

1 Moučný červ (*Tribolium*)

Aby bylo možné počítat populace moučných červů, je nutné znát jejich životní cyklus. Z fundamentálního pozorování jejich vývoje lze tento cyklus odhadnout. Prvotní fází je vajíčko (L), z něž se po 2 týdnech vylíhne larva (P). Po dalších dvou týdnech se z larvy stává dospělý červ (A). Vývoj jednotlivých fází lze popsat vztahy

$$\begin{aligned} \text{Larva: } L_{n+1} &= bA_n \\ \text{Kukla: } P_{n+1} &= L_n(1 - \mu_l) \\ \text{Brouk: } A_{n+1} &= P_n(1 - \mu_p) + A_n(1 - \mu_a), \end{aligned} \tag{1}$$

kde μ_l je úmrtnost larev, μ_p úmrtnost kukel a μ_a úmrtnost brouků. Spodní indexy jsou pak ordinálním číslováním populace.

Pokud zahrneme kanibalismus, který se u těchto druhů často vyskytuje, dostaneme:

$$\begin{aligned} \text{požírání larev: } L_{n+1} &= bA_n e^{-c_{la}A_n - c_{ll}L_n} \\ \text{požírání kukel: } P_{n+1} &= L_n(1 - \mu_l) \\ \text{požírání brouků: } A_{n+1} &= P_n(1 - \mu_p)e^{-c_{pa}A_n} + A_n(1 - \mu_a), \end{aligned} \tag{2}$$

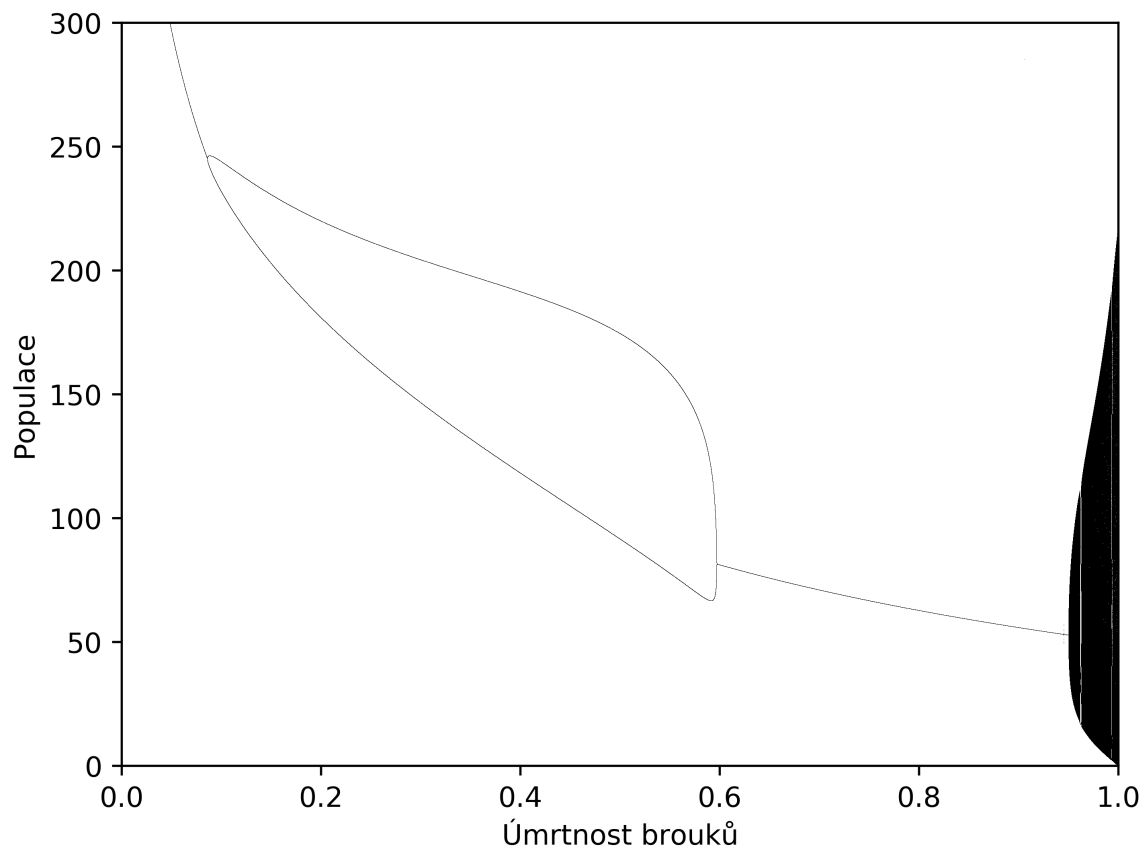
kde koeficienty byly zjištěny experimentálně jako

$$\begin{aligned} c_{la} &= 0.009 \text{ (A požírá L)} \\ c_{ll} &= 0.012 \text{ (L požírá L)} \\ c_{pa} &= 0.004 \text{ (A požírá P)} \\ \mu_l &= 0.267 \\ \mu_p &= 0 \\ \mu_a &= 0.0036 \text{ (základní úmrtnost)} \\ b &= 7.48 \text{ počet nových larev na 1 dospělého brouka za jednotku času, což je 14 dní} \end{aligned} \tag{3}$$

Všechny tyto parametry jsou tzv. řídicí parametry systému.

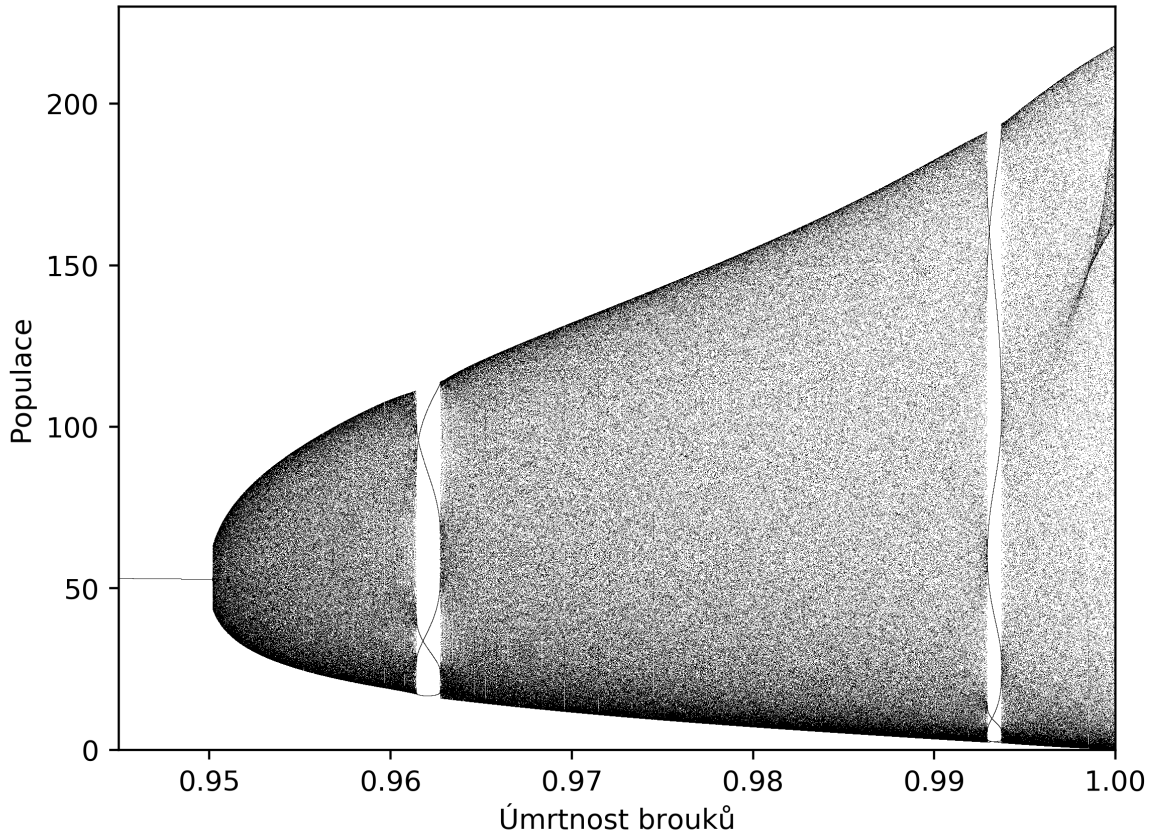
1.1 Bifurkační diagram

Systém popsaný rovnicemi 2 tvoří pro některý interval řídicích parametrů chaotický systém, tzn. že malé změny v počátečních podmínkách způsobí, že po několika desítkách až stovkách cyklech může být rozdíl v počtu jedinců velký. Pro vizualizaci limitních stavů systému pro různé řídicí parametry se využívá bifurkační diagram. Bifurkační diagram generujeme dostatečným počtem iterací systému (tím se dostaneme do limitního stavu) a následně uložením několika posledních hodnot pro danou hodnotu řídicího parametru (řádově desítky hodnot). Na bifurkačním diagramu pak vidíme zdvojování period (pro jednu hodnotu parametru dostáváme více limitních hodnot) a pokud systém přejde do chaotického režimu, dostáváme pro jednu hodnotu řídicího parametru velké množství limitních hodnot. V našem případě byla zvolena osa x pro úmrtnost brouků μ_a a osa y pro počet jedinců po 200-230 cyklech.



Graf 1: Bifurkační diagram

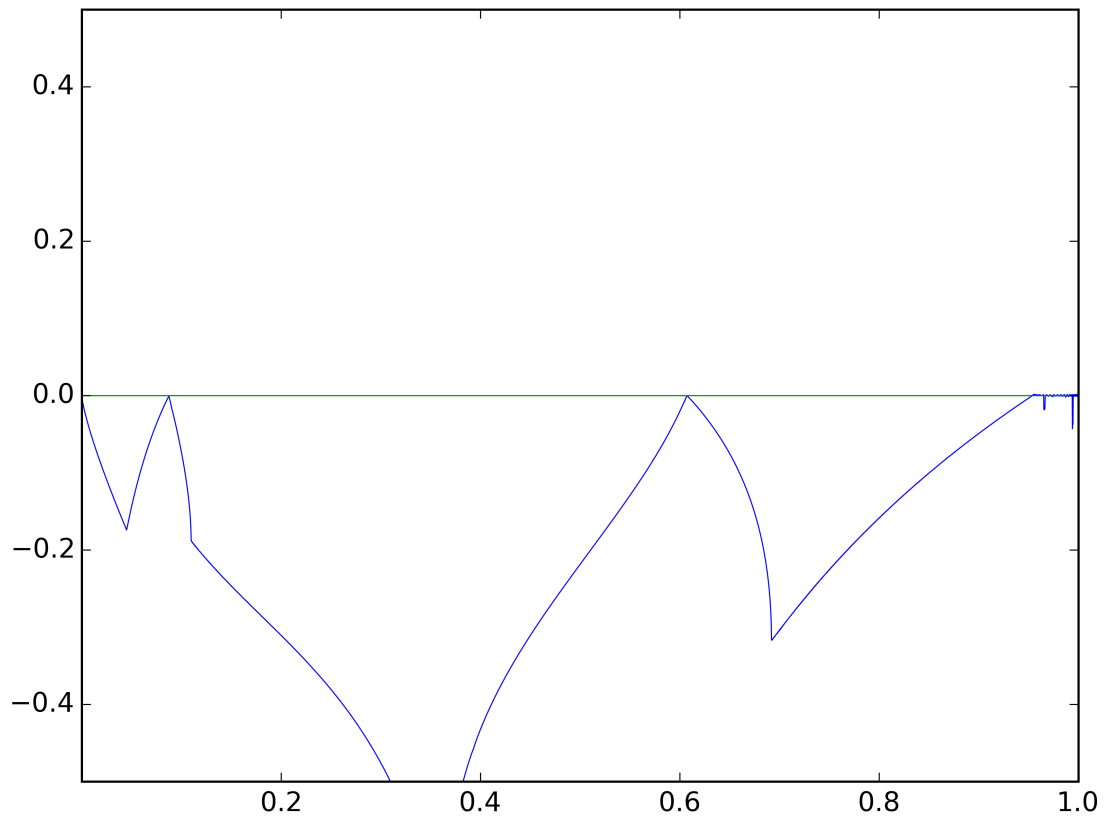
Z grafu 1 je patrné, že k první bifurkaci dochází při $\mu_a = 0.1$, kde se perioda 1 mění na periodu 2. Druhá bifurkace je v bodě $\mu_a = 0.6$, perioda 2 se mění na 1. ke třetí bifurkaci dochází při $\mu_a = 0.954$, kde se systém začíná chovat chaoticky.



Graf 2: Bifurkační diagram - přiblížení na chaotický režim

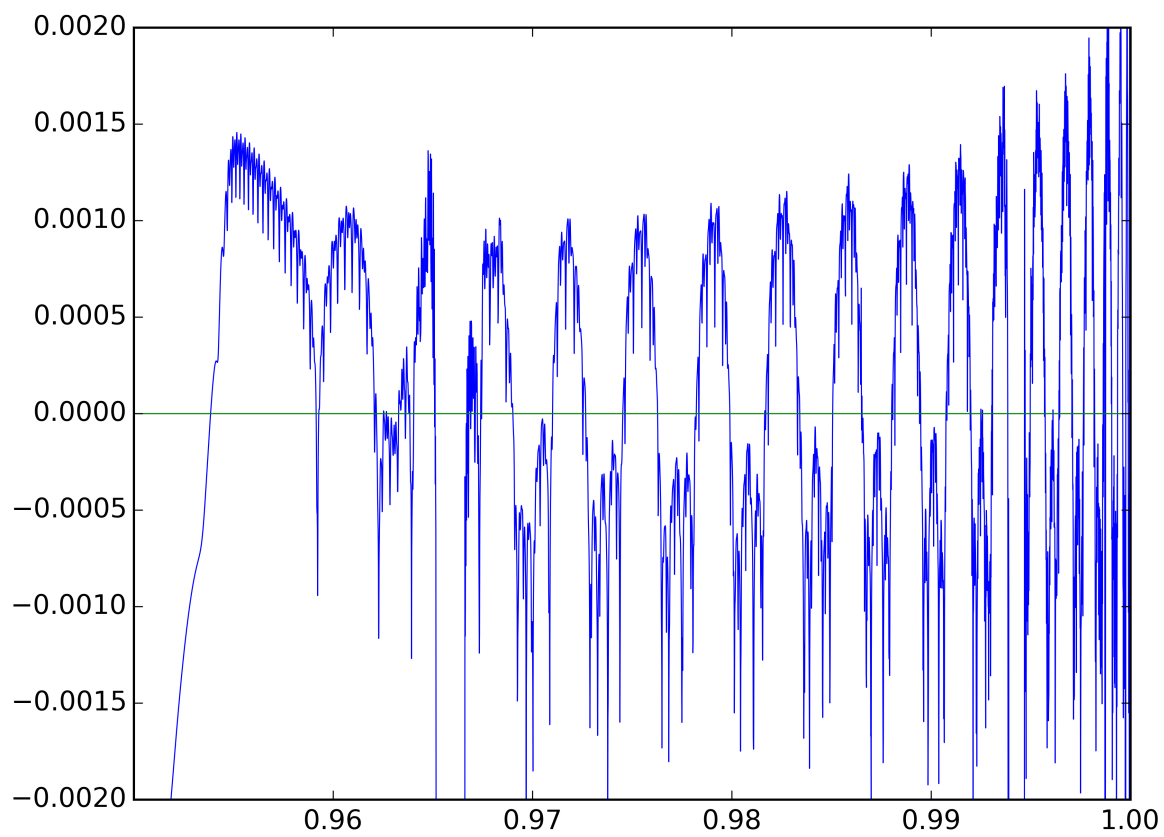
1.2 Nalezení největšího Ljapunova exponentu

Pro nalezení největšího Ljapunova exponentu pro $\mu_a \in [0, 1]$ jsme nejdříve systém s počátečními podmínkami $L_0 = 100, P_0 = 100, A_0 = 100$ iterovali 400 generací aby jsme se při určování Ljapunova exponentu nacházeli na atraktoru. V konfiguračním prostoru jsme pak vytvořili druhou orbitu \vec{x}_b přičtením vektoru $\vec{d}_0 = (0, 0, 10^{-8})$ ke stavovému vektoru \vec{x}_a obdržnému po 400 iteracích od počátečních podmínek. Obě orbity jsme následně iterovali 3000 generací s tím, že po každé iteraci jsme uložili hodnotu $d = \frac{|\vec{x}_b - \vec{x}_a|}{|\vec{d}_0|}$ a korigovali druhou orbitu vzorcem $\vec{x}_{bkor} = \vec{x}_a + \frac{1}{d}(\vec{x}_b - \vec{x}_a)$. Korigováním druhé orbity jsme zajistili, že vektor \vec{x}_{bkor} je vždy ve vzdálenosti $|\vec{d}_0|$ od vektoru \vec{x}_a , ale ve směru $\vec{x}_b - \vec{x}_a$. Z uložených hodnot d jsme určili průměr všech $\log(d)$, který je maximálním Ljapunovým exponentem.



Graf 3: Maximální Ljapunovy exponenty pro parametr μ_a

Z hodnot Ljapunových exponentů na grafu vidíme, že v bodech kde dochází ke zdvojení periody orbity jde Ljapunův exponent do nuly, nad hodnotou $\mu_a = 0.954$ systém přechází do chaotického režimu (Ljapunův exponent je zde kladný), vidíme ale intervaly řídicího parametru v oblasti $\mu_a > 0.954$, kde dochází k dalším bifurkacím (jak je vidět na bifurkačním diagramu) a exponent je záporný.



Graf 4: Ljapunovy exponenty pro paremetr μ_a , přiblížení na chaotický režim

26. září 2019, Daniel Rod, Michal Grňo, Jan Střeleček