pr[R = 1000] = 1/2 \quad \text{và} \quad \Pr[R = -1000] = 1/2.$$

Vậy thì

$$\mathrm{Ex}[R] = 0.$$

$$\Pr[R \geq 1000] = 1/2 \neq \frac{\mathrm{Ex}[R]}{1000} = 0.$$

# Biến ngẫu nhiên bị chặn

- Giả sử IQ trung bình của sinh viên Bách Khoa là $150$.
- Xác suất một sinh viên Bách Khoa có IQ hơn $200$ khoảng bao nhiêu?

$$\Pr[B \geq 200] \leq \frac{\mathrm{Ex}[B]}{200} = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}.$$

- Biết thêm rằng không có sinh viên nào có IQ nhỏ hơn $100$, vậy ước lượng trên có thể giảm xuống bằng bao nhiêu?

Xét $T = B + 100$, ta được

$$\Pr[B \geq 200] = \Pr[T \geq 100] \leq \frac{\mathrm{Ex}[T]}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}.$$

## Hệ quả

*Nếu $R$ là biến ngẫu nhiên không âm, vậy thì với mọi $c > 0$*

$$\Pr[R \geq c \cdot \mathrm{Ex}[R]] \leq 1/c.$$

## Chứng minh.

Thay $x = c \cdot \mathrm{Ex}[R]$ vào định lý Markov. □

## Định lý

*Xét $R$ là biến ngẫu nhiên thỏa mãn $R \leq u$. Vậy thì với mọi $x < u$,*

$$\Pr[R \leq x] \leq \frac{u - \mathrm{Ex}[R]}{u - x}.$$

Bài tập: Hãy chứng minh định lý trên.

# Bài tập

- Giả sử điểm thi giữa kỳ trung bình của lớp Toán Chuyên Đề là $7.5/10$.
- Hãy ước lượng tỉ lệ sinh viên trong lớp có điểm nhỏ hơn hoặc bằng $5$.

$$
\begin{aligned}
R = &\ \text{điểm ngẫu nhiên của sinh viên} \\
\max\ \text{Điểm} &= 10 = u \\
\mathrm{Ex}[R] &= 7.5 \\
\Pr[R \leq 50] &\leq \frac{100-75}{100-50} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Nói cách khác, chỉ nhiều nhất nửa lớp có điểm $\leq 5$.

# Nội dung

## Bổ đề

*Với mọi biến ngẫu nhiên $R$, $\alpha \in \mathbb{R}$, và $x > 0$,*

$$\Pr[|R| \geq x] \leq \frac{\mathrm{Ex}[|R|^\alpha]}{x^\alpha}$$

## Chứng minh.

Do

$$|R| \geq x \quad \Leftrightarrow \quad |R|^\alpha \geq x^\alpha$$

Áp dụng định lý Markov, ta suy ra bổ đề trên. □

## Định lý (Chebyshev)

*Xét $R$ là một biến ngẫu nhiên và $x \in \mathbb{R}^+$. Vậy thì*

$$\Pr[|R - \mathrm{Ex}[R]| \geq x] \leq \frac{\mathrm{Var}[R]}{x^2}.$$

Đây là một trường hợp riêng của bổ đề trước. Tại sao?

## Hệ quả

*Xét $R$ là biến ngẫu nhiên, và xét $c$ là một số thực dương*

$$\Pr[|R - \mathrm{Ex}[R]| \geq c \cdot \sigma_R] \leq \frac{1}{c^2}.$$

Bài tập: Hãy chứng minh hệ quả trên.

## Ví dụ

$R =$ IQ của một người ngẫu nhiên. Giả sử

$$R \geq 0, \quad \mathrm{Ex}[R] = 100, \quad \sigma_R = 15$$

Hãy ước lượng

$$\Pr[R \geq 250].$$

# Ước lượng

- Bởi định lý Markov

$$\Pr[R \geq 250] \leq \frac{\mathrm{Ex}[R]}{250} = \frac{100}{250} = 0.4$$

- Bởi định lý Chebyshev

$$\begin{aligned}
\Pr[R \geq 250] &= \Pr[R - 100 \geq 150] \\
&= \Pr[R - \mathrm{Ex}[R] \geq 10 \cdot \sigma_R] \\
&\leq \Pr[|R - \mathrm{Ex}[R]| \geq 10 \cdot \sigma_R] \\
&\leq \frac{1}{100}.
\end{aligned}$$

## Định lý

*Với mọi biến ngẫu nhiên $R$ và mọi $c > 0$*

$$\Pr[R - \mathrm{Ex}[R] \geq c \cdot \sigma_R] \leq \frac{1}{c^2 + 1}$$

*và*

$$\Pr[R - \mathrm{Ex}[R] \leq -c \cdot \sigma_R] \leq \frac{1}{c^2 + 1}.$$

Quay trở lại với IQ:

Ví dụ

$R =$ IQ của một người ngẫu nhiên. Giả sử

$$R \geq 0, \quad \mathrm{Ex}[R] = 100, \quad \sigma_R = 15$$

Hãy ước lượng

$$\Pr[R \geq 250].$$

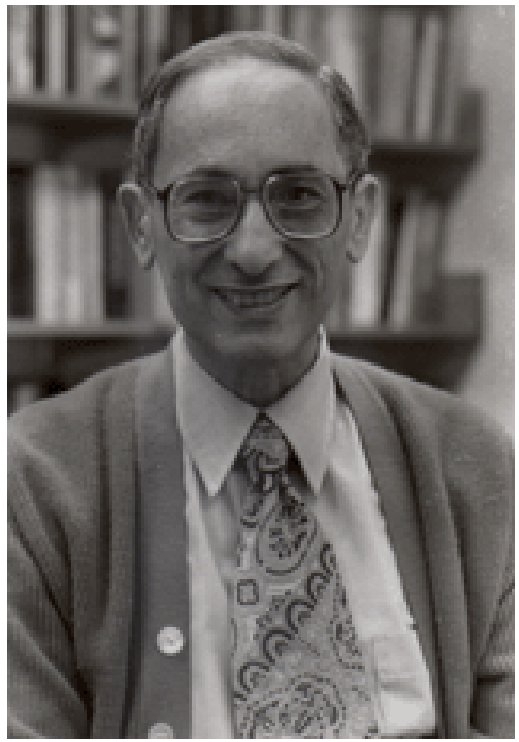
# Ước lượng

$$\begin{aligned}\Pr[R \geq 250] &= \Pr[R - 100 \geq 150] \\ &= \Pr[R - \mathrm{Ex}[R] \geq 10 \cdot \sigma_R] \\ &\leq \frac{1}{10^2 + 1} = \frac{1}{101}\end{aligned}$$

# Nội dung

# Chặn Chernoff

Tổng của rất nhiều biến ngẫu nhiên có giá trị nhỏ và độc lập có nhiều khả năng sẽ không vượt quá trung bình của tổng.



## Định lý (Chặn Chernoff)

*Xét* $T_1, T_2, \ldots T_n$ *là các biến ngẫu nhiên độc lập thoả mãn* $0 \leq T_i \leq 1$ *với mọi* $i$. *Xét*

$$T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n.$$

*Vậy thì với mọi* $c \geq 1$,

$$\Pr[T \geq c \operatorname{Ex}[T]] \leq e^{-k \operatorname{Ex}[T]}$$

*trong đó* $k = c \ \ln(c) - c + 1$.

## Ví dụ

Tung $1000$ đồng xu độc lập. Hãy tính xác suất của số mặt ngửa vượt quá kỳ vọng ít nhất $20\%$.

## Lời giải

- Đặt $T_i$ là biến ngẫu nhiên chỉ báo cho sự kiện đồng xu thứ $i$ là ngửa.
- Vậy thì tổng số mặt ngửa là

$$T = T_1 + T_2 + \cdots + T_{1000}.$$

- Cả hai điều kiện của Chernoff đều thoả mãn: Các biến $T_i$ độc lập và $T_i \in [0, 1]$.
- Theo định lý Chernoff

$$\Pr[T \geq c \operatorname{Ex}[T]] \leq e^{-k \operatorname{Ex}[T]}$$

với $c = 1.2$ và $k = c \ln(c) - c + 1 = 0.0187\ldots$.

$$\begin{aligned}\Pr[T \geq 1.2\ \mathrm{Ex}[T]] &\leq e^{-k\ \mathrm{Ex}[T]} \\ &= e^{-(0.0187\ldots)\cdot 500} \\ &< 0.0000834\end{aligned}$$

# Ảnh hưởng của số biến và độ lệch

Xác suất sẽ nhỏ hơn rất nhiều nếu số đồng xu tăng lên.

## Ví dụ

nếu tung $1$ triệu đồng xu, xác suất để số mặt ngửa vượt quá kỳ vọng ít nhất $20\%$ chỉ nhiều nhất là

$$e^{-(0.0187)\cdot 500000} < e^{-9392}.$$

Xác suất cũng sẽ nhỏ hơn rất nhiều nếu độ lệch tăng lên.

## Ví dụ

tung $1000$ đồng xu, xác suất để số mặt ngửa vượt quá kỳ vọng ít nhất $30\%$ chỉ nhiều nhất là

$$e^{-(0.0410)\cdot 500} < e^{-20.5} < 1/1,000,000,000.$$

# Trò chơi Pick-4

- Bạn chọn một số bốn chữ số trong khoảng $0000$ đến $9999$.
- Nếu số bạn chọn là số ngẫu nhiên chương trình chọn, bạn sẽ được $\$5,000$.
- Xác suất thắng của bạn là $1/10,000$.
- Nếu có $10$ triệu người chơi, kỳ vọng số người thắng là $1000$.
- Nỗi lo của công ty sổ xố: Số người thắng ít nhất là $2000$.
- Hãy tính xác suất để số người thắng ít nhất là $2000$.

# Trò chơi Pick-4 (lời giải)

- Đặt $T_i$ là biến chỉ số cho sự kiện người thứ $i$ thắng.
- Số người thắng là biến $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_{10{,}000{,}000}$.
- Vì số người thắng gấp 2 lần kỳ vọng, ta chọn $c = 2$.
- Ta giả sử người chơi chọn số ngẫu nhiên đều và độc lập. Vậy thì Theo định lý Chernoff

$$
\begin{aligned}
k = c\ \ln(c) - c + 1 &= 0.386 \\
\Pr[T \geq 2000] &= \Pr[T \geq 2\ \mathrm{Ex}[T]] \\
&\leq e^{-k\ \mathrm{Ex}[T]} \\
&= e^{-(0.386\ldots)\cdot 1000} \\
&< e^{-386}
\end{aligned}
$$

Vậy hầu như không bao giờ công ty sổ xố phải trả gấp đôi kỳ vọng.

# Trò chơi Pick-4 (tiếp)

## Bài tập

Hãy tính xác suất để số người thắng cao hơn $10\%$ so với kỳ vọng.

$$
\begin{aligned}
k = 1.1\ \ln(1.1) - 1.1 + 1 &= 0.00484 \\
\Pr[T \geq 1.1\ \mathrm{Ex}[T]] &\leq e^{-k\ \mathrm{Ex}[T]} \\
&= e^{-(0.00484)\cdot 1000} \\
&< 0.01
\end{aligned}
$$

# Nội dung

## Cân bằng tải

- Hệ thống với $n$ công việc $B_1, B_2, \ldots, B_n$ đến theo dòng.
- Công việc $B_i$ cần $L_i$ thời gian
- Các công việc cần xử lý ngay lập tức trên $m$ máy $S_1, S_2, \ldots, S_n$.
- Hãy tìm cách gán mỗi công việc cho mỗi máy để hệ thống đảm bảo cân bằng tải.

## Phương pháp

Gán một cách ngẫu nhiên mỗi công việc đến cho một máy.

# Dữ liệu thực tế

- Số công việc $n = 100,000$.
- Số lượng máy $m = 10$.
- Đặt

$$L = \sum_{j=1}^{n} L_j.$$

- Giả sử $L = 25,000$ giây.
- Vậy tải trung bình trên mỗi máy

$$\frac{L}{m} = \frac{25,000}{10} = 2500.$$

# Phân tích

- Đặt $R_{ij}$ là tải trên máy $S_i$ từ công việc $B_j$. Tức là

$$R_{ij} = \begin{cases} L_j & \text{nếu máy } S_i \text{ được gán công việc } B_j \\ 0 & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

- Vậy thì tải của máy $S_i$ là

$$R_i = R_{i1} + R_{i2} + \cdots + R_{in}.$$

- Ta được

$$\begin{aligned} \mathrm{Ex}[R_i] &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ex}[R_{ij}] \\ &= \sum_{j=1}^{n} L_j/m \\ &= L/m. \end{aligned}$$

Đây là giá trị tối ưu cân bằng tải.

# Phân tích 2: Tải của mỗi máy $R_i$

- Giả sử các $0 \leq R_{ij} \leq 1$, theo định lý Chernoff,

$$\Pr[R_i \geq c\ L/m] \leq e^{-k\ L/m}$$

  với $k = c\ln(c) - c + 1$.
- Với $c = 1.1$, ta được $k = 0.0048$,
- và với $L = 25,000$ ta được

$$\Pr[R_i \geq 1.1 \times L/m] \leq e^{-0.0048 \times 2500} \leq 1/160,000.$$

# Phân tích 3: Máy phải chịu tải nhiều nhất

$$
\begin{aligned}
&\Pr[\text{ máy chịu tải nhiều nhất } \geq c\ L/m\ ] \\
&= \Pr[\ (R_1 \geq c\ L/m) \ \cup\ (R_2 \geq c\ L/m) \ \cup\ \cdots\ \cup\ (R_m \geq c\ L/m)\ ] \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \Pr[R_i \geq c\ L/m] \\
&\leq \frac{m}{160,000} = \frac{1}{16,000}.
\end{aligned}
$$