

# 1 Moučný červ (*Tribolium*)

Aby bylo možné počítat populace moučných červů, je nutné znát jejich životní cyklus. Z fundamentálního pozorování jejich vývoje lze tento cyklus odhadnout. Prvotní fází je vajíčko ( $L$ ), z něž se po 2 týdnech vylíhne larva ( $P$ ). Po dalších dvou týdnech se z larvy stává dospělý červ ( $A$ ). Vývoj jednotlivých fází lze popsat vztahy

$$\begin{aligned} \text{Larva: } L_{n+1} &= bA_n \\ \text{Kukla: } P_{n+1} &= L_n(1 - \mu_l) \\ \text{Brouk: } A_{n+1} &= P_n(1 - \mu_p) + A_n(1 - \mu_a), \end{aligned} \tag{1}$$

kde  $\mu_l$  je úmrtnost larev,  $\mu_p$  úmrtnost kukel a  $\mu_a$  úmrtnost brouků. Spodní indexy jsou pak ordinálním číslováním populace.

Pokud zahrneme kanibalismus, který se u těchto druhů často vyskytuje, dostaneme:

$$\begin{aligned} \text{požírání larev: } L_{n+1} &= bA_n e^{-c_{la}A_n - c_{ll}L_n} \\ \text{požírání kukel: } P_{n+1} &= L_n(1 - \mu_l) \\ \text{požírání brouků: } A_{n+1} &= P_n(1 - \mu_p)e^{-c_{pa}A_n} + A_n(1 - \mu_a), \end{aligned} \tag{2}$$

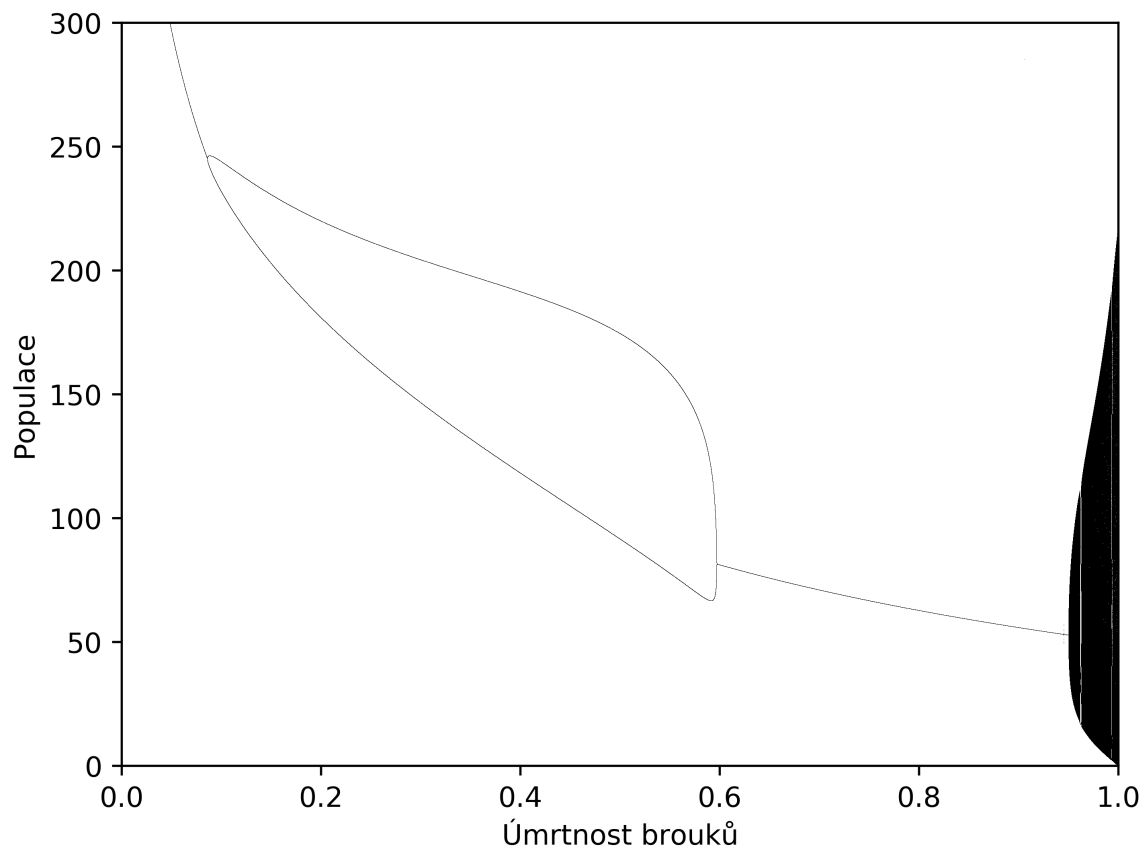
kde koeficienty byly zjištěny experimentálně jako

$$\begin{aligned} c_{la} &= 0.009 \text{ (A požírá L)} \\ c_{ll} &= 0.012 \text{ (L požírá L)} \\ c_{pa} &= 0.004 \text{ (A požírá P)} \\ \mu_l &= 0.267 \\ \mu_p &= 0 \\ \mu_a &= 0.0036 \text{ (základní úmrtnost)} \\ b &= 7.48 \text{ počet nových larev na 1 dospělého brouka za jednotku času, což je 14 dní} \end{aligned} \tag{3}$$

Všechny tyto parametry jsou tzv. řídicí parametry systému.

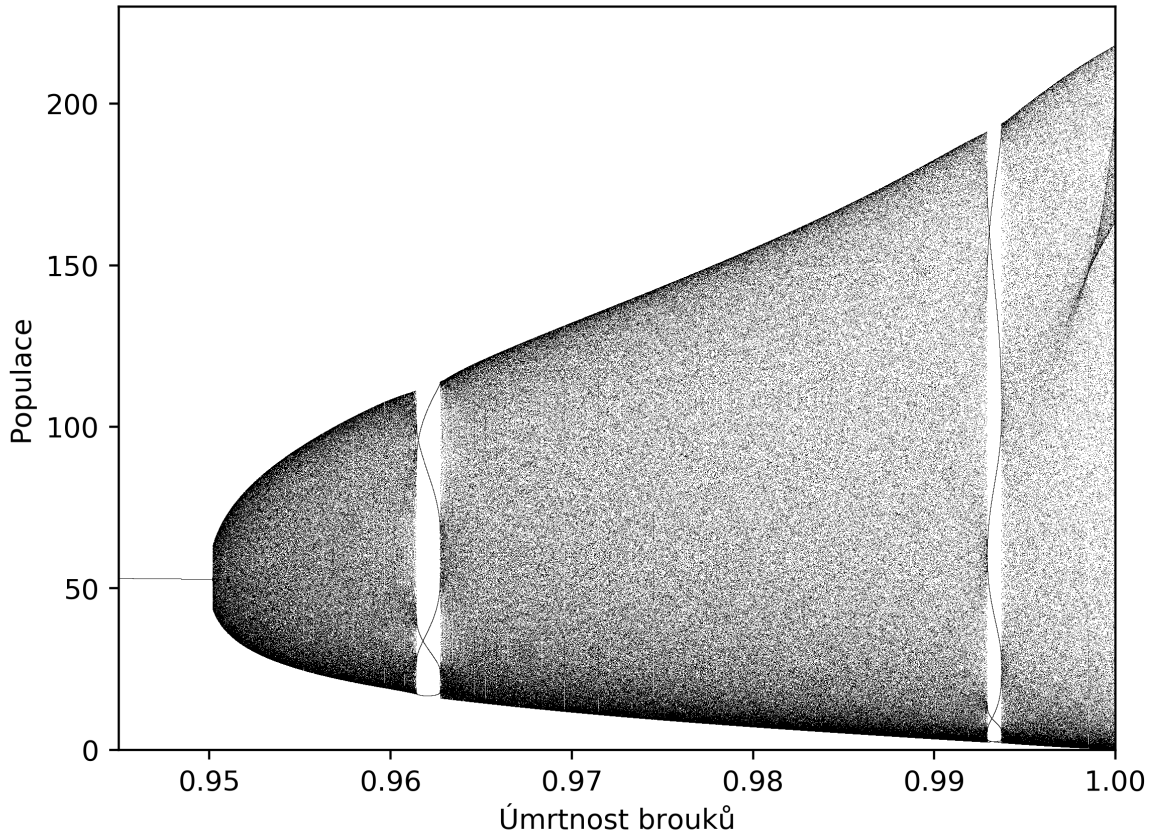
## 1.1 Bifurkační diagram

Systém popsaný rovnicemi 2 tvoří pro některý interval řídicích parametrů chaotický systém, tzn. že malé změny v počátečních podmínkách způsobí, že po několika desítkách až stovkách cyklech může být rozdíl v počtu jedinců velký. Pro vizualizaci limitních stavů systému pro různé řídicí parametry se využívá bifurkační diagram. Bifurkační diagram generujeme dostatečným počtem iterací systému (tím se dostaneme do limitního stavu) a následně uložením několika posledních hodnot pro danou hodnotu řídicího parametru (řádově desítky hodnot). Na bifurkačním diagramu pak vidíme zdvojování period (pro jednu hodnotu parametru dostáváme více limitních hodnot) a pokud systém přejde do chaotického režimu, dostáváme pro jednu hodnotu řídicího parametru velké množství limitních hodnot. V našem případě byla zvolena osa  $x$  pro úmrtnost brouků  $\mu_a$  a osa  $y$  pro počet jedinců po 200-230 cyklech.



Graf 1: Bifurkační diagram

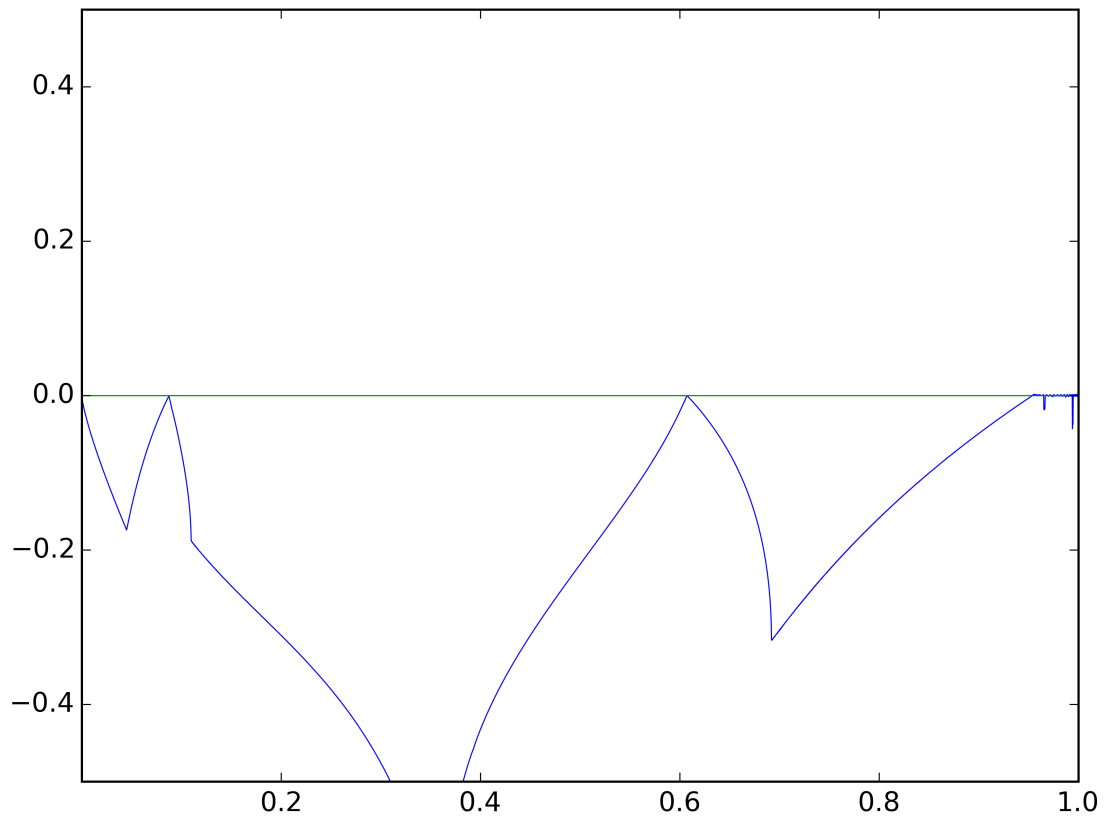
Z grafu 1 je patrné, že k první bifurkaci dochází při  $\mu_a = 0.1$ , kde se perioda 1 mění na periodu 2. Druhá bifurkace je v bodě  $\mu_a = 0.6$ , perioda 2 se mění na 1. ke třetí bifurkaci dochází při  $\mu_a = 0.954$ , kde se systém začíná chovat chaoticky.



Graf 2: Bifurkační diagram - přiblížení na chaotický režim

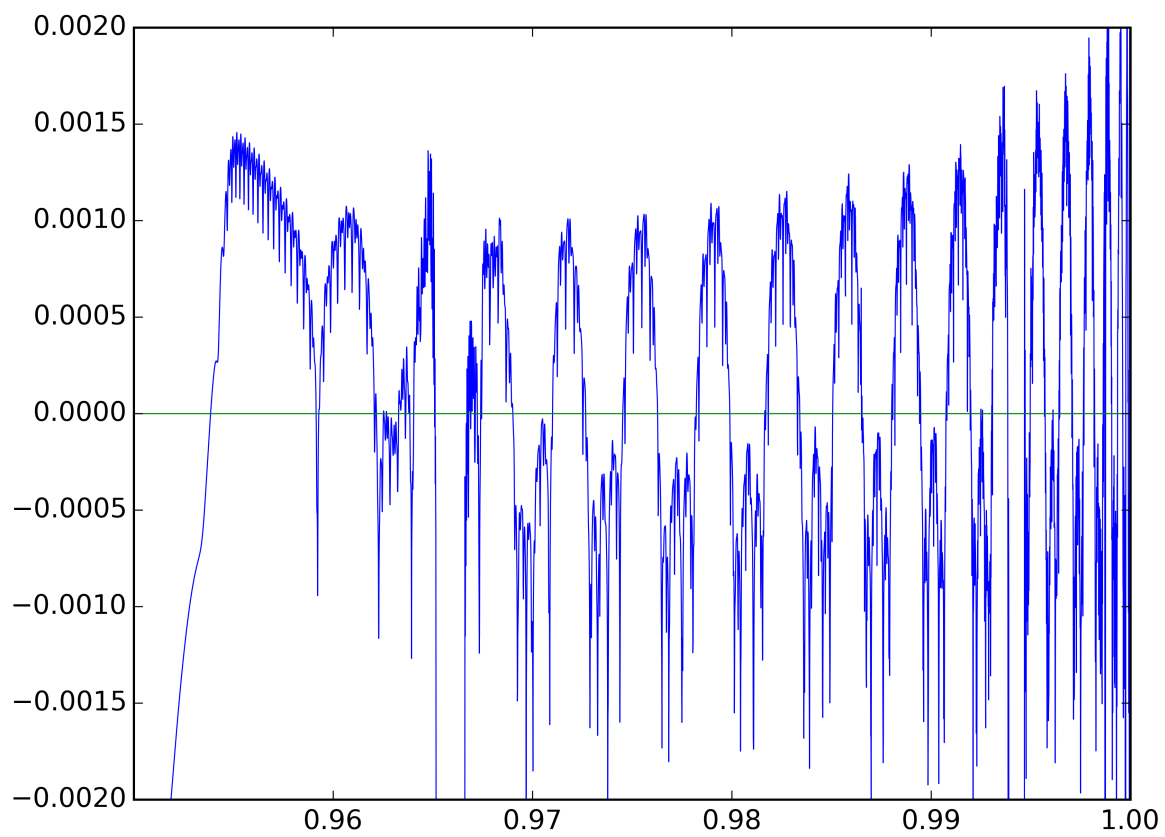
## 1.2 Nalezení největšího Ljapunova exponentu

Pro nalezení největšího Ljapunova exponentu pro  $\mu_a \in [0, 1]$  jsme nejdříve systém s počátečními podmínkami  $L_0 = 100, P_0 = 100, A_0 = 100$  iterovali 400 generací aby jsme se při určování Ljapunova exponentu nacházeli na atraktoru. V konfiguračním prostoru jsme pak vytvořili druhou orbitu  $\vec{x}_b$  přičtením vektoru  $\vec{d}_0 = (0, 0, 10^{-8})$  ke stavovému vektoru  $\vec{x}_a$  obdržnému po 400 iteracích od počátečních podmínek. Obě orbity jsme následně iterovali 3000 generací s tím, že po každé iteraci jsme uložili hodnotu  $d = \frac{|\vec{x}_b - \vec{x}_a|}{|\vec{d}_0|}$  a korigovali druhou orbitu vzorcem  $\vec{x}_{bkor} = \vec{x}_a + \frac{1}{d}(\vec{x}_b - \vec{x}_a)$ . Korigováním druhé orbity jsme zajistili, že vektor  $\vec{x}_{bkor}$  je vždy ve vzdálenosti  $|\vec{d}_0|$  od vektoru  $\vec{x}_a$ , ale ve směru  $\vec{x}_b - \vec{x}_a$ . Z uložených hodnot  $d$  jsme určili průměr všech  $\log(d)$ , který je maximálním Ljapunovým exponentem.



Graf 3: Maximální Ljapunovy exponenty pro parametr  $\mu_a$

Z hodnot Ljapunových exponentů na grafu 3 vidíme, že v bodech kde dochází ke zdvojování periody orbity jde Ljapunův exponent do nuly, nad hodnotou  $\mu_a = 0.954$  systém přechází do chaotického režimu (Ljapunův exponent je zde kladný, což je vidět na grafu 4), vidíme ale intervaly řídicího parametru v oblasti  $\mu_a > 0.954$ , kde dochází k dalším bifurkacím (jak je vidět na bifurkačním diagramu) a exponent je záporný.



Graf 4: Ljapunovy exponenty pro paremetr  $\mu_a$ , přiblížení na chaotický režim

---

26. září 2019, Daniel Rod, Michal Grňo, Jan Střeleček