

SOUND DESIGN

Alessandro Ripani

11 aprile 2025

Indice

1	Circuiti	5
1.1	Teoria dei Circuiti	5
1.2	Circuiti	7
1.3	Approccio Circuitale	8
2	modello Circuitale	9
2.1	Modello Circuitale Elettrico	9
2.2	Grandezze Elettriche	10
2.3	Porta Elettrica	10
2.4	Leggi di Kirchhoff	11
2.5	Componenti	13
2.6	Ipotesi Aggiuntive	16
2.7	Proprietà Notevoli	16
2.8	Componenti Ideali	17
3	Fenomeni elettromagnetici	20
4	Segnali e Sistemi a Tempo Discreto	23
4.1	Segnali a Tempo Discreto	23
4.2	Domini di Trasformazione	23
4.3	Sistemi a Tempo Discreto	24
4.4	Sistemi a Tempo Continuo	24
4.5	Sistemi MIMO	25
4.6	Sistemi LTI: FIR e IIR	25
4.7	Sistemi LTI: FIR e IIR	25
4.8	Forma canonica o diretta II (IIR)	26
4.9	Forma in cascata (IIR)	26
4.10	Assaggio da Forma Diretta/Canonica a Cascata	27
4.11	Tecniche di filtraggio per filtri IIR	28
4.11.1	Funzioni delle Librerie Intel	28
4.11.2	Esempio NU-Tech	28
4.11.3	Due Approcci Principali	28
4.11.4	Forma Diretta e Convoluzione	28
4.11.5	Funzioni delle Librerie Intel	29
4.12	Convoluzione a Blocchi: OLS (Overlap and Save)	29
4.13	Convoluzione a Blocchi Partizionata	30
5	DFT e FFT	31
5.1	Condizioni per la ricostruzione univoca	33
5.2	Zero Padding	34
5.2.1	Relazione tra DFT e DTFT	34
5.2.2	Effetto dello Zero Padding	34
5.2.3	Effetti dello Zero Padding	34
5.3	Convoluzione di Sequenze Periodiche	34

5.3.1	Convoluzione Periodica (Proprietà Commutativa)	34
5.3.2	Relazione con la DFS	34
5.3.3	Moltiplicazione punto a punto nel dominio del tempo	35
5.3.4	Convoluzione Circolare	35
5.3.5	Relazione con la DFT	35
5.3.6	Moltiplicazione punto a punto nel tempo	35
5.4	Rapporto tra Convoluzione Aperiodica e Circolare	35
5.5	Implementazione della Convoluzione Circolare	35
5.6	Costo Computazionale	36
5.7	Fast Fourier Transform (FFT)	36
5.7.1	Formula della DFT	36
5.7.2	Ottimizzazioni basate sulle Proprietà di W_N	36
5.8	Radix-2 Decimation In Time (DIT) FFT	36
6	Sistemi LTI con funzione di trasferimento razionale	43
6.1	Classificazione dei Filtri Digitali	43
6.2	Specifiche di Progetto	44
6.3	Progetto di Filtri FIR	44
6.4	Progetto di Filtri IIR	45
6.5	Filtri Passa-Tutto	45
7	Introduzione al Suono e Temperamento Musicale	46
7.1	Suono e Qualità del Suono	46
7.2	Notazione Musicale	46
7.3	Temperamento Musicale	47
7.4	Trasposizione	48
7.5	Tempo e Durata	48
8	Introduzione al Protocollo MIDI	49
8.1	MIDI: Protocollo Musical Instruments Digital Interface	49
8.2	Tipi di Messaggi MIDI	49
8.3	File MIDI	51
8.4	Struttura del file MIDI	51
8.5	Track Chunk nei file MIDI	52
9	Sintesi	53
9.1	Track Chunk nei file MIDI	53
9.2	Eventi MIDI in una traccia	53
9.3	Meta-Eventi MIDI	53
10	Sintesi additiva e FM	54
10.1	Classificazione delle Tecniche di Sintesi Sonora	54
10.2	Sintesi Additiva	54
10.3	Modulazioni e Sintesi FM	55
10.4	Sintesi FM nel Yamaha DX7	56
10.5	Conclusioni	56
11	WAVESHAPING	57
11.1	Sintesi Additiva	57
11.2	Sistemi Non Lineari	57
11.3	Effetto di Termini Additivi	58
11.4	Distorsione	58
11.5	Waveshaping	59
12	SINTESI SOTTRATTIVA	61
12.1	Generatori di Rumore	61
12.2	Transistor Ladder Filter (Lowpass)	62
12.3	Sallen-Key Filter	63

12.4 State Variable Filter	63
12.5 Voltage Controlled Amplifier (VCA)	64
13 Sintesi a Campionamento	65
13.1 Principi di Base	65
13.2 Sintesi a Campionamento	65
13.3 Esempi: Sintesi a Campionamento	65
13.3.1 Violino	65
13.3.2 Pianoforte	65
13.4 Discretizzazione dei Dati	66
13.5 Problemi Aggiuntivi	66
13.6 Pitch	66
13.7 Il Problema delle Formanti	66
13.8 Discretizzazione del Pitch	67
13.9 Velocity (Intensità)	67
13.10Durata	67
13.11Loops	67
13.12Aspetti Tecnici	68
13.12.1 Costo Computazionale	68
13.12.2 Memoria	68
13.13Problemi e Limitazioni	68
13.14Esempi di Sampler Hardware e Software	68
14 Physical Modeling	69
14.1 Processi Fisici Generatori di Suono	69
14.1.1 Circuiti Elettronici Analogici	69
14.1.2 Sistemi Acustici	69
14.2 Tipi di Processi Fisici	69
14.3 Modellazione a Tempo Continuo e Discreto	69
14.4 Domini Fisici e Variabili	70
14.5 Paradigmi di Modellazione	70
14.5.1 Paradigma 1: K-variables	70
14.5.2 Paradigma 2: W-variables	70
14.6 1D Wave Eq. and Solutions	70
14.6.1 Digital Waveguides	70
14.7 Caso 1D	70
14.7.1 Soluzione a questa PDE	70
14.8 Somma di Onde Progressive e Regressive	71
14.9 Discretizzazione della Soluzione di D'Alembert	71
14.10Condizione di Stabilità e Alias Spaziale	71
14.11Formulazione DWG e Diagramma di Flusso	71
14.12Terminazioni "Rigide"	72
14.13Aggregazione	72
14.14Perdite	72
14.15Perdite Dipendenti dalla Frequenza	72
14.16Aggregazione di Perdite Dipendenti dalla Frequenza	72
14.17Dispersione	73
14.18Effetto di Dispersione	73
14.19Decomposizione Modale	73
14.20Ritardi Dipendenti dalla Frequenza	73
14.21Fractional Delays	73
14.22Discrete-Time Arbitrary Delay	73
14.23Discrete-Time Arbitrary Delay	74
14.23.1 Dominio della Frequenza	74
14.24Fractional Delay Ideale (Tempo Continuo)	74
14.24.1 Caratteristiche in Frequenza	74
14.25Progettazione del Filtro Interpolatore	74

14.25.1 Metodi di Progettazione FIR	75
14.25.2 Metodi di Progettazione IIR	75
14.26 Strumenti ad Ancia	75
14.27 Strumenti ad Arco	75
14.28 Strumenti ad Aria (Flue)	75
15 Filtri per mastering	76
15.1 Introduzione	76
15.2 Filtri base	76
15.3 Filtri canonici	77
15.4 State Variable Filter	78
15.5 Filtri all-pass	79
15.6 FIR filters	80
15.7 FIR Comb filters(DOMANDA CERTA ALL'ESAME)	80
15.8 IIR Comb filters	80
15.9 Universal Comb filters	81
15.10 Shelving filters (I order)	81
15.11 Shelving filters (II order)	82
15.12 Peak filters	82
15.13 EQ	83
15.14 GEQ (equalizzatori grafici)	83
16 Effetti basati su DL	84
16.1 Lista di effetti basati su Delay Line	84
16.2 Delay Line	84
16.3 Vibrato	84
16.4 Slapback/Echo/Delay	84
16.5 Flanger/Chorus	84
16.6 Phaser	85
16.7 Room Impulse Response (RIR)	85
16.8 Reverberation Time	85
16.9 Effetto del pre-delay	86
16.10 Riverbero a Convoluzione	86
16.11 Riverbero a Convoluzione (Vantaggi e Svantaggi)	87
16.12 Schroeder reverb	87
16.13 Feedback Delay Network (FDN)	87
16.14 Feedback Delay Network (FDN) (Approccio "lossless")	88
17 Formule pratiche per i coefficienti dei filtri EQ biquad	89

Capitolo 1

Circuiti

1.1 Teoria dei Circuiti

Circuito

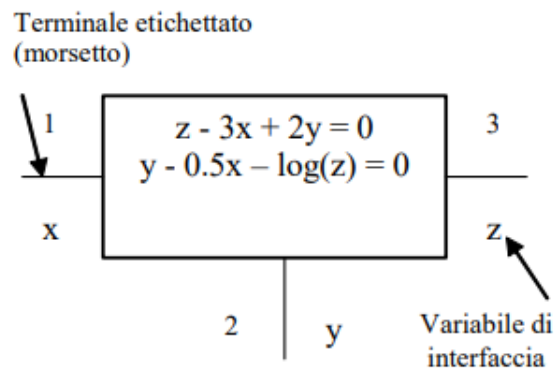
Il circuito discerne dalla tendenza a dividere i problemi in un insieme di sottoproblemi più piccoli e facilmente comprensibili.

Definizione

Un circuito è un insieme di componenti collegati fra loro tramite collegamenti (morsetti, fili o conduttori).

Componente

Un componente è un elemento circuitale caratterizzato da un insieme di morsetti (I/O) e da un insieme di equazioni fra le variabili di interfaccia (relazioni costitutive) dipendenti da un numero finito di costanti numeriche (parametri circuitali).



Collegamento

Un collegamento è un arco orientato o non che collega fra loro i morsetti dei componenti circuitali. Impedisce l'omogeneità e la continuità alle variabili in corrispondenza dei morsetti. Costituisce un'equazione di **vincolo** fra variabile e interfaccia. L'insieme dei collegamenti può essere descritto da un grafo opportuno.

Sistema risolvante del circuito

Il sistema risolvante del circuito è costituito dall'insieme delle equazioni costitutive del componente, equazioni di vincolo, condizioni iniziali e andamenti imposti da cause.

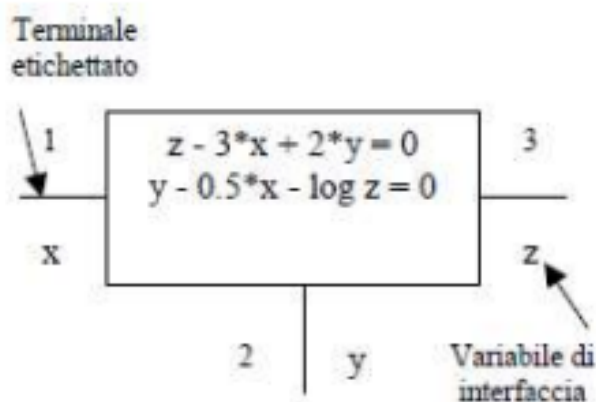
Risolvere un circuito

L'obiettivo di risolvere un circuito è calcolare gli andamenti temporali delle variabili di interfaccia. Questo è possibile solo se il sistema ammette una soluzione unica ogni istante di tempo.

Due classi di circuiti

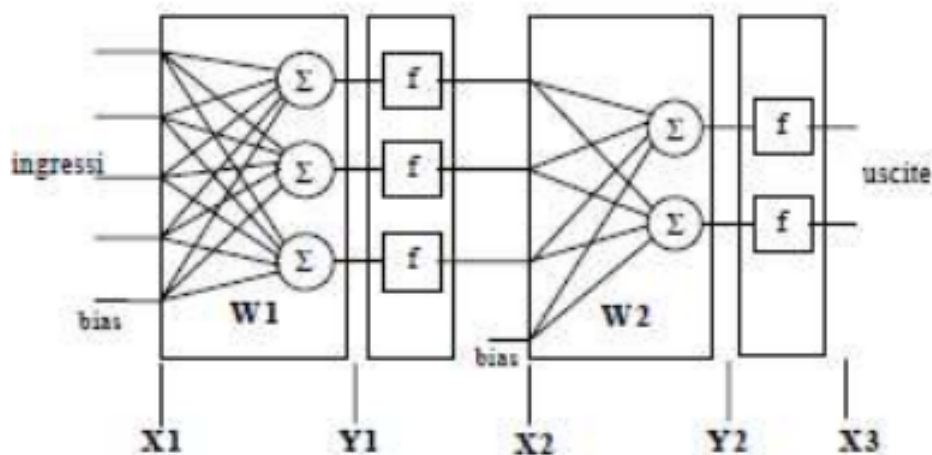
Circuiti non direzionali

- La direzione degli scambi è indeterminata.
- Non è stabilito un rapporto causa-effetto.
- Le variabili di interfaccia dipendono dai componenti del circuito.
- La tecnica di soluzione calcola tutte le variabili di interfaccia.



Circuiti (uni-)direzionali

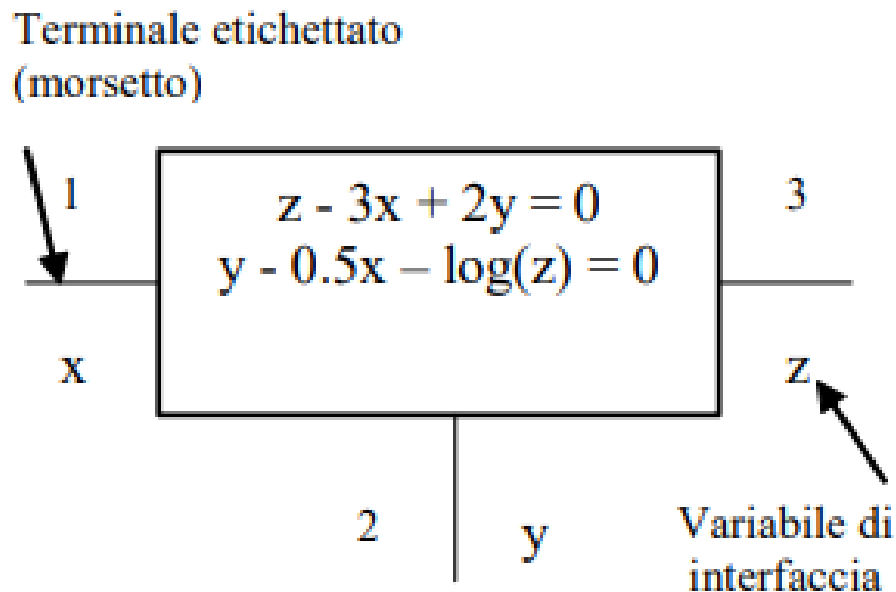
- La direzione è stabilita a priori.
- Il funzionamento è disaccoppiato.
- La tecnica di soluzione calcola sequenzialmente le variabili di interfaccia.



Variabili di interfaccia

Le variabili di interfaccia sono grandezze (segnali) definite sui collegamenti tra componenti, sottoposte a equazioni di vincolo generate dai collegamenti e dalle equazioni dei componenti. Tutte le variabili sono funzioni di una o più variabili indipendenti comuni (solitamente il tempo).

Tipi di variabili di interfaccia



- **A tempo continuo**
 - Analogiche.
 - Riproducono grandezze del mondo fisico.
 - Hanno un valore per ogni istante t .
 - A valori reali, limitate, continue.
 - Possono essere considerate anche a valori complessi, non continue e non limitate.
- **A tempo discreto**
 - Digitali.
 - A valori discreti.
 - Un solo valore per istanti discreti n .
 - A valori reali, limitate e continue.
 - Possono essere considerate anche a valori complessi, non limitate.

1.2 Circuiti

Circuiti analogici

I circuiti analogici sono circuiti con variabili di interfaccia analogiche e relazioni costitutive a tempo continuo.

Circuito a tempo discreto

Un circuito a tempo discreto è costituito da elementi hardware programmabili via software, con variabili di interfaccia e relazioni costitutive a tempo discreto.

1.3 Approccio Circuitale

- Utilizzato per modellare fenomeni fisici diversi.
- Modellazione semplice e flessibile.
- Applicabile sia a modelli a tempo continuo che a tempo discreto.
- Può introdurre approssimazioni.
- Il limite è la frequenza e le dimensioni del circuito.

Capitolo 2

modello Circuitale

2.1 Modello Circuitale Elettrico

Equazioni di Maxwell

Le **Equazioni di Maxwell** permettono di studiare i fenomeni elettromagnetici e ottenere modellazioni precise del loro funzionamento.

Approccio Circuitale

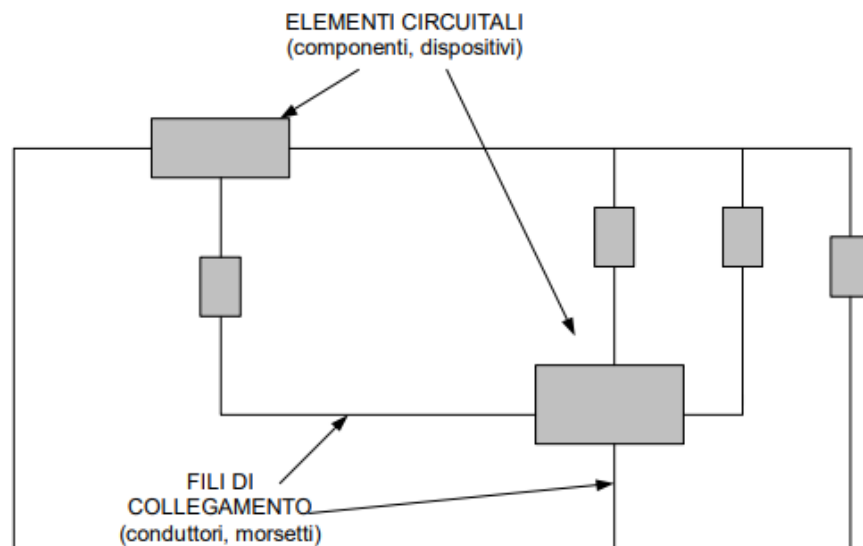
L'**Approccio Circuitale** serve a ottenere un modello semplificato di fenomeni.

Circuiti Elettrici a Costanti Concentrate

I **Circuiti Elettrici a Costanti Concentrate** derivano da approssimazioni delle equazioni di Maxwell:

- Dimensioni della struttura trascurabili
- Velocità di propagazione infinita
- Tempo nullo di trasmissione dei fenomeni

È ovviamente necessario verificare la validità delle approssimazioni.



Circuito a Costanti Concentrate

Un **Circuito a Costanti Concentrate** è una connessione tra elementi ideali privi di dimensioni geometriche e caratterizzati da legami tra tensione e corrente.

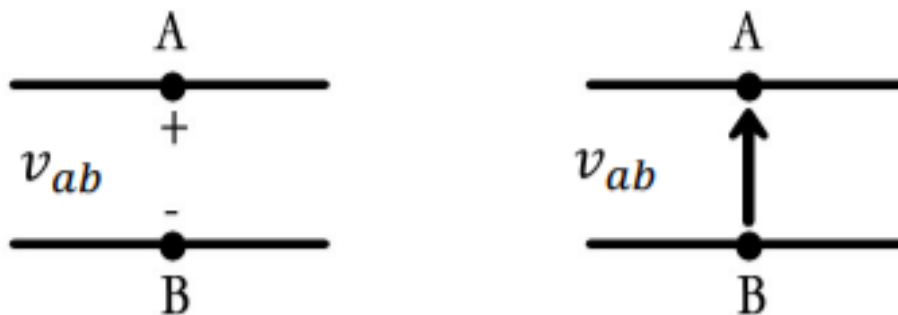
2.2 Grandezze Elettriche

Tensione

La **Tensione** è definibile tra due morsetti e si misura in *Volt*. È necessario indicare intensità e verso. Il segno negativo indica inversione di polarità.

Corrente

La **Corrente** è definibile su un morsetto e si misura in *Ampere*. È necessario indicare intensità e verso. Il segno negativo indica inversione di direzione.



2.3 Porta Elettrica

Una **Porta Elettrica** è costituita da una coppia di morsetti, con la relazione $i' = i''$.

Grandezze di Porta

Le grandezze associate alla porta sono **tensione** e **corrente**.

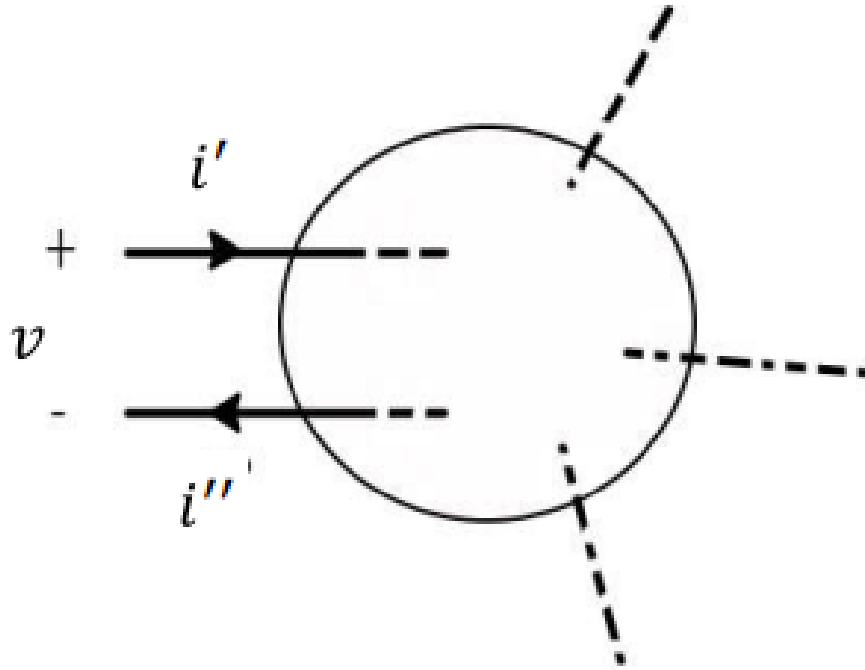
Potenza Istantanea

La potenza istantanea si calcola come:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad [\text{Watt}]$$

Versi

Esistono due versi per la potenza istantanea:



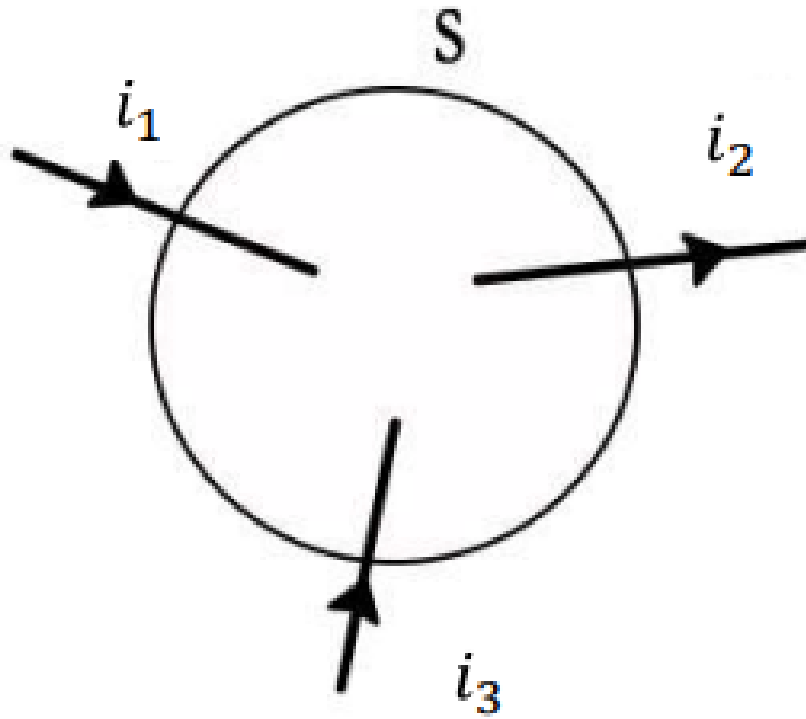
- **Porta dell'utilizzatore:** versi coordinati, potenza assorbita > 0 .
- **Porta elettrica del generatore:** potenza assorbita < 0 , versi non coordinati.

2.4 Leggi di Kirchhoff

Prima Legge di Kirchhoff (KLC)

La somma algebrica delle correnti entranti e uscenti da una superficie chiusa è nulla. La superficie non può tagliare dei componenti, ma solo dei morsetti.

- Correnti uscenti \rightarrow segno $+$
- Correnti entranti \rightarrow segno $-$

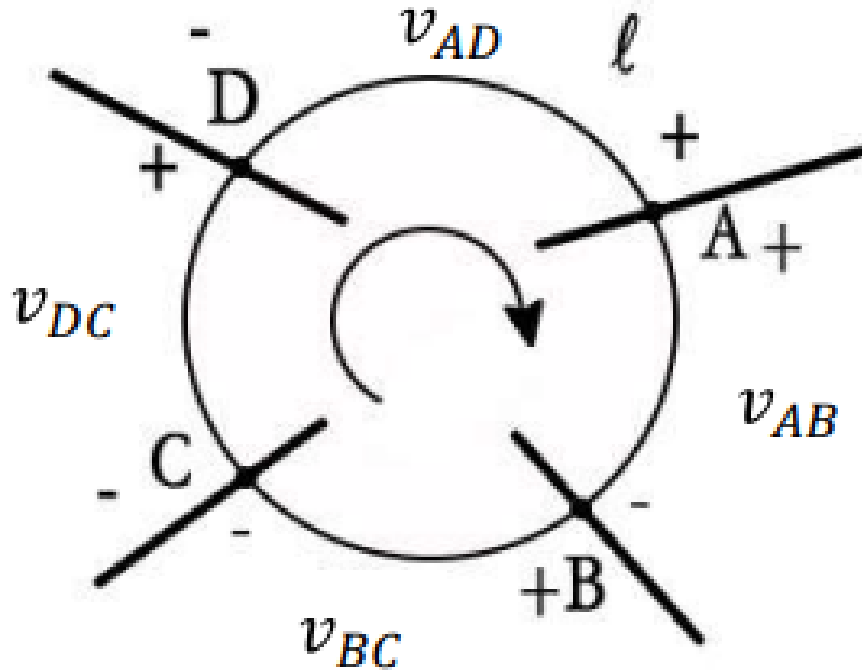


$$-i_1 - i_3 + i_2 = 0$$

Seconda Legge di Kirchhoff

La somma algebrica delle tensioni lungo una curva chiusa è nulla. La curva chiusa non può tagliare dei componenti, ma solo dei morsetti.

- Tensioni senso orario → segno +
- Tensioni senso antiorario → segno -



$$-v_{AB} - v_{BC} + v_{DC} + v_{AD} = 0$$

2.5 Componenti

Un **Componente** è costituito da due o più terminali (poli). Un componente con N terminali è detto N-polo. Ad esempio, un bipolo è un componente con due poli.

Bipolo

Un bipolo ha due morsetti che costituiscono una porta. Le grandezze elettriche sono $v(t)$ e $i(t)$. La relazione costitutiva di un bipolo completo è:

$$f(v(t), i(t), t) = 0$$

Un bipolo può essere pilotato in tensione o in corrente.

Pilotato in Tensione

Se il bipolo è pilotato in tensione, la relazione è:

$$i(t) = gv(v(t), t)$$

Pilotato in Corrente

Se il bipolo è pilotato in corrente, la relazione è:

$$v(t) = gi(i(t), t)$$

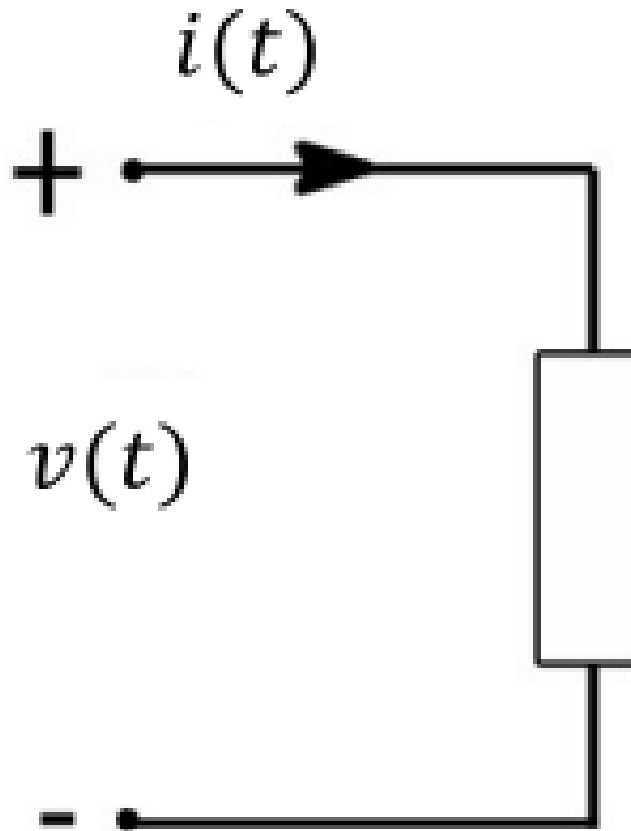
Potenza Istantanea

La potenza istantanea per un bipolo è:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

Versi Coordinati

La potenza maggiore di zero viene effettivamente assorbita.



Tripolo

Un tripolo è un componente con tre terminali. La corrente in un tripolo è definita come la somma delle correnti nei terminali:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

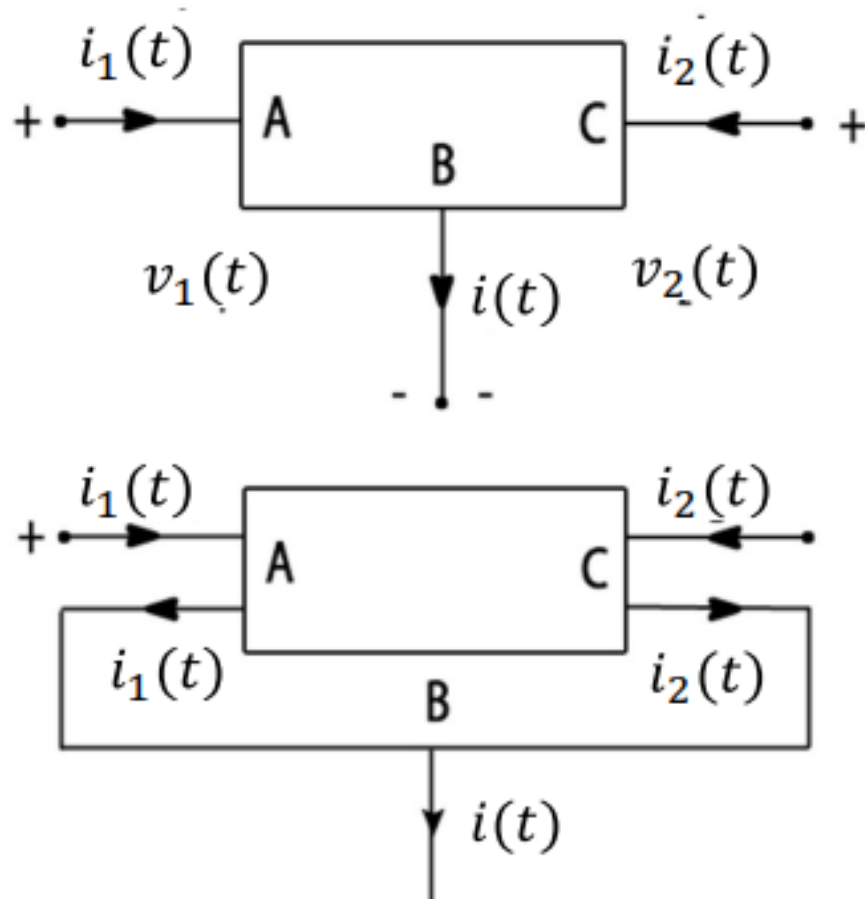
Ogni coppia di morsetti può essere considerata come una porta elettrica.

2-porte sbilanciato

Un tripolo può essere modellato come un sistema con due equazioni costitutive che legano le quattro grandezze di porta.

Potenza Istantanea

La potenza istantanea per un tripolo è la somma delle potenze delle due porte:



$$p(t) = v_1(t) \cdot i_1(t) + v_2(t) \cdot i_2(t)$$

Quadripolo

Un quadripolo è un componente con quattro terminali. La legge di Kirchhoff per le correnti (KLC) non pone vincoli particolari per un quadripolo.



2-porte Bilanciato

Nel caso di un quadripolo bilanciato, la potenza istantanea è data da:

$$p(t) = v_1(t) \cdot i_1(t) + v_2(t) \cdot i_2(t)$$

2.6 Ipotesi Aggiuntive

Linearità

Un sistema è lineare se l'effetto è proporzionale alla causa. La linearità permette l'uso del principio di sovrapposizione.

$$e(t) \rightarrow \text{effetto dovuto alla causa } c(t)$$

$$a \rightarrow \text{costante}$$

$$*H^* : \text{Se } c(t) \rightarrow e(t) \text{ allora } ac(t) \rightarrow ae(t)$$

$$*Conseguenza^* :$$

$$\text{se } \begin{cases} e_1(t) \Leftarrow c_1(t) \\ e_2(t) \Leftarrow c_2(t) \end{cases} \text{ allora } ae_1(t) + be_2(t) \Leftarrow ac_1(t) + bc_2(t)$$

Permanenza

Un sistema è permanente se l'effetto non dipende dall'istante di applicazione della causa:

$$c(t) \implies e(t) \quad \Rightarrow \quad c(t+t_0) \implies e(t+t_0) \quad \forall t_0 \text{ costante}$$

Causalità

Un sistema è causale se, in ogni istante t_0 , l'effetto dipende solo dalla causa per $t \leq t_0$.

$$\text{se } \begin{cases} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_1(t) = c_2(t) \text{ per } t \leq t_0 \end{cases} \text{ allora } e_1(t) = e_2(t) \text{ per } t \leq t_0$$

2.7 Proprietà Notevoli

Le proprietà come **linearità**, **permanenza** e **causalità** devono essere soddisfatte in ogni sistema.

Reciprocità e Passività

Le proprietà di reciprocità e passività possono essere verificate in un sistema.

Reciprocità

La reciprocità implica che l'interazione tra due cause in un circuito non cambia se si scambiano ingresso e uscita.

$$p_1 = \sum_{k=1}^N v_k^{(1)} i_k^{(1)}$$

$$p_2 = \sum_{k=1}^N v_k^{(2)} i_k^{(2)}$$

$$p_{12} = \sum_{k=1}^N (v_k^{(1)} + v_k^{(2)}) (i_k^{(1)} + i_k^{(2)}) = p_1 + p_2 + \underbrace{\sum_{k=1}^N v_k^{(1)} i_k^{(2)}}_{\text{Interazione fra (1) e (2)}} + \underbrace{\sum_{k=1}^N v_k^{(2)} i_k^{(1)}}_{\text{Interazione fra (1) e (2)}}$$

Condizione di reciprocità

Legge di reciprocità di Lorentz

In due situazioni elettriche diverse, un N-porte è reciproco se vale la condizione precedente.

Dato un componente lineare passivo:

1. Si collega un generatore ideale di tensione in A e si considera la corrente di corto circuito in B: $E_a I_b$
2. Si collega un generatore ideale di tensione in B e si considera la corrente di corto circuito in A: $E_b I_a$

Allora:

$$\frac{E_a}{I_b} = \frac{E_b}{I_a}$$

E se:

$$E_a = E_b \quad \text{e} \quad I_a = I_b$$

il comportamento del circuito non cambia scambiando ingresso e uscita.

Passività: L'effetto di una causa di breve durata scompare con il passare del tempo.

- È impossibile fornire energia (o al massimo minore di quella assorbita).

$$t = -\infty \Rightarrow \text{circuito o componente a riposo}$$

Passività

Un sistema è passivo se l'effetto di una causa scivola nel tempo, senza fornire energia.

2.8 Componenti Ideali

Resistore

Un resistore è misurato in *Ohm* e segue la relazione:

$$v(t) = R \cdot i(t)$$

Condensatore

Un condensatore ha una capacità misurata in *Farad* e segue la relazione:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

Equazione Costitutiva

$$v(t) = Ri(t) \quad (R \text{ costante reale})$$

$$R = \frac{v(t)}{i(t)}$$

$$G = \frac{1}{R} = \frac{i(t)}{v(t)} \Rightarrow i(t) = Gv(t)$$

Condizione di passività:

Passivo $\Rightarrow R \geq 0$ (componente reale)

$$P(t) = Ri^2(t) \geq 0 \quad (\text{trasferimento irreversibile di energia})$$

Allo zero assoluto è un superconduttore.

Attivo $\Rightarrow R < 0$

$$P(t) = Ri^2(t) < 0 \quad (\text{erogano energia})$$

Condensatore

Capacità misurata in Farad.

Componenti reali sono caratterizzati dalla tensione di isolamento.

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (C \text{ costante reale})$$

Passivo $\Rightarrow C \geq 0$ (componente reale)

Attivo $\Rightarrow C < 0$

Componente con memoria.

Induttore

Induttanza misurata in Henry.

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (L \text{ costante reale})$$

Condizione di passività:

Passivo $\Rightarrow L \geq 0$

Attivo $\Rightarrow L < 0$

Componente con memoria.

Generatore Indipendente di Tensione

Ingresso al circuito.

L'energia può assumere qualsiasi valore.

Componente attivo.

$$v(t) = V_g(t) \quad (\text{funzione del tempo, eventualmente costante})$$

Cortocircuito: $v_g(t) = 0$

Generatore Indipendente di Corrente

Ingresso al circuito.

$$i(t) = i_g(t)$$

L'energia può assumere qualsiasi valore.

Componente attivo.

Circuito aperto: $i_g(t) = 0$

Circuiti Equivalenti dei Bipoli Reali

E' necessario modellare il componente reale considerando altri elementi ideali.

L'inserimento di una resistenza elimina l'assurdo.

Resistori in serie: percorsi dalla stessa corrente i .

Partitore di tensione: la tensione si ripartisce su più resistori in maniera proporzionale alle resistenze.

Resistori in parallelo: ai capi hanno la stessa tensione.

Connessione di Bipoli

Partitore di corrente: la corrente si ripartisce in maniera inversamente proporzionale alle resistenze.

Componenti Ideali

2-porte:

- Tripolari o quadrdipolari.
- Non sempre hanno un equivalente componente reale.
- Utili per circuiti più complessi.
- Generatori controllati: elementi attivi, non reciproci, si possono realizzare tutti i 4 tipi da uno solo.

Nullore: possono assumere valori qualsiasi, poco realistico, attivo e non reciproco.

Trasformatore ideale: non assorbe potenza, senza perdite, passivo, reciproco.

Induttori manualmente accoppiati: trasferimento reversibile vincolato di energia, componente con memoria.

Giratore: non assorbe potenza, senza perdite, passivo, non reciproco.

Capitolo 3

Fenomeni elettromagnetici

Caratteristiche

- Grandezze fisiche

\vec{E}	Campo elettrico	V/m
\vec{D}	Induzione elettrica	C/m^2
\vec{H}	Campo magnetico	$A - \text{spira}/m$
\vec{B}	Induzione magnetica	Wb/m^2
\vec{J}	Densità di corrente di conduzione	A/m^2

- Vettoriali
- Funzione del punto e del tempo

- Parametri rappresentativi

ρ	Densità volumetrica di carica	C/m^3
γ	Conducibilità	Ω^{-1}/m
ε	Costante dielettrica	F/m
μ	Permeabilità magnetica	H/m

- **Equazioni di Maxwell**

1° Equazione	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$
2° Equazione	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
3° Equazione	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
4° Equazione	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

- **Relazioni costitutive dei materiali**

- $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$
- $\vec{B} = \mu \vec{H}$
- $\vec{J} = \vec{J}_0 + \gamma(\vec{E} - \vec{E}_0)$

Ipotesi delle costanti concentrate

- Approssimazione del fenomeno elettromagnetico
- Dimensioni della struttura trascurabili
- Velocità di propagazione **infinita**
- Tempo nullo di trasmissione
- Ipotesi valide solo se:
 - Tempo di trasmissione \ll variazioni temporali
 - Dimensioni spaziali $\ll \lambda_{min}$
 - $2 \cdot L_{max}/c \cdot f_{max} \ll 1$

Conseguenze delle ipotesi a costanti concentrate

- Velocità di propagazione infinita
- Classificazione delle regioni:
 - $\varepsilon = 0, \mu = 0$ Nessuna energia immagazzinata
 - Corrente entrante = corrente uscente
 - Campo elettrico conservativo

Vuoto ideale – Nessuna sollecitazione

- $\sigma = 0$: non passa corrente

Conduttore ideale – $\sigma \rightarrow \infty$

- Regione equipotenziale

Resistore – σ finita

- Dissipazione di potenza

Generatore indep. di corrente – $\sigma = 0$

- Trasformazione di energia

Generatore indep. di tensione – $\sigma \rightarrow \infty$

- Trasformazione di energia
- $\varepsilon \neq 0, \mu = 0$: **Condensatore** – Energia elettrica presente
 - Potenziale definito univocamente
- $\varepsilon = 0, \mu \neq 0$: **Induttore** – Energia magnetica presente
 - Corrente entrante = corrente uscente

Modello circuitale a costanti concentrate

- Modello composto da regioni tipo:

IA Vuoto ideale

IB Conduttore ideale

IC Resistore

ID Generatore indep. di corrente

IE Generatore indep. di tensione

II Condensatore

III Induttore

Leggi di Kirchhoff

Legge delle correnti (KCL)

Per ogni superficie chiusa che interseca solo conduttori ideali:

$$\text{La somma delle correnti entranti} = \text{somma delle correnti uscenti}$$

Legge delle tensioni (KVL)

Per ogni percorso chiuso che interseca solo conduttori ideali:

$$\text{La somma algebrica delle tensioni su un circuito chiuso è nulla}$$

Capitolo 4

Segnali e Sistemi a Tempo Discreto

4.1 Segnali a Tempo Discreto

I segnali a tempo discreto sono rappresentati come $x[n]$, dove n è un numero intero che indica l'indice temporale.

Esempi di segnali a tempo discreto

- **Impulso unitario** $\delta[n]$:
 - $\delta[n] = 1$ se $n = 0$, altrimenti $\delta[n] = 0$
 - Da non confondere con la delta di Dirac
- **Gradino unitario**:
 - $u[n] = 1$ per $n \geq 0$, altrimenti $u[n] = 0$
- **Sequenza esponenziale**:
 - $x[n] = Ca^n$, dove C e a sono costanti
 - Se a è reale \Rightarrow sequenza esponenziale reale
 - Se a è complesso \Rightarrow sequenza esponenziale complessa
 - **Sequenze unilaterali**:
 - * $x[n] = ca^n u[n]$ (destra)
 - * $x[n] = ca^n u[-n]$ (sinistra)
 - **Sequenza a singola frequenza**: $x[n] = ce^{j\omega_0 n}$
 - **Segnale sinusoidale**: $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$

4.2 Domini di Trasformazione

Trasformata Zeta

- Definizione: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$
- La somma converge solo in una **Regione di Convergenza (ROC)**
- La ROC è fondamentale per:
 1. Inversione della trasformata Zeta
 2. Proprietà di causalità e stabilità dei sistemi

- Esempio: $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \Rightarrow$ converge se $|z| > |a|$

Trasformata di Fourier

- Definizione: $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$
- Proprietà: periodica con periodo 2π
- Esiste se la ROC della trasformata Z include il cerchio unitario

Legame tra Trasformata Z e Fourier

- Relazione: $X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega})$

4.3 Sistemi a Tempo Discreto

Definizione

Sistemi che operano su $x[n]$ per generare $y[n]$.

Proprietà

- **Linearità:** somma ponderata delle risposte
- **Stazionarietà (invarianza temporale)**
- **Causalità:** $y[n]$ dipende solo da $x[k]$ con $k \leq n$
- **Stabilità BIBO:** $\sum |h[n]| < \infty$

Sistemi LTI (Lineari e Tempo-Invarianti)

- **Risposta all'impulso** $h[n]$
- **Convoluzione:** $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]x[n-m]$
- **Trasformata Z:** $Y(z) = H(z)X(z)$

4.4 Sistemi a Tempo Continuo

Trasformata di Fourier

- Definizione: $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$
- Inversa: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$

Trasformata di Laplace

- Definizione: $H_a(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(t)e^{-st} dt$
- Il sistema è BIBO stabile se tutti i poli sono nel semipiano sinistro: $\text{Re}[s] < 0$

Campionamento

- Relazione: $x[n] = x_a(nT)$ con $T > 0$
- Aliasing se $f_s < 2f_{\max}$

4.5 Sistemi MIMO

- Matrice di trasferimento $H_{km}(z)$
- Modello: $Y(z) = H(z)U(z)$

4.6 Sistemi LTI: FIR e IIR

FIR (Finite Impulse Response)

- **Definizione:**

$$H[z] = \sum_{n=0}^N h(n)z^{-n}$$

dove $N + 1$ è la lunghezza del filtro.

- **Stabilità:** sempre stabile se $|h(n)| < +\infty$

IIR (Infinite Impulse Response)

- **Definizione:** sistema non FIR
- **Stabilità:** può essere instabile se i poli non sono all'interno del cerchio unitario

Strutture per filtri razionali

Possono essere rappresentati da funzioni razionali:

4.7 Sistemi LTI: FIR e IIR

Strutture per filtri razionali

Possono essere rappresentati da funzioni razionali:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$B(z) = \sum_{n=0}^N b_n z^{-n} \quad \text{e} \quad A(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^{-n}$$

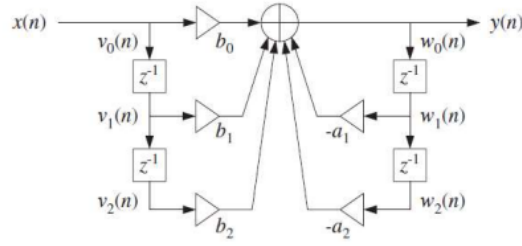
Per il filtro FIR $A(z) = 1$.

$H(z)$ può essere descritta da un'equazione alle differenze della forma:

$$a_0 y(n) = - \sum_{m=1}^N a_m y(n-m) + \sum_{m=0}^N b_m x(n-m)$$

Forma diretta IIR:

Consideriamo il caso $N=2$, si ha con $H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$



$$y(n) = - \sum_{m=1}^2 a_m y(n-m) + \sum_{m=0}^2 b_m x(n-m)$$

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$$

L'equazione alle differenze può essere scritta come:

$$w_0(n) = -a_1 w_1(n) - a_2 w_2(n) + b_0 v_0(n) + b_1 v_1(n) + b_2 v_2(n)$$

$$y(n) = w_n(n)$$

4.8 Forma canonica o diretta II (IIR)

L'equazione della forma canonica diretta II è:

$$y(n) = (b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)) + (-a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2))$$

Dal momento che le linee di ritardo sono le stesse, non è necessario tenerle separate.

4.9 Forma in cascata (IIR)

Definizione

La funzione di trasferimento viene espressa come **prodotto di sezioni del secondo ordine (SOS)**:

$$H(z) = \prod_{i=0}^{K-1} H_i(z)$$

con ogni $H_i(z)$ rappresentante una sezione del secondo ordine.

Ogni **funzione di trasferimento razionale** può essere riscritta come prodotto di sezioni del secondo ordine:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}$$

Struttura della Forma in Cascata

- Ogni **sezione** può essere implementata con una **forma canonica diretta** (o trasposta). - Convenzionalmente, si utilizza **la forma canonica**.

Segnali di ingresso e uscita

- **Ingresso del sistema**: il segnale $x(n)$ entra nella prima sezione. - **Uscita del sistema**: il segnale in uscita dall'ultima sezione $y(n)$. - **Per gli step intermedi**: l'uscita della sezione i è l'ingresso della sezione $i + 1$.

Vettore di stato di ogni sezione

Ogni sezione ha uno **stato interno**:

$$s_i = [s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}]$$

che rappresenta i **ritardi interni** della sezione.

Equazione alle differenze

Deriva dalla **forma canonica del secondo ordine**, iterata per tutte le sezioni:

$$y(n) = -a_1y(n-1) - a_2y(n-2) + b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2)$$

Pseudocodice per il calcolo sequenziale

$$x_0 = x(n)$$

$$y_i = \sum (\text{contributo ritardi e coefficienti})$$

$$x_{i+1} = y_i$$

$$y(n) = y_{K-1}$$

4.10 Assaggio da Forma Diretta/Canonica a Cascata

La conversione da una **forma diretta** (o canonica) a una **forma in cascata** segue questi passaggi fondamentali:

1. **Fattorizzazione** del numeratore e del denominatore nei **polinomi del secondo ordine**.
2. **Trovare le radici** dei due polinomi.
3. **Raggruppare in polinomi quadratici**:

- Se **radici reali**:

$$(1 - \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2})$$

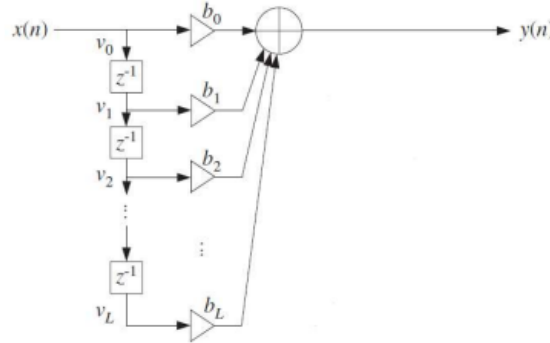
- Se **radici complesse coniugate**:

$$(1 - \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2})$$

Questa forma a cascata è utile per garantire una maggiore **stabilità numerica** e per facilitare l'implementazione pratica dei filtri IIR.

Forma diretta FIR:

Nel caso speciale dei filtri FIR si ha la seguente struttura:



L'equazione alle differenze non è ricorsiva

$$y(n) = \sum_{m=0}^N b_m x(n - m)$$

4.11 Tecniche di filtraggio per filtri IIR

4.11.1 Funzioni delle Librerie Intel

- *Implementazione* suddivisa in:
 1. **Inizializzazione** del filtro
 2. **Esecuzione del filtraggio**
- Due tipi di *filtri* supportati:
 1. **Filtri di ordine arbitrario** → implementati in **forma diretta**
 2. **Filtri biquad** → implementati in **forma a cascata** (sezioni del secondo ordine)

4.11.2 Esempio NU-Tech

- **Struttura del filtro** dipende dal tipo scelto
- **Inizializzazione richiesta** prima di applicare il filtro
- **Struttura ctx:**
 - Contiene i coefficienti **B** seguiti dai coefficienti **A** (taps)

4.11.3 Due Approcci Principali

1. Filtraggio campione per campione (**Forma Diretta**)
2. Filtraggio a blocchi (**per segnali lunghi**)

4.11.4 Forma Diretta e Convoluzione

Per i sistemi **LTI**, il filtraggio FIR si basa sulla **convoluzione**:

$$y(n) = \sum_{m=0}^M h(m)x(n - m)$$

Espressione compatta:

- La **lunghezza finale** del segnale filtrato sarà $L + M - 1$

- Si basa sul **concetto di scorrimento** del segnale di input sulla risposta all'impulso

4.11.5 Funzioni delle Librerie Intel

- Funzione di **convoluzione** (simile a `conv` di MATLAB)
- Funzioni di **filtraggio FIR** (inizializzazione come per i filtri IIR, simile a `filter` di MATLAB)

Convoluzione a Blocchi

La convoluzione a blocchi è utilizzata per il filtraggio real-time di segnali di lunghezza infinita con filtri FIR. Costituisce la base di molte applicazioni in tempo reale.

Sono disponibili diversi approcci:

- **OLS (Overlap and Save)**: ad ogni aggiornamento si effettua uno shift del vettore di ingresso verso sinistra, mantenendo solo la parte utile dell'IFFT.
- **OLA (Overlap and Add)**: ad ogni aggiornamento si somma il blocco corrente con quello precedente, dopo aver effettuato uno shift a sinistra.
- **Versione Partizionata**: adatta per blocchi più piccoli ($L_{\text{BLOCK}} < L_H$), suddivide il filtro in più blocchi.

Confronto tra i metodi:

Metodo	Principio	Vantaggi	Svantaggi
OLS (Overlap and Save)	Mantiene solo la parte utile dell'IFFT	Risparmio di memoria	Possibile aliasing se non implementato correttamente
OLA (Overlap and Add)	Somma delle finestre successive	Maggiore fedeltà del segnale	Richiede gestione accurata dell'overlap
Partizionata	Suddivide il filtro in blocchi più piccoli	Più efficiente per filtri lunghi	Implementazione più complessa

Tabella 4.1: Confronto tra approcci per la convoluzione a blocchi

4.12 Convoluzione a Blocchi: OLS (Overlap and Save)

Passaggi principali:

1. **Shift del buffer** (spostamento di fs campioni)

```
ippsMove_64f(buff0ls + fs, buff0ls, fs);
```

2. **Copia dei nuovi fs campioni in fondo al buffer**

```
ippsCopy_64f((double*)(*Input[0]).DataBuffer, buff0ls + fs, fs);
```

3. **Trasformata di Fourier del buffer** ($buff0ls \rightarrow buff0lsF$)

```
ippsFFTForward_RToPack_64f(buff0ls, buff0lsF, fftState, 0);
```

4. **FFT dei coefficienti del filtro** ($taps \rightarrow tapsF$)

```
ippsFFTForward_RToPack_64f_I(tapsF, fftState, 0);
```

5. **Moltiplicazione in frequenza** ($buff0lsF \cdot tapsF$)

```
ippsMulPack_64f_I(tapsF, buff0lsF, 2fs);
```

6. Trasformata inversa di Fourier (IFFT)

```
ippsFFTInv_PackToR_64f_I(buff0lsF, fftState, 0);
```

7. Aggiornamento dell'output (estrazione dei campioni validi)

```
ippsCopy_64f(buff0lsF + fs, (double*)(*Output[0]).DataBuffer, fs);
```

4.13 Convoluzione a Blocchi Partizionata

Passaggi principali:

1. Inizializzazione del frame

```
CBFunction(this, NUTS_GETFRAME_RATE, 0, &ActualFrameSize);  
in_ols = new double[2*ActualFrameSize];  
memset(in_ols, 0.0, 2*ActualFrameSize * sizeof(double));
```

2. Copia dei dati di input nel buffer *in_ols* e calcolo FFT

```
ippsCopy_64f((double*)Input[0]->DataBuffer, in_ols, FrameSize);  
ippsFFTFwd_RToPerm_64f(in_ols, TmpFreqRis, IPP_Spec, NULL);
```

3. Loop sulla partizione dei coefficienti del filtro

```
for(int j = 0; j < ceil(len_taps / FrameSize); j++) {  
    ippsCopy_64f(taps + j * FrameSize, taps_cut, FrameSize);  
    ippsFFTFwd_RToPerm_64f(taps_cut, fft_taps, IPP_Spec, NULL);  
    ippsMulPerm_64f_I(TmpFreqRis, fft_taps, 2 * FrameSize);  
    ippsFFTInv_PermToR_64f_I(fft_taps, IPP_Spec, NULL);  
}
```

4. Gestione del delay per la sovrapposizione delle partizioni

```
ippsCopy_64f(fft_taps, delay + j * FrameSize, FrameSize);  
memset(taps_cut, 0.0, FrameSize * sizeof(double));  
memset(fft_taps, 0.0, FrameSize * sizeof(double));
```

5. Somma con il buffer precedente e aggiornamento dell'output

```
ippsAdd_64f_I(delay_old, delay, len_delay_old);  
ippsCopy_64f(delay, (double*)Output[0]->DataBuffer, FrameSize);  
ippsCopy_64f(delay + FrameSize, delay_old, len_delay_old);
```

Capitolo 5

DFT e FFT

Sequenze Periodiche

Un **evento periodico** è un evento che si ripete uguale a se stesso ad ogni intervallo N .

- $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ è la *pulsazione*.
- Non è né quadraticamente né assolutamente sommabile.
- È una convoluzione di un periodo con un treno di impulsi di periodo N .
- Può essere rappresentato dalla serie discreta di Fourier (DFS).

Fattore di Twiddle: W_N^{-kn} .

Proprietà della DFS

Linearità

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_1 X_1[k] + c_2 X_2[k] W_N^{-kn} = c_1 \sum_{k=0}^{N-1} X_1[k] W_N^{-kn} + c_2 \sum_{k=0}^{N-1} X_2[k] W_N^{-kn}$$

Dualità

La DFS di una sequenza periodica è anch'essa periodica.

Traslazione nel Tempo

$$x[n - m] \leftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega m}$$

Traslazione in Frequenza

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega + \Delta\omega)})$$

Simmetria

$$X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$$

Relazione tra DTFT e DFS

Eseguire la DFS corrisponde a valutare $X(z)$ su N punti equispaziati sul cerchio unitario.

La DTFT di una sequenza periodica è il prodotto delle trasformate di Fourier del singolo periodo e del treno di impulsi:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Sequenze Periodiche di Durata Finita

- Una **sequenza periodica** è completamente rappresentata dalla sua **sequenza DFS**.
- Una sequenza **aperiodica** di lunghezza N può essere resa **periodica** replicandola sull'asse n .
- La DFS di una sequenza corrisponde alla DTFT campionata N in frequenze equispaziate.

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \quad \text{con} \quad \omega = \frac{2\pi}{N}k \quad \text{per} \quad n = 0, \dots, N-1, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Campionamento in Frequenza

Obiettivo: Determinare le condizioni in cui la conoscenza di campioni equispaziati di $X(e^{j\omega})$ permette la ricostruzione univoca della sequenza $x[n]$.

Principali Trasformate

- **DTFT** (Trasformata Discreta di Fourier Continua):

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- **Campionamento della DTFT in N punti:**

$$\bar{X}[k] = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$$

- **DFS inversa** (per una sequenza periodica di periodo N):

$$\bar{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}[k] W_N^{-kn}$$

Campionamento in Frequenza e Convoluzione

Sostituendo la DTFT, otteniamo:

$$\bar{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \left(\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m)} \right)$$

Si dimostra che:

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m)} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n-m+rN]$$

Quindi:

$$\bar{x}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n + rN]$$

Conclusion: Il campionamento in frequenza della DTFT è equivalente a replicare periodicamente la sequenza nel dominio temporale.

5.1 Condizioni per la ricostruzione univoca

Definiamo:

$$\tilde{y}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n + rN]$$

La sua **trasformata discreta** è:

$$\tilde{Y}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn} = 1 \quad \text{per } k = 0, \dots, N-1$$

Invertendo la DFS (Trasformata di Fourier Discreta):

$$\tilde{y}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 1 \cdot W_N^{-kn} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n + rN]$$

Conclusion:

Il **campionamento in frequenza** della DTFT implica che la sequenza venga **replicata periodicamente** nel dominio temporale.

Se la sequenza originale è limitata a N campioni, la sua conoscenza in N punti equispaziati della DTFT è sufficiente per la ricostruzione univoca.

Aliasing nel Tempo

Campionare $X(e^{j\omega})$ in N punti equispaziati sul cerchio unitario equivale ad avere la DFS di una sequenza periodica di periodo N . Questa sequenza periodica si ottiene facendo la convoluzione di $x[n]$ con un treno di impulsi spazati di N .

$$\bar{x}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n + rN]$$

1° Caso: Se $x[n]$ ha durata finita $\leq N$, può essere ricostruita perfettamente dai suoi N campioni.

2° Caso: Se $x[n]$ ha durata maggiore di N , si verifica aliasing temporale.

Trasformata Discreta di Fourier (DFT)

Una sequenza aperiodica $x[n]$ di lunghezza N può essere completamente rappresentata da N campioni della sua DTFT. La DFT di una sequenza finita di lunghezza N è anch'essa di lunghezza N .

DFT Diretta:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

DFT Inversa:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}$$

5.2 Zero Padding

Obiettivo: Aumentare la lunghezza della DFT senza alterarne il contenuto informativo.

5.2.1 Relazione tra DFT e DTFT

La **DFT** di $x[n]$ è ottenuta campionando la **DTFT** di $x[n]$ nei punti:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Per **ricostruire perfettamente** $x[n]$, servono **almeno N campioni** della DTFT per evitare aliasing temporale.

5.2.2 Effetto dello Zero Padding

Si **aumenta la lunghezza della DFT** a $M > N$ (maggiore risoluzione in frequenza). Questo si ottiene **aggiungendo** $M - N$ zeri alla fine di $x[n]$:

$$x_{padded}[n] = \begin{cases} x[n] & \text{per } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{per } N \leq n \leq M-1 \end{cases}$$

La **DFT non cambia**, ma si ottengono **più campioni della DTFT**, quindi una **migliore interpolazione** della risposta in frequenza.

5.2.3 Effetti dello Zero Padding

- Aumenta la **risoluzione in frequenza** (più punti disponibili)
- **Non altera il contenuto in frequenza** (non aggiunge nuove informazioni)
- Utile per **visualizzare meglio** la trasformata

5.3 Convoluzione di Sequenze Periodiche

Se $\tilde{x}_1[n]$ e $\tilde{x}_2[n]$ sono **sequenze periodiche di periodo N**, allora:

5.3.1 Convoluzione Periodica (Proprietà Commutativa)

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \cdot \tilde{x}_2[n - m \pmod{N}]$$

5.3.2 Relazione con la DFS

$$\tilde{X}_1[n] \cdot \tilde{X}_2[n] = \mathcal{DFT} \{ \tilde{x}_1[n] \cdot \tilde{x}_2[n] \}$$

5.3.3 Moltiplicazione punto a punto nel dominio del tempo

La moltiplicazione punto a punto nel dominio del tempo equivale a una convoluzione nel dominio della DFS:

$$\tilde{X}_1[n] \cdot \tilde{X}_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \cdot \tilde{x}_2[n - m \pmod{N}]$$

5.3.4 Convoluzione Circolare

Definizione: Identica alla convoluzione periodica, ma gli indici sono considerati **modulo N**.

Per due sequenze finite di lunghezza N :

$$X_1[n] \cdot X_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \cdot x_2[(n - m) \pmod{N}]$$

5.3.5 Relazione con la DFT

$$X_1[n] \cdot X_2[n] = X_1[k] \cdot X_2[k]$$

5.3.6 Moltiplicazione punto a punto nel tempo

$$X_1[n] \cdot X_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \cdot x_2[(n - m) \pmod{N}]$$

5.4 Rapporto tra Convoluzione Aperiodica e Circolare

Caso 1: Sequenze finite di lunghezza N

Aperiodica	Circolare
$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \cdot x_2[n - m]$	$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \cdot x_2[(n - m) \pmod{N}]$
DTFT: $X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$	DFT: $X_1[k] \cdot X_2[k]$
Risultato: sequenza aperiodica di lunghezza $2N - 1$	Risultato: sequenza periodica di lunghezza N
Non coincidono in generale	

Caso 2: Sequenze di lunghezza diversa

- Sequenza aperiodica di lunghezza L
- Sequenza aperiodica di lunghezza $P < L$

Aperiodica	Circolare
$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=0}^{L-1} x_1[m] \cdot x_2[n - m]$	$x_1[n] * x'_2[n] = \sum_{m=0}^{L-1} x_1[m] \cdot x'_2[(n - m) \pmod{L}]$
Risultato: sequenza aperiodica di lunghezza $L + P - 1$	Risultato: sequenza circolare di lunghezza L
	$x'_2[n]$ è $x_2[n]$ con zero-padding fino a $L - 1$

5.5 Implementazione della Convoluzione Circolare

1. Si forma la sequenza.
2. Si trasla circolarmente.
3. Si moltiplica punto a punto.

5.6 Costo Computazionale

Per una sequenza di lunghezza N :

- **Moltiplicazioni complesse** $\Rightarrow N^2$ (equivalente a $4N^2$ operazioni reali)
- **Sommatorie complesse** $\Rightarrow N(N-1)$ (equivalente a $N(4N-2)$ operazioni reali)

Riduzione del costo computazionale

- **Algoritmi ottimizzati** per il calcolo della DFT a costo inferiore a $O(N^2)$
- **Esempio:** Fast Fourier Transform (FFT)

5.7 Fast Fourier Transform (FFT)

L'FFT sfrutta proprietà matematiche per ridurre il numero di operazioni necessarie:

5.7.1 Formula della DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Per ogni campione della DFT:

- **Moltiplicazioni complesse:** N
- **Somme complesse:** $N-1$

Per calcolare N campioni:

- Complessità totale: $O(N^2)$ (ALTA!)

5.7.2 Ottimizzazioni basate sulle Proprietà di W_N

- **Simmetria**
- **Periodicità**

5.8 Radix-2 Decimation In Time (DIT) FFT

Idea (Cooley-Tukey 1965)

- Si suddivide la sequenza $x[n]$ in due sottosequenze di lunghezza $N/2$:
 - Campioni **con indice pari**
 - Campioni **con indice dispari**
- Si calcola la **DFT totale** componendo opportunamente le **DFT delle sottosequenze**.

Scomposizione della DFT

$$X[k] = \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m] W_{N/2}^{km} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x[2m+1] W_{N/2}^{km}$$

La DFT a N punti si scompone in due DFT a $N/2$ punti più combinazioni di dati.

Algoritmo Iterativo

- Se N è una potenza di 2, l'algoritmo si applica ricorsivamente fino alla DFT di 2 punti.
- **Numero di stadi:** $M = \log_2(N)$

- Numero totale di "butterfly" per stadio: $N/2$

Esempio per $N = 8$:

$$N = 2^3 \Rightarrow 3 \text{ stadi : } \text{DFT } 8 \text{ punti} \rightarrow \text{DFT } 4 \text{ punti} \rightarrow \text{DFT } 2 \text{ punti}$$

Varianti dell'algoritmo DIT

1. DIT Canonica

- Ingresso: **bit-reversed order**
- Uscita: **ordine normale**
- **"In-place"**

2. DIT Alternativa

- Ingresso: **ordine normale**
- Uscita: **bit-reversed order**
- **"In-place"**

3. DIT Sequenziale

- Indici normali in ogni stadio
- Non **in-place** (più complesso)

Radix-2 Decimation In Frequency (DIF) FFT

Idea:

La sequenza in ingresso viene divisa in due sottosequenze:

- Campioni con indice pari
- Campioni con indice dispari

Si calcolano separatamente e poi si combinano in uscita.

Scomposizione della DFT

- Per i campioni **pari**:

$$X[2m] = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x[n] + x[n + N/2]] W_{N/2}^{nm}$$

- Per i campioni **dispari**:

$$X[2m+1] = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x[n] - x[n + N/2]] W_{N/2}^{nm} W_N^n$$

Algoritmo Iterativo

- Se $N = 2^M$, si applica ricorsivamente fino a ottenere **solo DFT a 2 punti**.
- Numero di stadi:

$$M = \log_2(N)$$

- Numero di "butterfly" per stadio: $\frac{N}{2}$

Butterfly DIF

- Struttura simile a DIT, ma con **dati e flussi invertiti**.
- **"In-place"** possibile con un solo array di memoria.

Differenze tra DIT e DIF

Caratteristica	DIT (Decimation In Time)	DIF (Decimation In Frequency)
Scomposizione	Sui campioni di ingresso	Sui coefficienti di uscita
Bit-Reversal	Ingresso in bit-reversed order	Uscita in bit-reversed order
Ordine dei W	Normale	Bit-reversed
Algoritmo	Top-down	Bottom-up

Radix-2 Decimation in Time (DIT) FFT

Principio → Si scompone la sequenza $x[n]$ in due sottosequenze (pari e dispari).

Procedura

1. **Scomposizione ricorsiva** fino a ottenere DFT di lunghezza 2.
2. **Combinazione dei risultati** con operazioni butterfly.
3. **Bit-reversal** sugli indici in ingresso o uscita.

Struttura della DIT FFT

Ingresso: Ordinamento **bit-reversed**

Uscita: Ordinamento normale

Butterfly

$$X[k] = X'[k] + W_N^k X''[k]$$

Computazione in-place

Un unico array aggiornato a ogni stadio.

DIT Canonica

- **Input:** Bit-reversed
- **Output:** Normale
- **Coefficienti W:** Normali

DIT Alternativa

- **Input:** Normale
- **Output:** Bit-reversed
- **Coefficienti W:** Bit-reversed

DIT Sequenziale

- Indici normali a ogni stadio
- **Non in-place** (maggior uso di memoria)

Struttura della DIF FFT

- **Ingresso**: Ordinamento normale
- **Uscita**: Ordinamento **bit-reversed**

Butterfly

$$X[k] = X_e[k] + W_N^k X_o[k]$$

Computazione in-place

DIF Canonica

- **Input**: Normale
- **Output**: Bit-reversed
- **Coefficienti W**: Normali

DIF Alternativa

- **Input**: Bit-reversed
- **Output**: Normale
- **Coefficienti W**: Bit-reversed

DIF Sequenziale

- Indici normali a ogni stadio
- **Non in-place**

Confronto DIT vs DIF

Caratteristica	DIT FFT	DIF FFT
Divisione	Ingresso (x[n])	Uscita (X[k])
Input	Bit-reversed	Normale
Output	Normale	Bit-reversed
Computazione	Bottom-up	Top-down
Uso memoria	In-place	In-place

Costo Computazionale

- **Butterfly**: 1 prodotto complesso + 2 somme complesse.
- **N punti**: N/2 butterfly per stadio.
- **FFT a N punti** ($N = 2^M$): **M stadi**.

Confronto DFT vs FFT

- **DFT classica:** $O(N^2)$
- **FFT radix-2:** $O(N \log N)$

Vantaggi della FFT

- **Enorme riduzione dei calcoli** rispetto alla DFT.
- **Hardware ottimizzato:** pipeline, unità parallele.
- **Utilizzata in DSP, compressione, imaging.**

Problema principale

- **Precisione finita nei calcoli numerici.**

Categorie principali di algoritmi FFT

Gli **algoritmi FFT** sono stati sviluppati per velocizzare il calcolo della Trasformata Discreta di Fourier (DFT).

Categorie

- **Radix-M FFT (CFA – Common Factor Algorithm):**
 - N deve essere una potenza di M . Il caso più diffuso è il **radix-2**.
 - Altri esempi includono **radix-4** o **radix-8**, che riducono il numero di operazioni richieste.
- **Mixed Radix FFT:**
 - Scomponi N come un prodotto di fattori diversi (tipicamente 2, 3, 4 o 8).
 - Ogni stadio dell'algoritmo utilizza un radix differente, migliorando l'efficienza del calcolo rispetto all'approccio standard.
- **Prime Factor FFT (PFA – Prime Factor Algorithm):**
 - N viene scomposto in fattori primi tra loro.
 - Riduce ulteriormente il numero di moltiplicazioni rispetto alla Mixed Radix FFT.
- **Algoritmo di Winograd:**
 - Sfrutta una struttura matematica per trasformare la FFT monodimensionale in una FFT bidimensionale.
 - Il costo computazionale complessivo è $O(N \log_2 N)$.
 - Riduce il numero di moltiplicazioni a $O(N)$, seppur aumentando il numero di somme da effettuare.

Utilizzi

- **Progettazione di filtri FIR:** La trasformata inversa di Fourier (IFFT) viene utilizzata per ottenere il filtro desiderato a partire da una griglia di punti in frequenza.
- **Calcolo della convoluzione e della correlazione:** La FFT permette di eseguire queste operazioni in maniera molto più efficiente rispetto ai metodi tradizionali.
- **Stima spettrale:** Viene sfruttata la relazione tra la DFT e la Trasformata di Fourier Discreta Tempo-Variabile (DTFT) per analizzare segnali di durata finita.
- **Riconoscimento vocale e sistemi radar:** Questi settori utilizzano la FFT per analizzare segnali il cui contenuto spettrale cambia nel tempo.

Problema critico → **Precisione finita**, poiché i calcoli numerici possono introdurre errori dovuti alla rappresentazione discreta dei numeri in hardware.

Elaborazione numerica dei segnali (DSP): La FFT continua a essere una delle tecniche più utilizzate in innumerevoli applicazioni tecnologiche.

Calcolo della Convoluzione e della Correlazione con la FFT

Convoluzione Aperiodica e FFT

Per due sequenze di lunghezza L e P , la convoluzione aperiodica può essere calcolata tramite una convoluzione ciclica di $L + P - 1$ punti. Per sfruttare l'efficienza della FFT, si utilizza lo **zero-padding** fino alla lunghezza $L + P - 1$.

Formula della Convoluzione

La convoluzione aperiodica di due segnali $x_1[n]$ e $x_2[n]$ è definita come:

$$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m] \cdot x_2[n - m]$$

Questa relazione nel dominio della trasformata diventa:

$$X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$$

Schema del Calcolo della Convoluzione con la FFT

1. **Zero-padding** delle sequenze fino alla lunghezza $L + P - 1$.
2. **Calcolo della FFT** delle sequenze con la stessa lunghezza.
3. **Moltiplicazione** delle FFT ottenute.
4. **Calcolo della IFFT** per ottenere la convoluzione.

Formula della Correlazione

La correlazione tra due segnali è definita come:

$$x_1[n] * x_2[-n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m] \cdot x_2[n + m]$$

E nel dominio della trasformata diventa:

$$X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2^*(e^{j\omega})$$

dove X_2^* è il complesso coniugato della FFT di $x_2[n]$.

Schema del Calcolo della Correlazione con la FFT

1. **Zero-padding** delle sequenze fino alla lunghezza $L + P - 1$.
2. **Calcolo della FFT** delle sequenze.
3. **Moltiplicazione della FFT di $x_1[n]$** con il coniugato complesso della FFT di $x_2[n]$.
4. **Calcolo della IFFT** per ottenere la correlazione.

Ottimizzazioni e Speed-up

- **Bit-Reversing Ottimizzato:** Si può evitare il bit-reversing usando un algoritmo **DIF diretto** per la FFT e **DIT inverso** per la IFFT.
- **Calcolo di DFT in parallelo:** È possibile calcolare **due DFT di sequenze reali contemporaneamente**, sfruttando la proprietà della FFT per segnali reali.

Se una delle Sequenze ha Durata Molto Lunga (Infinita)

- **Overlap and Add:** Si decompone $x[n]$ in blocchi senza sovrapposizione.
- **Overlap and Save:** Si decompone $x[n]$ in blocchi con sovrapposizione di $P - 1$ punti, calcolando la convoluzione circolare di ogni blocco (FFT a L punti).

Capitolo 6

Sistemi LTI con funzione di trasferimento razionale

La funzione di trasferimento di un sistema LTI è data da:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Risposta in frequenza

La risposta in frequenza di un filtro è:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}$$

Ritardo di gruppo

Il ritardo di gruppo è dato da:

$$\tau(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$$

6.1 Classificazione dei Filtri Digitali

Filtri a Coefficienti Reali

- La risposta in frequenza $H(e^{j\omega})$ è **pari**, la fase $\phi(\omega)$ è **dispari**.

Esempio

Un esempio di filtro con coefficienti reali è dato da:

$$H(z) = 1 - az^{-1}$$

Filtri a Fase Lineare

La risposta in frequenza di un filtro a fase lineare è:

$$H(e^{j\omega}) = ce^{-jK\omega}H_R(\omega)$$

dove la fase è lineare.

Tipi di Filtri a Fase Lineare

- **Simmetrico**: fase lineare. - **Antisimmetrico**: non adatto a filtri passa-basso o passa-alto.

6.2 Specifiche di Progetto

Banda Passante

La banda passante è definita come:

$$0 \leq \omega \leq \omega_p$$

Banda Oscura

La banda oscura è definita come:

$$\omega_s \leq \omega \leq \pi$$

Zona di Transizione

La zona di transizione è compresa tra:

$$\omega_s \quad \text{e} \quad \omega_p$$

Ampiezza Normalizzata

L'ampiezza normalizzata è data dalla divisione per:

$$(1 + \delta_1)$$

6.3 Progetto di Filtri FIR

Scelta tra FIR e IIR

- I filtri FIR hanno fase lineare ma un costo computazionale maggiore. - I filtri IIR sono più efficienti in termini di ordine, ma hanno fase non lineare.

Metodi di Progettazione FIR

1. **Windowing**: semplice, ma non ottimizzato. 2. **Least Square**: minimizza l'errore in frequenza. 3. **Equiripple**: distribuisce uniformemente l'errore.

Metodo Windowing

Il metodo di windowing prevede il troncamento della risposta impulsiva con una finestra:

- Rettangolare (troncamento semplice). - Hamming, Blackman, Kaiser (miglior controllo). - **Fenomeno di Gibbs**: ripple nella banda passante.

Metodo Eigenfilter

Il metodo eigenfilter minimizza l'errore in banda passante e oscura utilizzando gli autovettori di una matrice.

Metodo Equiripple

L'algoritmo di Parks-McClellan è utilizzato per minimizzare il massimo errore.

6.4 Progetto di Filtri IIR

Trasformazione Bilineare

1. Progettare il filtro analogico $H_a(s)$.
2. Applicare la trasformazione bilineare:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

3. Ottenere il filtro digitale $H(z)$.

Tipologie di Filtri IIR

1. **Butterworth**: risposta piatta, transizione lenta.
2. **Chebyshev I**: banda passante equiripple, banda oscura monotona.
3. **Chebyshev II**: banda passante monotona, banda oscura equiripple.
4. **Ellittico**: equiripple in entrambe le bande, transizione più veloce.

6.5 Filtri Passa-Tutto

I filtri passa-tutto mantengono il modulo costante e modificano solo la fase.

Proprietà dei Filtri Passa-Tutto

- Coppie coniugate reciproche di poli e zeri.
- L'energia di uscita è uguale all'energia di ingresso.

Capitolo 7

Introduzione al Suono e Temperamento Musicale

7.1 Suono e Qualità del Suono

Il suono è costituito da **vibrazioni** che vengono trasmesse al nostro orecchio tramite un fluido.

Qualità del Suono

La qualità del suono dipende da vari fattori, tra cui:

- **Altezza**
- **Intensità**
- **Timbro**
- **Durata**

Unità di Misura

L'unità di misura della frequenza del suono è il **Hertz** (Hz).

7.2 Notazione Musicale

La notazione musicale può essere divisa in due categorie:

- **Notazione assoluta**
- **Codifica relativa**

Questa notazione è utilizzata per scrivere, leggere e scambiare la musica in maniera univoca.

Nomi delle Note

- **Latino:** Do/Ut, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si
- **Inglese:** C, D, E, F, G, A, B
- **Alterazioni:** Sharp, Flat, Natural

Ottava

L'ottava è costituita dalla sequenza:

$$C, C\#, D, D\#, E, F, G, G\#, A, A\#, B, C'$$

Poi la sequenza si ripete.

Intonazione

L'intonazione standard è di 440 Hz.

7.3 Temperamento Musicale

Il **temperamento** si riferisce al rapporto di frequenze relative agli intervalli musicali.

Temperamento Pitagorico

Il temperamento pitagorico si basa su due principi fondamentali:

- **Ottava**: rapporto di frequenza di 2 : 1
- **Quinta giusta**: rapporto di frequenza di 3 : 2

Seguendo il **circolo delle quinte** ($C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow \dots$), dopo 12 quinte si torna a C, ma il rapporto risultante è:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 129.75$$

Mentre 7 ottave corrispondono a:

$$2^7 = 128$$

Questa discrepanza è nota come **comma pitagorico**.

Soluzione di Pitagora

Pitagora ha proposto la seguente soluzione:

- Mantenere le **quinte giuste** (3:2) e le **quarte giuste** (4:3)
- Derivare le altre note dal circolo delle quinte e riportarle all'ottava originale

In questo modo si ottengono **intervalli diseguali**, creando difficoltà nell'intonazione in alcune tonalità.

Temperamento Equabile

Il **temperamento equabile** è stato sviluppato per risolvere il problema degli intervalli diseguali. In questo sistema, l'ottava è divisa in **12 intervalli uguali**.

- L'ottava è sempre 2 : 1, ma il **semitono temperato** è calcolato come la dodicesima radice di 2:

$$\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$$

- Questo sistema permette di avere **tutti gli intervalli identici**, rendendo possibile suonare in qualsiasi tonalità senza dissonanze evidenti.

7.4 Trasposizione

Temperamento Equabile

Nel temperamento equabile, è possibile fare uno "shift" di N semitoni, in alto o in basso, senza alterare il rapporto di frequenze tra gli intervalli.

Temperamento Pitagorico

Nel temperamento pitagorico (e in generale nei temperamenti non equabili), questa proprietà non è vera. Una melodia trasposta suonerà in maniera molto differente.

7.5 Tempo e Durata

Il tempo e la durata sono mappati in un tempo relativo, che viene misurato dal valore del metronomo, solitamente indicato come **BPM** (battiti per minuto).

Battute e Raggruppamenti

I battiti sono raggruppati in **battute**.

Capitolo 8

Introduzione al Protocollo MIDI

8.1 MIDI: Protocollo Musical Instruments Digital Interface

Il protocollo MIDI è un sistema per la comunicazione tra dispositivi musicali digitali. È un protocollo **seriale**.

Figura 8.1: Esempio di trasmissione MIDI

I dati vengono trasmessi con bit di **start** e di **stop**.

Tipi di Byte

I byte trasmessi possono essere di due tipi:

- **Byte di stato:** MSbit = 1
- **Byte di dati:** MSbit = 0

Caratteristiche Generali

- Non c'è collegamento in rete.
- Ogni cavo MIDI può trasmettere i dati attraverso **16 canali**.
- I dispositivi possono essere collegati in cascata.

8.2 Tipi di Messaggi MIDI

I messaggi MIDI possono essere classificati come segue:

1. Messaggi a 2 byte e 3 byte

Questi messaggi contengono:

- **Status Byte**
 - **MSB nibble** (3 bit): indica il tipo di messaggio.
 - **LSB nibble** (4 bit): indica il canale (0-15, che corrisponde a 1-16 in notazione musicale).
- **Data Byte 1:** contiene informazioni come la nota suonata.
- **Data Byte 2:** contiene altre informazioni come la velocità (velocity).

2. Messaggi di Control Change (CC)

Formato:

$0xBi\ 0xCC\ 0xVV$

- ‘0xB’: Indica un messaggio di Control Change.
- ‘i’: Indica il canale MIDI (0-15, cioè 1-16 in notazione musicale).
- ‘0xCC’: Numero del controllo.
- ‘0xVV’: Valore assegnato al controllo.

3. Messaggi di Program Change

Utilizzati per cambiare rapidamente preset o patch di strumenti digitali.

Formato base:

$0xCi\ 0xPP$

- ‘0xC’: Indica un messaggio di Program Change.
- ‘i’: Canale MIDI.
- ‘0xPP’: Numero del preset (da 0 a 127).

Per superare il limite di 128 preset, si usano due messaggi di Control Change:

- **MSB Bank Select:** $0xBi\ 0x00\ 0xBB$
- **LSB Bank Select (opzionale):** $0xBi\ 0x20\ 0xbb$
- **Program Change:** $0xCi\ 0xPP$

4. Messaggi Speciali MIDI

- **Pitch Bend:** Permette di variare l’intonazione di una nota in modo continuo.
- **NRPN (Non-Registered Parameter Number):** Trasmette parametri ad alta risoluzione (fino a 14 bit).

Formato di NRPN

- ‘CC 0x63 0xPP’: MSB del parametro.
- ‘CC 0x62 0xpp’: LSB del parametro.
- ‘CC 0x06 0xVV’: MSB del valore.
- (Opzionale) ‘CC 0x26 0xvv’: LSB del valore.

5. Messaggi System Exclusive (Sysex)

Messaggi personalizzati di lunghezza arbitraria, definiti dal produttore.

Formato:

$0xF0\ <ID\ produttore>\ <payload>\ 0xF7$

6. Messaggi System Realtime

Gestiscono il sincronismo e il controllo globale del sistema MIDI.

- **MIDI Clock:** '0xF8' (24 pulse = 1 quarto).
- **Start sequenza:** '0xFA'.
- **Continue sequenza:** '0xFB'.
- **Stop sequenza:** '0xFC'.
- **Active Sensing:** '0xFE'.

7. Messaggi di Sistema (System Common CC)

Comandi per il controllo generale del sistema MIDI.

- **All Sounds OFF:** '0xBi 0x78 0x00'.
- **All Notes OFF:** '0xBi 0x7B 0x00'.
- **Reset All Controllers:** '0xBi 0x79 0x00'.
- **Local Control ON/OFF:** '0xBi 0x7A 0xVV'.

Estensioni del Protocollo MIDI

Nonostante il MIDI sia un protocollo vecchio, continua a essere efficace grazie a diverse evoluzioni:

- **USB-MIDI:** Trasporta i dati MIDI su una connessione USB, con velocità di trasmissione più elevate.
- **BLE-MIDI:** Permette la trasmissione di dati MIDI tramite Bluetooth Low Energy, eliminando i cavi.
- **TRS-MIDI:** Utilizza il connettore minijack TRS per multiplexare segnali MIDI e analogici.

MIDI 2.0 (Introdotta nel 2019)

Funzionalità avanzate:

- **MIDI Capability Inquiry (CI):** Permette ai dispositivi di negoziare le funzionalità disponibili.
- **Pacchetti dati più lunghi:** I messaggi possono essere di 32-128 bit e supportano fino a 256 canali.
- **Sysex migliorato:** Ora può trasportare 8 bit per byte, facilitando lo scambio di dati complessi.

8.3 File MIDI

I formati principali dei file MIDI sono:

- **Formato 0:** Una sola traccia, con tutti i dati MIDI combinati.
- **Formato 1:** Più tracce indipendenti, che possono essere riprodotte simultaneamente.

8.4 Struttura del file MIDI

Header Chunk

- **Header Chunk** → Contiene informazioni generali, inizia con il codice "MThd".
- **Sintassi dell'header:**

MThd < length of header > < format > < number of tracks > < division >

- **<format>** → Indica se il file è di tipo 0 o 1.

- **<number of tracks>** → Numero di tracce nel file.
- **<division>** → Specifica la risoluzione temporale (*tick per quarto di nota*).

8.5 Track Chunk nei file MIDI

Ogni file MIDI può contenere una o più **tracce**, che memorizzano eventi musicali e dati di controllo.

Sintassi del Track Chunk

MTrk <lunghezza> <stream>

- **<MTrk>** → Indica l'inizio della traccia.
- **<lunghezza>** → Specifica la dimensione della traccia in byte.
- **<stream>** → Contiene eventi MIDI, Sysex o Meta-Eventi.

Eventi in una traccia MIDI

Ogni evento è composto da un **delta time** (tempo relativo all'evento precedente) e un messaggio MIDI.

Formato di un evento MIDI

Il formato di un evento MIDI è il seguente:

<delta> <messaggio MIDI>

- **<delta>** → Tempo trascorso dall'ultimo evento.
- **<messaggio MIDI>** → Qualsiasi messaggio MIDI standard (Note On, Note Off, Control Change, ecc.).

Meta-Eventi nei file MIDI

I **meta-eventi** sono usati per inserire informazioni extra nel file, come testo o indicazioni di controllo.

Esempi di Meta-Eventi

- **Copyright** → FF 02 <length> <text>
- **Nome della traccia** → FF 03 <length> <text>
- **Nome dello strumento** → FF 04 <length> <text>
- **Testo della canzone** → FF 05 <length> <text>

Importante: Una traccia deve sempre terminare con il meta-evento di **Fine del Brano**:

FF 2F 00

Capitolo 9

Sintesi

9.1 Track Chunk nei file MIDI

Sintassi:

MTrk <lunghezza> <stream>

- MTrk → Indica l'inizio della traccia
- <lunghezza> → Dimensione della traccia in byte
- <stream> → Contiene eventi MIDI, Sysex o Meta-Eventi

9.2 Eventi MIDI in una traccia

Formato:

<delta> <messaggio MIDI>

- <delta> → Tempo trascorso dall'ultimo evento
- <messaggio MIDI> → Evento MIDI standard (Note On, Note Off, CC, ecc.)

9.3 Meta-Eventi MIDI

Formato generale:

FF <tipo> <lunghezza> <dati>

Esempi di Meta-Eventi:

- **Copyright:** FF 02 <length> <text>
- **Nome traccia:** FF 03 <length> <text>
- **Nome strumento:** FF 04 <length> <text>
- **Testo brano:** FF 05 <length> <text>
- **Fine brano (obbligatorio):** FF 2F 00

Capitolo 10

Sintesi additiva e FM

10.1 Classificazione delle Tecniche di Sintesi Sonora

Le principali tecniche di sintesi possono essere divise in due categorie:

Astratte

- **Sintesi Additiva:** creazione del suono sommando sinusoidi con frequenze, ampiezze e fasi diverse (basata sulla serie di Fourier).
- **Sintesi Sottrattiva:** parte da un suono ricco e ne modifica il timbro con filtri.
- **Sintesi FM (Frequency Modulation) e PM (Phase Modulation):** manipolazione della frequenza o fase di un segnale per creare timbri complessi.
- **Waveshaping:** modifica non lineare del segnale per introdurre armoniche.
- **Sintesi Granulare:** costruisce suoni a partire da microsuoni (grani).

Emulative

- **Sampling (Campionamento):** riproduzione di suoni registrati.
- **Modellazione fisica:** simulazione matematica del comportamento di strumenti reali.

10.2 Sintesi Additiva

Principio Fondamentale

- Basata sulla trasformata di Fourier: ogni suono può essere decomposto in una somma di sinusoidi.
- Ogni parziale ha un'**ampiezza** e una **frequenza** variabili nel tempo.

Storia e Applicazioni

- **Organo Hammond (Laurens Hammond, 1930s)**
 - Usa un meccanismo elettromeccanico per generare sinusoidi.
 - Costituito da **Tone Wheels** (ruote foniche) che ruotano per creare suoni.
 - Offre una generazione **intonata ma statica**, senza variazioni dinamiche.
- **Miglioramenti**
 - **Vibrato e chorus:** modulazione per aggiungere movimento.

- **Leslie Speaker**: cassa con altoparlanti rotanti che creano effetto Doppler.
- **Percussion e Key Click**: transienti aggiuntivi per suoni più espressivi.

Analisi delle Parziali

Per sintetizzare suoni reali bisogna prima analizzare le componenti spettrali:

- **STFT (Short-Time Fourier Transform)**: suddivisione temporale del segnale per analisi dettagliata.
- **Eterodina**: misura delle parziali tramite battimenti con segnali di riferimento.

10.3 Modulazioni e Sintesi FM

Amplitude Modulation (AM)

- **Moltiplicazione di due sinusoidi** (portante e modulante).
- Genera **bande laterali** attorno alla frequenza principale.

Frequency Modulation (FM)

- **Problema iniziale**: ottenere suoni complessi da sinusoidi semplici senza usare troppi oscillatori.
- **Soluzione (John Chowning, 1968)**: modulare la frequenza di un'onda sinusoidale con un'altra onda sinusoidale.

Formula Generale della FM

$$y(t) = A_c \sin(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t))$$

Dove:

- A_c = ampiezza della portante
- f_c = frequenza della portante
- f_m = frequenza della modulante
- β = indice di modulazione (determina la complessità spettrale)

Proprietà dello Spettro FM

- **Indice di modulazione** (β): maggiore è il valore, più il suono ha armoniche.
- **Funzioni di Bessel**: determinano l'ampiezza delle componenti spettrali.
- **Regola di Carson**:

$$BC = 2(\beta f_m + f_m)$$

Indica che la **larghezza di banda aumenta con β** .

Armonicità e Inarmonicità

- Se il rapporto f_c/f_m è intero, lo spettro risultante è **armonico**.
- Se è razionale (N_1/N_2), la frequenza fondamentale sarà $f_0 = f_c/N_1$ o $f_0 = f_m/N_2$.
- Se è irrazionale, il risultato è uno **spettro inarmonico** (usato per suoni metallici o percussivi).

10.4 Sintesi FM nel Yamaha DX7

Brevetto e Commercializzazione

- **Chowning** brevettò la **FM** nel **1974** e Yamaha lo acquistò.
- Yamaha sviluppò **chip ASIC** per renderla efficiente in hardware.
- Nel 1983 nasce il **DX7**, il primo sintetizzatore digitale FM.

Struttura del DX7

- **Operatori**: unità base della sintesi FM, ciascuna con il proprio inviluppo.
- **Modulatori e Carrier**:
 - I **modulatori** generano variazioni timbriche.
 - I **carrier** producono il suono udibile.

Algoritmi del DX7

- Configurazioni predefinite di operatori (da **semplici a complesse**).
- **Possibilità di feedback**:
 - Permette di generare spettri più ricchi aumentando la complessità del segnale.

Envelope Generators (EG)

- **8 parametri** per definire curve dinamiche nel tempo.
- **Controllo della dinamica**:
 - Maggiore **key velocity** → maggiore **indice di modulazione** → spettro più ampio.

10.5 Conclusioni

- **Sintesi Additiva**
 - **Vantaggi**: controllo preciso sulle armoniche.
 - **Svantaggi**: alto costo computazionale.
- **Sintesi FM**
 - **Vantaggi**: più efficiente, grande varietà timbrica con pochi oscillatori.
 - **Svantaggi**: difficile da programmare per ottenere suoni desiderati.

Capitolo 11

WAVESHAPING

Sintesi e Sistemi Non Lineari

11.1 Sintesi Additiva

Molto onerosa a livello computazionale.

Con una sintesi FM si possono ottenere spettri più ricchi e complessi.

Waveshaping

Si ottiene uno spettro complesso tramite dispersione.

11.2 Sistemi Non Lineari

Due categorie:

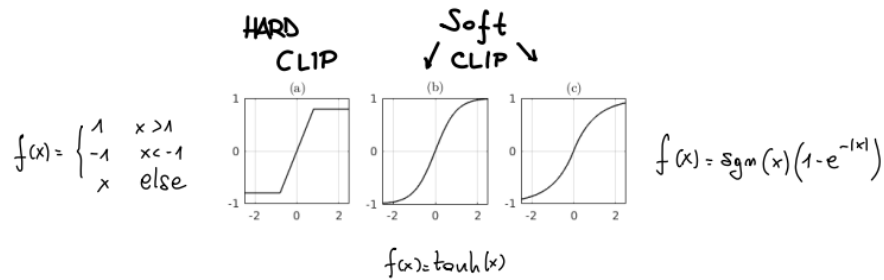
- **Con memoria:**

- descritti con una rappresentazione in spazio di stato:

$$\begin{cases} z'(x) = f(t, z(t), x(t)) \\ y(t) = g(t, z(t), x(t)) \end{cases}$$

- **Senza memoria (statici):**

- $y = f(x)$ dove l'input x può essere un segnale del tempo: $y(t) = f(x(t))$
- la conoscenza della funzione $f(x)$ è rappresentativa del sistema, ad esempio:
 - * $f(x) = \tanh(x)$
 - * $f(x) = \sum_{p=0}^N a_p x^p$
 - * ecc.



Effetto di Termini Moltiplicativi

Una moltiplicazione può avere effetti differenti in base alla regione in cui si trova:

- Regione quasi lineare → semplice moltiplicazione
- Regione non lineare → effetto molto grande sull'uscita del sistema

11.3 Effetto di Termini Additivi

Aggiungendo un termine costante all'ingresso prima della non linearità si ottiene un effetto simile allo spostamento della funzione non lineare.

Armoniche Pari e Dispari

- Funzioni dispari → generano solo armoniche dispari
- Funzioni pari → generano solo armoniche pari che annullano la fondamentale
- Le altre funzioni possono generare qualsiasi tipo di armonica

11.4 Distorsione

Funzione non lineare approssimata tramite espansione polinomiale:

$$y(t) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N$$

Per valutare l'effetto di distorsione di un segnale con un sato polinomio:

- $y(t) = a_0 + a_1x(t) + a_2x(t)^2 + \dots$
- Per un segnale sinusoidale:
- $y(t) = a_0 + a_1 \sin(\omega t) + a_2 \sin^2(\omega t)$
- Applicando l'identità trigonometrica: $2\sin^2 \theta = 1 - \cos(2\theta)$
- $y(t) = a_0 + a_1 \sin(\omega t) + \frac{a_2}{2} (1 - \cos(2\omega t)) + \dots$
- Similmente: $\sin(3\theta) = -4 \sin^3 \theta + 3\sin(\theta)$
- $y(t) = a_0 + a_1 \sin(\omega t) + \frac{a_2}{2} [1 - \cos(2\omega t)] - a_3 [\frac{1}{4} \sin(3\omega t) + \frac{3}{4} \sin(\omega t)] + \dots$
- Ecc...

Intermodulazione

Si consideri un sistema non lineare in cui $f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2)$.

1. Espansione non lineare

$$y(t) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 x(t)^2 + \dots$$

2. Due segnali sinusoidali in ingresso

$$x(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)$$

$$y(t) = a_0 + a_1 [\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)] + a_2 [\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)]^2 + \dots$$

3. Sviluppo del termine quadratico

$$[\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)]^2 = \sin^2(\omega_1 t) + \sin^2(\omega_2 t) + 2 \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t)$$

Risultano:

- **Componenti armoniche superiori:** $\sin^2(\omega_1 t)$ e $\sin^2(\omega_2 t)$ generano frequenze raddoppiate.
- **Prodotti di intermodulazione:** $\sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t)$ produce nuove frequenze somma e differenza, come $\omega_1 + \omega_2$ e $\omega_1 - \omega_2$.

Conclusioni

- Due segnali sinusoidali in un sistema non lineare generano nuove frequenze.
- Frequenze: armoniche superiori e combinazioni ($\omega_1 + \omega_2, \omega_1 - \omega_2$).
- Fenomeno rilevante in elettronica, telecomunicazioni e audio (distorsione indesiderata).

Misure

- **Total Harmonic Distortion (THD):**

$$THD_F = \frac{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + \dots}}{V_1}$$

- **Signal to Noise Ratio (SNR):**

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}}$$

misura la potenza di tutte le parziali inarmoniche.

11.5 Waveshaping

- utilizza una non linearità applicata a una forma d'onda semplice
- semplice e poco costosa
- crea spettri complessi
- la sintesi FM è un caso particolare di WS
- ogni forma d'onda periodica è vista come un seno mandato in una non linearità
- spettri che variano nel tempo si possono ottenere moltiplicando l'ingresso per un EG (Envelope Generator)

Look-Up Table (LUT)

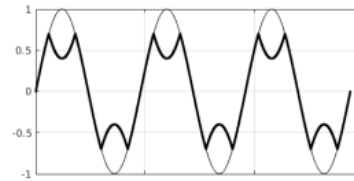
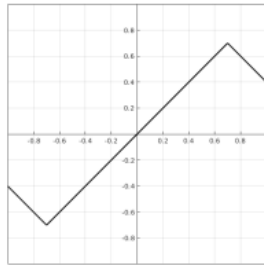
- utilizzate in applicazioni di calcolo del suono e della musica
- tabella di valori precalcolati (array in memoria)
- per ottenere valori intermedi si interpola
- basso costo computazionale
- la memoria può ridurre le prestazioni (letture frequenti)
- le approssimazioni producono errori come distorsione armonica

Aliasing

- funzioni non lineari o clipping generano espansione di banda
- nei segnali a tempo discreto si rischia aliasing
- si può usare l'oversampling per evitarlo

Wavefolding

- tipo particolare di waveshaping
- la funzione non lineare “ribalta” la forma d’onda invece che clipparla o distorcerla



Capitolo 12

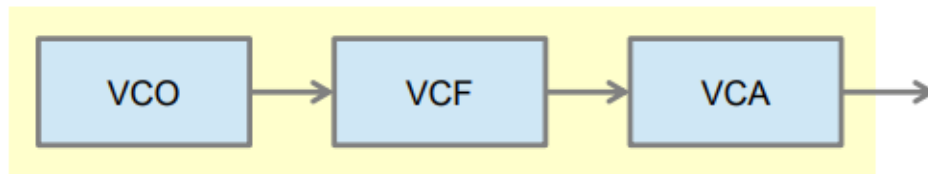
SINTESI SOTTRATTIVA

Sintesi Sottrattiva

- segue l'idea duale
- suono ricco spettralmente
- elementi fondamentali:
 - Oscillatori
 - Filtri
- nata nel mondo analogico

Il pilotaggio di segnali è associato a valori controllati di tensioni e correnti.

Nella maggior parte dei sintetizzatori si usa la combinazione VCO (Voltage Controlled Oscillator), VCF (Voltage Controlled Filter), VCA (Voltage Controlled Amplifier) per pilotare gli elementi tempo-varianti.



12.1 Generatori di Rumore

I rumori possono essere:

- Bianchi
- Rosa
- Marroni



Il "colore" del rumore definisce la pendenza di attenuazione dell'energia in funzione della frequenza.

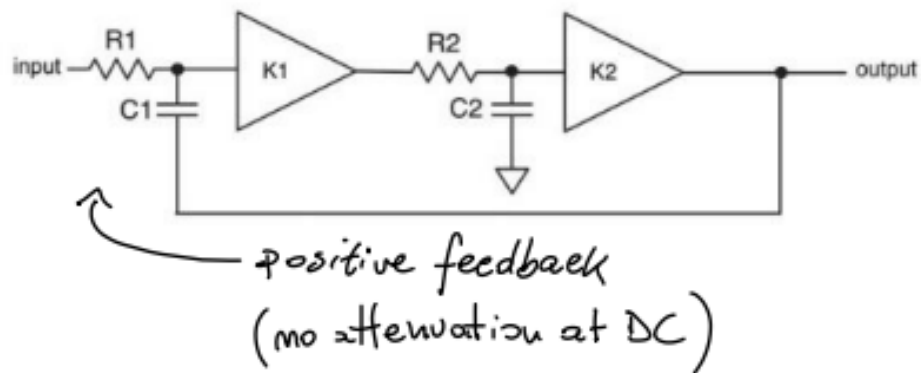
12.2 Transistor Ladder Filter (Lowpass)

- basato su una topologia *ladder*
- utilizza coppie di transistor differenziali
- 4 poli (di solito)
- retroazione complessa → in tempo discreto si traduce in loop privi di ritardo
- può essere altamente non lineare

12.3 Sallen-Key Filter

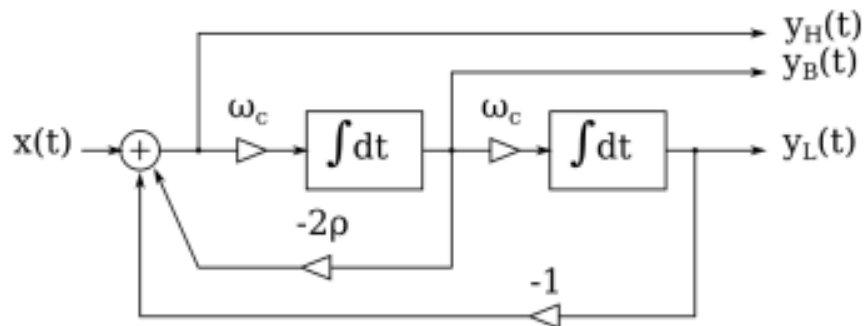
- filtri attivi RC del secondo ordine
- non richiedono induttori
- realizzati con una cascata di filtri
- evitano problemi di sincronizzazione

Topologia passa-basso molto comune.



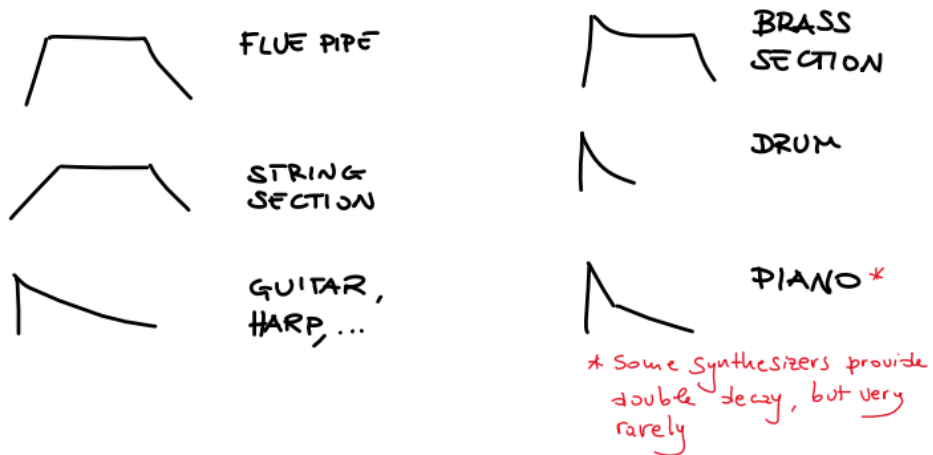
12.4 State Variable Filter

- composto da due integratori e una retroazione
- filtro multimodale
- utilizza retroazione negativa
- può essere usato come risonatore del secondo ordine perchè il segnale può essere molto basso



12.5 Voltage Controlled Amplifier (VCA)

- controllo dell'ampiezza per aggiungere dinamismo al suono
- permette di imitare strumenti acustici
- necessita di un generatore di inviluppo (EG / ADSR):
 - produce tensione di controllo per impostare l'ampiezza del VCA
 - i segmenti dell'inviluppo sono:
 - * **Attack**
 - * **Decay**
 - * **Sustain**
 - * **Release**

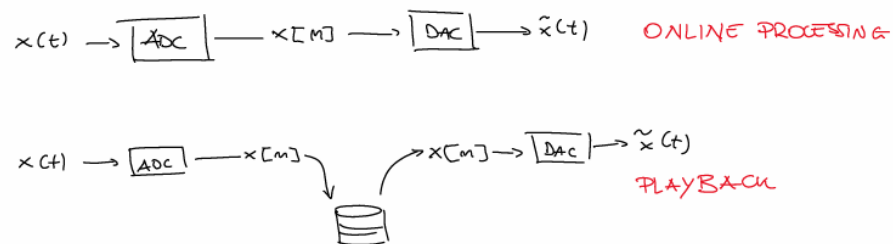


Capitolo 13

Sintesi a Campionamento

13.1 Principi di Base

- Il teorema del campionamento garantisce che qualsiasi segnale campionato secondo il teorema di Nyquist può essere perfettamente memorizzato e richiamato per la riproduzione e la conversione D/A.
- PCM (Pulse Code Modulation): tecnica usata nei CD audio (16 bit, 44100 Hz).



13.2 Sintesi a Campionamento

- Registrazione, memorizzazione e riproduzione di frammenti sonori.
- Adatta per strumenti musicali, voce e suoni complessi.
- Non è possibile campionare ogni possibile suono, perciò si rende necessaria una discretizzazione.

13.3 Esempi: Sintesi a Campionamento

13.3.1 Violino

- **Pitch:** qualsiasi valore reale nell'intervallo 196–3136 Hz.
- **Forza dell'archetto:** a partire dal valore minimo che produce un tono sostenuto (non un suono stridente).
- **Durata:** da una frazione di secondo a ore.

13.3.2 Pianoforte

- **Pitch:** 88 tasti.
- **Velocity:** da pianissimo a fortissimo (approssimativamente da 1 a 50 N).
- **Durata:** da pochi millisecondi a diversi secondi.

È impossibile registrare un numero infinito di suoni!

13.4 Discretizzazione dei Dati

- È possibile trovare un modo efficace per discretizzare tutti questi dati.
- **JND (Just Noticeable Difference)** per l'altezza:
 - Sotto i 500 Hz: circa 3 Hz per onde sinusoidali, 1 Hz per toni complessi.
 - Sopra i 1000 Hz: circa 0.6% per onde sinusoidali (circa 10 cents).
- **Velocity**: piccole variazioni di forza non alterano significativamente il timbro.
- **Durata**: non definita in termini di JND, ma può essere discretizzata in base al contesto.

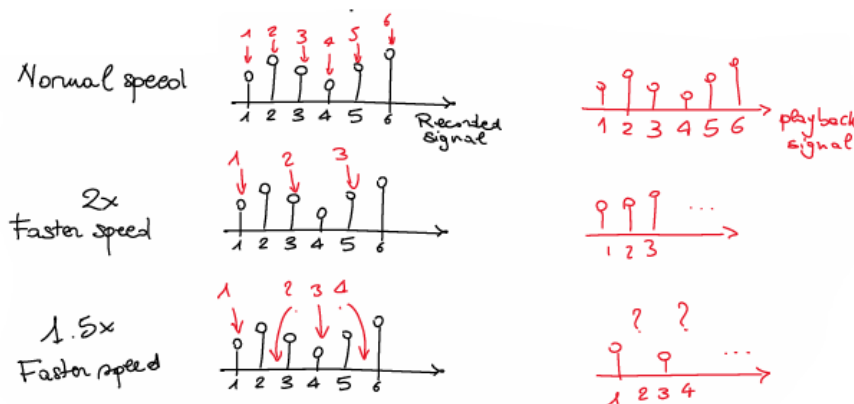
13.5 Problemi Aggiuntivi

- **Pianoforte**: colpire un tasto con il sistema fermo produce un suono diverso rispetto a colpirlo mentre è ancora in vibrazione (ribattuto).
- **Violino**: la posizione dell'archetto sulla corda influisce sul timbro.

È davvero impossibile registrare tutti questi suoni! Ma possiamo applicare i principi dell'elaborazione digitale del segnale per modificare pochi suoni registrati e ottenere una grande varietà di risultati.

13.6 Pitch

- Cosa succede se si legge un nastro a velocità diverse?
- Possiamo leggere i campioni memorizzati alla velocità desiderata tramite interpolazione.



13.7 Il Problema delle Formanti

- Gli strumenti possono essere approssimati con un modello sorgente-filtro.
- Se si modifica l'intonazione variando la velocità di riproduzione, si modificano anche le formanti insieme alle armoniche.
- Negli strumenti reali devono cambiare solo le armoniche, non le formanti.
- Questo effetto è dovuto alla proprietà di time scaling di Fourier.
- Negli strumenti musicali reali siamo però più tolleranti ai cambiamenti di pitch.

$$\mathcal{F} \left\{ x(at) \right\} = \frac{1}{a} X\left(\frac{k}{a}\right)$$

FFT OF THE FIRST "i"

13.8 Discretizzazione del Pitch

- Un solo tono non è sufficiente; ce ne sono troppi.
- Bisogna trovare un compromesso tra qualità e costi (dipende dall'applicazione e dall'hardware).
- Si può usare una discretizzazione approssimativa dell'intervallo di intonazione.

13.9 Velocity (Intensità)

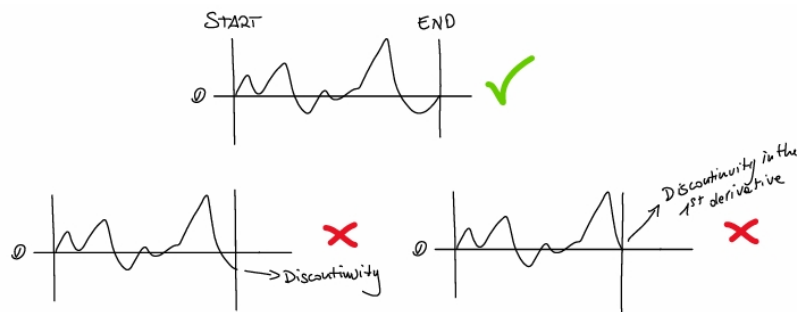
- È possibile usare un solo campione e modificare l'intensità via guadagno?
 - A volte sì, ma raramente.
 - Spesso non è sufficiente.
- La discretizzazione può essere approssimativa:
 - Esempio: Key velocity: 0, 30, 80, 127.
- Problemi:
 - L'aumento della forza può rendere udibili i passaggi di livello se la discretizzazione è troppo grossolana.
 - Soluzione: somma di due segnali con guadagni complementari.
 - Problemi della soluzione: costo computazionale doppio, richiede allineamento preciso di fase.
- Esempio: Manuale d'uso AKAI S1100 (1990) – spiegazione delle velocity zones.

13.10 Durata

- Per discretizzare la durata serve conoscere l'evoluzione temporale del segnale.
- Esempio: tono dell'organo a canne.

13.11 Loops

- La scelta dei punti di inizio e fine del loop è molto importante.



13.12 Aspetti Tecnici

13.12.1 Costo Computazionale

- Interpolazione tra valori (es. lineare, spline). $\text{tabread4} = b + \text{frac} * \{ \text{cminusb} - 0.1666667f * (1 - \text{frac}) * [(d - a - 3.0f * \text{cminusb}) * \text{frac} + (d + 2.0f * a - 3.0f * b)] \}$
- Calcolo di envelope (es. decadimento esponenziale).
- Compromesso tra qualità del suono e performance.

13.12.2 Memoria

- I costi della RAM si sono notevolmente abbassati.
- I DSP moderni permettono l'utilizzo di campioni più complessi.

13.13 Problemi e Limitazioni

- Gli algoritmi che mantengono invariate le formanti sono troppo costosi per l'uso in tempo reale.
- Layer dinamici complessi portano a una gestione difficile del timbro.
- Mancanza di espressività: tecniche come plettrata, palm mute, bending, ecc., sono difficili da riprodurre.
- Soluzioni: round robin (alternanza di campioni), maggiore layering e split, uso del protocollo MPE.

13.14 Esempi di Sampler Hardware e Software

- AKAI S1100 (1990): 16 bit, 44.1 kHz, 2MB RAM espandibile.
- LEM Example (1988): 12 bit, 40.5 kHz.
- Elektron Digitakt (2017): 64MB RAM, 1GB storage.
- Dream SAM5916B: 16 DSP, 256 voci a 48kHz, decrypting on-the-fly.

Capitolo 14

Physical Modeling

14.1 Processi Fisici Generatori di Suono

Si modellano tutti i processi fisici che portano alla generazione sonora:

14.1.1 Circuiti Elettronici Analogici

- Oscillatori
- Sorgenti caotiche
- Filtri
- Circuiti optoelettrici

14.1.2 Sistemi Acustici

- Tubi (1D)
- Corde (1D)
- Piastre (2D)
- Stanze (3D)

14.2 Tipi di Processi Fisici

I processi fisici di interesse sono lineari, non lineari o addirittura caotici:

- Propagazione delle onde (solitamente isotrope e lineari) e generazione di onde stazionarie in un mezzo o in un risonatore
- Eccitazione di un risonatore
- Interazione rigida/elastica non lineare tra corpi

14.3 Modellazione a Tempo Continuo e Discreto

- Generalmente un modello a tempo continuo è derivato in termini di equazioni differenziali
- Questi possono essere estremamente complessi per essere risolti in tempo reale, si possono applicare delle approssimazioni
- Un esempio di approssimazione è la teoria modale
- Viene quindi derivato un modello a tempo discreto per eseguire il calcolo su un computer

14.4 Domini Fisici e Variabili

Tutti i domini fisici di interesse sono descritti da quantità misurabili che di solito si presentano in coppie di variabili:

- Meccanica: Forza + Velocità
- Acustica: Pressione + Velocità del volume
- Elettrico: Tensione + Corrente
- In generale: variabile "trasversale" (o "potenziale") + variabile "passante" (o "cinetica")

La tensione è il potenziale "attraverso" due terminali e la corrente è il flusso di elettroni "attraverso" una sezione.

14.5 Paradigmi di Modellazione

14.5.1 Paradigma 1: K-variables

K-variables, o Kirchhoff variables: utilizza la coppia «across» e «through» (trasversale e passante)

- Questo fornisce una soluzione diretta del sistema
- Può essere utilizzato per scomporre il sistema nei suoi modi naturali

14.5.2 Paradigma 2: W-variables

Astrazione: utilizzare il concetto astratto di "onde".

- Variabili W, o variabili d'onda: onde incidenti e riflesse
- Le onde sono astrazioni che si sommano per comporre le grandezze osservabili K

14.6 1D Wave Eq. and Solutions

14.6.1 Digital Waveguides

- I Digital Waveguides seguono l'approccio W-domain, ma non devono essere confusi con gli Wave-Digital Filters.
- Forniscono un modo molto economico per modellare la propagazione delle onde in condizioni ideali per problemi 1D.
- Per problemi 2D e 3D possono essere impiegati, ma il costo computazionale non è più conveniente rispetto ad altri approcci.

14.7 Caso 1D

La propagazione di una grandezza y in un mezzo, ad esempio la propagazione di un'onda di velocità in una corda rigida ideale, può essere modellata come:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

dove c è la velocità di propagazione.

14.7.1 Soluzione a questa PDE

La prima soluzione a questa equazione alle derivate parziali (PDE) fu data da D'Alembert nel 1747:

$$y(x, t) = y^+ \left(t - \frac{x}{c} \right) + y^- \left(t + \frac{x}{c} \right)$$

Ciò significa che il valore della variabile al tempo t e nella posizione x può essere calcolato dalla sovrapposizione di due onde viaggianti: un'onda progressiva y^+ e un'onda regressiva y^- di forma arbitraria.

14.8 Somma di Onde Progressive e Regressive

La soluzione al caso 1D è rappresentata dalla somma di onde progressive e regressive.

14.9 Discretizzazione della Soluzione di D'Alembert

La formulazione dei Digital Waveguides (DWG) è ottenuta mediante discretizzazione della soluzione di D'Alembert. La stringa è discretizzata a intervalli spaziali regolari:

$$x_m = m\Delta x, \quad m \in \{0, \dots, M\}$$

Il valore di ogni punto viene calcolato a intervalli di tempo regolari:

$$t_n = n\Delta t, \quad n \in \{0, \dots, N\}$$

L'equazione d'onda può quindi essere riscritta come:

$$\begin{aligned} y(x_m, t_n) &= y^+(n\Delta t - m\Delta x/c) + y^-(n\Delta t + m\Delta x/c) \\ \text{with } \Delta x &= c\Delta t \quad \rightarrow \text{we constrained the spatial sampling interval} \\ y(x_m, t_n) &= y^+(n\Delta t - m\Delta t) + y^-(n\Delta t + m\Delta t) \\ y(m, n) &= y^+(n-m) + y^-(n+m) \end{aligned}$$

(equazione d'onda discretizzata)

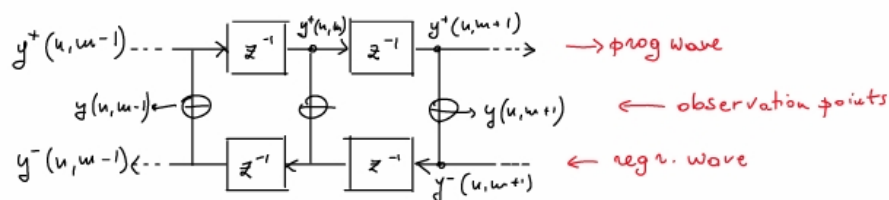
14.10 Condizione di Stabilità e Alias Spaziale

La selezione dell'intervallo di campionamento spaziale è fondamentale per la stabilità e per evitare l'aliasing spaziale. La condizione di stabilità di Von Neumann impone che:

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

14.11 Formulazione DWG e Diagramma di Flusso

La formulazione dei Digital Waveguides corrisponde al seguente diagramma di flusso:



14.12 Terminazioni "Rigide"

Le condizioni al contorno sono fondamentali per definire il problema. Un caso tipico è la terminazione rigida: ad esempio, la corda non può muoversi ai suoi estremi. Questo è imposto dall'avere:

- Le condizioni di terminazione rigida specificano che la velocità della corda alle estremità sia zero.

14.13 Aggregazione

Se possiamo accettare di non calcolare l'uscita in tutte le posizioni, possiamo semplificare il modello utilizzando un approccio di aggregazione:

- Si riduce la complessità computazionale, trascurando alcune informazioni spaziali in favore di un'efficienza maggiore.

$$\begin{aligned}
 & y(t, u=0) = 0, \quad y(t, u=L) = 0 \quad \text{with } L = \text{string length} \\
 & \begin{cases} y(n, 0) = y^+(n) + y^-(n) = 0 \\ y(n, K) = y^+(n - K/2) + y^-(n + K/2) = 0 \end{cases} \quad \text{NB: } K = \frac{L}{\Delta x} \\
 & \downarrow \\
 & \begin{cases} y^+(u) = -y^-(u) \\ y^+(n - K/2) = -y^-(n + K/2) \end{cases} \quad \begin{array}{c} \boxed{-1} \quad \dots \quad \boxed{-1} \\ \text{inverting} \\ \text{rigid} \\ \text{terminations} \end{array}
 \end{aligned}$$

14.14 Perdite

In realtà, il mezzo non è privo di perdite e può presentare attriti. La soluzione è ora espressa come onde viaggianti a decadimento esponenziale:

- La perdita di energia è modellata come un termine che rappresenta il decadimento esponenziale dell'onda mentre si propaga.

$$\begin{aligned}
 & y(x, t) = e^{-\frac{\mu}{2\epsilon} x} \cdot y^+(t - \frac{x}{c}) + e^{\frac{\mu}{2\epsilon} x} y^-(t + \frac{x}{c}) \\
 & \text{after sampling: } y(u, n) = g^{-u} y^+(u - n) + g^u y^-(u + n) \rightarrow g = e^{-\frac{\mu}{2\epsilon} T}
 \end{aligned}$$

14.15 Perdite Dipendenti dalla Frequenza

Il termine di attrito è solo un'approssimazione. È possibile introdurre termini di perdita aggiuntivi per approssimare un comportamento dipendente dalla frequenza. La soluzione si generalizza ora a:

- Le perdite dipendenti dalla frequenza sono modellate come un filtro che modula l'attenuazione in funzione della frequenza.

14.16 Aggregazione di Perdite Dipendenti dalla Frequenza

I termini dipendenti dalla frequenza possono essere consolidati come un filtro. Questo approccio consente di modellare in modo più preciso le perdite, specialmente in sistemi con comportamento non lineare o con forti variazioni di impedenza.

- Utilizzare un filtro permette di simulare in modo efficiente i cambiamenti nelle perdite a seconda della frequenza, migliorando la realismo del modello.

14.17 Dispersione

La rigidità di una corda vibrante introduce una forza di ripristino proporzionale alla quarta derivata dello spostamento della corda.

14.18 Effetto di Dispersione

L'effetto di primo ordine della rigidità è l'aumento della velocità di propagazione delle onde con la frequenza:

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{2K}{c_0^2} \right)$$

Pertanto, le onde che viaggiano si "disperdono" mentre attraversano la corda. Le componenti ad alta frequenza si propagano più velocemente.

14.19 Decomposizione Modale

L'effetto di dispersione può essere studiato utilizzando una decomposizione modale.

14.20 Ritardi Dipendenti dalla Frequenza

La dispersione richiede ritardi dipendenti dalla frequenza. Se possiamo aggregare, un'opzione conveniente è l'utilizzo di filtri Allpass.

14.21 Fractional Delays

Come intonare una Digital Waveguide (DWG)?

- Finché il numero di tappi $N \in \mathbb{N}$, il numero delle frequenze ottenibili è un insieme discreto.
- Per dividere un delay unitario, dobbiamo ricorrere a dei delay frazionari.

14.22 Discrete-Time Arbitrary Delay

$$y(n) = x(n-D)$$

↪ has no meaning if $D \notin \mathbb{N}$

L'interpolazione del valore tra due intervalli di campionamento successivi è equivalente alla ricostruzione del segnale a tempo continuo dai valori discreti secondo il campionamento Shannon-Nyquist. Pertanto, l'interpolatore ideale è esattamente il filtro di ricostruzione!

Il fractional-delay ideale è quindi un filtro di ricostruzione.

14.23 Discrete-Time Arbitrary Delay

Quando $0 < d < 1$, l'IR risultante è infinito, non causale e non stabile BIBO (non assolutamente sommabile). Possiamo solo approssimare il ritardo frazionario ideale.

14.23.1 Dominio della Frequenza

Guardando al dominio della frequenza:

- Tuttavia, nessun filtro con coefficienti reali può essere complesso a Nyquist.
- Questo significa che l'errore di approssimazione sarà almeno $\sin\left(\frac{\pi D}{2}\right)$, il che è noto come il vincolo di Tarczynski.

14.24 Fractional Delay Ideale (Tempo Continuo)

Il ritardo continuo (frazionario) nel tempo e nella frequenza è rappresentato come un filtro ideale di fase lineare all-pass.

$$y_c(t) = x_c(t - \tau) \quad x_c(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_c(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} Y_c(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t - \tau) e^{-j\Omega t} dt = e^{-j\Omega \tau} X_c(\Omega)$$

We can express the T.F. $H_{id}(\Omega)$ of the ideal delay as:

$$H_{id}(\Omega) = \frac{Y_c}{X_c} = e^{-j\Omega \tau}$$

TRANSF. FUNC.
of the C.T. DELAY
operator

14.24.1 Caratteristiche in Frequenza

Il fractional delay ideale è un filtro all-pass di fase lineare.

$$\text{let } D = \tau/T \in \mathbb{R}$$

$$\text{let } D = D_{int} + d \quad \begin{cases} D_{int} = \lfloor D \rfloor \text{ (floor)} \\ d = D - D_{int} \end{cases}$$

$\tau \in \mathbb{R}$ [s] t.c.

$D \in \mathbb{R}$ [sup] t.d

this can be used as
in regular interpolation techniques

e.g. $y(n) = (1-d)x(n) + d x(n+1)$

14.25 Progettazione del Filtro Interpolatore

Il ritardo frazionario può essere approssimato da un filtro FIR o da un filtro IIR.

14.25.1 Metodi di Progettazione FIR

- Troncamento dell'IR, progettazione ai minimi quadrati, approssimazione polinomiale, ecc.
- Vantaggi: i coefficienti possono essere modificati senza problemi di stabilità.

14.25.2 Metodi di Progettazione IIR

- Basato su design all-pass.
- Vantaggi: ritardi più elevati con costi di calcolo inferiori.
- FLIPPED CLASSROOM: Thiran Allpass.

14.26 Strumenti ad Ancia

- Se il bore è cilindrico, come nel caso del clarinetto, può essere modellato semplicemente utilizzando una linea di ritardo bidirezionale.
- Se il bore è conico, come nel caso del sassofono, può essere modellato come una linea di ritardo bidirezionale, ma l'interfacciamento con esso è più complesso, soprattutto in corrispondenza dell'imboccatura.
- Il filtro d'uscita è un filtro peak che definisce la campana di risonanza.
- Il filtro di riflessione modella il comportamento in frequenza del bore.
- Il modello dell'ancia è essenzialmente una non linearità molto "orizzontale".

14.27 Strumenti ad Arco

- La coppia di linee di ritardo di destra trasporta i campioni delle onde di velocità di sinistra e di destra (Bridge to Bow delay).
- La velocità della corda in qualsiasi punto si ottiene sommando un campione di velocità in direzione sinistra al campione di velocità in direzione destra immediatamente opposto nell'altra linea di ritardo.
- Il filtro di riflessione a destra implementa le perdite al ponte, all'archetto, al capotasto o alle terminazioni delle dita (quando sono ferme), e l'attenuazione/dispersione di andata e ritorno dalla corda.
- Con un ottimo grado di approssimazione, il nut riflette le onde di velocità in entrata (con un'inversione di segno) a tutte le lunghezze d'onda.
- L'interpolazione delle linee di ritardo può essere utilizzata per fornire un cambiamento continuo della posizione dell'arco.

14.28 Strumenti ad Aria (Flue)

- La generazione sonora è composta dal rumore del "soffio" che entra nella sezione risonante.
- La generazione armonica è "arricchita" dalla non linearità $x - x^3$ che modella la parte di energia che ritorna dalla canna al momento dell'insorgere della pressione.
- Il decadimento in frequenza è dato dal filtro LP nell'anello della "flue bore DL".
- La combinazione dell'effetto dei due anelli intona la nota. Tipicamente la DL bore corrisponde alla lunghezza d'onda della nota, mentre la DL dell'imboccatura è metà della DL di bore.
- Il modello può essere reso più stabile.

Capitolo 15

Filtri per mastering

15.1 Introduzione

- Idealmente, la risposta in frequenza netta di un sistema dovrebbe essere uniforme per tutte le frequenze: da qui deriva il termine “equalizzazione”.
- Il termine “equalizzazione” è stato utilizzato per indicare qualsiasi procedura che comporti l’alterazione o la regolazione della risposta in frequenza dell’ampiezza di un segnale.
- Il concetto di filtraggio delle frequenze audio è noto almeno fin dagli anni '70 del XIX secolo, ed è stato applicato nei primi progetti di telegrafi armonici.
- Le linee telefoniche venivano equalizzate nei ripetitori utilizzando filtri d’onda per annullare le risonanze causate da disadattamenti di impedenza o dall’attenuazione delle alte frequenze nei cavi lunghi.
- Il termine “filtro” può assumere numerosi significati. Un filtro seleziona le componenti del segnale in base alle frequenze che si desidera rifiutare, mantenere o enfatizzare.
- I filtri sono comunemente descritti nel dominio della frequenza, ma hanno anche effetti significativi nel dominio del tempo.
- Oltre alla loro funzione di modulazione della frequenza, i filtri possono essere analizzati nel dominio temporale, dando origine a una famiglia di effetti audio basati sul ritardo, come quelli che si possono sperimentare negli spazi acustici.

15.2 Filtri base

- **Filtri passa-basso (LP):** selezionano le basse frequenze fino alla frequenza di taglio f_c e attenuano le frequenze superiori a f_c . Inoltre, una risonanza può amplificare le frequenze intorno a f_c .
- **Filtri passa-alto (HP):** selezionano le frequenze superiori a f_c e attenuano quelle inferiori, con la possibilità di una risonanza attorno a f_c .
- **Filtri passa-banda (BP):** selezionano le frequenze comprese tra una frequenza di taglio inferiore f_{cl} e una superiore f_{ch} .
- **Filtri bandreject (BR):** attenuano le frequenze comprese tra f_{cl} e f_{ch} , lasciando passare quelle al di fuori di questo intervallo.
- **Filtri all-pass:** permettono il passaggio di tutte le frequenze, ma modificano la fase del segnale in ingresso.
- Il filtro passa-basso con risonanza è molto utilizzato nella computer music per simulare una struttura acustica risonante.
- Il filtro passa-alto è utile per rimuovere frequenze molto basse indesiderate.

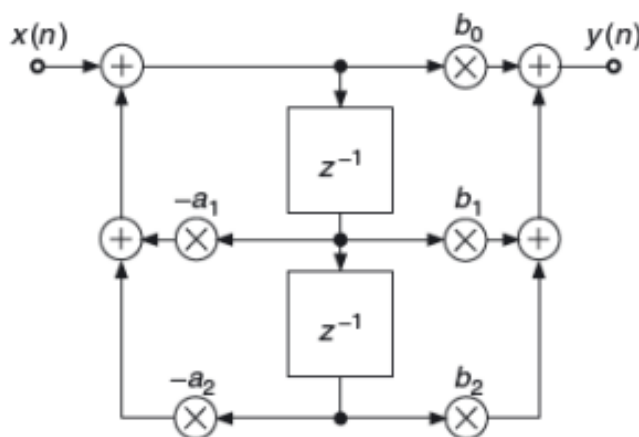
- Il passa-banda può produrre effetti come l'imitazione di una linea telefonica o di una sordina applicata a uno strumento acustico.
- Il bandreject può dividere lo spettro udibile in due bande che risultano percepite come non correlate.

15.3 Filtri canonici

- Esistono diversi modi per implementare un filtro. Il più semplice è il filtro canonico, spesso utilizzato per realizzare filtri del secondo ordine mediante equazioni alle differenze.

$$x_h(n) = x(n) - a_1x_h(n-1) - a_2x_h(n-2)$$

$$y(n) = b_0x_h(n) + b_1x_h(n-1) + b_2x_h(n-2)$$



- A seconda dei coefficienti a e b , si possono ottenere diversi comportamenti del filtro. Da tali coefficienti si ottiene la funzione di trasferimento del sistema.

	b_0	b_1	a_1
Lowpass	$K/(K+1)$	$K/(K+1)$	$(K-1)/(K+1)$
Highpass	$1/(K+1)$	$-1/(K+1)$	$(K-1)/(K+1)$
Allpass	$(K-1)/(K+1)$	1	$(K-1)/(K+1)$

- Impostando $a_2 = b_2 = 0$, il filtro si riduce a un filtro del secondo ordine. Questo può essere utilizzato per implementare un filtro passa-tutto, passa-basso o passa-alto, con i coefficienti forniti in apposite tabelle. Il parametro K dipende dalla frequenza di taglio.
- Nel filtro passa-tutto, il coefficiente K controlla anche la frequenza f_c alla quale si raggiunge uno sfasamento di -90° .
- Per i filtri del secondo ordine, oltre alla frequenza di taglio (o frequenza centrale), è necessario specificare anche il fattore Q , che assume significati diversi a seconda del tipo di filtro:
 - Nei filtri passa-basso e passa-alto, Q controlla l'altezza della risonanza. Per $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, il filtro risulta massimamente piatto fino alla frequenza di taglio. Per valori inferiori di Q , si ha una maggiore attenuazione in banda passante; per valori superiori, si osserva un'amplificazione attorno a f_c .

- Nei filtri passa-banda e bandreject, Q è legato alla larghezza di banda f_b secondo la relazione $Q = \frac{f_c}{f_b}$, ovvero è l'inverso della larghezza di banda relativa $\frac{f_b}{f_c}$.
- Nel filtro passa-tutto, Q controlla anch'esso la larghezza di banda, che in questo caso è definita dai punti in cui si raggiungono $\pm 90^\circ$ di sfasamento, rispetto ai -180° raggiunti in corrispondenza di f_c .
- Sebbene i filtri canonici siano relativamente semplici dal punto di vista concettuale, il calcolo dei loro coefficienti a partire da parametri come la frequenza di taglio e la larghezza di banda può risultare complesso.

	b_0	b_1	b_2	a_1	a_2
Lowpass	$\frac{K^2 Q}{K^2 Q + K + Q}$	$\frac{2K^2 Q}{K^2 Q + K + Q}$	$\frac{K^2 Q}{K^2 Q + K + Q}$	$\frac{2Q \cdot (K^2 - 1)}{K^2 Q + K + Q}$	$\frac{K^2 Q - K + Q}{K^2 Q + K + Q}$
Highpass	$\frac{Q}{K^2 Q + K + Q}$	$-\frac{2Q}{K^2 Q + K + Q}$	$\frac{Q}{K^2 Q + K + Q}$	$\frac{2Q \cdot (K^2 - 1)}{K^2 Q + K + Q}$	$\frac{K^2 Q - K + Q}{K^2 Q + K + Q}$
Bandpass	$\frac{K}{K^2 Q + K + Q}$	0	$-\frac{K}{K^2 Q + K + Q}$	$\frac{2Q \cdot (K^2 - 1)}{K^2 Q + K + Q}$	$\frac{K^2 Q - K + Q}{K^2 Q + K + Q}$
Bandreject	$\frac{Q \cdot (1 + K^2)}{K^2 Q + K + Q}$	$\frac{2Q \cdot (K^2 - 1)}{K^2 Q + K + Q}$	$\frac{Q \cdot (1 + K^2)}{K^2 Q + K + Q}$	$\frac{2Q \cdot (K^2 - 1)}{K^2 Q + K + Q}$	$\frac{K^2 Q - K + Q}{K^2 Q + K + Q}$
Allpass	$\frac{K^2 Q - K + Q}{K^2 Q + K + Q}$	$\frac{2Q \cdot (K^2 - 1)}{K^2 Q + K + Q}$	1	$\frac{2Q \cdot (K^2 - 1)}{K^2 Q + K + Q}$	$\frac{K^2 Q - K + Q}{K^2 Q + K + Q}$

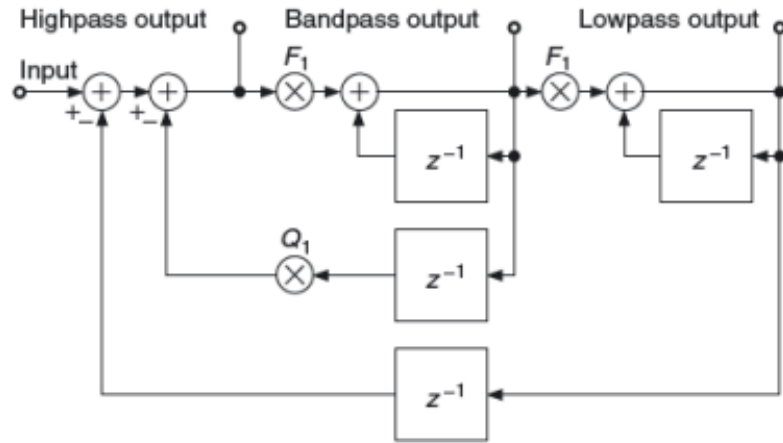
15.4 State Variable Filter

- Un'interessante alternativa alla struttura del filtro canonico è il *filtro a variabili di stato*, che combina filtri passa-basso, passa-banda e passa-alto del secondo ordine, mantenendo la stessa frequenza di taglio f_c e lo stesso fattore di qualità Q .

$$y_l(n) = F_1 y_b(n) + y_l(n-1)$$

$$y_b(n) = F_1 y_h(n) + y_b(n-1)$$

$$y_h(n) = x(n) - y_l(n-1) - Q_1 y_b(n-1),$$



- I coefficienti di sintonizzazione F_1 e Q_1 sono correlati ai parametri f_c e Q .
- Si può dimostrare che le funzioni di trasferimento per i tre tipi di filtro (passa-basso, passa-banda e passa-alto) dipendono dai parametri $r = F_1$ e $q = 1 - F_1 Q_1$.

$$H_l(z) = \frac{r^2}{1 + (r^2 - q - 1)z^{-1} + qz^{-2}}$$

$$H_b(z) = \frac{r \cdot (1 - z^{-1})}{1 + (r^2 - q - 1)z^{-1} + qz^{-2}}$$

$$H_h(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{1 + (r^2 - q - 1)z^{-1} + qz^{-2}},$$

- Questa struttura è particolarmente efficace non solo nel processo di filtraggio, ma soprattutto per la semplicità delle relazioni tra i parametri di controllo e i coefficienti di sintonizzazione.
- È necessario considerare la stabilità del filtro: a frequenze di taglio elevate e per valori di Q molto piccoli, il filtro può diventare instabile.
- Per garantire il funzionamento stabile del filtro a variabili di stato, è utile rispettare il limite di utilizzabilità dato dalla condizione:

$$F_1 < 2 - Q_1$$

- Le proprietà di questo filtro sono state sfruttate in applicazioni creative, ad esempio per produrre glissandi infiniti a partire da suoni naturali, oppure per permettere transizioni fluide tra configurazioni estreme.

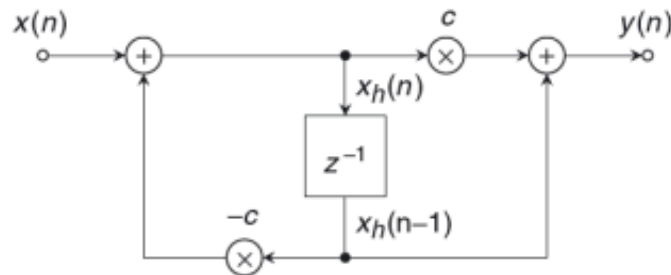
15.5 Filtri all-pass

- Un filtro all-pass ha un comportamento piatto come risposta in frequenza del modulo.
- Può essere descritto come segue:

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

dove $b(s)$ e $a(s)$ sono polinomi in s .

- Il filtro all-pass corrisponde a uno schema a blocchi del tipo:



- Dai filtri all-pass, combinando opportunamente gli elementi, è possibile derivare altre tipologie di filtro.
- La funzione di trasferimento di un filtro all-pass del secondo ordine è data da:

$$A(z) = \frac{-c + d(1-c)z^{-1} + z^{-2}}{1 + d(1-c)z^{-1} - cz^{-2}}$$

$$c = \frac{\tan(\pi f_b/f_s) - 1}{\tan(\pi f_b/f_s) + 1}$$

$$d = -\cos(2\pi f_c/f_s),$$

$$x_h(n) = x(n) - d(1-c)x_h(n-1) + cx_h(n-2)$$

$$y(n) = -cx_h(n) + d(1-c)x_h(n-1) + x_h(n-2).$$

dove ζ è il fattore di smorzamento e ω_n è la frequenza centrale.

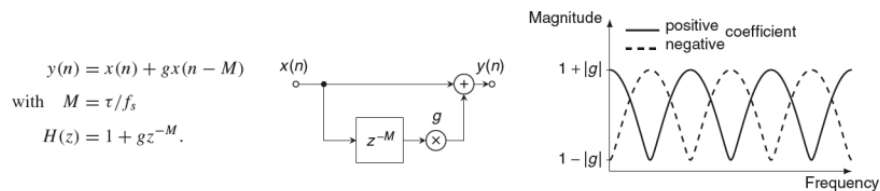
- Il parametro d regola la frequenza centrale e il parametro c la larghezza di banda.
- Gli all-pass del secondo ordine possono essere utilizzati per implementare in maniera efficace filtri passa-banda (BP) e bandreject (BR).

15.6 FIR filters

- I filtri digitali che abbiamo visto in precedenza hanno una risposta all'impulso infinita.
- Al contrario, la risposta all'impulso per i filtri FIR è di durata finita.
- Questi filtri consentono di costruire tipi di filtro sofisticati, dove è necessaria una forte attenuazione delle frequenze indesiderate o la scomposizione del segnale in diverse bande di frequenza.

15.7 FIR Comb filters(DOMANDA CERTA ALL'ESAME)

- Il segnale di ingresso viene ritardato di un determinato tempo. L'effetto sarà udibile solo quando il segnale elaborato viene combinato (aggiunto) al segnale di ingresso, che funge da riferimento. Questo effetto ha due parametri di regolazione:
 - L'entità del ritardo τ .
 - L'ampiezza relativa del segnale ritardato rispetto a quella del segnale di riferimento.

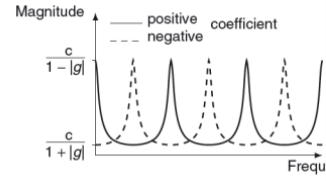
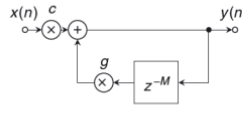


15.8 IIR Comb filters

- Imitando le infinite riflessioni alle due estremità di un cilindro, il filtro comb IIR produce una serie infinita di risposte $y(n)$ a un ingresso $x(n)$.
- Il segnale d'ingresso circola in una linea di ritardo che viene reintrodotta in ingresso.

$$y(n) = cx(n) + gy(n - M), \text{ with } M = \tau/f_s$$

$$H(z) = c/(1 - gz^{-M}).$$



15.9 Universal Comb filters

- La combinazione dei filtri comb FIR e IIR conduce al filtro comb universale.
- Questa struttura di filtro si trasforma in una struttura all-pass nel caso speciale di $-BL = FB$, $FF = 1$, dove il ritardo a un campione z^{-1} è sostituito dal ritardo a M campioni z^{-M} .

15.10 Shelving filters (I order)

- In maniera simile ai filtri LP/HP che possono essere costruiti partendo da degli all-pass, si possono ottenere filtri shelving del primo ordine partendo da all-pass del primo ordine con funzione di trasferimento $A(z)$.
- I parametri di Cutoff boost (C_b) e Cutoff cut (C_c) variano a seconda del tipo di shelving filter desiderato:

• Low Shelve

$$c_B = \frac{\tan(\pi f_c/f_s) - 1}{\tan(\pi f_c/f_s) + 1},$$

$$c_C = \frac{\tan(\pi f_c/f_s) - V_0}{\tan(\pi f_c/f_s) + V_0}$$

• High Shelve

$$c_B = \frac{\tan(\pi f_c/f_s) - 1}{\tan(\pi f_c/f_s) + 1}$$

$$c_C = \frac{V_0 \tan(\pi f_c/f_s) - 1}{V_0 \tan(\pi f_c/f_s) + 1}.$$

15.11 Shelving filters (II order)

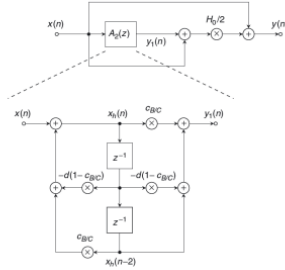
- Per diverse applicazioni, la pendenza del filtro shelving viene ulteriormente aumentata da funzioni di trasferimento di secondo ordine o superiore.
- Esistono diversi approcci per progettare filtri shelving di ordine superiore con un calcolo relativamente semplice dei coefficienti, al costo di strutture di filtro leggermente più complicate.

Table 2.3 Second-order shelving filter design with $K = \tan(\pi f_c / f_s)$ and $V_0 = 10^{G/20}$ [Zöl05].

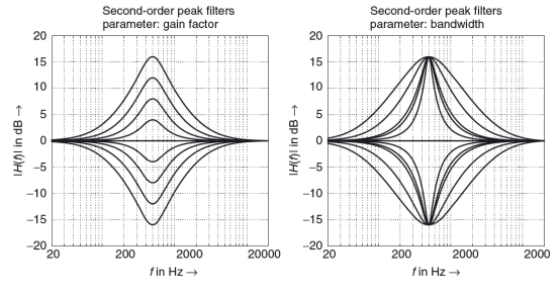
	b_0	b_1	b_2	a_1	a_2
LF boost	$\frac{1+\sqrt{2V_0}K+V_0K^2}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{2(V_0K^2-1)}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{1-\sqrt{2V_0}K+V_0K^2}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{2(K^2-1)}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{1-\sqrt{2}K+K^2}{1+\sqrt{2}K+K^2}$
LF cut	$\frac{V_0(1+\sqrt{2}K+K^2)}{V_0+\sqrt{2V_0}K+K^2}$	$\frac{2V_0(K^2-1)}{V_0+\sqrt{2V_0}K+K^2}$	$\frac{V_0(1-\sqrt{2}K+K^2)}{V_0+\sqrt{2V_0}K+K^2}$	$\frac{2(K^2-V_0)}{V_0+\sqrt{2V_0}K+K^2}$	$\frac{V_0-\sqrt{2V_0}K+K^2}{V_0+\sqrt{2V_0}K+K^2}$
HF boost	$\frac{V_0+\sqrt{2V_0}K+K^2}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{2(K^2-V_0)}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{V_0-\sqrt{2V_0}K+K^2}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{2(K^2-1)}{1+\sqrt{2}K+K^2}$	$\frac{1-\sqrt{2}K+K^2}{1+\sqrt{2}K+K^2}$
HF cut	$\frac{V_0(1+\sqrt{2}K+K^2)}{1+\sqrt{2V_0}K+V_0K^2}$	$\frac{2V_0(K^2-1)}{1+\sqrt{2V_0}K+V_0K^2}$	$\frac{V_0(1-\sqrt{2}K+K^2)}{1+\sqrt{2V_0}K+V_0K^2}$	$\frac{2(V_0K^2-1)}{1+\sqrt{2V_0}K+V_0K^2}$	$\frac{1-\sqrt{2V_0}K+V_0K^2}{1+\sqrt{2V_0}K+V_0K^2}$

15.12 Peak filters

- In maniera analoga, un filtro peak del secondo ordine può essere derivato sfruttando un all-pass del secondo ordine.



$$H(z) = 1 + \frac{H_0}{2} [1 - A_2(z)]$$



15.13 EQ

- A differenza dei filtri passa-basso/alto e passa/elimina-banda, che attenuano lo spettro audio al di sopra o al di sotto di una frequenza di taglio, gli equalizzatori modellano lo spettro audio modificando alcune bande di frequenza mentre altre rimangono inalterate.
- In genere, gli equalizzatori sono costruiti con un collegamento in serie di filtri shelving e di picco del primo e del secondo ordine, controllati in modo indipendente.

15.14 GEQ (equalizzatori grafici)

- L'equalizzatore grafico è uno strumento che consente di regolare in modo indipendente il guadagno di più regioni di frequenza in un segnale audio.
- I comuni equalizzatori grafici possono fornire fino a circa 30 controlli per la manipolazione della risposta in frequenza di ciascun canale audio.
- Strutturalmente, un equalizzatore grafico è un insieme di filtri, ciascuno con una frequenza centrale e una larghezza di banda fisse. L'unico controllo da parte dell'utente è il guadagno di comando, ovvero la quantità di incremento o di taglio in ciascuna banda di frequenza.
- Il guadagno di ciascuna banda di frequenza può essere solitamente regolato entro un intervallo di 12 dB, corrispondente a circa $0.25 < G < 4$ per ciascun filtro.
- Il termine *grafico* si riferisce al fatto che la posizione delle manopole dei cursori può essere intesa come un grafico della risposta in magnitudine dell'equalizzatore.
- Un equalizzatore grafico può essere implementato utilizzando una cascata di filtri equalizzatori o un banco parallelo di filtri passa-banda.
- In un'implementazione a cascata, ogni filtro determina la risposta intorno alla frequenza centrale in base al proprio guadagno (peak filters, guadagno 1 fuori banda).
- In un'implementazione parallela, ogni filtro passa-banda produce alla sua frequenza centrale un guadagno determinato dal guadagno del suo comando (BP filters, guadagno $-\infty$ fuori banda).

Capitolo 16

Effetti basati su DL

16.1 Lista di effetti basati su Delay Line

- Digital Delay
- Reverb
- Chorus
- Flanger
- Vibrato

16.2 Delay Line

- Con il termine Delay Line si intende un buffer di memoria lungo N_{samples} nel quale viene scritto un dato e successivamente viene letto
- Time = distanza tra i puntatori di scrittura e lettura

16.3 Vibrato

Il dato viene letto a diverse velocità così da cambiarne il pitch

16.4 Slapback/Echo/Delay

- **Slapback**(o doubling): $10 < M < 25$ ms
- **Echo**: $M > 50$ ms
- g setta il dry/wet
- **Delay**(simula multiple riflessioni)
- g setta il dry/wet

16.5 Flanger/Chorus

- **Flanger**: $M < 15$ ms, variabile periodicamente (LFO)
- **Chorus**: generato da copie del segnale a pitch leggermente modificati: si usa il delay che genera più vibrato, sommati al segnale diretto
- M1, M2 10-25 ms, diversi tra loro

16.6 Phaser

- L'orecchio umano non è molto sensibile alle differenze di fase, ma questo crea interferenze udibili quando viene mixato con il segnale dry (non processato), creando dei notch.
- Il numero di filtri all-pass (solitamente chiamati stadi) varia a seconda dei modelli; alcuni phaser analogici offrono 4, 6, 8 o 12 stadi.

Riverbero

- La riverberazione naturale è una condizione tipica degli ambienti spazialmente delimitati (stanze, auditorium, chiese, teatri, ecc).
- Ogni ambiente ha una propria e caratteristica riverberazione (si pensi al tipico riverbero di una chiesa o di un cinema).
- In natura, gli ambienti privi di riverbero sono una condizione molto difficile da avere.
- Esistono apposite camere dette anecoiche, le quali sono studiate per eliminare le riverberazioni ambientali.
- In rosso:
 - Il path diretto dalla sorgente all'ascoltatore.
- In blu:
 - Le riflessioni ambientali (riverbero).
- Esistono diverse tipologie di riflessioni a seconda di quanti «rimbalzi» ci sono tra sorgente e ascoltatore.

16.7 Room Impulse Response (RIR)

- La caratterizzazione di un ambiente è un tema molto importante nel Sound Design.
- Ogni ambiente ha il suo tipico riverbero ambientale.
- Modellare correttamente un ambiente, in termini di riverbero, molto spesso è fondamentale al fine di avere un sound design musicale ed efficace.
- Possiamo distinguere differenti «componenti» di un segnale riverberato:
 - Suono diretto (Dry)
 - Early Reflections
 - Late riverberation
 - Decay Rate
 - Predelay (T_0)

16.8 Reverberation Time

- Il Reverberation Time misura il cosiddetto T_{60} , cioè il tempo dopo il quale il segnale di riverbero è attenuato di 60 dB rispetto al suo livello di partenza.
- Il T_{60} , in natura, è funzione di differenti fattori:
 - Dimensioni $W \times L \times H$ dell'ambiente
 - Materiali costruttivi delle pareti (riflettenti e non)
 - Elementi acustici ambientali

16.9 Effetto del pre-delay

- Il pre-delay tra il segnale diretto e la sua replica ha i seguenti effetti dipendenti dal tempo:
 - < 50 ms: Haas effect, o doubling
 - $50 < \text{delay} < 100$ ms: near-echo (prolonged/indistinct)
 - > 100 ms: echo

Artificial Reverberation

- Un campo di lunga durata:
 - Anni '20: spazio acustico vuoto con altoparlante e microfono, riverbero a molla Hammond.
 - Anni '50: riverbero a piastra.
 - 1960s: BBD (Panasonic MN3011 ha taps di uscita multipli in posizioni reciprocamente prime).
 - Schroeder (Bell Labs) introdusse il "Colorless Artificial Reverberation" nel 1961 nell'IRE Trans. on Audio, basato su linee di ritardo e filtri all-pass. Moorer aggiunse un filtro a un polo per il decadimento in funzione della frequenza.
 - Negli anni '70 furono commercializzati diversi riverberi digitali, tra cui il Lexicon Delta T-101 e il Lexicon 224.
 - In seguito sono stati introdotti altri metodi: image-source method (Allen and Berkeley, 1979), Digital waveguides (Smith, 1985), etc.
- Esistono diversi approcci:
 - Digital waveguide mesh
 - Numerical simulations
 - Convolution with measured IR
 - Delay network methods
 - Schroeder
 - Dattorro

16.10 Riverbero a Convoluzione

- La stanza come LTI \rightarrow la sua IR caratterizza perfettamente la stanza (Hp: campo riverberante).
- Se registriamo l'IR, possiamo fare la convoluzione di qualsiasi suono con esso per ottenere il riverbero atteso.

$$y_{\text{rev}}[n] = \sum_{m=0}^M h[m] \cdot x[n-m]$$

- L'IR è una proprietà dell'intero spazio solo se il campo diretto è trascurabile (condizione di campo riverberante) \rightarrow ci sarà sempre un volume (eventualmente grande) dello spazio in cui il campo diretto non è trascurabile.
- Quando il campo diretto non è trascurabile, l'IR dipende dalla distanza e dalla posizione della sorgente e del ricevitore.
- L'implementazione diretta è costosa:
 - L = lunghezza del segnale di ingresso \rightarrow la convoluzione richiede L MUL e $(L-1)$ SUM per ogni campione di uscita.
 - Se M = lunghezza del segnale in ingresso, il segnale in uscita sarà lungo $L+M$ campioni.
- Convoluzione nel tempo = Prodotto in frequenza:

- Se K = bin della FFT = dimensione del frame si ha:
- Costo della FFT: $O(N \log N)$
- K prodotti complessi (4K MUL + 3K SUM)
- Costo dell'IFFT
- Costo computazionale ridotto per K elevati, ma latenza elevata!
- Sono stati proposti molti algoritmi specializzati.

16.11 Riverbero a Convoluzione (Vantaggi e Svantaggi)

- **Vantaggi:**
 - Istantanea perfetta di una stanza in campo riverberante.
 - Concettualmente facile da capire.
- **Svantaggi:**
 - È necessario effettuare molte misure di IR con diverse posizioni di sorgente e ricevitore, selezionandone una.
 - Impossibile cambiare le proprietà della stanza: l'IR è un'istantanea della stanza (cfr. campionamento).
 - Alto costo computazionale (+ compromesso con la latenza).
 - Complesso da ottenere, sono necessari altoparlanti e microfoni costosi.

16.12 Schroeder reverb

• Un feedback comb che emula gli echi ripetuti, che è ciò che ci interessa. • Tuttavia, colora anche lo spettro • Una topologia che introduce echi senza colore spettrale è il ritardo allpass di Schroeder:

16.13 Feedback Delay Network (FDN)

- Introdotta da Gerzon nel 1971-72.
- Parte dall'osservazione che i singoli filtri comb danno una scarsa qualità delle code di riverbero (colorano troppo il segnale se sono troppi pochi).
- Più filtri comb suonano molto bene però quando sono accoppiati, di fatto quando vengono combinati e messi in cross-feedback.
- La matrice di ricombinazione deve avere la proprietà di ortogonalità.
- Si sfruttano le matrici di Hadamard.

$$H_1 = [1]$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_{2^k} = \begin{bmatrix} H_{2^{k-1}} & H_{2^{k-1}} \\ H_{2^{k-1}} & -H_{2^{k-1}} \end{bmatrix} = H_2 \otimes H_{2^{k-1}}$$

- Alcune modifiche alla matrice di Hadamard 4x4 sono state proposte da Stautner e Puckette.

16.14 Feedback Delay Network (FDN) (Approccio “lossless”)

- Un approccio “lossless” per la progettazione di matrici di feedback:
 - **IDEA:** un late reverb IR dovrebbe assomigliare a un rumore a decadimento esponenziale (cfr. con velvet noise).
 - Un buon approccio progettuale consiste nel partire da un prototipo senza perdita (T60 infinito) e lavorare per renderlo un buon generatore di rumore.
 - Regolare i ritardi (mutuamente primi).
 - Esistono diversi metodi per ottenere una mode density uguale.
 - Regolare la matrice di feedback.
 - Una volta ascoltato un rumore omogeneo, i ritardi possono essere regolati per ottenere il giusto tempo di decadimento per ogni banda.

Capitolo 17

Formule pratiche per i coefficienti dei filtri EQ biquad

Tutte le funzioni di trasferimento dei filtri sono derivate da prototipi analogici (che sono mostrati sotto per ciascun tipo di filtro EQ) e sono state digitalizzate usando la Trasformata Bilineare (Bilinear Transform). La distorsione di frequenza (frequency warping) della BLT è stata presa in considerazione sia per la rilocalizzazione della frequenza (il normale "prewarping") sia per la ri-regolazione della larghezza di banda (poiché essa viene compressa nella trasformazione da analogico a digitale).

Partiamo da una funzione di trasferimento biquad definita come:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (\text{Eq 1})$$

Questo mostra 6 coefficienti invece di 5 quindi, a seconda della tua architettura, potresti normalizzare a_0 a 1 e forse anche b_0 a 1 (e raccogliere questo in un coefficiente di guadagno complessivo). Allora la funzione di trasferimento diventa:

$$H(z) = \frac{\frac{b_0}{a_0} + \frac{b_1}{a_0} z^{-1} + \frac{b_2}{a_0} z^{-2}}{1 + \frac{a_1}{a_0} z^{-1} + \frac{a_2}{a_0} z^{-2}} \quad (\text{Eq 2})$$

oppure

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0} \right) \cdot \frac{1 + \frac{b_1}{b_0} z^{-1} + \frac{b_2}{b_0} z^{-2}}{1 + \frac{a_1}{a_0} z^{-1} + \frac{a_2}{a_0} z^{-2}} \quad (\text{Eq 3})$$

L'implementazione più diretta sarebbe la "Forma Diretta 1" (Eq 2):

$$y[n] = \frac{b_0}{a_0} x[n] + \frac{b_1}{a_0} x[n-1] + \frac{b_2}{a_0} x[n-2] - \frac{a_1}{a_0} y[n-1] - \frac{a_2}{a_0} y[n-2] \quad (\text{Eq 4})$$

Parametri definiti dall'utente

- F_s : frequenza di campionamento
- f_0 : frequenza centrale o di taglio (o di metà guadagno per shelf)
- dBgain: solo per i filtri peaking e shelving
- Q: definizione tipica ingegneristica (con aggiustamento per il filtro peakingEQ)
- oppure BW: larghezza di banda in ottave

- oppure S: parametro di pendenza per gli shelving

Variabili intermedie

$$A = \sqrt{10^{\text{dBgain}/20}} = 10^{\text{dBgain}/40} \omega_0 = 2\pi f_0 / F_s$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\sin(\omega_0)}{2Q} & (\text{caso Q}) \\ \sin(\omega_0) \sinh\left(\frac{\ln(2)}{2} \cdot \text{BW} \cdot \frac{\omega_0}{\sin(\omega_0)}\right) & (\text{caso BW}) \\ \frac{\sin(\omega_0)}{2} \sqrt{(A + 1/A)(1/S - 1) + 2} & (\text{caso S}) \end{cases}$$

Coefficienti per ciascun tipo di filtro

Passa basso (LPF)

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1 - \cos(\omega_0)}{2} \\ b_1 &= 1 - \cos(\omega_0) \\ b_2 &= \frac{1 - \cos(\omega_0)}{2} \\ a_0 &= 1 + \alpha \\ a_1 &= -2 \cos(\omega_0) \\ a_2 &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

Passa alto (HPF)

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1 + \cos(\omega_0)}{2} \\ b_1 &= -(1 + \cos(\omega_0)) \\ b_2 &= \frac{1 + \cos(\omega_0)}{2} \\ a_0 &= 1 + \alpha \\ a_1 &= -2 \cos(\omega_0) \\ a_2 &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

Passa banda (BPF) - guadagno costante nella skirt

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{\sin(\omega_0)}{2} = Q\alpha \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= -\frac{\sin(\omega_0)}{2} = -Q\alpha \\ a_0 &= 1 + \alpha \\ a_1 &= -2 \cos(\omega_0) \\ a_2 &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

Passa banda (BPF) - guadagno di picco a 0 dB

$$\begin{aligned}b_0 &= \alpha \\b_1 &= 0 \\b_2 &= -\alpha \\a_0 &= 1 + \alpha \\a_1 &= -2 \cos(\omega_0) \\a_2 &= 1 - \alpha\end{aligned}$$

Notch

$$\begin{aligned}b_0 &= 1 \\b_1 &= -2 \cos(\omega_0) \\b_2 &= 1 \\a_0 &= 1 + \alpha \\a_1 &= -2 \cos(\omega_0) \\a_2 &= 1 - \alpha\end{aligned}$$

Filtro all-pass (APF)

$$\begin{aligned}b_0 &= 1 - \alpha \\b_1 &= -2 \cos(\omega_0) \\b_2 &= 1 + \alpha \\a_0 &= 1 + \alpha \\a_1 &= -2 \cos(\omega_0) \\a_2 &= 1 - \alpha\end{aligned}$$

Peaking EQ

$$\begin{aligned}b_0 &= 1 + \alpha A \\b_1 &= -2 \cos(\omega_0) \\b_2 &= 1 - \alpha A \\a_0 &= 1 + \alpha/A \\a_1 &= -2 \cos(\omega_0) \\a_2 &= 1 - \alpha/A\end{aligned}$$

Low Shelf

$$\begin{aligned}b_0 &= A \left[(A + 1) - (A - 1) \cos(\omega_0) + 2\sqrt{A}\alpha \right] \\b_1 &= 2A \left[(A - 1) - (A + 1) \cos(\omega_0) \right] \\b_2 &= A \left[(A + 1) - (A - 1) \cos(\omega_0) - 2\sqrt{A}\alpha \right] \\a_0 &= (A + 1) + (A - 1) \cos(\omega_0) + 2\sqrt{A}\alpha \\a_1 &= -2 \left[(A - 1) + (A + 1) \cos(\omega_0) \right] \\a_2 &= (A + 1) + (A - 1) \cos(\omega_0) - 2\sqrt{A}\alpha\end{aligned}$$

High Shelf

$$\begin{aligned}b_0 &= A \left[(A+1) + (A-1) \cos(\omega_0) + 2\sqrt{A}\alpha \right] \\b_1 &= -2A [(A-1) + (A+1) \cos(\omega_0)] \\b_2 &= A \left[(A+1) + (A-1) \cos(\omega_0) - 2\sqrt{A}\alpha \right] \\a_0 &= (A+1) - (A-1) \cos(\omega_0) + 2\sqrt{A}\alpha \\a_1 &= 2[(A-1) - (A+1) \cos(\omega_0)] \\a_2 &= (A+1) - (A-1) \cos(\omega_0) - 2\sqrt{A}\alpha\end{aligned}$$

Trasformata Bilineare e Sostituzioni

La trasformata bilineare (con compensazione della distorsione di frequenza) effettua la seguente sostituzione:

$$s \leftarrow \frac{1}{\tan(\omega_0/2)} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Utilizzando le seguenti identità trigonometriche:

$$\tan(\omega_0/2) = \frac{\sin(\omega_0)}{1 + \cos(\omega_0)} \quad \text{e} \quad \tan^2(\omega_0/2) = \frac{1 - \cos(\omega_0)}{1 + \cos(\omega_0)}$$

otteniamo le seguenti sostituzioni:

$$\begin{aligned}1 &\leftarrow \frac{1 + \cos(\omega_0)}{1 + \cos(\omega_0)} \cdot \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}} \\s &\leftarrow \frac{1 + \cos(\omega_0)}{\sin(\omega_0)} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{1 + \cos(\omega_0)}{\sin(\omega_0)} \cdot \frac{1 - z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}} \\s^2 &\leftarrow \frac{1 + \cos(\omega_0)}{1 - \cos(\omega_0)} \cdot \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}\end{aligned}$$

Il fattore:

$$\frac{1 + \cos(\omega_0)}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}$$

è comune a tutti i termini sia al numeratore che al denominatore, può quindi essere raccolto e successivamente eliminato dalle sostituzioni, portando a:

$$\begin{aligned}1 &\leftarrow \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + \cos(\omega_0)} \\s &\leftarrow \frac{1 - z^{-2}}{\sin(\omega_0)} \\s^2 &\leftarrow \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \cos(\omega_0)}\end{aligned}$$

Inoltre, tutti i termini (sia numeratore che denominatore) possono essere moltiplicati per un fattore comune $\sin^2(\omega_0)$, risultando infine nelle seguenti sostituzioni:

$$1 \leftarrow (1 + 2z^{-1} + z^{-2}) \cdot (1 - \cos(\omega_0))$$

$$s \leftarrow (1 - z^{-2}) \cdot \sin(\omega_0)$$

$$s^2 \leftarrow (1 - 2z^{-1} + z^{-2}) \cdot (1 + \cos(\omega_0))$$

$$1 + s^2 \leftarrow 2 \cdot (1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2})$$

Le formule dei coefficienti biquad derivano dalle espressioni sopra dopo una piccola semplificazione.