경희대학교

2018학년도 온라인

모의논술고사 문제지(자연계열-수학)

[7월21일(금) - 7월23일(일)]

지원학부(과) (   )   수험번호 [| | | |]   성 명 (   )

<유의사항>

1. 수학은 필수이며, 과학은 물리, 화학, 생명과학 중 1과목을 선택하여 답안지에 체크하고 답안을 작성하시오.
2. 제목은 쓰지 마시고 특별한 표시를 하지 마시오.
3. 제시문 속의 문장을 그대로 쓰지 마시오.
4. 답안작성과 정정은 반드시 본교에서 지급한 필기구를 사용하시오.
5. 본교에서 지급한 필기구를 사용하지 않았거나, 답안지에 특별한 표시를 한 경우에는 감점 또는 0점 처리합니다. (예: 감사합니다. 등)
6. 답안 정정 시에는 두줄을 긋고 작성하며, 수정액 등을 사용한 경우에는 0점 또는 감점 처리합니다.
7. 답안 작성은 답안지 인쇄된 부분을 이용하여 과목당 1면 이내로 작성하시오.(수학은 답안지 앞면, 과학은 답안지 뒷면 기재)
8. **자연계열 문제지는 총 4장 8쪽입니다.**(수학 1장, 과학(물리, 화학, 생명과학) 각 1장 씩)

Ⅰ. 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.(60점)

[가]

첫째항부터 차례대로 일정한 수를 더하여 만든 수열을 등차수열이라 하고, 그 일정한 수를 공차라고 한다. 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항은 $a_n = a+(n-1)d$이다. 그리고 이 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면 $S_n = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$이다. 특히, 임의의 자연수 n에 대하여 1부터 자연수 n까지의 합은 첫째항이 1이고 공차가 1인 등차수열의 제n항까지의 합으로 생각할 수 있으므로 $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$이다.

[나]

임의의 두 각 x와 y의 삼각함수를 이용하여 각 $x+y$, $x-y$의 삼각함수를 나타내는 방법을 삼각함수의 덧셈정리라 하며 사인함수의 덧셈정리는

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y,\ \sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

이다. 마찬가지로 코사인함수의 덧셈정리는

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,\ \cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

이며, 사인과 코사인함수의 덧셈정리를 이용하면 탄젠트함수의 덧셈정리

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y},\ \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\tan y}$$

를 얻을 수 있다.

[다]

각 θ에 대한 두 삼각함수 $f(\theta)=\sin\theta$와 $g(\theta)=\cos\theta$는 각각 모든 실수 θ에서 연속함수이므로 임의의 실수 a에 대하여

$$\lim_{\theta\to a}\sin\theta = \sin a,\quad \lim_{\theta\to a}\cos\theta = \cos a$$

이다. 또한 함수 $h(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$는 0이 아닌 실수 θ에서 연속이므로 0이 아닌 실수 a에 대하여

$$\lim_{\theta\to a}\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\sin a}{a}\text{ 이다.}$$

한편 $a=0$인 경우에도 함수의 극한과 대소 관계에 대한 성질을 이용하여 그 극한이 존재하며

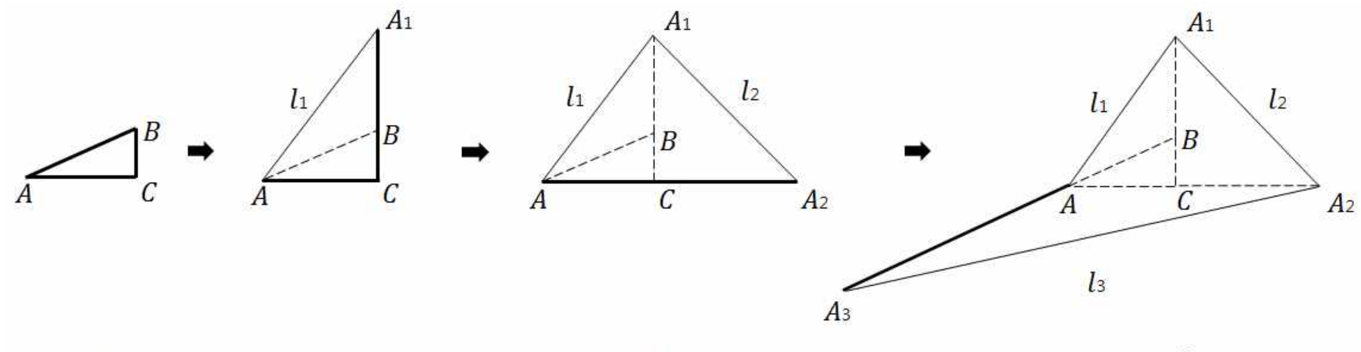
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

임을 알 수 있다. 비슷한 방법으로 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$ 역시 확인할 수 있다.

<뒷면에 계속>

[논제 I] 제시문 [가], [나], [다]를 읽고 다음 질문에 답하시오.

(그림 1)에서 삼각형 ABC의 둘레의 길이와 같은 길이의 실의 한쪽 끝을 점 A에 고정시키고 시계 반대방향으로 팽팽하게 한 바퀴 감았다. (그림 2)에서와 같이 삼각형 ABC와 같은 평면 위에서 실을 팽팽한 상태로 유지하면서 실을 풀어 실의 다른 한쪽 끝점이 선분 BC의 연장선위에 처음 위치했을 때 실의 끝점의 위치를 A_1, 선분 AA_1의 길이를 l_1이라 한다. 같은 방법으로 실을 계속 풀어 (그림 3)에서와 같이 실의 끝점이 선분 AC의 연장선위에 처음 위치했을 때 실의 끝점의 위치를 A_2, 선분 A_1A_2의 길이를 l_2이라 한다. 같은 방법으로 실을 계속 풀어 실의 끝점이 선분 AB 의 연장선위에 다시 위치했을 때 실의 끝점의 위치를 A_3, 선분 A_2A_3의 길이를 l_3이라 하고 이때 $L_3 = l_1 + l_2 + l_3$라 하자 (그림 4).

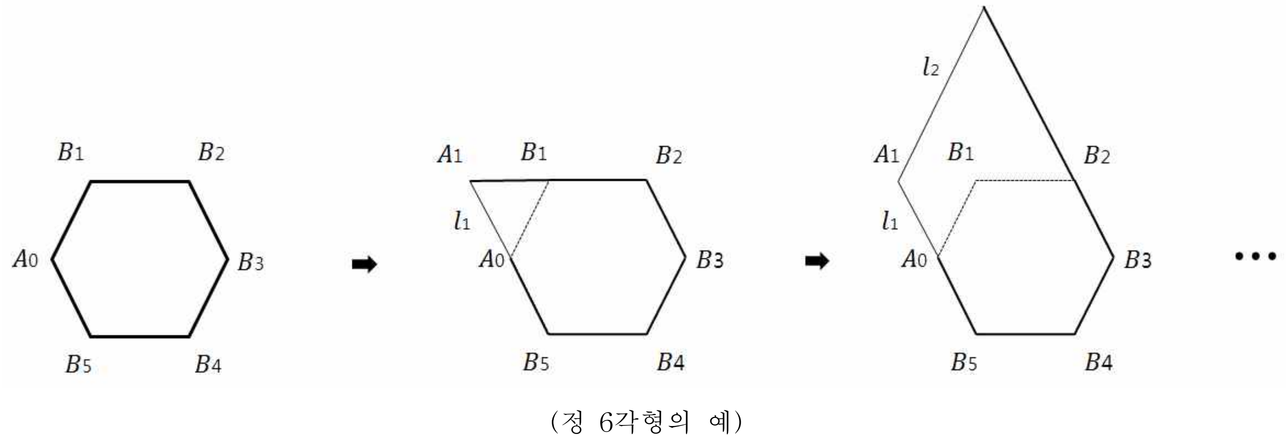


(그림 1) (그림 2) (그림 3) (그림 4)

(1) 각 ACB의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이고 각 BAC의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이며 선분 AB의 길이가 $2(\overline{AB}=2)$인 삼각형 ABC에 대하여 L_3을 구하고 그 과정을 논술하시오. (15점)

(2) 삼각형 ABC가 반지름의 길이가 $r(>0)$인 원에 내접하는 정삼각형일 때, L_3를 구하고 그 과정을 논술하시오. (15점)

(3) 반지름의 길이가 $r(>0)$인 원에 내접하는 정 n각형 $A_0B_1B_2\ldots B_{n-1}$에 대하여 정 n각형의 둘레의 길이와 같은 길이의 실의 한쪽 끝을 점 A_0에 고정하고 시계 반대방향으로 팽팽하게 한 바퀴 감았다. 실을 팽팽한 상태로 유지하면서 실을 풀어 실의 다른 한쪽 끝점이 선분 B_1B_2의 연장선위에 처음 위치했을 때 실의 끝점의 위치를 A_1, 선분 A_0A_1의 길이를 l_1이라 한다. 같은 방법으로 실을 계속 풀어 실의 다른 한쪽 끝점이 선분 B_2B_3의 연장선위에 처음 위치했을 때 실의 끝점의 위치를 A_2, 선분 A_1A_2의 길이를 l_2이라 한다. 이와 같은 과정을 계속 반복하여 각각의 $A_2,\ldots,A_{n-1}$과 $l_2,\ldots,l_{n-1}$을 정의 할 수 있으며, 실의 끝점이 선분 A_0B_1 의 연장선위에 다시 위치했을 때 실의 끝점의 위치를 A_n, 선분 $A_{n-1}A_n$의 길이를 l_n이라 하자. $a=\sin\frac{\pi}{n}$라 할 때 자연수 $n(\geq 3)$에 대하여 $L_n=\sum_{k=1}^{n} l_k$를 a에 관한 식으로 표현하고 그 과정을 논술하시오. (20점)



(정 6각형의 예)

(4) 반지름의 길이가 $r(>0)$인 원이 있다. 원의 둘레의 길이와 같은 길이의 실의 한쪽 끝을 원위의 한 점에 고정하고 실을 시계 반대방향으로 한 바퀴 감았다. 원과 같은 평면 위에서 팽팽한 상태로 유지하면서 실을 풀어 실 전체가 직선이 될 때 까지 실의 다른 끝점이 움직인 거리를 L이라 할 때, L을 구하고 그 과정을 논술하시오. (10점)

<수학 끝>

경희대학교

2018학년도 온라인

모의논술고사 문제지(의학계-수학)

지원학부(과) (   )   수험번호 | | | | | | 성 명 (   )

<유의사항>

1. **수학은 필수이며, 과학은 물리, 화학, 생명과학 중 1과목을 선택하여 답안지에 체크하고 답안을 작성하시오.**
2. 제목은 쓰지 마시고 특별한 표시를 하지 마시오.
3. 제시문 속의 문장을 그대로 쓰지 마시오.
4. 답안 작성과 정정은 반드시 본교에서 지급한 필기구를 사용하시오.
5. 본교에서 지급한 필기구를 사용하지 않았거나, 답안지에 특별한 표시를 한 경우에는 감점 또는 0점 처리합니다. (예: 감사합니다 등)
6. 답안 정정 시에는 두줄을 긋고 작성하며, 수정액 등을 사용한 경우에는 감점 또는 0점 처리합니다.
7. 답안 작성은 답안지 인쇄된 부분을 이용하여 과목당 1면 이내로 작성하시오.
8. **의학계열 문제지는 총 3장 6쪽입니다.**

Ⅰ. 다음 제시문과 그림을 참조하여 논제에 답하시오. (60점)

[가] 일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다. 이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \text{ 또는 } n\to\infty \text{일 때 } a_n \to \alpha$$

와 같이 나나낸다. 여기서 ∞는 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호로 무한대라고 읽는다.
어떤 수열이 수렴하지 않을 때, 그 수열은 발산한다고 한다.

[나] 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$를 사용하여 연결한 식

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

을 급수라고 하며, 이것을 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 같이 나타낸다. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n, 즉

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 이 급수의 제n항까지의 부분합이라고 한다. 이 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때, 즉 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$일 때, 이 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$는 S에 수렴한다고 한다. 이때 S를 급수의 합이라 하고, 기호로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S \quad \text{또는} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

와 같이 나타낸다. 한편, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 발산할 때, 이 급수는 발산한다고 한다.

[다] 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구해 보자. 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

이고, 양변에 r을 곱하면

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

이다. (1)에서 (2)를 변끼리 빼면

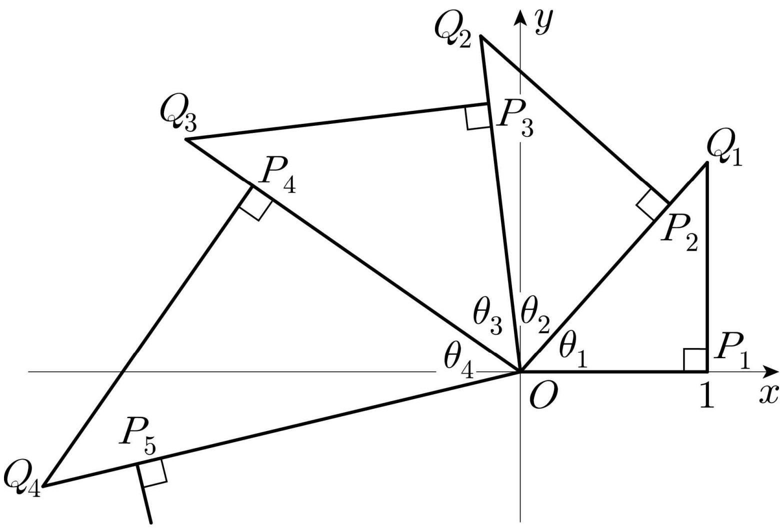
$$(1-r)S_n = a - ar^n = a(1-r^n)$$

이므로 S_n은 다음과 같다.

$r \neq 1$일 때, $\qquad S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r = 1$일 때, (1)에서 $\quad S_n = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n\text{개}} = na$

<뒷면에 계속>



[그림 1]

[그림 1]과 같이 선분 OP_1의 길이 $\overline{OP_1}$는 1이고, 모든 자연수 n에 대하여 $\angle OP_nQ_n$은 직각이고, 점 P_{n+1}은 선분 OQ_n에 놓여 있는 좌표평면의 점 P_n과 점 Q_n을 생각하자. (단, $n \geq 1$) 여기서, 기호의 편의를 위하여, $\angle P_nOQ_n = \theta_n$, $\overline{OP_{n+1}}/\overline{OQ_n} = \alpha_n$, $\overline{OP_n} = p_n$, $\overline{OQ_n} = q_n$, $\overline{P_nQ_n} = t_n$이라고 표시하자.

[논제 I-1] **θ_n이 모두 상수 θ로 일정하고 α_n도 모두 상수 α로 일정할 때, p_n을 θ, α, n에 대한 식으로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \alpha$) (5점)**

[논제 I-2] **모든 자연수 n에 대하여 $\alpha_n = \frac{n}{n+1}$이고 $t_n = \frac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n}$일 때, $\sin^2\theta_n$을 n에 대한 식으로 나타내시오. 또한 $\lim_{n\to\infty} \sin^2\theta_n$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (20점)**

[논제 I-3] **모든 자연수 n에 대하여 α_n이 상수 $\sqrt{a}$로 일정하고, 어떤 상수 r에 대하여 t_n이 $\sqrt{r^n}$일 때, p_n^2을 n에 대한 식으로 나타내고, 그 근거를 논술하시오. (단, $r > 0$, $a > 0$) (20점)**

[논제 I-4] **[논제 I-3]에서 구한 식을 이용하여 $\lim_{n\to\infty} \sin^2\theta_n$이 수렴하는 a와 r의 범위를 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15점)**

<수학 끝>