2018학년도 가톨릭대학교 모의논술전형

-의예과-

문항 1 **제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (80점)**

(ㄱ) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-a^2)a^n$ 에 대하여 이 급수가 수렴하는 실수 a 의 집합을 I 라고 하자.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 집합 I 에 대하여 함수 $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ 는 다음과 같다. (단, $\mathbb{R}$ 는 실수 전체의 집합)

$$f(x)=\begin{cases}(1-x^2)x+(1-x^2)x^2+(1-x)^2x^3+\cdots & (x\in I)\\ x & (x\notin I)\end{cases}$$

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x)=f(1-x^{2018})$$

논제 1. (40점) 제시문 (ㄴ)의 함수 $f(x)$의 그래프를 그리고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (40점) 제시문 (ㄷ)의 함수 $g(x)$에 대하여 극한 $\lim_{x\rightarrow0} g(x)$을 조사하고 그 근거를 논술하시오.

문항 2

제시문 (ㄱ)과 (ㄴ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (70점)

(ㄱ) 자연수 n에 대하여 포물선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{A}(n,\ n^2)$에서의 접선 l이 x축과 만나는 점의 x좌표를 a_n이라고 하자.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 점 $\mathrm{A}(n,\ n^2)$과 접선 l에 대하여 점 A에서 l에 접하고 동시에 x축과 접하는 원의 중심을 $\mathrm{B}(x_n, y_n)$이라고 하자. (단, $x_n > a_n$)

논제 1. (50점) 제시문 (ㄱ)과 (ㄴ)에 주어진 a_n과 x_n을 각각 n에 관한 식으로 각각 나타내고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (20점) 제시문 (ㄱ)과 (ㄴ)에 주어진 a_n과 x_n에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-4a_n^2}{a_n}$을 구하고 그 근거를 논술하시오.

문항 3 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (70점)

(ㄱ) **[사건의 독립과 종속]** 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$일 때, 두 사건 A와 B는 서로 독립이라고 한다. 한편 두 사건 A와 B가 서로 독립이 아닐 때 두 사건 A와 B는 서로 종속이라고 한다.

(ㄴ) **[확률의 곱셈정리]** 두 사건 A, B에 대하여 다음이 성립한다. (단, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$)

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$$

(ㄷ) **[독립사건의 곱셈정리]** 두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 다음과 같다. (단, $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$)

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

(ㄹ) 1에서 n까지의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때 택한 수가 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라고 한다.

논제 1. (20점) 제시문 (ㄹ)에서 $n=10$일 때 사건 A와 사건 B가 서로 독립인지 종속인지를 말하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (50점) 제시문 (ㄹ)의 사건 A와 사건 B가 서로 독립인 자연수 n중에서 10부터 100까지의 모든 짝수들의 합을 구하고 그 근거를 논술하시오.

문항 4

제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (80점)

(ㄱ) 실수 a에 대하여 정의역이 $[a, 2\pi]$인 함수 $f(t)$를 다음과 같이 정의하자. (단, $0 \le a \le 2\pi$)

$$f(t) = \int_a^t (\sin u + \cos u)\,du$$

또한, 이 함수 $f(t)$가 최댓값을 갖는 t의 값 중 가장 작은 값을 $g(a)$ 라고 하자.

(ㄴ) **[삼각함수의 덧셈정리]** 실수 α, β에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

(ㄷ) **[삼각함수의 합성]** 실수 α, β에 대하여 다음이 성립한다.

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)\ \left(\text{단, } \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

논제 1. (40점) 제시문 (ㄱ)의 함수 $g(a)$는 구간 $[0, \frac{3}{4}\pi]$에서 일정한 값 c를 갖는다. c 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2. (40점) 구간 $[0, 2\pi]$에서 제시문 (ㄱ)의 함수 $g(a)$의 그래프를 그리고 그 근거를 논술하시오.

2018학년도 모의논술 I
자연계열 문제

수학

[문제 1] 원탁 테이블 3개가 있는 점심 뷔페 식당이 있다. 테이블 번호가 1부터 3까지 순서대로 매겨져 있고, 각 테이블당 최대 4명의 손님이 앉을 수 있다. 손님들은 모두 한 명씩 순서대로 각자 들어와서 다음과 같은 규칙으로 테이블을 선택한 후 식사를 한다.

- 첫 번째로 들어오는 손님은 무조건 1번 테이블에 앉는다.
- n번째로 들어오는 손님은 비어있는 테이블들 중 번호가 가장 빠른 테이블에 $\frac{3}{n+2}$의 확률로 앉고, 이미 손님이 앉아 있는 테이블에는 $\frac{c}{n+2}$의 확률로 선택해서 앉는다. 여기서 c는 그 테이블에 이미 앉아 있는 손님의 수를 나타낸다. (단, $n = 2, 3$)

오늘 점심 시간에 서로 알지 못하는 사이인 3명의 손님이 연이어 도착한 후 각각 순서대로 들어와서 식사를 한다고 가정하자. 오늘 이 식당에서 점심 시간에 사용될 테이블 수의 기댓값을 구하시오. [20점]

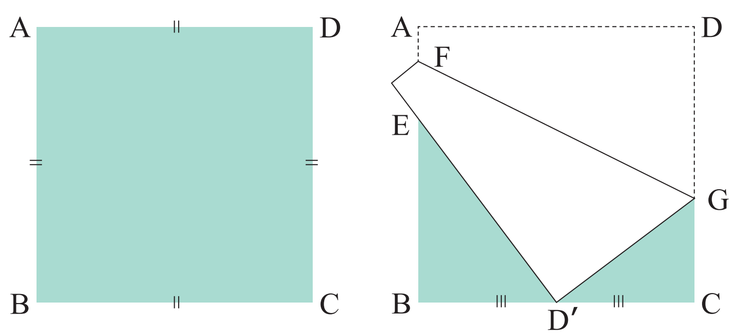
[문제 2] **다음을 읽고 문제에 답하시오.**

- 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$를 한 점 또는 한 직선에 대하여 대칭인 점 $P'(x', y')$로 옮기는 것을 대칭이동이라고 한다. 점 $P(x, y)$의 x축에 대한 대칭이동은 $(x, y) \to (x, -y)$, y축에 대한 대칭이동은 $(x, y) \to (-x, y)$, 원점에 대한 대칭이동은 $(x, y) \to (-x, -y)$와 같이 나타낸다. 일반적으로 점 $P(x, y)$를 직선 $ax + by + c = 0$에 대하여 대칭이동한 점 $P'(x', y')$가 있을 때, 직선 PP'는 직선 $ax + by + c = 0$과 수직으로 만나고 그 만나는 점은 선분 PP'의 중점이다.

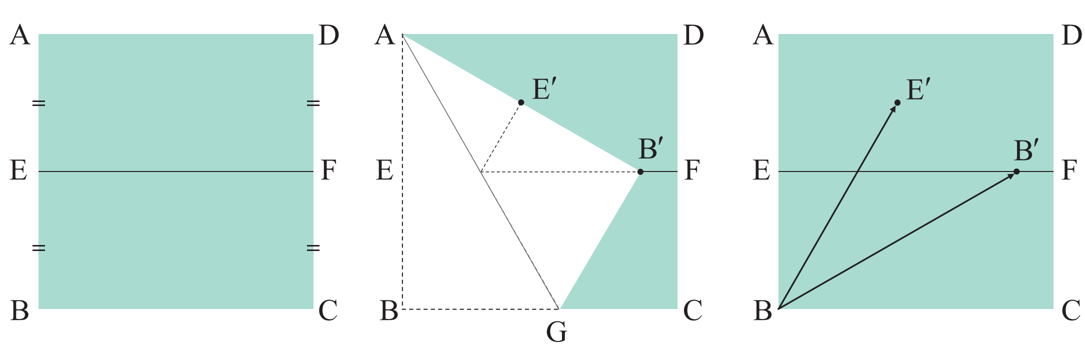
- 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ $(0 \le \theta \le \pi)$일 때 내적은 다음과 같이 정의한다.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

[문제 2-1] **한 변의 길이가 1인 정사각형 종이 ABCD가 있다. 꼭짓점 D가 변 BC의 중점 D'와 일치하도록 접었을 때 선분 AF와 선분 BE의 길이를 논리적으로 구하시오. [10점]**



[문제 2-2] **한 변의 길이가 1인 정사각형 종이 ABCD가 있다. 이 종이를 반으로 접었다 펴서 변 AB의 중점 E와 변 CD의 중점 F를 연결한 선분 EF가 생기도록 자국을 내었다. 꼭짓점 B가 선분 EF 위에 놓이도록 아래 그림과 같이 접어 점 E'와 B'를 표시하고 다시 폈다. 즉 삼각형 ABG와 삼각형 AB'G는 합동이고, E와 E', B와 B'는 선분 AG에 대해 대칭이다. 벡터 $\overrightarrow{BE'}$와 벡터 $\overrightarrow{BB'}$가 이루는 각 E'BB'를 구하는 과정을 점의 대칭이동을 이용하여 논리적으로 제시하시오. [15점]**



[문제 3] **다음을 읽고 문제에 답하시오.**

- 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}=1$이다.

- 함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(a) \le f(x)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소라 하고, $f(a)$를 극솟값이라고 한다.

[문제 3-1] **타원** $n^2x^2+(n+1)^2y^2=1$ **위의 두 점** $\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{2n}, \frac{\sqrt{3}}{2(n+1)}\right)$, $\mathrm{Q}_n\left(-\frac{1}{2n}, \frac{\sqrt{3}}{2(n+1)}\right)$**에서의 두 접선의 교점을** R_n**이라 하자. 삼각형** $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$**의 넓이를** b_n**이라 할 때** $\sum_{n=1}^{10} b_n$**의 값을 구하시오. [10점]**

[문제 3-2] $\int_0^t \left(3^n x^3 - 3^n x^2 + 9n\right) dx = 0$**을 만족시키는 0보다 큰 상수** t**가 존재하도록 하는 자연수** n**의 최솟값을 구하시오. [15점]**

2018학년도 모의논술 II
자연계열 문제

수학

[문제 1] 영희는 두 단계로 구성된 활쏘기 게임에 참여할 수 있는 기회를 얻었다. 게임은 다음과 같은 규칙으로 진행된다.

- 1단계에서는 10m 거리에서 활쏘기가 시행되며, 명중하게 되면 2단계로 넘어가서 20m 거리에서 다시 시행된다. 화살을 쏘는 것은 독립시행이고, 총 3개의 화살을 쏠 수 있다. 단, 한번 사용한 화살은 다시 사용하지 못한다고 가정한다.
- 1단계에서 성공하면 성공할 때까지의 시도 횟수에 따라 상금을 받고 2단계로 넘어가게 된다. 1단계의 상금은 다음과 같으며, 각 화살의 명중 확률은 0.7이다.

성공할 때까지의 시도 횟수	1	2	3
상금(원)	30,000	20,000	10,000

- 2단계에서는 총 3개의 화살 중 1단계에서 사용하고 남은 화살을 쏘며 명중 개수에 따라 상금을 받는다. 2단계의 상금은 다음과 같으며, 각 화살의 명중 확률은 0.6이다.

명중 개수	0	1	2
상금(원)	0	10,000	20,000

영희가 이 게임에 참여할 때, 받을 수 있는 상금의 기댓값을 구하시오. [20점]

[문제 2] **다음을 읽고 문제에 답하시오.**

- 함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌 구간에서 연속일 때
  $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$
- 두 함수 $f : X \rightarrow Y,\ g : Y \rightarrow Z$의 합성함수 $g \circ f$는 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$로 정의한다.
- 집합에 속하는 모든 원소들이 가지는 공통된 성질을 제시하여 집합을 나타내는 방법을 조건제시법이라고 한다.
- 집합 A의 원소가 유한 개일 때, 집합 A의 원소의 개수를 $n(A)$로 나타낸다.

[문제 2-1] **자연수 k에 대하여 수열 a_k를 $a_k = \int_{-k+1}^{k} (x^3 - x + 1)\,dx$로 정의할 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오. [10점]**

[문제 2-2] **집합 $E_k = \left\{ x \,\middle|\, \sin\left(k\pi \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) + \frac{1}{2k} = 0 \right\}$에 대하여, $1 \le n(E_k) \le 10$을 만족시키는 자연수 k를 모두 구하시오. [15점]**

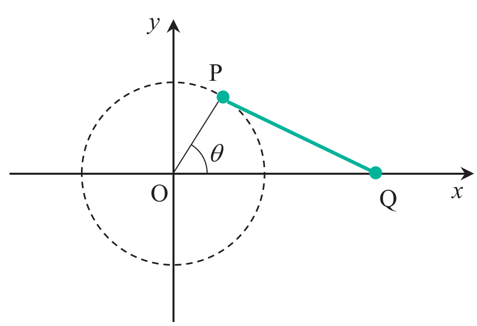
[문제 3] **다음을 읽고 문제에 답하시오.**

- 좌표평면 위에서 한 곡선 위의 점 P의 좌표를 (x, y)라고 할 때, x와 y를 각각 $x = f(t)$, $y = g(t)$인 함수의 꼴로 나타낼 수 있다. 이때 t를 x, y의 매개변수라고 한다.
- 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표를 x라고 하면 x는 시각 t에 대한 함수이므로 $x = f(t)$로 놓을 수 있다. 함수 $f(t)$의 시각 t에서의 순간 변화율

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

를 점 P의 시각 t에서의 순간 속도 또는 속도라고 한다.
- 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $a\sin\theta + b\cos\theta$ $(a \neq 0, b \neq 0)$를 $r\sin(\theta + \alpha)$의 꼴로 나타내는 것을 삼각함수의 합성이라고 한다. (단, $r > 0$, $0 \leq \alpha < 2\pi$)

[문제 3-1] **다음 그림과 같이 점 $\mathrm{P}(x, y)$는 원점을 중심으로 하는 단위원 위에서 움직이고, 시각 t에서 $\theta = 2t$이다. 점 Q는 양의 x축 위에서 움직이고, 이 두 점을 잇는 선분 PQ의 길이는 3으로 일정하다. 시각 $t = \dfrac{\pi}{12}$일 때, 점 Q의 순간 속도를 구하시오. [10점]**



[문제 3-2] **다음 그림과 같이 점 $\mathrm{R}(x, y)$는 중심이 $(0, 1)$인 단위원 위에 있고, 점 S는 $(\sqrt{3}, 0)$에 있다. 원점을 O라 할 때 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OR}} + \overrightarrow{\mathrm{OS}}$의 길이가 최대가 되는 R의 좌표를 구하시오. [15점]**